Kopf und Zahl

JOURNAL

des **Vereins für Lerntherapie und Dyskalkulie e.V.**
in Zusammenarbeit mit den **Mathematischen Instituten zur Behandlung der Rechenschwäche**
5. AUSGABE, 2006

www.dyskalkulie.de

Hans-Dieter Gerster,
Pädagogische Hochschule Freiburg, Juni 2005

Vorteile nicht zählender Rechenstrategien

Die Lernpsychologie sagt uns, dass es im Wesentlichen drei Grundformen gibt, in denen mathematisches Wissen mental repräsentiert wird: die enaktive (auf Handlungen mit konkretem Material basierende), die ikonische (auf bildhaften Vorstellungen basierende) und die symbolische (auf Zeichen und Sprache basierende) Darstellung.

Ihre große Kraft entfaltet **Visualisierung** erst dann, wenn sie die beiden anderen Grundformen miteinander verbindet. Im Fazit der PISA-Studie lesen wir: „Im herkömmlichen Unterricht – nicht nur in der Grundschule – ist das verständnisfördernde Potenzial von visuellen Darstellungsformen noch lange nicht ausgereizt.“ Wegen ihres statischen Charakters eignen sie sich besonders für die Diskussion und Reflexion unterschiedlicher Lösungsstrategien.

Nicht zählende Rechenstrategien lassen sich für alle vier Rechenoperationen anhand geeignet gegliederter quantitativer Zahldarstellungen leicht entdecken, verstehen und begründen. Diese fördern zugleich ein flexibles Zahlverständnis, insbesondere das Verständnis von Zahlen als Zusammensetzungen aus anderen Zahlen und flexibles, vorteilhaftes Rechnen.

Alle Aufgaben des kleinen **Einsundeins und Einsminuseins** lassen sich mit den nicht zählenden Rechenstrategien „Zehnersumme“, „Verdoppeln“, „Fünfer-Vorteil“, „Zehner-Vorteil“ und den zugehörigen Nachbaraufgaben (Verdoppeln plus Eins, Verdoppeln plus Zwei, „Zehnervorteil bei der Neun“ und „Zehnervorteil bei der Acht“ leicht abrufbar im Langzeitgedächtnis einprägen, verstehen und begründen: **weiter Seite 2**

Dr. Hans-Dieter Gerster, em. Prof. für Mathematik und ihre Didaktik. Institut für Mathematik und Informatik und ihre Didaktiken. Pädagogische Hochschule Freiburg.

Rechenschwäche und Gymnasium
„Das schließt sich aus“ !??

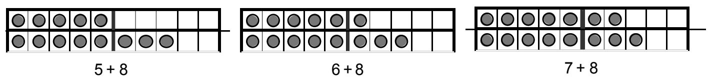
I. Offenbarungseid Algebra:
„Wenn wirklich nichts mehr geht!“ **(Seite 8)**

II. Ergebnisse eines Screenings einer 7ten Gymnasialklasse in Brandenburg **(Seite 5)**

INHALT

Fortsetzung Artikel Titelseite (Hans- Dieter Gerster, Vorteile nicht zählbarer Rechenstrategien)

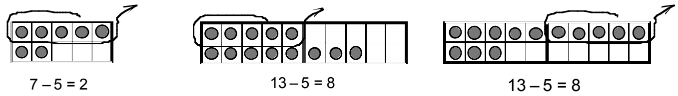
Hier einige Beispiele zum „Fünfer-Vorteil“, bei dem (wie schon nach Adam Riese) mit Fünfer-Portionen gerechnet wird. Dabei wird benutzt, dass die „8“ sich zusammensetzen lässt aus einer „5“ und einer „3“. Die Ergebnisse der Aufgaben 5 + 8, 6 + 8 und 7 + 8 lassen sich dann in der Veranschaulichung unmittelbar ablesen,



In symbolischer Notation:

$$5 + \underbrace{8}_{5\quad 3} = 13 \qquad \underbrace{6}_{5\quad 1} + \underbrace{8}_{5\quad 3} = 14 \qquad \underbrace{7}_{5\quad 2} + \underbrace{8}_{5\quad 3} = 15$$

Entsprechendes gilt für das Subtrahieren:



Derartige Beispiele erleichtern zugleich die Ablösung von einseitigen Zahlvorstellungen: Zahl als Position in der Zahlwortreihe oder als Anfangsstück der Zahlwortreihe.

Für das kleine **Einmaleins und Einsdurcheins** sind die „kurzen Einmaleinsreihen“ (also das 1-, 10-, 5- und das 2fache einer Zahl) die Ankerpunkte, von denen aus die restlichen Aufgaben jeder Reihe durch Bilden der Nachbaraufgaben rasch und sicher abgeleitet werden können.

Ableitungsstrategien nutzen Vorwissen und verstärken dieses somit. Sie machen Beziehungen zwischen Zahlensätzen bewusst, verbessern so die Fähigkeit Fakten zu erinnern und reduzieren zugleich den Memorierstoff. Wenn ich beispielsweise weiß, dass 3 + 5 = 8 ist, dann weiß ich auch, wie viel ich von 3 bis 8 oder von 5 bis 8 ergänzen muss und kenne den Unterschied zwischen 3 bzw. 5 und 8, also die Differenzen 8 – 3 bzw. 8 – 5.

Nicht zählende Rechenstrategien haben neben *kognitionspsychologischen* auch *assoziationspsychologische* Vorteile:

- Weil Aufgabe und Ergebnis rasch aufeinander folgen, gelingt das Lernen von Assoziationen besser (Reiz-Reaktions-Lernen durch enge zeitliche Paarung).
- Nichtzählend rechnende Kinder sind nach einer Einarbeitungsphase erheblich schneller und v. a. sicherer als zählend rechnende, haben also mit ihren Strategien ständig Erfolgserlebnisse (Lernen durch Verstärkung).
- Nichtzählend rechnende Kinder sind motiviert, ihr Repertoire auswendig gewusster Zahlensätze zu vergrößern, weil sie diese zum Ableiten (Herstellen von Beziehungen zwischen Zahlensätzen) brauchen. Sie bauen also einen zunehmenden Vorrat an bekannten Fakten auf, um neues Faktenwissen zu erzeugen.

Heidrun Claus / Jochen Peter
Finger, Bilder, Rechnen
63 Seiten Arbeitsbuch und
98 farbige Bildkarten,
kartoniert
EUR 29,90
ISBN 3-525-46226-3

Finger, Bilder, Rechnen

Förderung des Zahlverständnisses im Zahlraum bis 10

„Jetzt lass doch mal die Finger weg!“ So, oder so ähnlich hören es Grundschulkinder häufig von Lehrern und Eltern, wenn sie ihre Finger beim Rechnen einsetzen, um jegliches Kopfrechnen zu vermeiden. Gegen alles Abzählen von Operationen, der falschen Illustration von Wert, Größe, Zahl durch die Anordnung der Finger haben Heidrun Claus und Jochen Peter mit „Finger, Bilder, Rechnen“ ein neues Förderprogramm entwickelt. Dieses bezieht sich bewusst auf alle Finger-basierten falschen Rechenstrategien, indem es die eigenen Finger gezielt in gegenteiliger Funktion als Lernmittel nutzbar macht. Zahleigenschaften, Zahlbeziehungen und Rechenoperationen werden hier in rationeller Weise erfahrbar gemacht Das Ziel des Programms ist die Förderung des Zahl- und Rechenverständnisses im Zahlraum bis 10. Dabei wird der Erwerb eines mengenorientierten Rechenverständnisses gefördert.

Finger gehören zu den ältesten Rechenwerkzeugen des Menschen. Im Förderprogramm „Finger, Bilder, Rechnen“ werden die eigenen Finger durch farbige Bildkarten als Arbeits- und Lernmittel ergänzt. Auf diesen Karten wird auch das Zehnerfeld eingeführt, ein in 10 Felder aufgeteiltes Rechteck, mit dessen Hilfe die unterschiedlichen Zerlegungsmöglichkeiten der Zahl 10 dargestellt und nachvollzogen werden können. Heidrun Claus und Jochen Peter haben sowohl sonderpädagogische Konzepte als auch neuere mathematikdidaktische Untersuchungsergebnisse in ihr Förderprogramm aufgenommen. Es wird seit mehreren Jahren erfolgreich in der lerntherapeutischen Praxis eingesetzt.

Heidrun Claus, Gymnasiallehrerin, ist Lerntherapeutin mit dem Arbeitsschwerpunkt Entwicklungs- und Lernförderung im Bereich Mathematik.

Dr. Jochen Peter, Dipl.-Psych., seit 1984 in der Entwicklungs- und Lernförderung insbesondere bei Störungen des Schriftspracherwerbs sowie im mathematischen Lernbereich tätig. Beide sind Mitbegründer des Institutes für Mathematisches Lernen – Praxis für Dyskalkulietherapie Hamburg.

Kopf und Zahl beziehen

Solange es Zeit und Geld zulassen, kann „Kopf und Zahl“ kostenlos bezogen werden. Dafür brauchen wir Ihre Adresse. Diese wird ausschließlich für diesen Zweck gespeichert. Ein dringliches Anliegen unsererseits ist es allerdings, möglichst Ihrer Email-Adresse habhaft zu werden. Denn ein email-Versand erspart uns erhebliche Portokosten. Unsere email-Adresse ist: **verein@dyskalkulie.de**

Impressum:
Herausgeber: Verein für Lern- und Dyskalkulietherapie.
Redaktion: Alexander v. Schwerin (verantwortlich), Beate Lampke, München
Christian Busebaum, Elke Focke, Düsseldorf; Wolfgang Hoffmann, Dortmund
Rudolf Wieneke, Berlin
Layout und Satz: Illustration + Grafik, Tanja Gnatz, Gröbenzell

Wer darüber hinaus den Verein für Lerntherapie und Dyskalkulie e.V. mit Spenden bedenken will, dem sei herzlich gedankt, eine Spendenquittung (ab 20 EUR) zugesagt und versichert, dass dieses Geld in dieser Arbeit sicher gut angelegt ist.

Verein für Lerntherapie und Dyskalkulie
HypoVereinsbank • Kto.-Nr: 1640175938 • BLZ 700 202 70

Eignen sich standardisierte Lernprogramme zur Förderung rechenschwacher Kinder ?

Dr. Angela Vogel, Dr. Elke Focke, IML Düsseldorf

Spätestens am Ende der 2. Klasse stellt sich heraus, dass bei Kindern mit anhaltenden Rechenschwierigkeiten schulische Interventionsmaßnahmen nicht mehr ausreichend sind, so dass die Schule auf das Engagement der Eltern bei der Förderung ihrer Kinder angewiesen ist. Immer häufiger wird dann, wenn die mathematischen Probleme einfach durch vermehrtes Üben nicht in den Griff zu kriegen sind, und die Frustrationstoleranz bei Kindern und Eltern angesichts anhaltender Misserfolgserlebnisse abnimmt, im Einsatz von Lernprogrammen ein Lösungsweg gesehen. Vor allem für computergestützte Lernprogramme scheint vieles zu sprechen: eine Entlastung der Eltern bei der Belastung des täglichen Übens, fachgerechtere und didaktische Arbeitsanweisungen und Erklärungen, vor allem die Motivation der Kinder durch Üben am Computer, nicht zuletzt der relativ geringe Kostenaufwand.

Der Einsatz von Computern wird zunehmend auch und gerade als Möglichkeit zur Förderung bei Rechenschwäche empfohlen und offenbar auch wahrgenommen; die Anzahl von Lern- und Übungssoftware steigt stetig. Dies ist Grund genug, auf die Grenzen und auf die Gefahren derartiger Übungsverfahren hinzuweisen – insbesondere dann, wenn sie bei Kindern eingesetzt werden, die unter Dyskalkulie leiden.

Der Erfolg von Fördermaßnahmen zur Behebung einer Rechenschwäche ist nämlich von Kriterien abhängig, die standardisierte Förderkonzepte außer Acht lassen und außer Acht lassen müssen, da sie sich der Welt des Programmierens verschließen. Beispielhaft seien hier drei Aspekte skizziert.

1. „ Kein Plan vom Kind “

Eine Rechenschwäche zu beheben ist unmöglich, ohne sich zu Beginn ausreichende Rechenschaft über die individuelle Lernausgangslage zu verschaffen, über die Art und Weise der Fehlertypen und deren zu Grunde liegenden Fehlvorstellungen, mit anderen Worten ohne eine qualitative Diagnostik. Nicht jedes rechenschwache Kind hat die gleichen Probleme: Aus unterschiedlichen arithmetischen Vorstellungswelten dieser Kinder ergeben sich auch unterschiedliche inadäquate Rechenwege.

Um die zu diagnostizierenden falschen Vorstellungen von der Mathematik, die sich bspw. in bestimmten Zählstrategien äußern, durch eine richtige und vor allem nachvollziehbare Einsicht in den sachlogischen Zusammenhang der Lerninhalte zu ersetzen, kommt keine „helfende Hand“ umhin, sich mit den vorfindlichen subjektiven Algorithmen auseinanderzusetzen, diese zu thematisieren, d.h. den betroffenen Kindern Angebote zu machen, die ihnen den Zugang öffnen, letztlich selber nachzuvollziehen zu können, warum ihre bisherigen Rechenwege inadäquat sind.

Dies können Lernprogramme ihrer Intention, aber auch ihrer Eigenart nach nicht leisten: Sie setzen sich nicht mit der spezifischen Eigenart der kindlichen Fehler auseinander, sondern halten statt dessen fest, wie viele Fehler gemacht worden sind. Das ist mehrfach fatal. Denn entgegen einem weit verbreiteten Irrtum manifestieren sich Rechenschwierigkeiten überhaupt nicht notwendigerweise in falschen Ergebnissen, so dass nicht auszuschließen ist, dass mit der fehlerlosen Beendigung einer Lernsequenz genau die falschen, z.B. zählende Rechenstrategien perfektioniert wurden.

Macht ein Kind Fehler, so teilt ihm das Lernprogramm mit, dass, nicht aber was es falsch gemacht hat. Auch wenn mittlerweile fast jedes Lernprogramm eine Hilfe-Taste auf der Bildschirmoberfläche aufweist, sind diese Hilfen mangelhaft. Hilfestellungen wie „Achte ganz genau auf den Text!“ oder das Vorrechnen einer Beispielaufgabe helfen rechenschwachen Kindern nicht weiter, weil sie sich einfach angehalten sehen, im Katalog ihrer auswendig gelernten Schemata ein anderes zu wählen.

2. Keine pädagogisch-psychologische Sensibilität

Aufgrund dauernder Misserfolgserlebnisse, die rechenschwache Kinder erleiden und zu deren Grundlage sie keinen Zugang haben, ist eine pädagogisch-psychologische Sensibilität im Umgang mit ihren Schwierigkeiten unabdingbar. Andernfalls werden längst vorhandene Selbstzweifel und eine daraus resultierende Lernunlust - trotz gegenteiliger Absicht - verstärkt und zementiert.

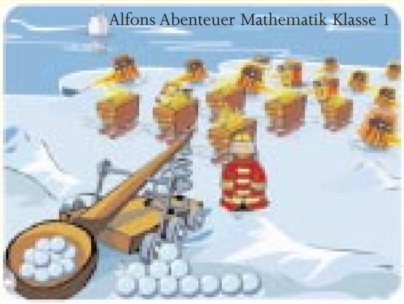
Deshalb ist es wichtig, in welcher Form und mit welchen Worten auf falsche Antworten eingegangen wird. Kommentare (wie z.B. „Verflixt, das war ein Fehlschlag!“oder „Man kommt erst weiter, wenn man die Aufgabe gelöst hat!“ oder „Das war nun wirklich nicht richtig!“) wecken oder beflügeln ohne sachliche Erklärung bei Kindern den Glauben, mal wieder versagt zu haben. Auch vermutlich nett gemeinte Äußerungen wie „Hey, keiner hat es gesehen!“ legen eher den Schluss nahe, man müsse Fehler verbergen.

Völlig unqualifiziert sind die moralisch gehaltenen Fehlerkommentierungen in Lernprogrammen, die rechenschwachen Kindern Unwillen, mangelnden Eifer, Unkonzentriertheit oder Ähnliches unterstellen:„Du musst dich einfach mehr anstrengen!“ oder „Hallo Schlafmütze!“ oder „Das geht bestimmt noch schneller!“. Derartige Urteile liegen bei rechenschwachen Kindern völlig quer zur Sachlage, da sie ja gerade für die Verfolgung ihrer mathematisch inadäquaten Lösungsstrategien (z.B. lange Zählwege, Reproduktion auswendig gelernter Lösungen)

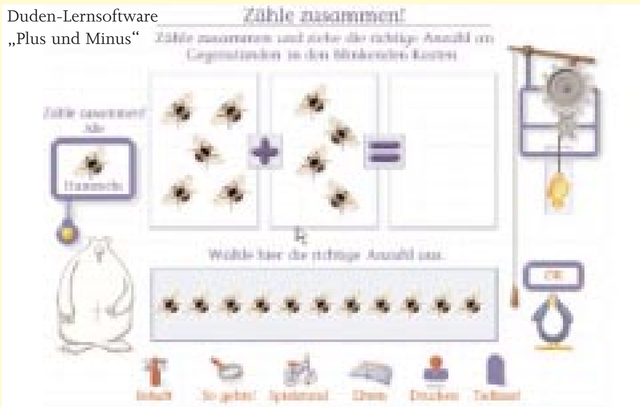
ein Mehrfaches an Aufmerksamkeit und Zeit aufwenden und dabei verständlicherweise schnell ermüden. Und wenn solche Urteile die Sachlage nicht treffen, können sie nur dazu taugen, alle Selbstzweifel zu verstärken und die Orientierung am eigenen anhaltenden Misserfolg zu fixieren - wenn es nicht einmal mit dem Computer klappt.
All diese pauschalen Kommentare sind nicht dazu angetan, Kinder in ihren Bemühungen zu unterstützen, in „Mathe“ bessere Ergebnisse zu erzielen. Auch hier macht sich geltend, dass Lernprogramme Fehler und Lösungswege nicht differenziert bewerten und deshalb den Kindern auch keine inhaltlich begründeten positiven Rückmeldungen geben können. Mit dem Bemühen um Fehlerreduktion allein ist hier also kein Blumentopf zu gewinnen.

3. Mathematikdidaktische Schwächen

Neben den genannten immanenten Schwachstellen weisen viele Lernprogramme zusätzlich mathematikdidaktische Schwächen auf, die von anderen Schülern gar nicht bemerkt, gerade bei rechenschwachen Kindern zu Irritationen führen müssen. Was die Aufbereitung der Lerninhalte betrifft, sind zahlreiche Lernprogramme mangelhaft konzipiert, was an zwei Beispielen verdeutlicht werden soll:
Anhand des Lernprogramms „Alfons Abenteuer Mathematik Klasse1“ soll gezeigt werden, wie eine Darbietung Kinder verleiten kann, falsche Strategien – in diesem Fall das zählende Rechnen – einfach weiter zu verfolgen. In einer Lernsequenz dieses Programms sollen Hitzemonster mit Schneebällen beschossen werden, die vorher von dem Kind in eine Wurfmaschine gelegt werden müssen. Dabei soll das Kind die Anzahl der Hitzemonster ermitteln und genau die gleiche Anzahl von Schneebällen in die Wurfmaschine legen, damit jedes Hitzemonster genau von einem Schneeball angeschossen werden kann.


Alfons Abenteuer Mathematik Klasse 1

Es ist zu vermuten, dass mit dieser Lernsequenz die 1:1-Zuordnung (Korrespondenz) erarbeitet werden soll.
Dabei geht es nach Piaget darum, die Gleichheit von Mengen zu erkennen, indem einem Element der einen Menge genau ein Element einer zweiten Menge zugeordnet wird – gerade ohne zu zählen. Im Lernprogramm ist es jedoch gar nicht möglich, diese Zuordnung nichtzählend zu lösen, da die Schneebälle nicht direkt auf die Hitzemonster gezogen werden können, sondern erst in die Wurfmaschine gelegt werden müssen. So muss das Kind als erstes die Anzahl der Hitzemonster ermitteln. Da diese Monster völlig unübersichtlich angeordnet sind, kann der Lerner dabei nur zählend vorgehen. Danach muss das Kind die richtige Anzahl Schneebälle in die Wurfmaschine legen. Weil die Schneebälle ebenfalls ungeordnet neben- und übereinander herumliegen, muss das Kind erneut die richtige Anzahl abzählen. In dieser Übung wird das Kind also gleich zweimal ermutigt, zählend vorzugehen, wenn es die Aufgabe lösen möchte. Weiterhin ist zu bemerken, dass mit dieser Übung der Zahlenraum auf 20 erweitert worden ist, so dass das Kind 18 Hitzmonster und 18 Schneebälle abzählen muss, was erhebliche Konzentrationsleistung fordert. Im Verhältnis zu dem Lerneffekt ist die aufzubringende Zeit und Konzentration zur Lösung dieser Aufgabe unverhältnismäßig.
Eine fragwürdige Aufarbeitung des Operationsverständnisses findet sich in der Duden-Lernsoftware „Plus und Minus“. Eine qualifizierte Förderung muss auf der Grundlage eines sachgerechten Anzahlverständnisses, das die Mengeninklusion und Zerlegbarkeit von Zahlen einschließt, die mathematischen Operationen der Addition und der Subtraktion behandeln. Dies leistet die Duden-Lernsoftware, die häufig auch in Einrichtungen zur Behebung einer Dyskalkulie zum Einsatz kommt, nur sehr unzureichend.
Das Lernprogramm bietet irreführende mengenhandelnde Veranschaulichungshilfen an, was im Folgenden belegt werden soll. In der Lernsequenz „Zähle (sic!) zusammen“ bekommt das Kind folgende Aufgabenstellung: „Zähle zusammen und ziehe die richtige Anzahl an Gegenständen in den blinkenden Kasten“. Im oberen Bildschirmbereich sind drei Kästchen zu sehen, das erste und das zweite Kästchen sind durch ein Pluszeichen abgetrennt, das zweite und das dritte Kästchen durch ein Gleichheitszeichen.



Duden-Lernsoftware
„Plus und Minus“

Nun sieht das Kind bspw. in den ersten beiden Kästchen 5 und 4 Hummeln und soll die richtige Hummelanzahl in das leere, blinkende Kästchen ziehen. Dafür steht im unteren Bildschirmbereich eine Vielzahl von Hummeln zur Verfügung. Hier wechseln Darstellung und Veranschaulichung zwischen der Mengendarstellung und der Zifferndarstellung, weil neben abgebildeten Hummeln auch Rechenzeichen (+;=) auftreten. Eine Addition, die mengenhandelnd ausgeführt werden soll, bezieht sich lediglich darauf, dass zu einer Teilmenge eine weitere Teilmenge hinzukommt. Das Rechenzeichen *darf in dieser Darstellung nicht mehr auftreten*, da das Kind gerade begreifen soll, dass in der Handlung selber die mathematische Operation enthalten ist, d. h. eben Plusrechnen bedeutet, dass etwas hinzukommt.

Das Verständnis mathematischer Operationen beinhaltet das Wissen darum, dass diese Operationen nicht ausschließlich in Ziffernschreibweise existieren, sondern auch durch Hinzulegen und Wegnehmen von Elementen ausgedrückt werden können. Jedoch handelt es sich um ein „entweder – oder". Dieser Grundgedanke wird in der Lerneinheit nicht gefördert. Im Gegenteil wird durch das Festhalten an den Rechen- und Gleichheitszeichen die symbolische Ebene in den Vordergrund gerückt. Weil die meisten förderungsbedürftigen Kinder im mathematischen Lernbereich Rechnen nicht mit Mengen verbinden, die in Ziffernschreibweise ausgedrückt sind, muss diesem lückenhaften und einseitigen Verständnis mit sachgerechten Veranschaulichungshilfen entgegengewirkt werden - ganz anders bei Kindern, denen es an Übung fehlt. Resultat obiger Darstellung ist ein weiterer Fehler: Die Mengen, in diesem Beispiel Hummeln, werden in ihren beiden Teilmengen und ihrer Gesamtmenge, also doppelt, dargestellt. Löst das Kind die Aufgabe 5+4=9 richtig und zieht 9 Hummeln in das blinkende Kästchen, sieht es anschließend tatsächlich 18 Hummeln. Trotz richtiger Berechnung ist die Darstellung irreführend, weil nicht zu einer Teilmenge von 5 eine Teilmenge von 4 Elementen hinzugekommen ist, die nun zusammen als Menge von 9 Elementen vorliegen, sondern neben den beiden Teilmengen eine andere, neue Menge dargestellt wird. Der entscheidende Punkt, dass sich die Gesamtmenge aus dem Zusammenfügen der beiden Teilmengen ergibt, wird verfehlt.
Die beiden Beispiele verdeutlichen, dass mangelhafte Darstellungen mathematischer Zusammenhänge für Kinder mit richtigem Mengen- und Zahlverständnis keine weiteren Probleme bedeuten müssen, bei rechenschwachen Kindern aber Missverständnisse verstärken oder sogar befördern können, die sie dann erfahrungsgemäß wieder durch unsachgemäße Zählstrategien zu kompensieren versuchen.

Fazit

Abschließend ist festzuhalten: Der Einsatz standardisierter Lernprogramme/-software ist nur dann sinnvoll, wenn es lediglich darum geht, Kindern ein den schulischen Unterricht vertiefendes Übungsverfahren anzubieten, wobei allerdings auf die sachlich korrekte Darbietung zu achten ist.
Im Falle einer diagnostizierten Dyskalkulie halten wir ihren Einsatz für äußerst problematisch, wenn nicht sogar für kontraproduktiv: Ihre Anwendung kann bei rechenschwachen Kindern zu einer Perfektionierung subjektiver Lösungsstrategien führen, mit denen sie früher oder später den schulischen Anforderungen – in der Regel mit der Einführung erweiterter Zahlenräume – nicht mehr gewachsen sind. Dann zeigt sich, dass alle „Mühen und Kosten" die unerwünschten schulischen Resultate vielleicht etwas hinausgeschoben, letztlich aber wenig erbracht haben.

Rechenschwäche am Gymnasium gibt es nicht !?

Eine vorläufige Bilanz:
Lösungshäufigkeiten in ausgewählten Aufgaben in einem 7.-Klasse-Screening an einem brandenburgischen Gymnasium nach den Kategorien „Richtig" oder „Falsch"

1. Aufgabe

Aufgabenstellung: Berechne das Wechselgeld. Du kaufst eine Ware im Werte von 10 Euro und 87 Cent und zahlst mit einem 100-Euro-Schein. Die Verkäuferin hat nicht genug Wechselgeld und möchte einen Euro zusätzlich. Wie viel bekommst du zurück, wenn du ihr den zusätzlichen Euro gibst?

richtige Lösung: 10,8% falsche Lösung: 89,2%

2. Aufgabe

Aufgabenstellung: Bitte addiere 4,8 m und 2,1 km.

richtige Lösung: 10,8% falsche Lösung: 89,2%

3. Aufgabe

Aufgabenstellung: Wie viel Gramm sind 9 kg und 1 g?

richtige Lösung: 37,8% falsche Lösung: 62,2%

4. Aufgabe

Aufgabenstellung: Drücke einen Bruch als Dezimalbruch aus 1/8m =

richtige Lösung: 43,2% falsche Lösung: 56,8%

5. Aufgabe

Aufgabenstellung: Die Entfernung von Berlin-Friedrichstraße nach Hamburg-Hauptbahnhof beträgt 286 km. Rechne die Strecke in m um.

richtige Lösung: 56,7% falsche Lösung: 43,3%

6. Aufgabe

Aufgabenstellung: Wie viele Viertel-Stücke haben 2,5 Kuchen?

richtige Lösung: 32,4% falsche Lösung: 67,6%

(Davon völlig „schräge" Lösungen: 10,8%.
Dies waren Ergebnisse wie: 1,25; 16,5; 2, 1/2)

7. Aufgabe

Aufgabenstellung a) Ein Auto fährt mit einer Durchschnittsgeschwindigkeit von 120 km/Stunde. Wie lange braucht es für einen Kilometer?

richtige Lösung: 10,8% falsche Lösung: 89,2%

Aufgabenstellung b) Wie lange braucht es für 60 km?

richtige Lösung: 29,7% falsche Lösung: 70,3%

Kommentar:

Misst man Grundschulen daran, Schüler auf die Bewältigung von Lebens- und Berufssituationen vorzubereiten, zeigt diese Zusammenstellung der Lösungshäufigkeiten ein kritisches Ausmaß einer Fehlentwicklung, das weit über die in PISA erhobenen Daten hinausgeht. Während PISA von einer Größenordnung von etwa 25% Risiko-Rechnern in allen Schularten ausging, zeigt sich hier, dass die Anzahl mindestens – und dies bei der vermeintlichen Elite – verdoppelt werden muss. Ausgebildete „grundschulische" Kompetenz im o. g. Sinne, kann man nur bei einer Minderheit (10 – 15%) voraussetzen. Insofern weist diese Zusammenstellung noch einmal den erweiterten, kollektiven, aber zu individualisiereden Förderbedarf der 7. Klassen nach[1]. **Rudolf Wieneke,** ZTR Berlin

[1] Wir werden im Rahmen eines ausführlichen Artikels noch einmal genauer auf die einzelnen Aufgabenstellungen und auf die Defizite und Fehler bei den einzelnen Lösungen eingehen.

8 – 7 = 1 Dann ist ja wohl alles verstanden, oder?

Wie qualitative Fehleranalyse so manche Überraschung offenbart

von **Dr. Michael Wehrmann,** Institut für Mathematisches Lernen Braunschweig

Beschäftige ich mich näher mit dem mathematischen Verständnis eines Kindes, will ich gern unter die Oberfläche der Ergebnisse blicken – der falschen ebenso wie der richtigen. Da könnte man einwenden, wenn alles richtig ist, muss man doch nicht weiter nachbohren. Doch, will ich erwidern, auch richtige Ergebnisse können auf die abenteuerlichste Weise – und vor allem auch ohne jegliches Zahlverständnis – entstehen. Gerade dem Erkunden des Zustandekommens von den Rechenergebnissen kommt daher in der Förderdiagnostik eine große Bedeutung zu.

Ein Beispiel, das wohl jeder kennt, ist das offene Fingerzählen. 8 – 7: acht Finger werden von Lara ausgestreckt, sie werden sogar einzeln abgezählt, und dann werden nacheinander leise zählend sieben davon wieder eingeklappt. Meist bleibt bei ihr tatsächlich ein Finger stehen. „Eins!“ verkündet sie mir stolz das Ergebnis. Zufrieden bin ich damit nicht, weil die Zahlen sich für Lara lediglich als eine Zahlwortreihe darstellen, die Finger haben dabei nur die Funktion der Zählhilfe beim Abgehen dieser Zahlwortreihe rückwärts, als eine Eins-zu-Eins-Zuordnung von Zahlname und Finger. Lara nimmt den Sachgehalt von Aufgaben als schematische Zähloperationen wahr. Die erste Zahl ist ihr Zählausgangspunkt, die zweite Zahl gibt an, wie viele Schritte sie zu zählen hat. Das Pluszeichen bedeutet für sie „hochzählen“, das Minuszeichen „zurückzählen“. Bei ihr ist der Übergang vom „Fingerzählen“ zum „Rechnen“ nicht vollzogen, mit einem Anzahlverständnis operiert sie nicht.

Etwas vertrackter wird die Sache, wenn die Finger gar nicht (mehr) offen benutzt werden, weil es dem Kind irgendwann einmal verboten wurde – aus der irrigen Annahme heraus, das dies das Rechenverständnis befördere. Dann ist es wichtig, nachzufragen. „Rechne mir doch mal bitte laut vor!“ lautet meine Frage, wenn ich nach der Methode des lauten Denkens vorgehe.

Und ist das Ergebnis nun zwei, hat sich das Kind dann einfach nur verzählt, war unaufmerksam? Zumeist nicht. Wenn ich einmal genauer nachfrage, was denn eigentlich „8 – 7“ bedeute, bekomme ich oft interessante Auskünfte: „Die erste Zahl sagt mir, wo ich loszählen muss“, erklärt mir Tim, „die zweite Zahl sagt mir, wie weit ich zählen muss.“ Diese Zähl-Vorschrift resultiert bei Tim in Folgendem: „8, 7, 6, 5, 4, 3, 2“. Bei der Acht geht´s los und sieben Schritte werden gezählt. Der „Zählausgangspunkt“ wird von Tim geradezu wörtlich genommen. Hier sehe ich, dieser Verzähler um eins gehorcht bei ihm einer systematischen Logik.

Geschuldet ist dies einem sog. *nominalistischen* Zahlverständnis: Tim kennt die Zahlnamen und ihre Reihenfolge auswendig, verbindet sie aber mit keinerlei quantitativer Vorstellung. Im Alltag dienen diese Zahlnamen für ihn als Bezeichnungen, die rein willkürlich gewählt sind, wie die Ziffern einer Telefonnummer oder die Nummer auf einem T-Shirt. Die Zahl „drei“ ist für ihn frei von einem mathematischen Gehalt. Es ist eine Aneinanderreihung von Zahlen ohne eine Hierarchiebildung, vergleichbar mit der Folge der Buchstaben im Alphabet. Eine Handlungsanweisung, die man daher ebenso gut beispielhaft auch am Alphabet vollziehen könnte. Probieren Sie doch einmal, vom Buchstaben „H“ im Kopf sieben Schritte rückwärts zu gehen um zu sehen, wie anstrengend das ist und vor allem, dass man so etwas ganz ohne Zahlverstehen bewältigen kann!

„Da muss ein Trick her!“

Und das Ganze wird auch nicht besser, wenn der Zählbeginn korrigiert wird: „Vor dem Zählen musst du erst einen Schritt rückwärts machen, zur sieben, und da darfst du erst loszählen!“, versucht Sascha Tim behilflich zu sein. „Da steht zwar die Acht, das ist aber gar nicht so gemeint!“, erläutert er. Sascha hat sich diesen „Trick“ zurechtgelegt, da er einmal gemerkt hat, dass seine Ergebnisse immer um eins daneben liegen. Ihm erscheint die Arithmetik tatsächlich als ein Betätigungsfeld, in dem man ständig den richtigen „Kniff“ heraushaben muss. Und er ist sicher, jetzt rechnen zu können! Warum? Weil die Lehrerin ihm nun unter jede Hausaufgabe ein Grinsegesicht stempelt – eine positive Rückkopplung mit unerwünschten Folgen.

Sascha rechnet aber gar nicht. Zumindest geht er nicht mit Quantitäten um und verändert diese. Was er tut, ist vielmehr eine Kompensation, in der er eine fehlerhafte Zählstrategie durch eine ersetzt, die das richtige Ergebnis auswirft. Aber auch nur das – mit Verständnis darf das nicht verwechselt werden, es ist nicht einmal der erste Schritt dahin. Diagnose: kardinales Zahlverstehen bei Tim– wie auch bei Sascha – unausgebildet, in Folge dessen kann die Subtraktion von beiden gar nicht als ein „Weniger werden”, aufgefasst werden. Die Subtraktion bedeutet nun aber die Verminderung einer Ausgangsanzahl um einen bestimmten Teil – an genau dieser Einsicht mangelt es diesen beiden Kinder – und ihr stures Zählen verhindert sogar regelrecht, zu dieser Einsicht zu gelangen.

Ein wenig Didaktik: Der Minuend repräsentiert die Gesamtanzahl, der Subtrahend ist der Teil, der davon weg genommen wird. Und ich will immer wissen, ob das Kind *dies* in seinen Handlungen, in seinen Gedanken, in seinem Rechnen umsetzt. Das kann allerdings nur dann klappen, wenn Zahlen *kardinal*, das heißt als Repräsentanten von Anzahl verinnerlicht sind. „Sieben ist eins weniger als acht.“, „Sieben ist in acht enthalten.“, „Minus bedeutet wegnehmen.“, „Wenn ich sieben von acht wegnehme, bleibt einer übrig.“

– das sind Gedanken von Melanie, die auf kardinales Zahlverstehen schließen lassen. Erst dann bin ich in der Lerntherapie mit dem Ergebnis einer Subtraktion zufrieden. Melanie wird auch nach dem Ergebnis von 8 – 7 gefragt – und fasst all ihre obigen Gedanken in einem spontanen „Na, eins!“ zusammen. „Können wir jetzt endlich mal richtig rechen?“, fragt sie noch keck nach.

Kardinale Zahlvorstellung heißt Zahlen als Anzahl begreifen

Für die Förderung bedeutet dies, dass mit diesen Kindern, die auf das Zählen angewiesen sind, zunächst kardinale Zahlvorstellungen erarbeitet werden müssen, selbst wenn sie sich bereits in der dritten Klasse befinden. Das kann durchaus mit den Fingern geschehen, wenn daran reflektierte Handlungen (z. B. Zahlzerlegungen) vorgenommen werden. Eine Zahlzerlegung ist durch die Hände quasi natürlich vorgegeben: Acht besteht aus fünf und drei.
Erst wenn Tim und Sascha diese Zahlzerlegung ihrem

quantitativen Gehalt nach verinnerlicht haben, sie sich acht z. B. als 8 = (1 + 1 + 1 + 1 + 1) + (1 + 1 + 1) denken können, werden sie in der Lage sein, Subtraktionen wie 8 – 5 oder 8 – 3 zählfrei zu bestimmen. Thomas ist bereits so weit. Er kann sich bei Rechenaufgaben wie 8 – 5 aus der Bündelung von fünf Fingern zu einer Hand eine Rechenerleichterung verschaffen: Er ist in der Lage, die Tatsache, dass er von acht Fingern fünf Finger (simultan) wegklappen kann und damit drei Finger übrig bleiben, zum Lösen der Aufgabe zu verwenden. Auch bei 8 – 3 verschafft ihm das Fingerbild eine Vereinfachung. Thomas stellt acht Finger auf und klappt anschließend drei Finger ein: 8 – 3 = 5. Ebenso erklärt er die beiden Umkehrungen 3 + 5 und 5 + 3 unter Bezug auf diese eine Zahlzerlegung. Auch der Zusammenhang zu zehn ist bei Thomas schon in den Blickpunkt gerückt: Von acht bis zehn (bzw. von zehn bis acht) sind es zwei. „Additive Ergänzung“ und „subtraktive Verminderung“ – alles auch an diesem einen Fingerbild entdeckt.

„Fingerrechnen“ heißt das Vorgehen von Thomas und es ist zu unterscheiden vom „Fingerzählen“ wie es bei Lara zu beobachten ist. Lara klappt nacheinander den 8., 7., 6., 5., 4., 3. und 2. Finger zu, während sie leise von eins bis sieben zählt. Bei ihr ist lediglich das Verständnis von acht als acht Einzelne bzw. sieben als sieben Einzelne, nicht aber als Vorstellung einer diese Elemente umfassenden Anzahl gegeben. Daher kann sie nicht spontan eine Hand und weitere zwei Finger zuklappen, um die Lösung erhalten.
Damit meine ich nicht, dass Rechnen durch das Einüben einer bestimmten Fingertechnik gelernt werden kann, bzw. die Anwendung eines bestimmten Schemas Ausweis von mathematischem Verständnis ist. Ich meine vielmehr: Durch reflektierte Materialhandlung soll das Kind Strukturierungen in seinem Fingerbild erkennen, die dem Verhältnis Teile/Ganzes entsprechen (hier acht in fünf und drei) und dieses Wissen auch im praktischen Umgang benutzen. „Alle Zahlen sind Einsen – nur unterschiedlich viele“, könnte man den Lerninhalt der Arithmetik der ersten Klasse prägnant zusammenfassen. Und in der ersten Klasse wird das Fundament für den gesamten weiteren Rechenunterricht gelegt.

Zusammenfassung

Wenn das Kind nicht gelernt hat, bestimmte Mengen mit den Zahlen in Verbindung zu bringen, kann es sich lediglich an der Reihenfolge der Zahlwortreihe orientieren. Es ist ihm verschlossen geblieben, dass die von ihm nacheinander gelernten Zahlen sich immer um die Mächtigkeit Eins unterscheiden. So wird jede Aufgabe als Auftakt zum Zählen genommen. Addition und Subtraktion werden rein als Vorwärts- oder Rückwärtsbewegungen auf einer Zahlenreihe aufgefasst. Ohne Verständnis der Zahl als Repräsentant von Anzahl, als Inklusion aller kleineren Anzahlen, gelingt auch das Erlernen des Verhältnisses von Teile/Ganzes mit seinen Analogien in der Regel nicht, da Veränderungen in der Strukturierung einer Menge immer wieder neu zählend ermittelt werden müssen. Auf dieser Grundlage ergibt sich eine prinzipielle Schwierigkeit, die Aufteilung einer Anzahl in zwei Teile als Bedingungsverhältnis zu erkennen. Die Nennung der Zahlnamen beider Teile wird von Kindern ohne kardinalen Zahlbegriff nicht auf den Zahlnamen der Gesamtanzahl reflektiert. Beide Zahlen sind für sie nicht Teile einer anderen, sie umfassenden Zahl. Sie stehen für sie in keiner quantitativen Beziehung, sondern isoliert nebeneinander.
Durch den sturen Blick auf die Ergebnisse, aus denen man schlussfolgert: richtig = verstanden und falsch = nicht verstanden, wird man so manchem Kind nicht gerecht. Große Verständnisprobleme können sich häufig unter dem Deckmantel von richtigen Ergebnissen verbergen, die durch das inhaltsleere Abspulen eintrainierter Mechanismen zustande kommen. Man kann hier wirklich an eine kleine Maschine denken. Nur die qualitative Analyse erlaubt es, die Entstehung der Ergebnisse – der richtigen wie der falschen – einzuordnen hinsichtlich dessen, was sich das Kind wirklich erarbeitet hat. Ansonsten wird die Förderung das Kind – wie auch schon der Schulunterricht – wieder vollständig überfordern.

Nichts „hassen“ Schüler in der Mathematik mehr, als wenn es um Allgemeingültigkeiten oder Beweise geht. Und dies gilt in ganz besonderer Weise für rechenschwache Kinder und Jugendliche. Schon im Bereich des numerischen Rechnens in größten Nöten, sehnen sie sich angesichts des undurchdringlichen Buchstaben„salats“, der ihnen da an der Tafel angeboten wird, doch tatsächlich in die „alte Welt“ des Rechnens zurück. Da ging zumindest noch etwas mit auswendig gelernten Algorithmen, Schemata oder mit Abzählen an den Fingern.

Um möglichen Missverständnissen gleich im Voraus vorzubeugen: Hier ist nicht von SchülerInnen die Rede, die aufgrund der Umstellung ihres Hormonhaushaltes gelegentlich auch eine andere Einstellung zur Schule entwickeln und ihren „Fleiß“ u. a. auf das Sammeln schlechter Zensuren richten. Wir möchten hier auf Kinder/Jugendliche aufmerksam machen, die wegen einer nicht erkannten Rechenschwäche während der Grundschulzeit auf der weiterführenden Schule versagen müssen, und zwar trotz allem guten Willen und viel Übung:

„Da bereits nach der ersten Arbeit klar war, dass ich ohne Hilfe diese Schule (Gymnasium) nicht überleben würde, verschliss ich in den folgenden Jahren einige Nachhilfen, ohne auch nur irgedeinen Erfolg zu verbuchen. In der Zwischenzeit war ich im übrigen auf einer Beton-6.“ (Lena, heute 13. Klasse Gymnasium)

„Das muss man doch in der Grundschule schon sehen!“

Da sprechen unsere Erfahrungen eine ganz andere Sprache. Gerade lernstarke rechenschwache Kinder schaffen es (wenn auch mit einem erheblichen Aufwand an Übung) mit passablen Noten durch die ersten Klassen, und dies in vielen Fällen trotz gravierender Defizite im Bereich der Grundrechenarten, wie das Beispiel einer betroffenen Mutter zeigt:

„Ich bin verunsichert und wüsste gern, ob meine Tochter eventuell rechenschwach ist. Meine Tochter ist 11 Jahre und ist gerade aufs Gymnasium gewechselt. Ihr Notendurchschnitt lag in der Grundschule bei 2, in Mathe hatte sie zuletzt eine 3. Sie versucht immer, das Schema zu erkennen und wendet ein gelerntes Schema blind an. In der Grundschule lag die ***Trefferquote extrem hoch.*** *Bei Kopfrechenaufgaben vergisst sie häufiger die Aufgabenstellung. Sie hat Probleme, ein „Schlüssel-Schloss-System“ anzuwenden, so was wie 24 + 16, 3+17 etc. Ich habe versucht, dass sie es auswendig lernt, also 1+9, 2+8, 3+7 etc. und umgekehrt, aber sie begreift das System nicht.“*

Und das sind keine Einzelfälle: Nahezu alle Gymnasial-SchülerInnen, die uns aus höheren Klassen vorgestellt werden, haben am Ende ihrer Grundschulzeit ein Befriedigend auf dem Zeugnis. Unerkannt bleiben die strukturellen Probleme dieser Kinder, weil

1. häufig nur auf die Note geschaut wird; und wenn die anderen Fächer „stimmen“, ist man eben auch mit einem Befriedigend noch gut bedient. „Man kann ja nicht überall sehr gut sein!“ „In Mathe war ich auch immer schlecht!“

2. immer nur richtige Ergebnisse eine Rolle spielen; dann zeugt dies ja wohl auch davon, dass der sachliche Inhalt auch verstanden wurde – ein fataler Irrtum

Rechnen nach Vorschrift - das kann auch ein Drittklässler

$$\int 7x^3 - 2x^2\,dx =$$

"Die Schlange vorne und das dx fällt weg; auch die kleinen Zahlen da oben schreibt ihr erst einmal nicht auf. Den Rest müßt ihr hinschreiben!"

$$7x - 2x$$

"Jetzt rechnet zu der kleinen Zahl einen dazu. Das gibt dann die neue kleine Zahl über dem x."

$$7x^4 - 2x^3$$

"Beim nächsten Schritt braucht ihr nicht einmal zu rechnen: Macht einfach einen Strich unter die Sachen, die minus-gerechnet werden!"

$$\underline{7x^4} - \underline{2x^3}$$

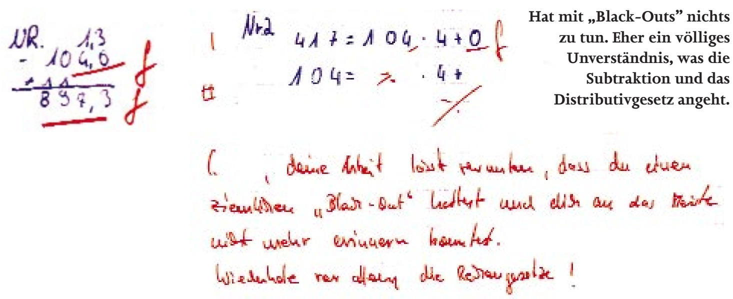
"Auch jetzt wird es nicht schwer: Die neue kleine Zahl über dem x schreibt ihr bitte unter den Strich."

$$\frac{7x^4}{4} - \frac{2x^3}{3}$$

"Zum Schluß dürft ihr eines nie vergessen: Bei allen Aufgaben schreibt ihr hinten + c dran. Dann seid ihr fertig."

$$\frac{7x^4}{4} - \frac{2x^3}{3} + c$$

(Klausur von Carmen, damals in Klasse 6 Gymnasium)



Hat mit „Black-Outs” nichts zu tun. Eher ein völliges Unverständnis, was die Subtraktion und das Distributivgesetz angeht.

3. es den Kindern gerade wegen ihrer allseits geschätzten Lernstärke gelingt, sich mit völligem Unverständnis durch die Grundschulmathematik durchzuhangeln, indem sie ganze Verfahrensweisen auswendig lernen und rein schematisch reproduzieren (z. B. schriftliche Rechenarten). Natürlich bleibt es dabei nicht aus, dass es auch zu gravierenden Fehlleistungen, unsinnigen Algorithmen etc. kommt, die dann häufig als „Black-Outs“, „Unkonzentriertheit“ fehlinterpretiert werden: Und so findet sich das Kind schließlich nach einer Empfehlung der Grundschule auf dem Gymnasium oder in der Realschule wieder. Und eines sei hier deutlich gesagt: Nahezu alle diese Empfehlungen seitens der Grundschulen sind aus unseren Erfahrungen heraus korrekt gewesen, und zwar wegen der durchaus richtig eingeschätzten Lernstärke des Kindes – nur Mathe wird von nun an zu einem schier und windbaren Problem.

Die Katastrophe nimmt ihren Lauf

„Die Situation war schon sehr belastend, aber Carmen schaffte jede Versetzung, wohl mit Mathe fünf und kam in die 8. Nach der 2. Mathearbeit – wieder 5 – sprach ich mit dem Lehrer und er sagte: „Ich weiß nicht, was es ist; sie fängt ordentlich an, baut aber nach kurzer Zeit total ab und dann läuft nichts mehr.“ (Carmens Mutter)

Überwiegend stürzen rechenschwache Gymnasial-Kinder bereits in der fünften Klasse ab. Dieser Zeitpunkt kann sich verschieben, wenn Nachhilfe, noch mehr Paukerei und Übung die Kinder vor einem Mangelhaft oder Ungenügend retten. Wirklich verstanden wurde und wird rein gar nichts mehr und das Fach Mathematik entwickelt sich zur allseitigen Qual:

„Hatten wir erst mit der eigentlichen Rechnung begonnen, plagte sie mich u.a. mit Vorzeichenfehlern, Rechenfehlern und Verstößen gegen Punkt- vor Strichrechnung. Eigentlich hatte ich den Eindruck, dass meine Schwester, was Mathe angeht, bekloppt und gänzlich unintelligent ist und mich nach Strich und Faden verarscht. Es war mir unbegreiflich, wie man so schwer von Begriff sein konnte. Ich hatte deshalb wenig Verständnis und eine Menge Ungeduld, was, kombiniert mit einer verwirrten und verzweifelten Schwester, zu heftigen Streitereien führte.“ (Sandras – heute Klasse 13 Gymnasium – Schwester über das Üben zu Hause)

„Ich sah einfach keinen Zusammenhang oder Gemeinsamkeit zwischen allen Aufgaben, die ich rechnete, und verzweifelte an meiner Unfähigkeit.“ (Lena, Klasse 13 Gymnasium)

„Mein Mann hat seiner Tochter nur selten helfen können. Später habe ich es bewusst vermieden, da es immer in Chaos endete, die Aufgaben waren nicht fertig, das Kind war fix und fertig, er war sauer und am Schimpfen in einem Ton, den ich für Carmen als zu hart und beleidigend empfand: Wenn du zu blöd dazu bist, dann gehst du eben zur Hilfsschule, so blöd kann man sich doch nicht anstellen. Die weiß ja nicht einmal, was das und das ist…“ (Carmens Mutter)

Schlachtfeld Algebra - die Kapitulationserklärung

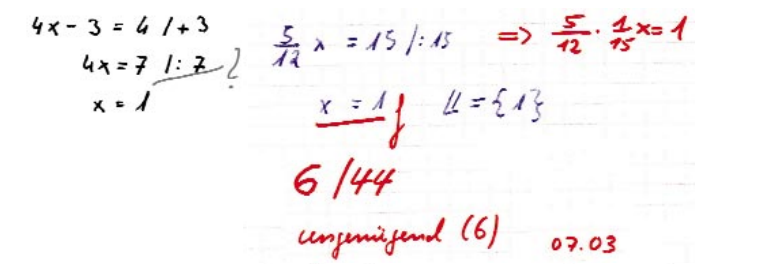
„Unsere Tochter versuchte sich durchzubeißen und ihre Defizite mit verstärkten Anstrengungen sowie Nachhilfeunterricht auszugleichen. Ihre Bemühungen blieben erfolglos, im Verlauf der 8. Klasse stand unter ihren Klassenarbeiten nahezu regelmäßig „Ungenügend“. (Lenas Vater)

Und beim Thema Algebra ist dann mit Schemata, Auswendiglernen etc. endgültig Schluss, auch wenn der Taschenrechner noch über Probleme beim numerischen Rechnen, beim Rechnen mit Brüchen oder negativen Zahlen hinweghelfen mag:

„Ich war der Meinung, wenn man sich mit dem Rechnen schon schwer tut, kann man wenigstens die Dinge auswendig lernen, die sich auswendig lernen lassen. Meine Schwester war da anderer Ansicht.“ (Sandras Schwester)

Mit Buchstaben kann kein Taschenrechner etwas anfangen und schließlich rechnet das „Ding“ nun einmal nur das aus, was man ihm eingibt! Eine Gleichung bekommt man so nie und nimmer umgestellt, und auch mit dem Umformen algebraischer Terme ist das Teil völlig überfordert. Und so wird gerade beim Thema Algebra das offenbar, was bisher einigermaßen kompensiert werden konnte. Neben den Problemen beim numerischen Rechnen (Addition/Subtraktion im Zahlenraum bis 100, kleines und großes Einmaleins etc.), sorgen nun häufig nicht erkannte, in allen Fällen aber nicht behobene Defizite aus der Grundschulzeit für die unvermeidliche Katastrophe:

1. **Die Funktion des Gleichheitszeichens ist völlig unverstanden. Infolge dessen gelingt das Umstellen von Gleichungen nicht.** Offensichtliche Fehler werden nicht entdeckt, und anstelle von Verständnis werden Verfahrensregeln gepaukt:



„Zuerst muss man die drei rüberholen, damit 4x alleine ist. Und dann muss man zum Schluss immer teilen und das x bleibt dann immer übrig. Und sieben durch sieben geht gut, das ist eins.“ Solche „Erklärungen“ bekommen wir immer wieder zu hören. Das x „wird isoliert“, „Zahlen fliegen raus“, werden „rübergeholt“, „fallen weg“ oder werden „von einer auf die andere Seite gebracht“.

2. **Die Bruchrechnung wird nicht beherrscht, weil es bereits erhebliche Verständnisprobleme bzgl. des Charakters einer Division gibt** (Stoff der zweiten Klasse).

   Deshalb sorgt der gutgemeinte Tipp der Lehrerin (5/12 • 1/15x =1) bei der Korrektur der Klassenarbeit nur für noch mehr Unverständnis: *„Warum ich das rechnen soll, weiß ich auch nicht!“*

3. **Der Umgang mit dem neutralen Element bzgl. der Punkt- und Strichrechnungen bleibt meist völlig unklar** (wenn 4x = 7 ist, kann x niemals die Zahl 1 sein). Als Folge können sich keine Strategien beim Lösen linearer Gleichungen entwickeln.

4. **Das Operationsverständnis, was die vier Grundrechenarten angeht, ist häufig nur lückenhaft, gelegentlich auch gar nicht entwickelt.** Und das hat dann gravierende Auswirkungen auf den

5. **Zusammenhang der Rechenarten** (z. B. die Multiplikation als fortgesetzte Addition der gleichen Zahl; die Division als inverse Rechenart zur Multiplikation und daraus schlussfolgernd die Division als fortgesetzte Subtraktion). Kein Wunder, wenn dann beispielsweise durch Null dividiert wird, vorzugsweise dann, wenn in Kombination mit diesem Problem der Bruchzahlbegriff nicht klar ist etc. Weiteres Resultat dieses Unverständnisses ist die völlige „Ignoranz“ gegenüber einschlägigen Rechengesetzen (Assoziativgesetz, Kommutativgesetz, Distributivgesetz). Des weiteren bekommt dann das Prinzip der Rangfolge der Rechenarten massive Existenzprobleme (z. B. Punkt-vor-Strich-Rechnung), was mit einer „Missachtung von Vorfahrtsregeln“, wie Papa oder die große Schwester es beim Üben zu Hause schon tausendmal „erklärt“ haben, nun wirklich gar nichts zu tun hat! Und der in einer schier endlosen Litanei wiederholte Spruch „Aus Summen kürzen nur die…“ sorgt da auch nicht für mehr Klarheit.

$$\frac{\cancel{a}^3 + \cancel{b}^4 + \cancel{z}^2}{\cancel{b}_3 + \cancel{z}^2 + \cancel{a}^3} = \frac{4}{3}f$$

Viel später stellte sich z.B. heraus, dass sie den Satz: „Aus Differenzen und Summen kürzen nur die Dummen" grundsätzlich nicht aufsagte, wenn ich nach einem Fehler nach diesem Satz fragte, da sie dann über sich selbst hätte aussagen müssen, dass sie dumm sei. Diese Arbeitsverweigerung war mir damals noch unerklärlich und senkte die Stimmung ganz erheblich." (Sandras Schwester)

In solchen Nöten verhaftet führen rechenschwache Kinder/Jugendliche regelrechte Vernichtungsfeldzüge gegen jegliche Sorte von Termen, Funktionen und geometrischen Figuren. Gleich ganze Scharen von Parabeln sehen sich einem traurigen Ende gegenüber, weil bei der Funktion $f(x) = x^2 - 2x + 3$ vor dem Summanden x^a weit und breit keine Zahl zu entdecken ist, und wenn da *„nichts"* steht *„ist das Null"* und *„0 mal* x^2 *ist 0"* – zack, Parabel weg!

Es ist sehr wichtig, dass man den Schülern ihre unmathematischen Formulierungen nicht durchgehen lässt, denn auch das sorgt dann nicht nur für noch mehr Chaos, sondern auch dafür, dass dem Unverständnis immer wieder Quotienten zum Opfer

fällt weg fällt weg

$$\frac{(a-b)^2}{a^2-b^2} = \frac{\cancel{a^2}-\cancel{b^2}}{\cancel{a^2}-\cancel{b^2}} = \underline{\underline{0}}\ ?!$$

fällt weg fällt weg

fallen, wenn beim Kürzen alles „wegfällt":
Einmal ganz abgesehen davon, dass das Verhältnis von rechenschwachen Jugendlichen zu binomischen Formeln meist nur als restlos zerrüttet angesehen werden kann, führt u.a. das mangelhafte Verständnis, was das neutrale Element der Punktrechenarten angeht, auch dazu, dass Lösungen bei quadratischen Gleichungen entfallen und sich so Nullstellen von Parabeln förmlich in Luft auflösen:

$f(x) = x^2 - x$ $\qquad 0 = \underline{x(x)}$

$f(x) = 0$ $\qquad 0 = x^2$

$0 = x^2 - x$ ✓ $\qquad x = 0$ f

Das wird dann bei der Skizze des Grafen richtig „heavy", wenn der Scheitelpunkt unterhalb der x-Achse liegt!

Nullstelle erfolgreich erledigt!

Auch Potenzen sind vor diesem „algebraischen Gemetzel" nicht gefeit:

Der Gegner!	Exponent im Nenner erledigt!	Jetzt ist die Basis fällig!	Überlebt hat nur die Drei!
$\frac{a^c}{a^2}$	$\frac{a^{\cancel{c}3}}{a^{\cancel{2}}}$	$\frac{\cancel{a}^{\cancel{c}3}}{\cancel{a}^{\cancel{2}}}$	$\frac{\cancel{a}^{\cancel{c}3}}{\cancel{a}^{\cancel{2}}} = \underline{3}$

Wie bereits erwähnt: In der Skala der „Beliebtheit" ganz weit oben angesiedelt, ist die konsequente „Missachtung" der Rangfolge der Rechenarten. Der alte Pythagoras möge es den Kindern verzeihen, wenn rechtwinklige Dreiecke dem Erdboden gleich gemacht werden und aus seinem bei rechenschwachen Jugendlichen berüchtigten Satz die Erkenntnis gezogen wird, dass die Summe der Längen der Katheten gleich der Länge der Hypothenuse ist.
Gott sei Dank, dass dem nicht so ist!

$a^2 + b^2 = c^2$ $\quad |\sqrt{\ }$

$\underline{a + b} = c$ $\quad ||$

Sinn und Zweck von Kopf und Zahl

- Den Blick für die Problematik rechenschwacher Kinder im Unterricht schärfen.
- Gesichertes Wissen zum Thema Rechenschwäche (Dyskalkulie, Arithmastenie) weitergeben.
- Vorläufiges Wissen, Thesen, Überlegenswertes, schulpolitische Entwicklungen u.a. zur Diskussion stellen.
- Mögliche Doppeldeutigkeiten der mathematischen Wissensvermittlung im Unterricht zur Sprache bringen.
- Hilfestellungen bieten für eine Berufsausbildung, die auf mathematische Wissensvermittlung spezialisiert wurde, i.d.R. aber hilflos ist, wenn diese Wissensvermittlung bei einer quantitativ ernst zu nehmenden Untergruppe grundlegend schief gegangen ist. „Rechenschwäche" ist immer noch nicht Teil der Ausbildung.
- Material zur Verfügung stellen, mit dessen Hilfe Missverständnisse oder Unverständnis bezüglich spezieller Themen eingedämmt und eventuell vermindert werden können.

Viel zu spät erkannt

Wolfgang Hoffmann, MLZ Dortmund

Februar 2004

Im Therapieraum sitzt die damals 14 jährige Carmen zusammen mit einer Lerntherapeutin und brütet über Aufgabenstellungen aus dem 2. Schuljahr. Carmen kann nur wenige Ergebnisse aus dem kleinen 1x1 spontan benennen, muss immer wieder lange nachdenken und zählt manchmal an ihren Fingern ab. Die ersten drei Klassen auf dem Gymnasium hat sie in Mathe mit einer Beton-Fünf gerade noch überstanden und in der Grundschule hatte sie in Mathe immer eine drei. Jetzt sackt das ansonsten sehr gescheite Mädchen in allen anderen Fächern auch noch ab. Die Lehrer überlegen, ob Carmen „auf dem Gymnasium richtig aufgehoben ist". Auch die Mutter (selbst Lehrerin) weiß nicht, ob sie ihre Tochter überfordert, und Carmen selbst glaubt auch, dass sie für's Gymnasium „einfach zu doof" ist.

Carmens Lehrer weiß inzwischen um die Dyskalkulie seiner Schülerin. Er sitzt am Abend an seinem Schreibtisch und konzipiert die nächste Klassenarbeit. Thema: Rechnen mit Potenzen mit rationalem Exponenten. Es ist die erste Arbeit im neuen Schuljahr, und weil er die algebraischen „Künste" seiner Schülerin kennt und Carmen nicht sofort mit einem Ungenügend ins Schuljahr starten soll, reduziert er alle Aufgabenstellungen mit Variablen auf ein absolutes Minimum und ersetzt sie mit Fragestellungen aus dem kleinen 1x1. Das Ergebnis war trotz allem guten Willen niederschmetternd:

$$\sqrt{27} = \underline{\sqrt{4} \cdot \sqrt{7}}\ f = 2 \cdot \sqrt{7}$$

Man soll sich überhaupt nichts vormachen, was den schulischen Erfolg einer Lerntherapie oder die Einstellung zur Mathematik angeht, wenn uns die Kinder erst in der siebten oder achten Klasse vorgestellt werden, dann, wenn nichts mehr geht: Mathe ist und wird das „Hassfach Nr. 1" bleiben und alle Versprechungen in Tageszeitungen nach der Marke „Ruckzuck ist die Mathe-Fünf weg und Ihr Kind hat wieder Spaß beim Rechnen" kann man ganz getrost zu den Akten legen! Früherkennung ist notwendig – und wenn das Kind schon nicht in der Grundschule aufgefallen ist, dann sollte ein Test zu Beginn der fünften Klasse in allen Schulformen Aufschluss über die mathematischen Fertigkeiten der Kinder geben (z. B.: Heidelberger Rechentest – HRT-I – Kommentierung in der letzten Ausgabe von Kopf und Zahl).

Aus Fehlern lernen …

ohne Kommentar

Kommentar im nebenstehenden Artikel:

„Viel zu spät erkannt."

$$a)\ 25a^2b^3c^4 + 50a^3b^4c^2 + 75a^4b^2c^3$$
$$= \underline{150}\, a^2b^2c^2(\underline{6}bc^2 + \underline{3}a^1b^2 + \underline{2}a^2c)\quad f$$

Wie kommst du auf diese Zahlen???

Gar nicht so furchtbar schwer!

Zunächst müssen alle Zahlen ausgeklammert werden und weil vor der Klammer nur eine Zahl stehen "darf", werden die Zahlen kurzerhand "zusammengefasst", "damit die alle drin sind".

$$a)\ 25a^2b^3c^4 + 50a^3b^4c^2 + 75a^4b^2c^3$$
$$+ \quad +$$
$$= \underline{150}\, a^2b^2c^2(\underline{6}bc^2 + \underline{3}a^1b^2 + \underline{2}a^2c)\quad f$$

"Und jetzt brauche ich drei Zahlen für die Klammer. Ich muss alles durch die erste Zahl teilen, die fällt dann weg."

$$a)\ 25a^2b^3c^4 + 50a^3b^4c^2 + 75a^4b^2c^3$$

Fällt weg

:25 :25 :25

$$= \underline{150}\, a^2b^2c^2(\underline{6}bc^2 + \underline{3}a^1b^2 + \underline{2}a^2c)\quad f$$

Jetzt kommt ein richtiger Teilschritt, aber mit was für einer Begründung! "Jetzt nehme ich von allen dreien" Carmen meint die Summanden) "immer die kleinste Zahl" (Carmen meint die niedrigste Potenz) "und schreibe sie auch vorne hin. Die sind dann auch weg."

$$a)\ 25a^2b^3c^4 + 50a^3b^4c^2 + 75a^4b^2c^3$$
$$= \underline{150}\, a^2b^2c^2(\underline{6}bc^2 + \underline{3}a^1b^2 + \underline{2}a^2c)\quad f$$

"Die anderen bleiben übrig und müssen in die Klammer. Man muß aber jetzt immer minus zwei rechnen."

$$a)\ 25a^2b^3c^4 + 50a^3b^4c^2 + 75a^4b^2c^3$$

-2 -2 usw.

$$= \underline{150}\, a^2b^2c^2(\underline{6}bc^2 + \underline{3}a^1b^2 + \underline{2}a^2c)\quad f$$

Nicht nichts gedacht, aber trotzdem nichts gebracht!

Rechnen mit Verdopplungen – unfassbare Strategien

MLZ Bochum, November 2003 Auf Drängen der Schule stellt eine türkische Mutter ihre neunjährige Tochter bei uns vor. B. ist eine für ihr Alter recht zierliche Drittklässlerin, die gerade das Schuljahr wiederholt. Seit fast zwei Jahren bekommt sie in der Schule eine Einzelförderung. Trotz aller Bemühungen will sich im Zahlenraum bis 100 keine Besserung der Leistungen einstellen. Im Zeugnis steht: *„Aufgaben mit Zehnerübergang muss sie noch eifrig üben, um sicherer zu werden. Bei der Erweiterung des Zahlenraums bis 100 zeigte B. größte Probleme, eine strukturierte und gesicherte Zahlvorstellung aufzubauen.“*

Neben dem zählenden „Rechnen“ hat B. eine zweite Strategie zur Lösung von Aufgaben entwickelt: Sie lernt ganze Zahlensätze einfach auswendig; sehr beliebt sind dabei Verdopplungsstrategien, weil sich diese Aufgaben gut auswendig lernen lassen (z.B. 4+4, 7+7 etc.). Diese Aufgaben gelingen rechenschwachen Kindern deshalb meist spontan. Auch B. greift auf diese Strategie zurück, wenn sie Aufgaben nicht-zählend lösen soll. Stellt sich nur die Frage - wie?

„Wenn du einverstanden bist, machen wir die nächste Aufgabe etwas schwieriger. Schau genau hin, die Lücke ist jetzt in der Mitte!“ „Das rechne ich jetzt“, antwortet B. Der Diagnostiker überprüft, ob das Mädchen auch wirklich die Aufgabenstellung richtig erfasst hat: *„Bevor du es ausrechnest, lies die Aufgabe einmal laut vor!“* **6 + ? = 14**

B. liest: *„6 plus wie viel ist 14.“ „Gut, nun versuch' es einmal. Du kannst ruhig langsam rechnen! Wenn es falsch ist, dann ist es auch nicht schlimm. Die ist ja viel schwieriger als die letzte.“ „Das stimmt nicht, ich glaub' ich weiß, wie die geht“*, erwidert das Mädchen und rechnet und rechnet und rechnet... Über eine Minute später steht die Lösung auf dem Blatt. Wie kommt B. zur richtigen Lösung? B. sucht zunächst einen Bezug zur Aufgabenstellung über eine Verdopplungsaufgabe. Es folgt ein scheinbar völlig unsinniger Rechenschritt:

6+?=14 gleiche Zahl
7+7=14
Verdoppelung der 7

Es stellt sich die Frage: Warum greift B. wieder auf die vorherige Aufgabe zurück und zerlegt die Zahl 6? Die Antwort auf diese Frage ist nur mit einem einzigen Wort zu beschreiben: GENIAL!!! B. braucht zur Lösung einen zweiten Bezug zwischen der Aufgabe 6 + ? = 14 und 7 + 7 = 14. Sie hat sich überlegt, dass die beiden 3en der 6 auch in den beiden 7en bei der Aufgabe 7 + 7 enthalten sind. Konsequent logisch zerlegt sie nun die beiden 7en so, dass jeweils ein Summand eine 3 ist!

6+?=14
7+7=14
6=3+3
Zerlegung der 6 durch Verdoppelung der 3

6+?=14
7+7=14
7=3+4 7=3+4
6 = 3+3

Und damit bleiben bei der Aufgabe 7 + 7 = 14 nur noch die beiden 4en übrig, da die beiden 3en durch die Zerlegung der Zahl 6 in 3 + 3 schon „abgedeckt“ sind – phantastisch überlegt! Und siehe da: Es entsteht wieder eine Verdopplungsaufgabe:

6+?=14
7+7=14
7=3+4 7=3+4 → 4+4=8
6 = 3+3

Da die 6 mit den beiden Zahlen 3, die in den 7en enthalten sind, quasi „erledigt“ ist, bleiben nur noch die beiden 4en der 7en übrig, die dann zusammen 8 ergeben. Und daraus folgt: Statt des Fragezeichens muss eine 8 als Ergebnis herauskommen!

Dass mit solchen Algorithmen dann im Zahlenraum bis 100 trotz aller Förderung gar nichts mehr geht, liegt auf der Hand. „Das habe ich nicht gewusst!“, so die Lehrerin während des Beratungsgesprächs. Wie sollte sie auch? Sie hat 30 Kinder in der Klasse, viele mit gewaltigen Problemen, weil der Anteil an ausländischen Kindern fast 80% beträgt. B`s Schwierigkeiten sind jetzt klarer geworden. Sie will auch mit „großen Zahlen“ rechnen können – sie weiß aber nicht wie! **Wolfgang Hoffmann,** Dortmund

So erreichen Sie uns

38100 Braunschweig, Steinweg 4 (Haltestelle Rathaus)
Telefon 05 31-12 16 77 50, Telefax 05 31-12 16 77 59
per E-Mail: info@iml-braunschweig.de
im Internet: http://www.iml-braunschweig.de

Lehrerfortbildung

Wir machen es uns zur Aufgabe, alle beruflich mit diesem Thema konfrontierten Pädagogen über die Bedeutung der Früherkennung, die Möglichkeiten der Prävention und die Förderung rechenschwacher Schüler zu informieren:

- öffentliche Vorträge und Veranstaltungen,
- Schulvorträge in Fach-/Gesamtkonferenzen,
- ganztägige (Lehrkräfte-)Fortbildungen und
- Studientage an Schulen/Ausbildungsstätten.

Wünschen Sie eine Veranstaltung an Ihrer Schule oder Ihrer Einrichtung, so sprechen Sie uns dafür bitte an.

Unsere telefonische Fachsprechstunde

Dienstag bis Donnerstag immer von 12.00 bis 14.00 Uhr (jedoch nicht in den niedersächsischen Schulferien)

Zu diesen Zeiten können Sie sich von einem Lerntherapeuten telefonisch beraten lassen. Wir rufen Sie auch gerne zu anderen Zeiten zurück, wenn Sie eine Nachricht hinterlassen.

Abonnement von „Kopf und Zahl“

Der Bezug dieser halbjährlichen Zeitschrift ist beim IML Braunschweig sowohl in elektronischer als auch in gedruckter Form möglich. Bitte sprechen Sie uns hierfür an.