Maschinenüberwachung - Versandabteilung - Warteschlange

Markow-Ketten mit mehr als zwei Zuständen

Eberhard Lehmann

1 Einleitung

In „Mathematik in der Schule" wurde in den Heften 1997/1 und 1998/2 über *Markow*-Ketten mit zwei Zuständen und dabei auch über viele gebietsübergreifende Aspekte dieses Themas berichtet, das sich demzufolge auch an verschiedenen Stellen des Unterrichts einsetzen lässt.

Wie angekündigt, soll nun gezeigt werden, dass auch *Markow-Ketten mit mehr als zwei Zuständen* interessante Untersuchungsobjekte sind. Gegenüber früheren Unterrichtsvorschlägen und Veröffentlichungen hierzu können nun zusätzlich Computeralgebrasysteme (CAS) eingesetzt werden, was zu neuen unterrichtlichen Möglichkeiten führt.

In dem Beitrag sollen besonders folgende Aspekte berücksichtigt werden:

- Modellbildungsvorgänge
- gebietsübergreifende Lösungsansätze
- Praxisrelevanz
- Einsatz von Computeralgebrasystemen

Die Betrachtungen erfolgen vorwiegend an Beispielen.

2 Unterrichtsvoraussetzungen

Es ist naheliegend - wenngleich nicht zwingend - vor Problemen, die auf Markow-Ketten mit mehr als zwei Zuständen führen, solche mit zwei Zuständen zu betrachten. Dann sind gewisse Grundbegriffe und Algorithmen bereits bekannt und es geht nun um die Übertragung auf die höheren Ketten. Zum Überblick dürfte die folgende Zusammenstellung nützlich sein.

Ausgewählte Probleme	2 Zustände Bearbeitungsmethoden	Mehr als 2 Zustände Bearbeitungsmethoden
Kalkül, Visualisierung	Rechnungen und Zeichnungen sind auch von Hand leicht möglich, Computereinsatz schafft jedoch weitere Möglichkeiten	Für die Rechnungen empfiehlt sich Computereinsatz mit einem speziellen Programm oder einem Computeralgebrasystem
Übergangsmatrizen aus den Textvorgaben ermitteln	leicht möglich	*Anwendung von elementaren Formeln der Stochastik, manchmal nicht ganz leichte logische Überlegungen*
Mehrstufige Wahrscheinlichkeiten berechnen	Baumdiagramme, Bildung geeigneter Skalarprodukte, Matrizenmultiplikation	*Baumdiagramme, Bildung geeigneter Skalarprodukte, Matrizenmultiplikation*
Langfristige Entwicklung der Kette ermitteln	Matrizenpotenzen bilden. Mehrere graphische Methoden (in Koordinatensystemen und andere). Stationäre Verteilung ermitteln (lineare Gleichungssysteme). Formel für n-te Potenz angeben (geometrische Folgen). Grenzwerte von Folgen oder Matrizen bilden Simulation der Kette Eigenwerte der Übergangsmatrix untersuchen.	*Matrizenpotenzen bilden.* meistens nicht möglich, Übergangsgraphen dienen zum Klassifizieren der Art der Ketten. *stationäre Verteilung ermitteln (lineare Gleichungssysteme)* Formel nur in Sonderfällen angebbar, mit vollst. Induktion beweisen. Grenzwerte nur in Sonderfällen berechenbar. *Simulation der Kette* Eigenwerte der Übergangsmatrix untersuchen (schwierig)
allgemeine Beweise führen	durchaus durchführbar, auch im Grundkurs	meistens nicht durchführbar in der Schule

Hinweis: *In dem vorliegenden Beitrag werden vor allem die kursiv gedruckten Lösungswege verfolgt.*

Wir gehen hier von folgenden Voraussetzungen aus:

Die Schüler kennen Probleme, die auf *Markow*-Ketten mit zwei Zuständen führen und können diese mit mehreren Methoden bearbeiten. Sie kennen die Begriffe bzw. Algorithmen: Zustand, Übergangswahrscheinlichkeit, Übergangsmatrix, Anfangsverteilung, Verteilungsvektor, Skalarprodukt, Matrizenmultiplikation, Matrixpotenz, Grenzwert von Folgen, Grenzwert von Matrizenfolgen.

Sollte all das nicht bekannt sein, gibt es auch die Möglichkeit, sogleich mit *Markow*-Ketten mit mehr als zwei Zuständen zu beginnen und dabei die genannten Begriffe und Algorithmen einzuführen. Das ist jedoch ein anspruchsvoller, wohl nur für Leistungskurse zugänglicher Weg (in Linearer Algebra oder Wahrscheinlichkeitsrechnung und gebietsübergreifend).

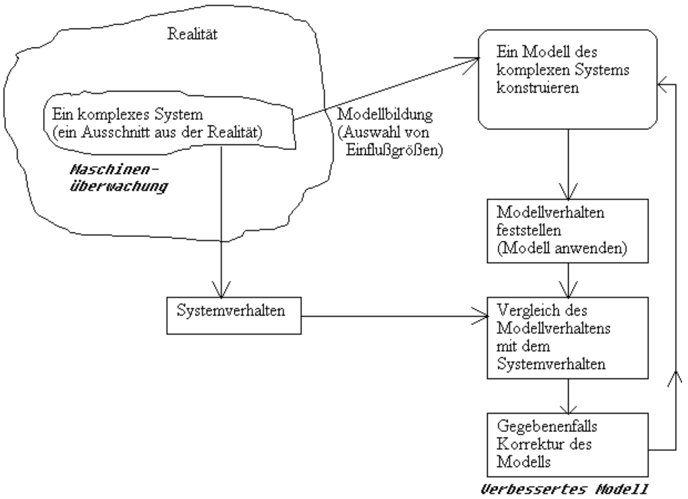
Im Folgenden werden drei Probleme aus unterschiedlichen Anwendungsbereichen genannt, die auf *Markow*-Ketten mit mehr als zwei Zuständen führen. Genauer wird das Problem „Maschinenüberwachung" untersucht. Für die anderen Probleme können die gleichen Bearbeitungsmethoden eingesetzt werden.

3 Der Prozess der Modellbildung

In den Naturwissenschaften und der Technik dienen häufig

Experimente dazu, Informationen zur Bestätigung oder Widerlegung von Hypothesen zu gewinnen. Modelle werden dagegen oft zur Lösung von Aufgaben eingesetzt, deren Durchführung am Original selbst nicht möglich oder zu aufwendig ist. Schema 1 sagt uns Einiges über den Prozess der Modellbildung.

Konstruieren eines Modells



Schema 1: Konstruieren eines Modells

Modelle versuchen Ausschnitte aus der Realität zu beschreiben. Diese ist zu komplex, um direkt nachgebildet zu werden. Im vorliegenden Fall werden mehrere Modellierungsvorgänge vorgeführt, die jeweils zu anderen mathematischen Modellen führen. Bei *Markow*-Ketten ergänzen sich diese, und die Modellbildung führt zu gut vergleichbaren Ergebnissen. Modellbildungsprozesse müssen meistens nachgeregelt werden, indem z.B. Ansätze korrigiert werden müssen.

4 Problem 1: Maschinenüberwachung

Eine Instandsetzungsabteilung kontrolliert den Maschinenpark von vier Maschinen gleichen Typs zu äquidistanten Zeitpunkten. In einer Periode zwischen zwei aufeinanderfolgenden Zeitpunkten kann die Instandsetzungsabteilung bis zu zwei Maschinen wieder betriebsfähig machen. Die reparierten Maschinen werden zum nächstmöglichen Kontrollzeitpunkt wieder in Betrieb genommen. Der Ausfall einer Maschine erfolgt unabhängig vom Ausfall der anderen und auch unabhängig vom Zeitpunkt der zuletzt vorgenommenen Reparatur. Für jede Maschine sei p = 0.1 die Wahrscheinlichkeit dafür, dass sie während einer Periode ausfällt. Zu Beginn seien 3 Maschinen betriebsfähig.

Mit welchen Wahrscheinlichkeiten sind langfristig gesehen 0, 1, 2, 3, 4 Maschinen betriebsfähig?

Die folgende Darstellung ist so aufbereitet, dass ein möglicher Modellbildungsvorgang deutlich wird. Dabei kann sich die Reihenfolge der Schritte auch anders ergeben.

4.1. Modellbildung

Schritt 1: Aufbau der Übergangsmatrix, Festlegung der Zustände, Veranschaulichung

Schritt 2: Elemente der Übergangsmatrix, Veranschaulichung

Schritt 3: Langfristige Entwicklung des Systems, mehrstufige Übergangswahrscheinlichkeiten

Schritt 4: Der Einsatz eines CAS, der Baustein Übergangsmatrix $\Rightarrow$ ma(p,q)

Schritt 5a1: Bildung der Potenzen von ma(p,q)

Schritt 5a2: Interpretation der Ergebnisse aus Schritt 5a1

Schritt 5b1: Stationäre Verteilung, Fixvektor, Lösung eines LGS

Schritt 5b2: Interpretation der Ergebnisse aus Schritt 5b1

Schritt 6: Weitere Modellrechnungen und deren Interpretation

Schritt 7: Funktionale Abhängigkeiten

Schritt 8: Simulation der Maschinenüberwachung

4.1.1. Modellbildung, Schritt 1

Festlegung der Zustände, Aufbau der Übergangsmatrix, Veranschaulichung

Für das System lassen sich *Zustände* festlegen, zwischen denen das System hin- und her pendelt. Im vorliegenden Fall sind die Anzahlen betriebsfähiger Maschinen geeignet. Die Daten für den Wechsel zwischen den einzelnen Zuständen lassen sich in sogenannten *Übergangsmatrizen* zusammenfassen.

1) Wir gehen davon aus, dass 5 Zustände vorhanden sind:

Z0 keine Maschine betriebsfähig
Z1 eine Maschine betriebsfähig
Z2 zwei Maschinen betriebsfähig
Z3 drei Maschinen betriebsfähig
Z4 vier Maschinen betriebsfähig.

Damit hat die Übergangsmatrix die Form

von\nach	Z0	Z1	Z2	Z3	Z4
Z0					
Z1					
Z2					
Z3			#		
Z4					

\# Übergang von *Z3 nach Z2*

Fig.1: Struktur der Übergangsmatrix

Da zu Anfang 3 Maschinen betriebsfähig sein sollen, kann man die *Anfangsverteilung* als Wahrscheinlichkeitsvektor in der Form

$$\begin{array}{c} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \\ \;\; Z0 \;\; Z1 \;\; Z2 \;\; Z3 \;\; Z4 \end{array}$$

schreiben.

In der Regel ist es nützlich, sich die Vorgänge zu veranschaulichen, um so Modellvorstellungen leichter entwickeln zu können. In Anlehnung an die Idee der Baumdiagramme kann das hier z.B. folgendermaßen geschehen:

Kontrollzeitpunkte

0	1	2	3	4	5
Z0	Z0	Z0	Z0	Z0	Z0

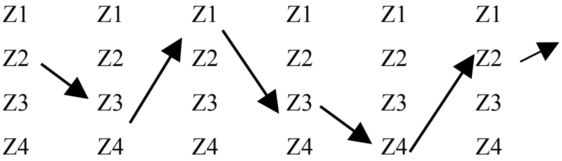


Fig. 2: Einer von vielen möglichen Wegen durch das Kontrollsystem, die *Zustandskette* (Z2, Z3, Z1, Z3, Z4, Z2, ...

Zwanglos ergeben sich hieraus schon einige Fragen,

- wie z.B. nach der Wahrscheinlichkeit für die dargestellte Kette bis zu einem gewissen Kontrollzeitpunkt
- oder gar nach einer Formel dafür - Fragen, die die Schüler selbst stellen können.

4.1.2. Modellbildung, Schritt 2
Die Elemente der Übergangsmatrix, Veranschaulichung

Es ist jeweils zu beachten, dass eine gewisse Anzahl von Maschinen ausfallen kann und dass je nach Vorhandensein defekter Maschinen bis zu zwei davon repariert werden können.

a) Wir zeigen die Berechnung zunächst am Beispiel des Übergangs Z3 nach Z4.

Wenn drei Maschinen betriebsfähig sind, darf für die nachfolgende Periode keine Maschine ausfallen, um Z4 zu erreichen!. Außerdem macht ja die Instandsetzungsabteilung die vorher defekte (eine) Maschine wieder betriebsfähig (laut Voraussetzung). Also ist die Übergangswahrscheinlichkeit P(*Z3 nach Z4*) $= q^3$.

b) Für *Z3 nach Z2* gilt: P(*Z3 nach Z2*) $= 3*p^2q$, denn es muss Folgendes geschehen sein:

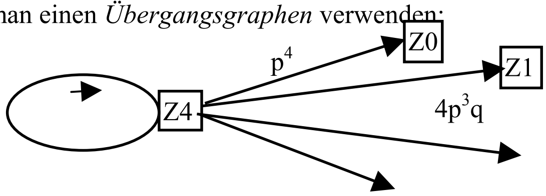
Eine Maschine repariert	zwei ausgefallen	eine nicht ausgefallen	Wahrscheinlichkeit
z.B. M1	M2,M3	M4	p*p*q
	oder M2,M4	M3	p*p*q
	oder M3,M4	M2	p*p*q

c) Wenn anfangs alle Maschinen defekt sind (Zustand Z0), dann kann keine mehr ausfallen, aber zwei können repariert werden. Also ist P(*Z0 nach Z2*) = 1.

Entsprechende Überlegungen sind für alle 25 Übergangswahrscheinlichkeiten anzustellen, wobei sich zahlreiche Werte sehr schnell ergeben. So ergibt sich insgesamt die Übergangsmatrix (mit q = 1-p):

$$M = \begin{array}{c|ccccc} & Z0 & Z1 & Z2 & Z3 & Z4 \\ \hline Z0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ Z1 & 0 & 0 & p & q & 0 \\ Z2 & 0 & 0 & p^2 & 2pq & q^2 \\ Z3 & 0 & p^3 & 3p^2q & 3pq^2 & q^3 \\ Z4 & p^4 & 4p^3q & 6p^2q^2 & 4pq^3 & q^4 \end{array}$$

Die Übergangsmatrix weist interessante Regelmäßigkeiten auf! Die Summe der Elemente jeder Zeile muss gleich 1 sein. Anwendung der binomischen Formeln! Zur Veranschaulichung kann man einen *Übergangsgraphen* verwenden:



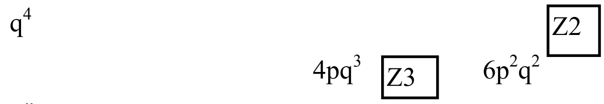


Fig.3: Übergangsgraph (nur in Teilen)

In den Übergangsgraphen kann man alle Pfade mit ihren Wahrscheinlichkeiten eintragen; in Abb.3 wurden aus Gründen der Übersicht nur die Pfade von Z4 aus zu den anderen Zuständen eingezeichnet.

4.1.3. Modellbildung, Schritt 3
Wie entwickelt sich das System langfristig?

Von einem Kontrollzeitpunkt zum nächsten Kontrollzeitpunkt gilt immer wieder die gleiche Übergangsmatrix M – eine gewagte Modellannahme! Abbildung 4 zeigt, dass zahlreiche 2-stufige Übergänge möglich sind, nämlich von

Z0 über (Z0,Z1,Z2,Z3,Z4) zu (Z0,Z1,Z2,Z3,Z4)	25 Übergänge
Z1	25 Übergänge
Z2	25 Übergänge
Z3	25 Übergänge
Z4 über (Z0,Z1,Z2,Z3,Z4) zu (Z0,Z1,Z2,Z3,Z4)	25 Übergänge

das sind insgesamt $5^3 = 125$ Übergänge.

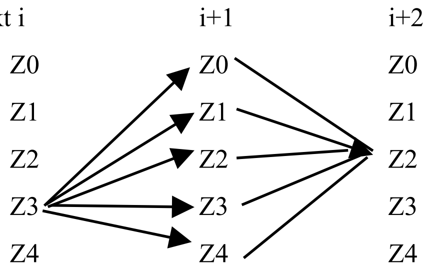


Fig.4: Wege von Z3 nach Z2 mit einem Zwischen-Kontrollpunkt

In der Abbildung wird der 2-stufige Übergang von Z3 nach Z2 dargestellt. Er kann jeden der 5 Zustände als Zwischenzustand annehmen. Verfolgen wir die einzelnen Wege von Z3 nach Z2, so haben wir folgende Wahrscheinlichkeiten zu bilden:

P(Z3 nach Z0) * P(Z0 nach Z2) =	0	*	1
P(Z3 nach Z1) * P(Z1 nach Z2) =	p^3	*	p
P(Z3 nach Z2) * P(Z2 nach Z2) =	$3p^2q$	*	p^2
P(Z3 nach Z3) * P(Z3 nach Z2) =	$3pq^2$	*	$3p^2q$
P(Z3 nach Z4) * P(Z4 nach Z2) =	q^3	*	$6\,p^2\,q^2$

Addition aller Ergebnisse: 3 .Zeile von M *„mal"* 2. Spalte von M (Skalarprodukt)

Durch Addition aller Ergebnisse erhält man die *zweistufige Übergangswahrscheinlichkeit* P(Z3 nach Z2, 2 Stufen) $= 0 + p^4 + 3\,p^4\,q + 9\,p^3\,q^3 + 6\,p^2\,q^5$. In der Sprache der linearen Algebra: Wir haben das *Skalarprodukt* gebildet aus dem Vektor in der 3.Zeile von M mit dem Vektor in der 2.Spalte von M. Bildet man auf diese Weise alle möglichen 25 Skalarprodukt („Zeile * Spalte"), so erhält man die vollständige zweistufige Übergangsmatrix als Produkt der Übergangsmatrix S mit sich selbst: *Zweistufige Übergangsmatrix* S(2 Stufen) $= S*S = S^2$.

Auf diese Weise kommen *Matrizenpotenzen* ins Spiel, was nichts Neues ist, wenn man von den oben formulierten Unterrichtsvoraussetzungen (*Markow*-Ketten mit 2 Zuständen sind bekannt) ausgeht.

5 Der Einsatz eines Computeralgebrasystems (CAS)

Für die weitere Bearbeitung wird als Hilflsmittel das CAS des Taschencomputers TI-92 benutzt. Für die Maschinenüberwachung ergibt sich die Übergangsmatrix von Fig. 1. Sie wird hier in den TI-92 eingegeben als ein *Baustein (Modul)* unter dem Namen ma(p,q).

5.1.1. Modellbildung, Schritt 4 - der Baustein ma(p,q)

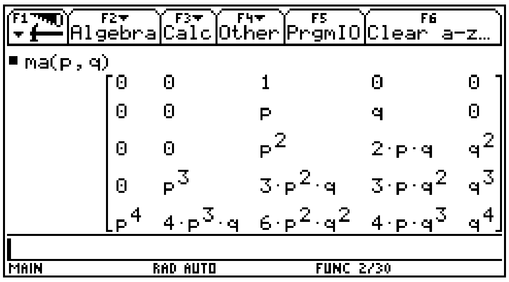


Fig. 5: Die Übergangsmatrix S wird als Baustein ma(p,q) im TI-92 abgelegt.

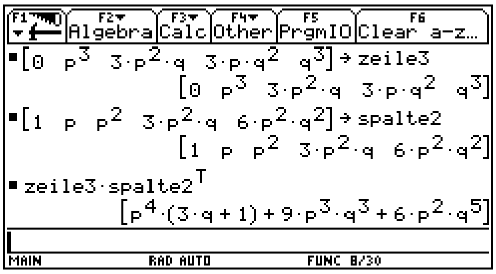


Fig. 6: Kontrolle der obigen Handrechnung, Bildung des Skalarprodukts Zeile3*Spalte2 (transponiert)

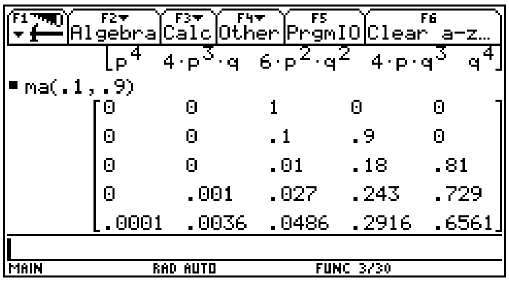


Fig. 7: Ein Bausteinaufruf liefert die Übergangsmatrix für p = 0.1 und q = 0.9

5.1.2. Modellbildung, Schritt 5 - Bildung der Potenzen der Übergangsmatrix

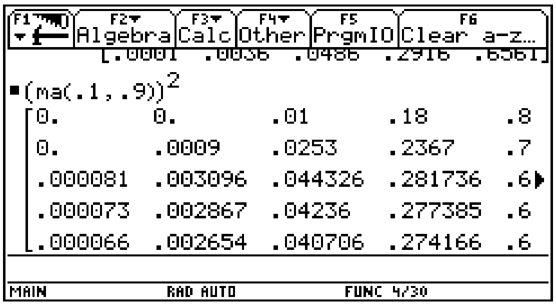


Fig. 8a: Zweistufige Übergangsmatrix

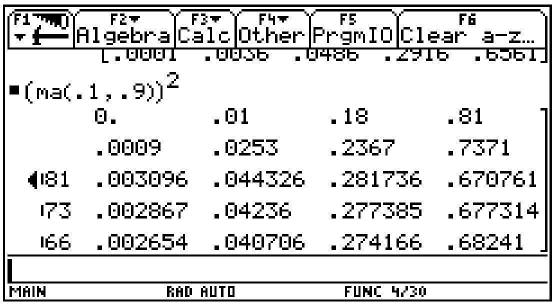


Fig. 8b: Zweistufige Übergangsmatrix mit Spalte 5

Die Matrizen S^3, S^4, ... S^9 werden hier nicht abgedruckt. Ihre Elemente zeigen zunehmende Tendenzen, die hier für S^{10} formuliert werden:

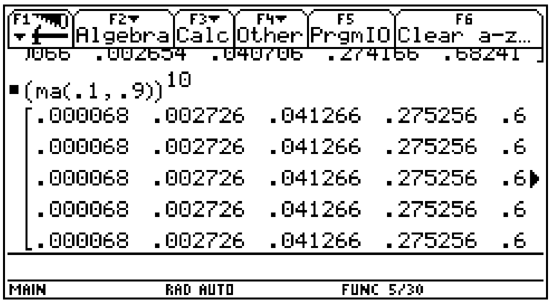


Fig. 9a: Zehnstufige Übergangsmatrix S^{10}

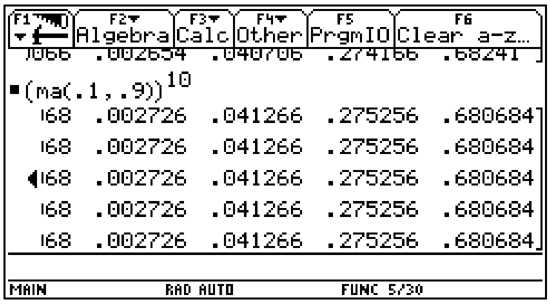


Fig. 9b: Zehnstufige Übergangsmatrix S^{10} mit Spalte 5

5.1.3. Modellbildung, Schritt 5a - Interpretation von Ergebnissen

Bei der zehnstufigen Übergangsmatrix - das Wartungssystem läuft also jetzt 10 Kontrollpunkte lang - fällt unter Beachtung der hier ausgegebenen 6 Nachkommastellen Einiges auf!

a) Alle Elemente einer Spalte sind gleich.

b) Die Zeilen der Matrix stimmen überein.

c) Alle Elemente liegen im Intervall [0,1].

d) Die Summe der Elemente jeder Zeile ist stets gleich 1.

Die Eigenschaften c) und d) sind die bekannten Eigenschaften von stochastischen Matrizen. Es gilt der leicht nachrechenbare

Satz: Das Produkt zweier stochastischer Matrizen (also auch das Produkt einer stochastischen Matrix mit sich selbst) ist wieder eine stochastische Matrix.

e) Bei den folgenden Potenzen ändern sich die Werte (bei 6 Nachkommastellen!) nicht mehr. Es gilt anscheinend

$S^{11} = S^{10} * S$, allgemeiner $S^{n+1} = S^n * S$.

Wir nehmen eine Zeile von S^{10} und rechnen mit dem TI-92:

[0.000068, 0.002726, 0.041266, 0.275256, 0.680684] → g, dann g * ma(0.1,0.9). Wir erhalten tatsächlich wieder den Vektor g.

So lässt sich vermuten, dass sich das System einer festen Matrix G immer mehr nähert.

Entsprechend den Überlegungen bei zweistufigen Matrizen könnten wir dann schreiben

$\lim S^n = G$ für n gegen unendlich.

Das heißt auch: Anscheinend gibt es eine Grenzmatrix G, für die gilt: G*S=G.

Bezeichnen wir die (untereinander gleichen) Zeilenvektoren von G mit g, so gilt damit auch:

Es gibt einen Zeilenvektor g (Grenzverteilung) mit der Eigenschaft g*S = g.

6 Rechnungen – Ergebnisse

Übrigens haben wir bei den Überlegungen bislang an keiner Stelle den Anfangsvektor

(0 0 1 0 0) berücksichtigt!

Bilden wir (0 0 1 0 0) * G so ergibt sich die 3.Zeile von G. Nimmt man als Anfangsvektor z.B. (0 0 0 1 0), so liefert (0 0 0 1 0) * G die 4.Zeile von G. Da aber alle Zeilen von G gleich sind, kann festgehalten werden.

Das ganze System ist offenbar unabhängig vom Anfangsvektor.

6.1.1. Modellbildung, Schritt 5b
Ein zweiter Lösungsweg: Stationäre Verteilung – Fixvektor – Lösung eines LGS

Diese Überlegungen eröffnen nun eine weitere Möglichkeit für die Untersuchung des langfristigen Systemverhaltens. Der Vektor g spielt offenbar die Rolle eines *Fixvektors*. Wenn ein Vektor f mit der Eigenschaft f*S = f tatsächlich existiert, dann kann man ihn aus einem linearen Gleichungsystem errechnen:

f * S = f

$$[a,b,c,d,e] * \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & p & q & 0 \\ 0 & 0 & p\text{^}2 & 2pq & q\text{^}2 \\ 0 & p\text{^}3 & 3p\text{^}2q & 3pq\text{^}2 & q\text{^}3 \\ p\text{^}4 & 4p\text{^}3q & 6p\text{^}2q\text{^}2 & 4pq\text{^}3 & q\text{^}4 \end{pmatrix} = [a,b,c,d,e]$$

mit der Bedingung a + b + c + d + e = 1.

Hinweis: Im Unterrichsablauf wird meistens diese Zusatzbedingung vergessen. Dann ist das LGS zunächst nicht eindeutig lösbar und man kommt im Nachhinein auf diese Bedingung. - Im Unterricht wird man das LGS zuerst auch mit den Zahlenwerten p = 0.1, q = 0.9 bearbeiten.

Wir können nun unter Beachtung der Matrixtypen z.B. folgendermaßen rechnen:

$f_{(1,5)} * S_{(5,5)} = f_{(1,5)}$ mit f = [a,b,c,d,e] und a+b+c+d+e = 1

$f_{(1,5)} * (S_{(5,5)} - E_{(5,5)}) = O_{(1,5)}$,

wobei $E_{(5,5)}$ eine (5,5)-Einheitsmatrix und $O_{(1,5)}$ eine (1,5)-Nullmatrix ist.

Nehmen wir nun noch die zusätzliche Gleichung a + b + c + d + e = 1 in die Matrixgleichung auf, so erhalten wir ausführlich geschrieben:

$$(\#)\ \ [a,b,c,d,e] * \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & p & q & 0 & 1 \\ 0 & 0 & p\text{^}2-1 & 2pq & q\text{^}2 & 1 \\ 0 & p\text{^}3 & 3p\text{^}2q & 3pq\text{^}2-1 & q\text{^}3 & 1 \\ p\text{^}4 & 4p\text{^}3q & 6p\text{^}2q\text{^}2 & 4pq\text{^}3 & q\text{^}4-1 & 1 \end{pmatrix}$$

= [a,b,c,d,e,1]

Für die Berechnung von a, b, c, d, e mit den Wahrscheinlichkeiten p = 0.1 und q = 0.9 hilft uns der TI-92:

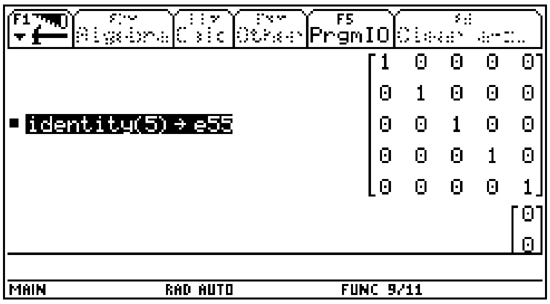


Fig. 10: Wir definieren mit *identity(5)* eine Einheitsmatrix mit 5 Zeilen und 5 Spalten und nennen sie e55.

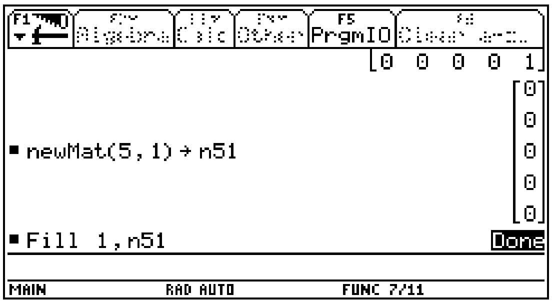


Fig. 11: Der Befehl *newMat(5,1)* stellt eine Nullmatrix aus 5 Zeilen und einer Spalte bereit, die wir mit n51 abkürzen. Der Sinn der Aktion wird unten deutlich. Mit dem *Fill*-Befehl erhält diese Matrix statt der 0-en lauter 1-en.

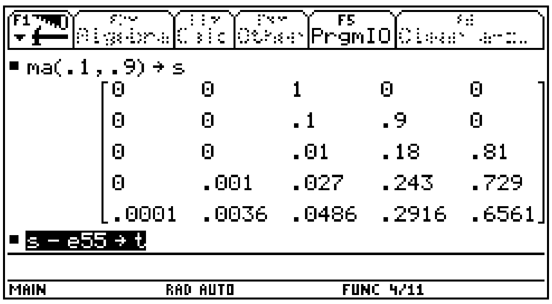


Fig. 12: Nun wird die schon früher definierte Übergangsmatrix mit den Werten p = 0.1 und q = 0.9 bereitgestellt und unter dem Namen S abgespeichert. Anschließend wird von S die Einheitsmatrix subtrahiert.

Die neue Matrix heißt T.

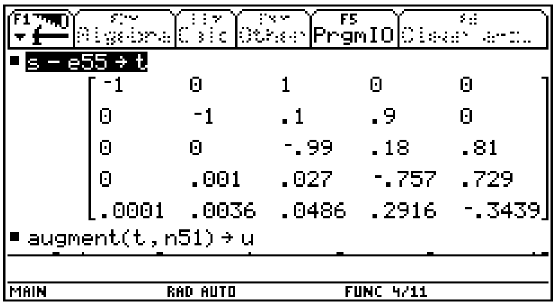


Fig. 13: Ausgabe von T.

Mit *augment(t,n51)* wird an die Matrix T der oben definierte Spaltenvektor n51 mit seinen fünf Einsen angefügt.

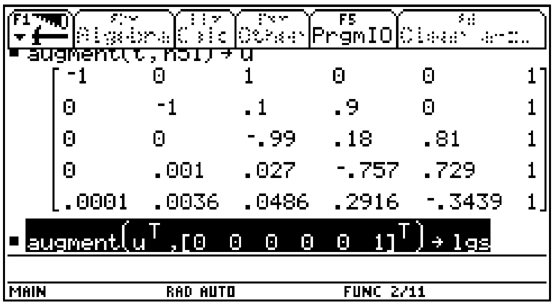


Fig. 14: Die neue Matrix heißt U.
Zur Herstellung der üblichen Form der erweiterten Koeffizientenmatrix des linearen Gleichungssystems wird nun noch U transponiert und an U die rechte Seite des LGS angefügt.

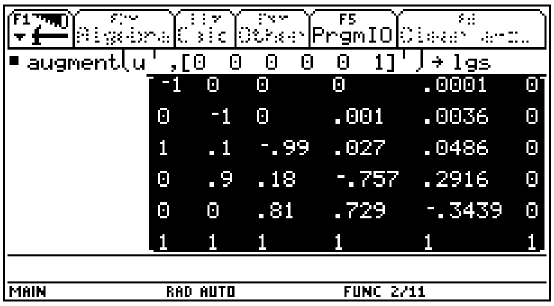


Fig. 15: Die erweiterte Koeffizientenmatrix ist fertig, sie erhält hier den Namen LGS und kann nun mit dem TI-92-Baustein *rref(matrix)* bearbeitet werden.

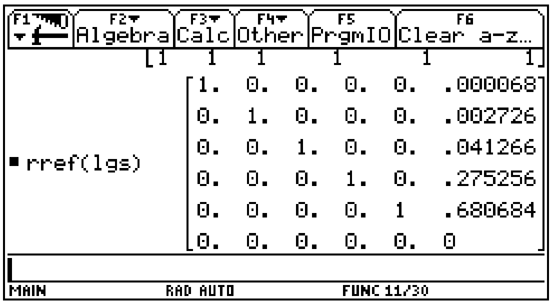


Fig. 16: rref(lgs) löst das Gleichungssystem mit Hilfe des *Gauß*-Verfahrens. Die Lösung kann abgelesen werden. Und siehe da: Es ist der lange erwartete Fixvektor.

Interpretation der Ergebnisse aus Schritt 5b

Die mit rref(lgs) ermittelte Lösung ergibt sich aus der errechneten Matrix, wenn man diese wieder ausführlich als Gleichungssystem schreibt. z.B. lautet die erste Zeile übersetzt:

1a + 0b +0c + 0d + 0e = 0.000068, also a = 0.000068.

Die letzte Zeile ist eine allgemeingültige Aussage für a,b,c,d,e, aber alle Gleichungen müssen ja gleichzeitig erfüllt sein, so dass sich insgesamt eine eindeutige Lösung ergibt.

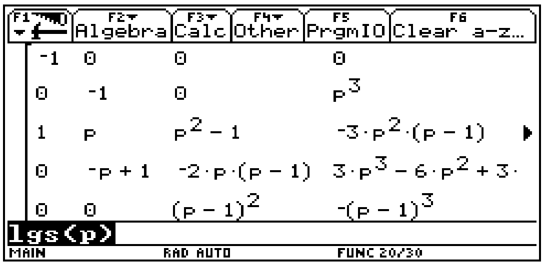
Damit ist die langfristige Systementwicklung mit sich gegenseitig bestätigenden Ergebnissen auf zwei sehr unterschiedliche Arten untersucht worden:

- Über die Folge der Matrizenpotenzen der Übergangsmatrix S
- und über ein lineares Gleichungssystem mit 5 Variablen und 6 Gleichungen.

Hinweis: Oben wurden sämtliche Matrizenrechenoperation mit dem CAS durchgeführt. Man kann selbstverständlich auch einige Schritte überspringen und sich die Matrix „lgs“ von Hand ermitteln.

6.1.2. Modellbildung Schritt 6: Weitere Modellrechnungen und deren Interpretationen

Ein CAS bietet nun auch die Möglichkeit, das Gleichungssystem allgemein zu bearbeiten. Allgemein formuliert lautet das der Abbildung 14 entsprechende lineare Gleichungssystem:



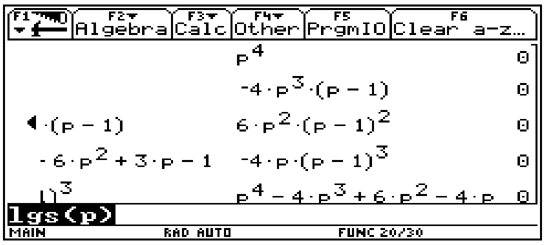


Fig. 17: Das allgemeine LGS, in Zeile 6 stehen noch überall 1-en. Das LGS wird als Baustein mit dem Namen „lgs(p)“ gespeichert.

Nun können durch unterschiedliche Wahl von p (Ausfallwahrscheinlichkeit jeder Maschine) diverse Modellrechnungen durchgeführt werden, wie oben bereits für p = 0.1 geschehen. Hier zeigt sich erneut einer der großen Vorteile von CAS. So ergibt sich z.B. für p = 0.05:

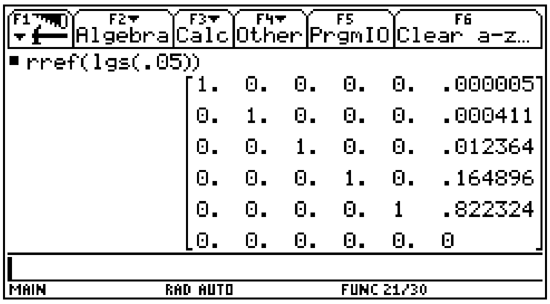


Fig.17a: Werte für p=0.05

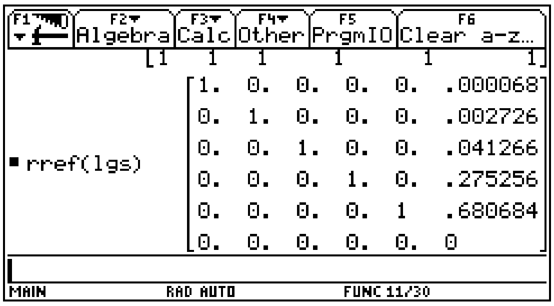


Fig.17b: Werte für p=0.1

Interpretation: Wenn es also gelingt, die Ausfallwahrscheinlichkeit um die Hälfte zu senken, so erhöht sich z.B. die Wahrscheinlichkeit für das Funktionieren aller vier Maschinen von 0.68 auf 0.82.

6.1.3. Modellbildung Schritt 7: Funktionale Abhängigkeiten

Betrachtet man noch andere p-Werte, so gelangt man zu der Idee, nach einer funktionalen Abhängigkeit zu fragen. Dazu ist das LGS lgs(p) allgemein zu lösen. Hier allerdings versagt der TI-92 - er gibt für die Elemente der Ergebnismatrix „undef“ an. Mit DERIVE am PC kommt man jedoch weiter:

(1) Wir zerlegen das LGS in die Koeffizientenmatrix und die rechte Seite (für p wird hier x geschrieben)

MASCHINE(x) := [[-1,0,0,0,x^4], [0,-1,0,x^3,-4*x^3*(x-1)],
[1,x,x^2-1,-3*x^2*(x-1),6*x^2*(x-1)^2],
[0,-x+1,-2*x*(x-1),3*x^3-6*x^2+3*x-1,-4*x*(x-1)^3],
[0,0,(x-1)^2,-(x-1)^3,x^4-4*x^3+6*x^2-4*x],[1,1,1,1,1]]

rechteseite: = [[0],[0],[0],[0],[0],[1]]

(2) Nun wird der Befehl row_reduce benutzt:

ROW_REDUCE(MASCHINE(0.1),rechteseite) löst das LGS für x = p = 0.1

ROW_REDUCE(MASCHINE(x),rechteseite) löst das LGS allgemein

(3) Das Ergebnis nennen wir maschineloes(x):

MASCHINELOES(x) :=

[[1,0,0,0,0,x^4*(x-1)^2*(x^4-2*x^3+2*x^2-x+1)/(x^10-2*x^9+x^7+2*x^5-5*x^4+3*x^3-x^2+x+1)],
(1.Zeile der Lösungsmatrix)

[0,1,0,0,0,2*x^3*(x^6-5*x^5+10*x^4-12*x^3+10*x^2-6*x+2)/(x^10-2*x^9+x^7+2*x^5-5*x^4+3*x^3-x^2+x+1)],
(2.Zeile der Lösungsmatrix)

[0,0,1,0,0,x^2*(3*x^6-16*x^5+36*x^4-45*x^3+35*x^2-18*x+6)/(x^10-2*x^9+x^7+2*x^5-5*x^4+3*x^3-x^2+x+1)],
(**3.Zeile der Lösungsmatrix)**

[0,0,0,1,0,2*x*(2*x^6-9*x^5+17*x^4-18*x^3+12*x^2-6*x+2)/(x^10-2*x^9+x^7+2*x^5-5*x^4+3*x^3-x^2+x+1)],
(4.Zeile der Lösungsmatrix)

[0,0,0,0,1,(x-1)^2*(x^4-2*x^3+2*x^2-x+1)/(x^10-2*x^9+x^7+2*x^5-5*x^4+3*x^3-x^2+x+1)],
(5.Zeile der Lösungsmatrix)

[0,0,0,0,0,0]] **(6.Zeile der Lösungsmatrix)**

Die Richtigkeit kann man durch Einsetzen von x-Werte, z.B. x = 0.1 oder x = 0.05 überprüfen. Nun erkennen wir auch die funktionalen Abhängigkeiten, die durch recht komplizierte Terme beschrieben werden. Aber das CAS schafft nun auch noch die graphische Darstellung. Nehmen wir z.B. die (langfristige) Wahrscheinlichkeit für die Betriebsfähigkeit aller 4 Maschinen:

$$\frac{(x-1)^2(x^4-2x^3+2x^2-x+1)}{x^{10}-2x^9+x^7+2x^5-5x^4+3x^3-x^2+x+1}$$

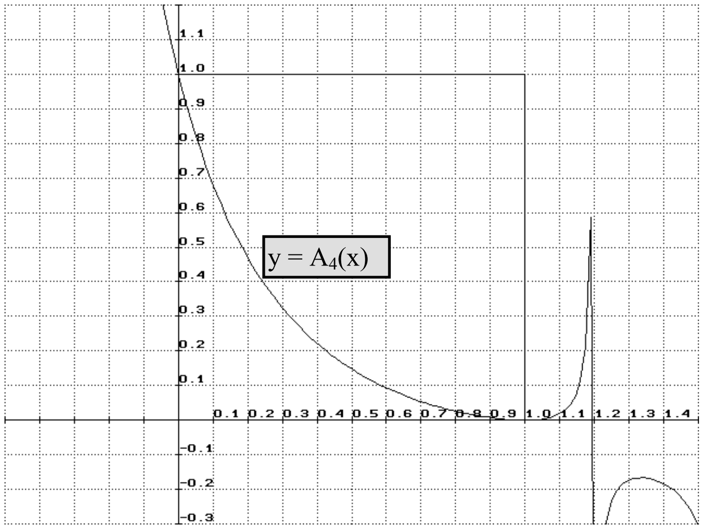


Fig. 19: Wahrscheinlichkeit für die Betriebsfähigkeit aller vier Maschinen in Abhängigkeit von der Ausfallwahrscheinlichkeit p (bzw. x), Definitionsbereich x aus [0,1]

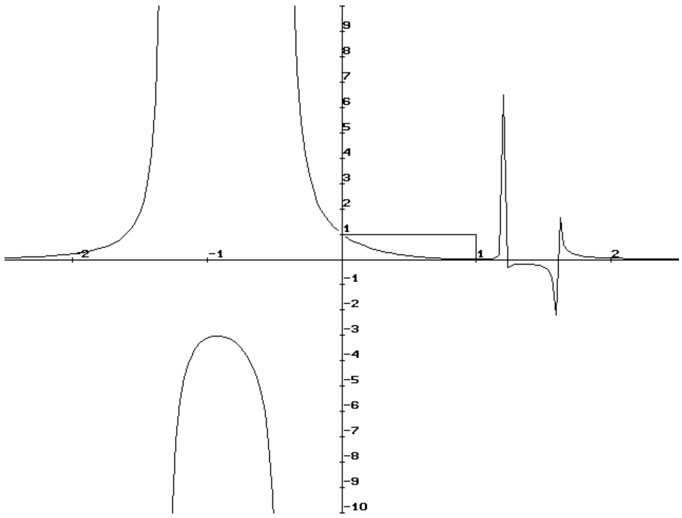


Fig. 20: Graph der Funktion y=A_4(x) über einem größeren Definitionsbereich

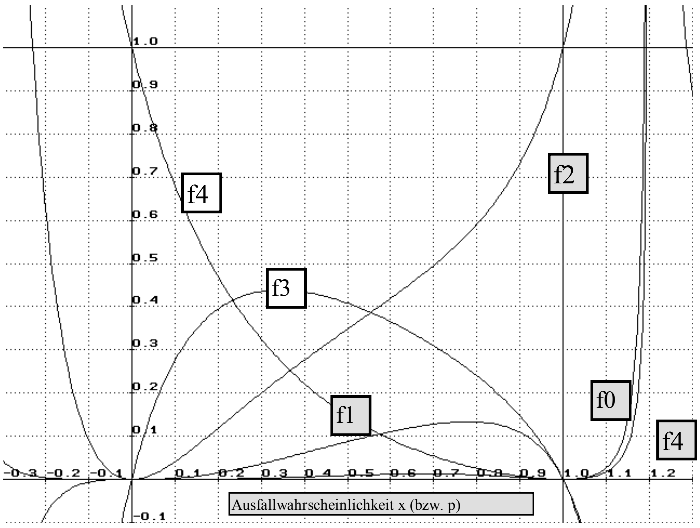


Fig. 21:Wahrscheinlichkeiten für die Betriebsfähigkeit von 0,1,2,3,,4 Maschinen in Abhängigkeit von der Ausfallwahrscheinlichkeit p (bzw. x), Definitionsbereich x aus [0,1]

Wahrscheinlichkeiten dafür, dass

- keine Maschine betriebsfähig f0
- eine Maschine betriebsfähig f1
- zwei Maschinen betriebsfähig f2
- drei Maschinen betriebsfähig f3
- vier Maschinen betriebsfähig f4

Die Graphen können nun gemäß den Problemstellungen interpretiert werden. Zum Beispiel kann die Frage beantwortet werden, für welche Ausfallwahrscheinlichkeit p die Wahrscheinlichkeit der Betriebsfähigkeit von zwei Maschinen am größten ist (Extremwertberechnungen).

Und nun die wohl am leichtesten verständliche Bearbeitung mit den geringsten notwen-digen Vorkenntnissen.

6.2.x. Modellbildung, Schritt 8: Simulation der Maschinenüberwachung

Für die Simulation des Kontrollsystems kann man sich Glücksräder vorstellen, die je nach Zustand des Systems eine passende Einteilung haben. Befindet sich das System z.B. im Zustand 4, so muss das Glücksrad folgendermaßen eingeteilt sein:

Sektor	0	1	2	3	4
Wahrscheinlichkeiten	p^4	$4p^3q$	$6p^2q^2$	$4pq^3$	q^4
und für z.B. p=0.1, q=0.9	0.0001	0.0036	0.0486	0.2916	0.6561

So gibt es also fünf passende Glücksräder und je nach erreichtem Zustand wird das zugehörige Glücksrad benutzt. Für die Wahrscheinlichkeiten bei Zustand 4 kann man wie folgt vorgehen: Wir erzeugen eine Zufallszahl R aus dem Intervall [0,1[und bilden Teilintervalle:

von Zustand → zu Zustand	Wahrscheinlichkeit	Zugehörige Teilintervalle	Länge des Restintervalls
Z4 → Z0	0.0001	[0;0.0001[	0.9999
Z4 → Z1	0.0036	[0.0001;0.0037[	0.9963
Z4 → Z2	0.0486	[0.0037; 0.0523[	0.9477
Z4 → Z3	0.2916	[0.0523; 0.3439[	0.6561
Z4 → Z4	0.6561	[0.3439; 1[	0

Unter Berücksichtigung der Längen der Restintervalle bilden wir nun den Term

T = int(R+0.9999) + int(R+0.9963) + int(R+0.9477) + int(R+0.6561),

wobei int(x) die Vorkommastelle von x liefert. Dieser Term nimmt die Werte 0,1,2,3,4 an, und zwar gerade mit den gewünschten Wahrscheinlichkeiten.

Übergänge vom Zustand 4 aus:
T = int(R+0.9999)+int(R+0.9963)+int(R+0.9477)+int(R+0.6561)

Wenn nun

R ∈ [0;0.0001[,	dann T = 0	+	0	+	0	+	0	= **0**
R ∈ [0.0001;0.0037[,	dann T = 1	+	0	+	0	+	0	= **1**
R ∈ [0.0037; 0.0523[,	dann T = 1	+	1	+	0	+	0	= **2**
R ∈ [0.0523; 0.3439[,	dann T = 1	+	1	+	1	+	0	= **3**
R ∈ [0.3439; 1[,	dann T = 1	+	1	+	1	+	1	= **4**

In [1] wurde für *Markow*-Ketten mit n Zuständen eine Formel entwickelt, die sich an unserem Beispiel leicht nachvollziehen lässt:

In der Zeile k der Übergangsmatrix mögen die Übergangswahrscheinlichkeiten p_1 bis p_n für die Übergänge von Zustand Zk zu den Zuständen Z1 ... Zn stehen. Dann gilt für die Simulation dieser Übergänge die folgende Formel:

$$T = \text{int}(R+1-p_1) + \text{int}(R+1-(p_1+p_2)) + \text{int}(R+1-(p_1+p_2+p_3)) + \ldots + \text{int}(R+1-(p_1+p_2+\ldots+p_{n-1}))$$

Insgesamt ergeben sich damit folgende Simulationsformeln:

Übergänge vom Zustand 0 aus:
T = int(R+1.0000) + int(R+1.0000) + int(R+0.0000) + int(R+0.0000)

Übergänge vom Zustand 1 aus:
T = int(R+1.0000) + int(R+1.0000) + int(R+0.9000) + int(R+0.0000)

Übergänge vom Zustand 2 aus:
T = int(R+1.0000) + int(R+1.0000) + int(R+0.9900) + int(R+0.8100)

Übergänge vom Zustand 3 aus:
T = int(R+1.0000) + int(R+0.9990) + int(R+0.9720) + int(R+0.7290)

Übergänge vom Zustand 4 aus:
T = int(R+0.9999) + int(R+0.9963) + int(R+0.9477) + int(R+0.6561)

Eine Simulation mit dem Startzustand Z2 und 10000 Durchgängen ergab das folgende Protokoll:

Zustände von 0 bis 4 Anfangszustand = 2

Ausgabe aller Zustände (j,n) = j

2 3 4 4 3 4 4 4 4 4 4 2 3 4 2 3
1 3 4 4 3 4 3 3 4 usw.

Bei der vorliegenden Simulation startet man also mit Zustand 2 gelangt dann nach Zustand 3, dann 4 ,4 usw.

Anzahl der Übergänge zwischen den Zuständen:

nach	*0*	*1*	*2*	*3*	*4*
von 0:	*0*	*0*	*0*	*0*	*0*
von 1:	*0*	*0*	*3*	*25*	*0*
von 2:	*0*	*0*	*6*	*79*	*327*

von 3: 0 2 70 675 2034
von 4: 0 26 332 2003 4418

Zustand	absolute	relative Häufigkeit	*oben errechnet*
0	0	0.0000	*0.000068*
1	28	0.0028	*0.002726*
2	411	0.0411	*0.041266*
3	2782	0.2782	*0.275256*
4	6779	0.6779	*0.680684*

Wir erkennen durch Vergleich mit früheren Ergebnissen, dass auch eine Simulation zu brauchbaren Ergebnissen führen kann.

Hinweis: Für die Simulation wurde das sich speziell mit *Markow*-Ketten beschäftigende Programm MARKOW benutzt (siehe [5]). Die Simulation mit einem CAS ist nicht ganz einfach und erfordert eine Programmierung innerhalb des CAS; hier wird darauf verzichtet.

7 Methodische Anmerkungen

Unterrichtseinstieg: Modellbildung in arbeitsteiligen Gruppen

Ein schöner Einstieg in die Unterrichtsreihe ergibt sich, indem man unterschiedliche Probleme, die auf die typischen Kennzeichen von *Markow*-Ketten führen, formuliert und jeweils an eine Schülergruppe gibt. Die Kennzeichen können dann herausgearbeitet und allgemein formuliert werden.

An alle Gruppen geht die Aufforderung:

In den Problemstellungen finden Sie Formulierungen, die den Prozess der mathematischen Modellbildung bereits eingeleitet haben. Nennen Sie diese Voraussetzungen! Benutzen Sie für die mathematische Modellierung geeignet erscheinende Werkzeuge, wie die Programme DERIVE, HL-PLOT11 usw.

Auch hier ergeben sich schöne methodische Varianten - etwa in Abhängigkeit von der Leistungsstärke der Gruppen - indem z.B. einer der Gruppen der konkrete Hinweis auf das speziell für *Markow*-Ketten geeignete Programm MARKOW gegeben wird. Eine andere Möglichkeit besteht im Hinweis auf das Internet und Recherchen zum Suchwort „*Markow*-Kette“.

Abschließend noch zwei weitere Anwendungsprobleme für *Markow*-Ketten:

7.1. Problem 2: Versandabteilung

Eine Versandabteilung erhält Aufträge an jedem Morgen zu Beginn der Arbeitszeit. Der Auftragseingang an verschiedenen Tagen erfolge unabhängig voneinander. An einem Tag sollen höchstens zwei Bestellungen eingehen. Die Wahrscheinlichkeiten für den Eingang keiner, einer oder zweier Bestellungen seien 0.3, 0.5, 0.2. Die Erledigung eines Auftrags möge genau einen Tag in Anspruch nehmen.. Falls schon vor den Neuzugängen am Morgen drei Aufträge vorliegen, wird höchstens noch ein Auftrag angenommen. Die Höchstzahl unbearbeiteter Aufträge ist also 3.

Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass am Morgen des vierten Tages zwei Aufträge vorliegen (ohne eventuelle Neuzugänge des vierten Tages), wenn am Morgen des ersten Tages ein Auftrag vorlag? Wie entwickelt sich das System langfristig?

Die Übergangsmatrix entnimmt man dem Text. Sie lautet hier:

Zustand 0 1 2 3

$$\begin{pmatrix} 0.8 & 0.2 & 0 & 0 \\ 0.3 & 0.5 & 0.2 & 0 \\ 0 & 0.3 & 0.5 & 0.2 \\ 0 & 0 & 0.3 & 0.7 \end{pmatrix}$$

7.2. Problem 3: Sessellift

Ein Sessellift kann alle 30 Sekunden eine Person befördern. Innerhalb dieses Zeitraums kommen höchsten 2 Personen am Lift an. Die Zugänge erfolgen zufällig und in den einzelnen Zeitintervallen unabhängig voneinander. Es gilt:

Anzahl der eintreffenden Personen im Zeitintervall	0	1	2
Wahrscheinlichkeiten, allgemein	p	u	v
Wahrscheinlichkeiten, Beispiel	0.3	0.2	0.5

Als maximale Schlangenlänge werden 6 Personen zugelassen.

a) Man zeichne einen Übergangsgraphen und bestimme die Übergangsmatrix.

b) Man untersuche das langfristige Systemverhalten.

Anhang: Definitionen - Sätze zu *Markow*-Ketten

***Markow*-Kette**

Gegeben sei eine *Folge von Zufallsexperimenten* mit dem *endlichen Zustandsraum Z* = $\{Z_1, Z_2, ...Z_n\}$. Es möge jeweils nur einer der n Zustände eintreten.

Diese Folge bildet eine *endliche Markow-Kette*, wenn die *Übergangswahrscheinlichkeit* p_{ji}, dass der Zustand Z_i im k-ten Experiment (Übergang, Schritt) eintritt, nur davon abhängt, welcher Zustand Z_j im (k-1)-ten Experiment eintraf. Die Übergangswahrscheinlichkeiten werden in einer *Übergangsmatrix S* zusammengefasst. Sind diese Übergangswahrscheinlich-keiten auch noch unabhängig von der Nummer des Experiments, so spricht man von einer *endlichen homogenen Markow-Kette*.

Für homogene *Markow*-Ketten sind also die Übergangsmatrizen von Experiment zu Experiment gleich. Für den Start des Systems liegt in der Regel eine *Anfangsverteilung* v_0 mit den augenblicklichen Wahrscheinlichkeiten für die einzelnen Zustände vor.

Eine *Markow*-Kette kann also durch das Tripel (Z, S, v_0) beschrieben werden.

Z Zustandsraum, S Übergangsmatrix, v_0 Anfangsverteilung

Kernstück der Theorie über *Markow*-Ketten ist der folgende

Grenzwertsatz: Gegeben sei eine endliche homogene *Markow*-Kette *(Z, S, v_0)* mit der Anfangsverteilung v_0 der Übergangsmatrix S und dem Zustandsraum Z = $\{Z_1, Z_2, ...Z_n\}$, bestehend aus n Zuständen. Die Übergangsmatrix S^t (Übergangsmatrix nach t Schritten) habe mindestens eine Spalte k_0, in der alle Elemente positiv sind.

a) Dann existieren alle Grenzwerte $lim\ p_{ik}^{(t)}$, $t \to \infty$ (Grenzwahrscheinlichkeiten) , der t-stufigen Übergangswahrscheinlichkeiten, und es gilt lim $p_{ik}^{(t)} = g_k$ (unabhängig von den Zeilennummern j) für alle Nummern j, k aus dem Zustandsraum Z. Dabei ist die Summe aller g_k gleich 1. - Die Matrix $S^\infty = G$ aus den Grenzwahrscheinlichkeiten hat also lauter gleiche Zeilen $g = [g_1, g_2, ...g_n]$.

b) $g = [g_1, g_2, ...g_n]$ ist unabhängig von der Anfangsverteilung v_0.

c) $g = [g_1, g_2, ...g_n]$ ist die einzige Lösung des linearen Gleichungssystems

$$w = wS \text{ mit } w_1 + w_2 + ... + w_n = 1.$$

Die stationäre Verteilung w ist also unter den angegebenen Voraussetzungen gleichzeitig auch Grenzverteilung: w = g.

Dieser Satz lässt sich

- an Beispielen (für zwei oder mehr Zustände) plausibel machen, da man ja oft einfach nachrechnen kann oder auch
- für n = 2 Zustände beweisen.

Ein allgemeiner Beweis kann nur mit leistungsstarken Schülern besprochen werden. Er wird in [4, S.101 f.] allgemein, dabei aber auch mit einem begleitenden Zahlenbeispiel durchgeführt.

Literatur

[1] *Lehmann, E.*: Simulation von endlichen *Markoff*-Ketten. **DdM** (1978) 227-242.

[2] *Lehmann, E.*: *Markow*-Ketten, in MU. **MU**, H. 5/1986, S. 60-92 (Gebietsübergreifende Ansätze im Mathematikunterricht).

[3] *Lehmann, E.*: Wahrscheinlichkeitsrechnung - problemorientierte Unterrichtseinheiten, 112 S. Volk und Wissen Verlag, Berlin 1997. I*m Inhalt u.a.*
Kap.2: Eine Studie zum Kaufverhalten (Markow-Kette mit 2 Zuständen)
Kap.3: Das Crapspiel (Markow-Kette mit 6 Zuständen)
Kap.4: Sammelbilderproblem (Markow-Kette mit 7 Zuständen)

[4] *Lehmann, E.*: Fallstudien mit dem Computer - *Markow*-Ketten und weitere Beispiele aus der linearen Algebra und Wahrscheinlichkeitsrechnung, B.G.Teubner, Stuttgart 1986 (vergriffen).

[5] *Lehmann,E.*: Programmsystem MARKOW (unter DOS), bearbeitet *Markow*-Ketten mit 2 und mehr Zuständen auf verschiedene Weisen.

Anschrift des Verfassers:

Eberhard Lehmann, Geitnerweg 20c, 12209 Berlin-Lichterfelde,
E-Mail: mirza@.snafu.de, URL: www.snafu.de/~mirza

Kurzfassung:

Probleme aus dem Bereich der Markow-Ketten zeichnen sich aus durch

(1) hohen Anwendungsbezug,

(2) gute Visualisierungenmöglichkeiten für Ketten mit zwei Zuständen,

(3) vielseitige Modellierungsmöglichkeiten mit gebietsübergreifenden, dennoch auch voneinander unabhängigen Bearbeitungsmethoden aus Analysis, linearer Algebra und Stochastik,

(4) vielfache Möglichkeiten des Computereinsatzes als Rechen- und Zeichenhilfsmittel und zum Experimentieren durch Modellrechnungen.

In dem Beitrag werden alle Aspekte bis auf (2) angesprochen.