Terme im Mathematikunterricht

unter Verwendung von

Computergrafik und Computeralgebra

Eberhard Lehmann

Schroedel-Verlag
Hannover 1999

Impressum muß ergänzt werden!!

Vorwort

Mit der Broschüre „TIMMS und der Mathematikunterricht“ hat der Schroedel-Verlag auf die neuen Herausforderungen an den Mathematikunterricht reagiert und seine Bereitschaft bekundet „mit neuen Materialien die Weiterentwicklung der Unterrichtskultur (zu) fördern“. Neben allgemeinen Informationen und Analysen zu TIMMS wurden bereits einige Konsequenzen für den Unterricht gezogen.

Mit der hier vorliegenden Broschüre soll nun der gewünschte Mathematikunterricht an einem klassischen Unterrichtsgebiet - dem Thema „Terme und Termumformungen - konkretisiert werden. Eine neue Unterrichtskultur kann dabei heute nur unter hinreichender Berücksichtigung der neuen Medien - insbesondere des Computers - erreicht werden. **Es ist unrealistisch, ein Szenario für offenen, problem- und anwendungsorientierten Mathematikunterricht zu entwerfen, das den bei den Schülern schon fast selbstverständlich vorhandenen Computer mit seinen vielfältigen Möglichkeiten übergeht.**

In den vergangenen Jahren haben sich die Veröffentlichungen zum Computereinsatz im Mathematikunterricht so gehäuft, dass eine gewaltige Ideenbörse für den Unterricht entstanden ist. Leider ist es bislang nicht gelungen, diese Ideen in breiter Front in die Schulen zu bringen, so dass sich die Schere zwischen den überzeugten Verfechtern der neuen Möglichkeiten und den vielen zögernden Lehrern eher vergrößert hat. Das liegt nicht zuletzt an der verfehlten Konzeption von Lehrerfortbildung, die fast nur auf das Multiplikatorenprinzip und einzelne Lehrer gesetzt hat - in der trügerischen Hoffung, dass diese schon für die Verbreitung an ihrer Schule sorgen könnten. Es wurde nicht beachtet, dass sich der Mathematikunterricht an einer bestimmten Schule nur dann grundlegend - und das heißt durchgehend in allen Klassenstufen - ändern kann, wenn alle Lehrer des Fachbereichs von der Sache überzeugt sind und sie praktizieren.

Weiterhin wurde in den Fortbildungen oft zu wenig berücksichtigt, dass jeder Computereinsatz eine grundlegende Veränderung der Unterrichtsmethoden mit sich bringt, eben gerade hin zu offeneren Unterrichtsformen wie sie nun propagiert werden. Fortbildungskurse beschäftigten sich zu sehr mit Fragen der Softwarebeherrschung und fachlichen Fragen, jedoch nicht mit den mindestens genauso wichtigen methodischen Fragen.

Schließlich enthält die oben erwähnte Ideenbörse vorwiegend Beispiele für schöne mathematische Themen, während die viel mehr Unterrichtszeit beanspruchenden Standardthemen des Mathematikunterrichts weniger Interesse fanden.

Hier setzt nun die vorliegende Broschüre an. Sie möchte das (als langweilig bezeichnete) Standardthema „Terme und Termumformungen“ so aufbereiten, dass konkreter Unterricht unter neuen Aspekten stattfinden kann. Das soll erreicht werden durch:

- Bereitstellung abwechslungsreicher und interessanter Probleme zum Thema „Terme / Termumformungen“
- Problemorientierung, Anwendungsorientierung, Materialorientierung
- Aufbereitung einiger Themen unter methodischen Aspekten einer neuen Unterrichtskultur (offener Unterricht wie z.B. Projektarbeit)
- Berücksichtigung einer neuen Aufgabenkultur
- durchgehende Berücksichtigung von Veranschaulichungsmöglichkeiten
- angemessene Einbeziehung des Computers (Computeralgebrasystem: DERIVE, TI-92, TI-89, Funktionenplotter) unter verschiedenen Aspekten
  - als Werkzeug (Rechenhilfsmittel, Zeichenhilfsmittel)
  - zum experimentellen und forschenden Arbeiten
  - als Ideenproduzent, etwa zum Entdecken neuer Fragestellungen
  . als Dokumentationshilfsmittel
- Entscheidungshilfen für die sinnvolle Auswahl von Termen und Termumformungen und damit Vermeidung sinnlosen Umgangs mit Termen

Inhaltsverzeichnis

1. Terme: Analyse der bisherigen Unterrichtspraxis und Thesen

1.1 So nicht! - Analyse der bisherigen Unterrichtspraxis

Berechne und vereinfache (G = Q):

1. $\frac{5}{2x+2}=\frac{2}{4x-4}$

2. $\frac{c+5}{2c-6}=\frac{c+13}{2c+2}$

3. $z - \frac{z}{z-2y}+\frac{y}{z+2y}-\frac{yz}{4y^2-z^2}$

4. $\frac{3x}{2x+2}+\frac{2x}{4x+4}+\frac{7}{6x+6}$

5. $\frac{x-1}{8x-16}+\frac{1-x}{5x-10}=\frac{-3}{40x-80}$

6. $\frac{4}{x+3}-\frac{2}{x+1}=\frac{5}{3x+9}-\frac{5}{4x+4}$

Als Ausgangspunkt der Überlegungen diene eine Klassenarbeit, wie sie 1997 in einer 8.Klasse geschrieben wurde - und möglicherweise kein Einzelfall ist.

Einige kritische Fragen:

- Wie sieht Unterricht zu einer solchen Klassenarbeit aus?
- Wie lange muss im Unterricht geübt werden, um bei dieser Arbeit erfolgreich zu sein?
- Werden die auftretenden Terme in der Sekundarstufe 1 irgendwann benötigt? Werden sie später benötigt?
- Ist es nicht schade um die hierfür verwendete Zeit?

Erfahrungsgemäß können auch lange Übungsphasen nicht verhindern, dass sich einige Schüler (die schwachen!) verrechnen und bei dieser Arbeit versagen. Das Üben ist hier (wie bei den anderen Standardthemen auch) eine langweilige Tätigkeit, die bei den Schülern eher Frust gegenüber der Mathematik erzeugt, also demotivierend wirkt. Andere interessantere Themen müssen aus Zeitgründen zu kurz kommen.

Offenbar spielen die genannten Terme im Unterricht der Sekundarstufe 1 im Vergleich zu ihren Anwendungsmöglichkeiten eine viel zu große Rolle. Auch in der Sekundarstufe 2 werden sie nur bei wenigen Themen benötigt: Gebrochen rationale Funktionen, Hyperbeln, Partialbruchzer-

instrumentelles Verhältnis zur Mathematik durch- und festgesetzt hat. Nun will ich nicht bestreiten,

legung - und bis zur Sekundarstufe 2 ist es von Klasse 8

aus ein weiter Weg. - Also liegt offenbar unsinniges Vorratslernen vor und es stellen sich die Fragen:.
Was gewinnt man für den Mathematikunterricht? Ist das die Mathematik, die wir heute Schülern vermitteln sollten?

Hierzu wird aus einem Aufsatz von Enzensberger zitiert:

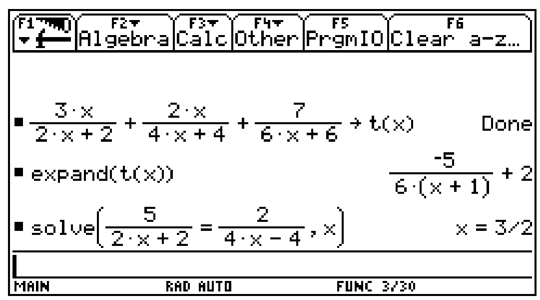
Zugbrücke außer Betrieb
Die Mathematik im Jenseits der Kultur - Eine Außenansicht

„... Die Versäumnisse liegen tiefer und haben ältere Wurzeln. Man kann sich fragen, ob es in den ersten fünf Jahren des Curriculums überhaupt so etwas wie einen mathematischen Unterricht gibt. Was dort gelehrt wird, hat man früher völlig zu Recht als „Rechnen“ bezeichnet. Auch heute noch werden die Kinder jahrelang fast ausschließlich mit öden Routinen gepeinigt, ein Verfahren, das auf die Epoche der Industrialisierung zurückgeht und inzwischen völlig veraltet ist. Bis um die Mitte des 20.Jahrhunderts
verlangte der Arbeitsmarkt von der Mehrzahl der Beschäftigten nur drei rudimentäre Fertigkeiten: Lesen, Schreiben und Rechnen. Die Elementarschule war dazu da, notdürftig alphabetisierte Arbeitskräfte zu liefern. Das dürfte die Erklärung dafür sein, daß sich in der Schule ein rein
daß es sinnvoll ist, das Einmaleins zu beherrschen und zu wissen, wie man einfache Dreisatz-

oder Bruchrechnungen auszuführen hat. Aber mit mathematischem Denken hat das alles nichts zu tun. Es ist so, als würde man Menschen in die Musik einführen, indem man sie jahrelang Tonleitern üben läßt. Das Resultat wäre vermutlich lebenslanger Haß auf diese Kunst.

Kindliche Faszinationen
In den höheren Schulklassen geht es meist nicht viel anders zu. Die analytische Geometrie wird vorwiegend als eine Sammlung von Rezepten behandelt, ebenso die Infinitesimalrechnung. Das hat zur Folge, daß man gute Noten erzielen kann, ohne eigentlich verstanden zu haben, was man tut. Das gute Abschneiden sei jedem Abiturienten gegönnt, um so mehr, da er auf Lehrplan und Methode nicht den geringsten Einfluß hat. Nur darf man sich nicht darüber wundern, daß ein solcher Unterricht letzten Endes den mathematischen Analphabetismus fördert. Seinen funktionellen Sinn hat er ohnehin längst verloren, weil sich die Standards des Arbeitsmarktes und der Technik in den letzten Jahrzehnten entscheidend verändert haben. Kein Sechzehnjähriger wird einsehen, warum er sich mit langweiligen Berechnungen abgeben soll, die jeder Kaufhaus-Taschenrechner rascher und besser erledigen kann.
Aber der übliche Mathematikunterricht langweilt nicht nur, er unterfordert vor allem die Intelligenz der Schüler. Es scheint eine Idee der Pädagogik zu sein, daß Kinder nicht in der Lage sind abstrakt zu denken. Eher ist das Gegenteil richtig. ... Wahrscheinlich ist ihre Aufnahmefähigkeit für mathematische Ideen überhaupt größer als die der meisten Erwachsenen; diese nämlich haben den üblichen Bildungsgang bereits hinter sich gebracht. Von den Beschädgungen, die sie dabei erlitten haben, werden sie sich in den meisten Fällen nie wieder erholt haben...“
Hans Magnus Enzensberger - Frankfurter Allgemeine, 29.August 1998, Nummer 200

Was macht ein Computeralgebrasystem mit Aufgaben wie sie oben genannt sind?



Aber auch die Bearbeitung der obigen Aufgaben mit einem CAS scheint an dieser Stelle (Klasse 8) nicht sinnvoll zu sein, denn die anderen genannten Vorbehalte bleiben erhalten. Das zeigt unter anderem:
Auch der Einsatz eines Computers ist kein Freibrief für die Arbeit mit Termen und deren Umformungen. Aussagen wie „Gute Schulrechner machen aus Schülern gute Rechner“ sind abwegig und nur eine (falsche) Werbung.

Man sieht: Vor dem Hintergrund der vielfach verfügbaren Computeralgebrasysteme (CAS), aber auch bzgl. der heutigen Forderungen an eine neue und verbesserte Aufgabenkultur stellt sich die Frage nach der Relevanz von (stumpfsinnigen) Rechenverfahren. Hierzu gehören in besonderem Maße Termumformungen in der Sekundarstufe 1. Doch auch der Einsatz eines CAS wirft viele Fragen auf - hier zum Beispiel: Wollte der Lehrer das hier angegebene Ergebnis der Umformung von t(x)? Hat er nicht vielleicht das Ergebnis (12x+7) / 6(x+1) erwartet?
.

Aufgabenkaskaden
Auch die mehrseitigen Aufgabenkaskaden aus Schulbüchern zum Thema Terme/Termumformungen muß man aus den oben genannten Gründen verwerfen. Was für einen Eindruck soll der Schüler hier vom Nutzen und Wesen der Mathematik gewinnen?

Beispiele aus Schulbüchern verdeutlichen die häufige Praxis:

27ab-12a^2+13bc-a^2+3ab-12bc+ab-55

$$2t^3t : \frac{2}{9} -4t\,t^5 : \frac{2}{3} +15\,t^2\,t^2 : \frac{5}{7}$$

$$\frac{2}{5}(20y)- \frac{1}{3}(27y) - 7 = \frac{2}{7}(21y)$$

$$6u(-3u+7) + 8u^2 > 5(2u-3) - 10\,u^2$$

$$\frac{5x-2y-1}{3a}-\frac{a-2b}{6ab}-\frac{b-2}{15b}+\frac{1}{15}+\frac{1}{30}b$$

1.2 Thesen über Terme und Termumformungen

Die vorstehenden Überlegungen und weitere Analysen der Situation führen zu einigen Thesen zum Unterricht mit Termen:

(1) Der Unterricht über Terme und Termumformungen in der Sekundarstufe 1 besteht in erheblichem Maße aus unnötigem Vorratslernen für späteren Unterricht - häufig noch weit über das später Benötigte hinaus. Das trifft in besonderem Maße zu auf die systematische Behandlung von Bruchtermen, Bruchgleichungen, Wurzeltermen und Wurzelgleichungen.

(2) Terme sind nicht einfach da, wie es in den Aufgabensammlungen der Fall ist! Terme erwachsen aus konkreten Problemstellungen.
Deshalb sollte man solche Probleme stellen, die benötigten Terme entwickeln und bearbeiten - und dabei gleich auch noch den so wichtigen Modellbildungsprozeß üben.
(3) Stupides Üben von Termumformungen hat keinen Sinn und muß unterbleiben!
Deshalb: Termumformungen sollte man - von Ausnahmen abgesehen - dort besprechen, wo sie gebraucht werden.

(4) Terme sind jedoch eine wertvolle Vorschau auf späteren Unterricht. Die Mittel, um solche Ausblicke schon in niedriger Klassenstufe möglich zu machen, sind Reduktion der Inhalte und insbesondere graphische Veranschaulichungen.

(5) Die Umformung von Termen im Hinblick auf ihre problemgemäße Auswertung ist ein komplexer Vorgang. So muß es ein wesentliches Unterrichtsziel sein, die Struktur von Termen erkennen zu können, Regeln beachten zu können und Kontrollmöglichkeiten zu kennen. Mit diesen Fähigkeiten ist es dann auch möglich, Computeralgebrasysteme zielgerichtet einzusetzen.

(6) Der Zeitpunkt des Einsatzes eines CAS muß sorgfältig geprüft werden. Im allgemeinen gilt: Erst nach einfachen Beispielen mit Handrechnung für einen Termtyp oder eine Gleichungsform kann der Übergang zum Arbeiten mit einem CAS erfolgen. Kurz: Von der White-Box über die Grey-Box zur Black-Box.

(7) Das Arbeiten mit dem CAS erfordert eigene Strategien und Dokumentationsformen und muß deshalb ebenfalls geübt werden. Diese Form des Übens sollte mit gelegentlichen Handrechnungen verbunden werden.

Aus all dem folgt:
Es heißt, Abschied zu nehmen von einer Unterrichtseinheit, die sich nur mit Termen und Termumformungen als Selbstzweck befaßt. Terme und Termumformungen sind in größere Zusammenhänge einzubetten.

2. Forderungen an den heutigen Mathematikunterricht

2.1 Neue Unterrichtskultur

Der zukünftige Mathematikunterricht wird stark beeinflußt durch die zur Zeit sehr intensive Diskussion über die Verbesserung von Unterrichts- und Aufgabenkultur (TIMSS-Studien) und durch die Möglichkeiten des Computereinsatzes (übrigens bei TIMSS völlig vernachlässigt). Dieser gewinnt seine Bedeutung insbesondere durch die Computeralgebrasysteme mit ihren vielfältigen Veranschaulichungsmöglichkeiten. Abbildung 2.1.a veranschaulicht einige Problemzusammenhänge. Beim Thema „Terme - Termumformungen" gibt es zahlreiche Gelegenheiten, um diese neuen Intentionen zu verwirklichen. Hierzu nennen die Abbildungen 6.1.a und 6.1.b viele interessante mathematische Themen.

Es fehlt jedoch noch ein durchgehendes Konzept, wie man die verschiedenen Intentionen miteinander verträglich machen kann. Das betrifft insbesondere die Forderungen nach

- offenem Unterricht mit neuer Aufgabenkultur
- Integration des Computereinsatzes in den Unterricht (CAS)
- verstärktem Üben von Grundfertigkeiten (wobei diese neu zu definieren sind).

Abbildung 2.1.a umreißt das vorliegende Spannungsfeld. Besonders der Umfang und die Art des Übens von Grundfertigkeiten machen Sorgen. Was heißt eigentlich Üben in den neuen Zusammenhängen? Beachten wir schon hier: Auch mit Hilfe des Computers lassen sich mathematische Grundfertigkeiten und höhere Strategien üben!

Die Überlegungen zur Verringerung des Spannungsfeldes leiden außerdem darunter, dass der durchgängige Einsatz von CAS und anderen Tools über die einzelnen Klassenstufen hinweg oder sogar bis zum Abitur keineswegs gesichert ist. Unterschiedliche Einstellungen der unterrichtenden Lehrer und organisatorische Probleme sind starke Hindernisse.

Bei einem durchgehenden Computereinsatz tritt sofort das Problem auf, in welchen Situationen man auf Handrechnungen oder -zeichnungen verzichten kann, also den Computer damit beauftragt. Das führt dann zu einer Kapselung von Teilen des mathematischen Wissens in Black-Boxes und - konsequent weitergedacht - zu den neuen unterrichtlichen Möglichkeiten durch die häufige Verwendung von Bausteinen mit Parametern [1], [2, [3]. - Hierüber später mehr!

Abbildung 2.1.b symbolisiert den leider häufigen Mathematikunterricht, in dem der Schwerpunkt des Arbeitens auf dem Rechnen liegt. Das Üben erfolgt auch wieder in diesem Bereich und ist oft als Selbstzweck angelegt.

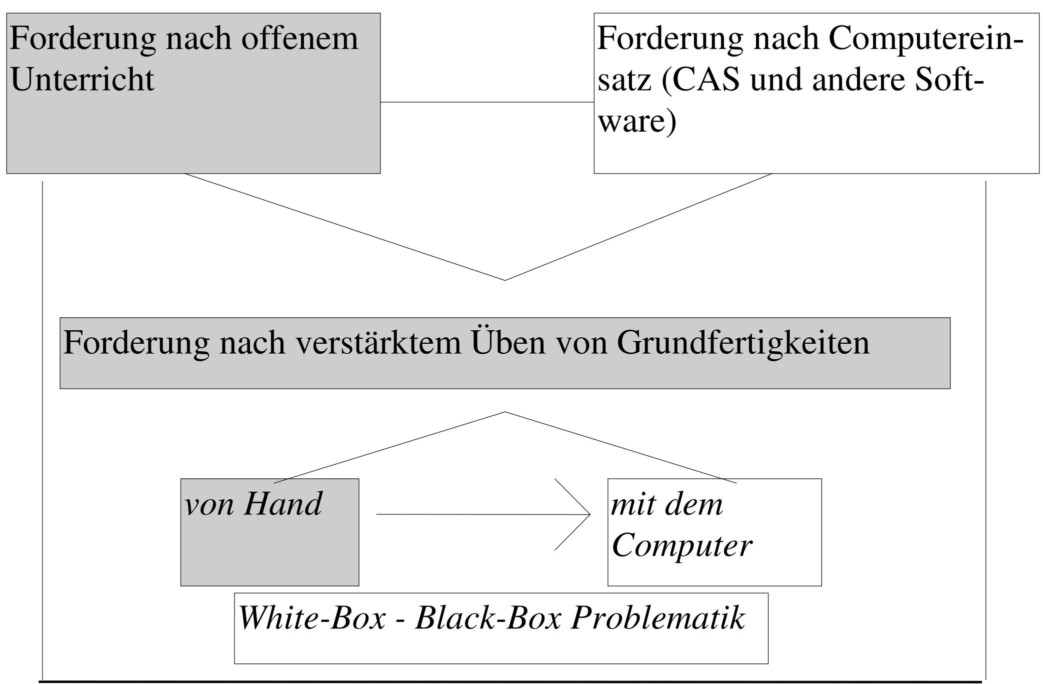


Abbildung 2.1.a: Spannungsfeld zwischen den Forderungen an den Mathematikunterricht

Mathematikunterricht neuer Prägung stellt (offene) Probleme,
- übt deren Modellierung
- benutzt den Computer zum Rechnen und häufigen Veranschaulichen
- übt den sinnvollen Umgang mit dem Computer und
- übt auch die Interpretation und Darstellung des Arbeitsweges.

Neue Unterrichtskultur bedeutet u.a.
- offene und damit weit tragende Problemstellungen
- komplexere Problemstellungen
- die Verwendung offener Unterrichtsformen, wie z.B. projektartige Organisationsformen
- durchgehende Berücksichtigung von Schülerkompetenz
- angemessene Verwendung neuer Medien (Computer, Internet, Multimedia,...)
- selbständiges Arbeiten der Schüler
- experimentelles, entdeckendes Lernen
- Finden verwandter Aufgabenstellungen durch die Schüler.

Aufgabenlösen im Mathematikunterricht alter Prägung

Aufgaben stellen

Rechnen
hier liegt auch der Schwerpunkt des Übens

Lösungen interpretieren (nur selten praktiziert)

veranschaulicht wird nur selten

Probleme lösen im Mathematikunterricht neuer Prägung

Probleme stellen und finden lassen

Rechnen mit CAS unter Verwendung sinnvoller Strategien (wenig Handrechnung)

Lösungen interpretieren, Arbeitsweg reflektieren und dokumentieren
üben

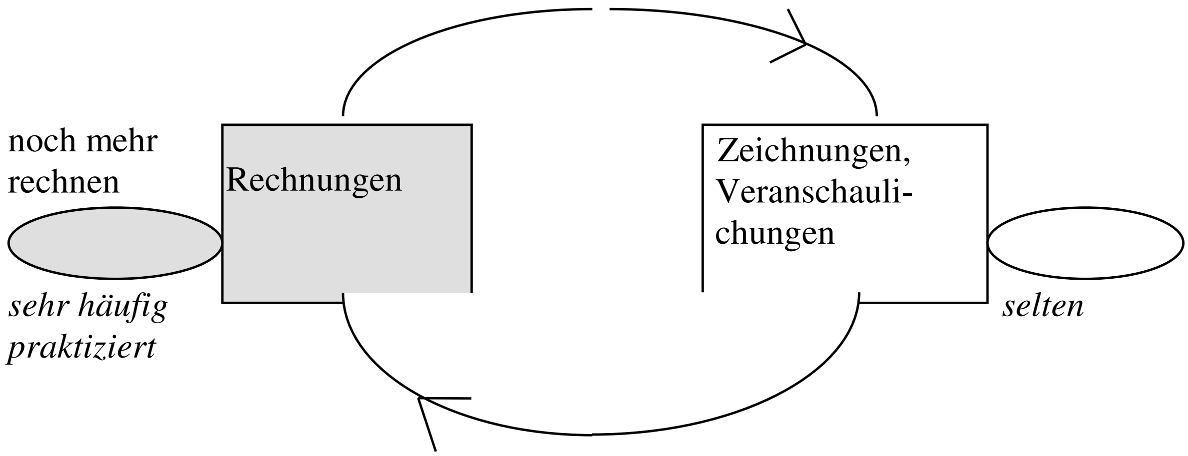
Modellieren
üben

Veranschaulichen ohne und mit Computer
üben

Abb.2.1.b: Probleme lösen im Mathematikunterricht und die Rolle des Übens

2.2 Neue Aufgabenkultur

Abbildung 2.2.a veranschaulicht die gegenwärtige Praxis der Aufgabenstellung im Mathematikunterricht und zeigt Erweiterungen, die zu offeneren Aufgabenstellungen führen können. Man wird daran erinnert, dass in der Unterichtspraxis zur Zeit vielfach mit stark eingeschränkten Aufgabenstellungen gearbeitet wird. Vorhandene Möglichkeiten, wie sie in der Abbildung angedeutet sind, werden kaum ausgenutzt.



Von der Zeichnung zur Rechnung: *Ein kaum genutzter Ansatz.*

Bislang kaum praktizierte Möglichkeiten sind:

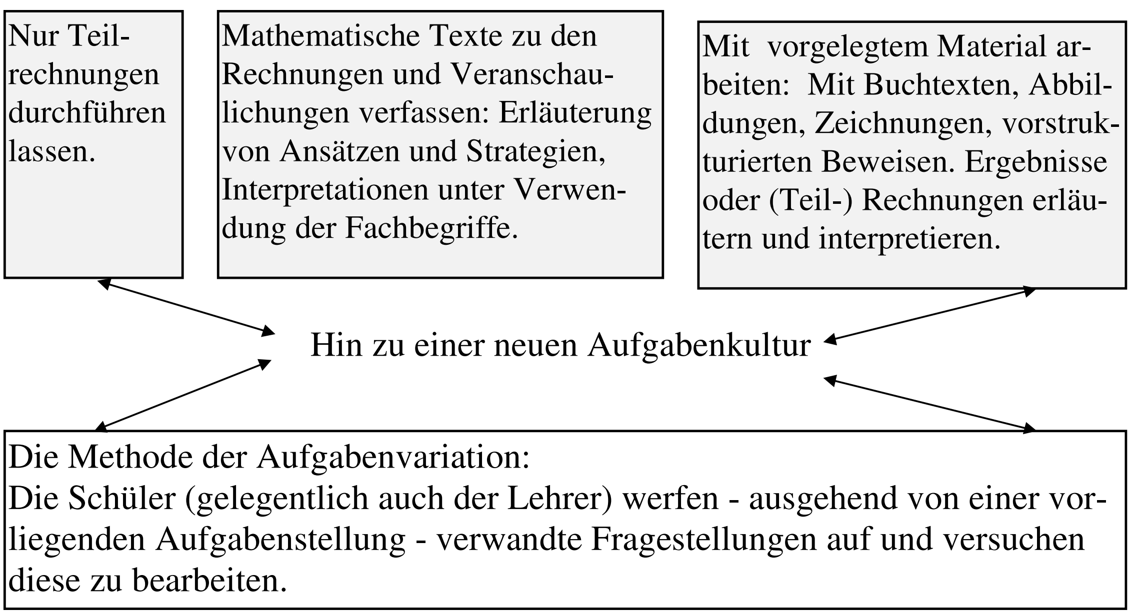


Abb.2.2.a: Aufgabenkultur - die Aufgabenstellungen sind häufig stark eingeschränkt

In Kapitel 3 finden sich zahlreiche konkrete Beispiele, die diese Ansätze mit Inhalt füllen.

2.3 Konsequente Ausnutzung von Schülerkompetenz

Offene Unterrichtseinstiege, etwa über komplexe Problemstellungen, die auch außermathematische Aspekte in Betracht ziehen, erreichen weit mehr Schüler als das bei engen, streng an die Mathematik angelehnten Problemen der Fall ist!

Damit ist für den Unterricht zumindest in der Phase des Ideensammelns (brainstorming) mehr Schülerkompetenz vorhanden. Durch geschickte Steuerung des Lehrers geht es nun darum, dieses

Anfangsinteresse für die längerfristige Motivation und damit auch für die mathematischen Lernziele zu nutzen. Das kann nicht erreicht werden, indem man sich sofort auf die mathematischen Aspekte zurückzieht, sondern auch einmal Ideen verfolgt, die fächerübergreifend sind. Dadurch darf man sich erhoffen, mehr Schüler als gewöhnlich auch für den mathematischen Anteil am Gesamtproblem zu interessieren.

Bei einem derartigen Ansatz zeigt sich erfahrungsgemäß immer wieder, daß eine breite Schülerkompetenz für die verschiedensten Bereiche vorliegt. Diese gilt es auszunutzen, indem man sie im Unterricht allen Beteiligten zur Verfügung stellt.

Der Schülerspezialist bringt sein Wissen ein
- im Unterrichtsgespräch,
- in Form eines Vortrags,
- bei der Partnerarbeit,
- durch Hilfestellung für andere Schüler(gruppen) usw.

Der bessere Schüler oder der Schülerspezialist wird zum "Hilfslehrer" - nach dem Motto: „Schüler unterrichten Schüler“,
in Bereichen, in denen dem Lehrer möglicherweise Kompetenz fehlt, aber auch in Bereichen, in denen er diese Kompetenz durchaus hat! Der Lehrer muß ja aus pädagogischen Gründen nicht alles von sich geben, was er zu dem Thema weiß!

Steuerung des Unterrichts und der Unterrichtsinhalte durch die Schüler bedeutet gleichzeitig mehr Motivation der Schüler!

Für den Lehrer bedeutet das
- sich neuen Anforderungen didaktisch-methodischer Art zu stellen
- überraschende Situationen und Probleme zu bewältigen.

Die Erfahrung zeigt, dass Projektunterricht für alle Beteiligten besonders interessant ist. Er bringt aber auch etliche Schwierigkeiten mit sich; auf diese wird unten näher eingegangen. Wir formulieren zunächst einige Intentionen von Projektunterricht, die nicht nur auf den Mathematikunterricht zutreffen.

Mit der Projektarbeit werden neben den mathematischen Zielen allgemeine Ziele angestrebt, u.a.:
- Teamfähigkeit entwickeln
- diverse Arbeitsmittel benutzen können
- Gewinnung und Auswertung von Informationen üben
- Kritikfähigkeit zu eigener und fremder Arbeit entwickeln
- Artikulationsfähigkeit entwickeln
- gemeinsam gewonnene Arbeitsergebnisse integrieren können
- Produkte zur eigenen Verwendung oder zur Benutzung durch andere Personen bzw. Lerngruppen erzeugen.

Mit diesen Zielen, die sich auch in der Sekundarstufe 1 erreichen lassen und also auch dort schon geübt werden sollten, gewinnt der Projektunterricht gerade für die heutigen Überlegungen zu einem modernen Mathematikunterricht eine große Bedeutung.

2.4 Projekte im Mathematikunterricht

2.4.1 Grundlagen, Ziele

Im Mathematikunterricht überwiegt in der Regel die relativ eng an den Inhalten des Lehrplans ausgerichtete Arbeit. Die behandelten Themen haben meistens eine geringe Weite, problemorientierte, offene Ansätze sind selten. Die vorherrschende Unterrichtsform ist das Unterrichtsgespräch. Ein mathematisches Projekt, in dem ein Team an einem komplexen Problem (häufig realitätsnah oder auch innermathematisch) arbeitet, setzt ein entsprechendes Engagement des Lehrers voraus und erfordert einigen Mut desselben.

2.4.2 Der Ablauf eines mathematischen Projekts

Der im Folgenden angebotene Projektablauf (Abb. 2.4.3.a) muß nicht für jedes Projekt gelten. Dennoch nennt die Abbildung wichtige Aspekte für viele Projekte. Für die Sekundarstufe 1 muss dieser Ablaufplan mit seinen Aufgaben und Anforderungen passend reduziert werden.

2.4.3 Die Rolle des Lehrers bei Projektarbeit

Aus größeren Projekten, etwa auch aus dem Informatikunterricht, ist der Begriff des Projektmanagements bekannt. **Ein Projektmanager hat die Aufgabe, das Projekt zu führen und zu verwalten.** Er ist verantwortlich für die Organisation und Vorgehensweise der Projektgruppe und muss in der Lage sein, Probleme zu erkennen, sich um sie zu kümmern und sich mit seinen Mitarbeitern um systematische, konstruktive Lösungen zu bemühen.

Bei mathematischen Projekten hat der Lehrer insbesondere folgende Aufgaben zu übernehmen:
- Auswahl des Projektthemas, jedenfalls in den meisten Fällen
- Aufteilung in Gruppen, ggf. in Zusammenarbeit mit den Schülern
- Leitung bei der Präzisierung von Aufgabenstellungen
- Leitung gemeinsamer Diskussionen
- Organisation von Zwischenberichten
- Bereitstellung von den Schülern unbekannten mathematischen Hilfsmitteln
- Bereitstellung von Medien
- Hilfestellung durch Hinweise auf geeignete Computerprogramme und Bedienungshiweise und beim Finden schwieriger Ansätze, z.B. in in mathematischen Detailfragen und bei der Dokumentation

Phase 0: Projektvorbereitung (Vorkenntnisse, organisatorischer Rahmen, vorhandene Software)

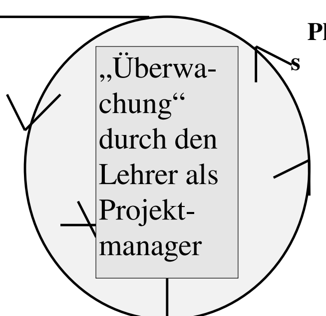
Phase 1:
Offene (komplexe) Problemstellung (meistens durch den Lehrer, möglichst gebietsübergreifend oder fachübergreifend)

Brainstrorming

Ordnen: Zerlegung des Problems in Teilprobleme

Auswahl von Teilproblemen zwecks Bearbeitung, Präzisierungen

Festlegung der Teamstruktur, Gruppeneinteilung



Phase 2: Arbeit in den Gruppen (ggf. Lehrerhilfe)
- Materialbeschaffung
- Benutzung von Hilfsmitteln (Computer,...)
- Kommunikation mit anderen Gruppen
- Dokumentationsarbeiten

Zwischenzusammenfassungen
- Berichte, Kritik
- neue Direktiven vom Team bzw. dem Lehrer

Phase 3: Integration der Arbeitsergebnisse
- Endberichte
- Vorlegen der Dokumentationen, Ergänzungen, Zusammenstellung
- Beurteilung und Wertung, Kritik
- Ordnen

Phase 4: Der weiterführende mathematische Ertrag (hier ist stärkere Lehrerhilfe nötig)
- Ordnen der mathematischen Ergebnisse, Lehrplanbezug
- Einordnen in größere Zusammenhänge

Abb.2.4.3.a : Ablauf eines mathematischen Projekts

2.4.4 Die Rolle der Schüler und ihre Teamfähigkeit

Auch die Schülerrolle verändert sich gegenüber dem ihnen sonst gebotenen Unterricht. Man darf deshalb nicht erwarten, dass der in einer Lerngruppe erstmalige Einsatz von Projektunterricht sofort von den Schülern in der gewünschten Weise praktiziert werden kann. Umso wichtiger ist es, den Schüern bei ihrem Projekt das Besondere dieser Arbeitsform zu verdeutlichen.

Teamfähigkeit gehört heute zu den Schlüsselqualifikationen vieler Berufe und sollte auch schon in der Sekundarstufe 1 trainiert werden

Teamfähigkeit bedeutet
- Artikulationsfähigkeit zum Vertreten eigener Meinungen und Aufnahmefähigkeit für andere Meinungen sowie Kritikfähigkeit eigener und fremder Arbeit gegenüber entwickeln,
- kooperatives Arbeiten und Konfliktbewältigung in einer Gruppe.

Damit wird deutlich, dass durch das Trainieren von Teamfähigkeit für den gesamten Schulalltag wichtige Verhaltensweisen geübt werden.

2.5 Computereinsatz

2.5.1 Computeralgebrasysteme - der TI-92 als Werkzeug in der Sekundarstufe 1

Die Verfügbarkeit von Computeralgebrasystemen (CAS) und Geometriesystemen auf Personalcomputern und auf Taschencomputern ändert den Mathematikunterricht in erheblichem Maße. Hiervon sind alle Gebiete der Schulmathematik betroffen, sofern man nur gewillt ist, die neuen Möglichkeiten auch zu berücksichtigen. Dabei handelt es sich nicht nur darum, den Computer als reines Rechen- oder Zeichenhilfsmittel zu benutzen; es geht besonders darum, neue Methoden zur Gestaltung des Mathematikunterrichts zu entwickeln, die den Möglichkeiten des Computereinsatzes gerecht werden.
Der Einsatz von Computeralgebrasystemen dient zu allererst dem Ziel, Mathematikunterricht zu verbessern.

In dem vorliegenden Heft wird an Beispielen zum Unterricht über Terme gezeigt, wie man das klassische Unterrichtsthema mit den heutigen Hilfsmitteln behandeln kann. **Der Computer spielt seine Rolle als Rechen- und Zeichenhilfsmittel, insbesondere aber als wirkungsvolles Experimentiergerät**. Als Werkzeug wird hier der Taschencomputer TI-92 mit seinem CAS benutzt. Andere Werkzeuge arbeiten ähnlich. An verschiedenen Stellen werden aus der Erfahrung erwachsene **methodische Hinweise zum Einsatz von CAS** gegeben. **Insbesondere wird auf die Überlegungen über „Terme als CAS-Bausteine" hingewiesen, die völlig neue Vorgehensweisen im Unterricht ermöglichen.** Man beachte hierzu auch die Literaturhinweise.

Der heutige Informatikunterricht arbeitet viel mit Tools (Werkzeugen) und dem Prinzip des Einsatzes wiederverwendbarer Bausteine (Modulbibliotheken mit Prozeduren). Diese Bausteine werden häufig als Black Box benutzt, von der man nur ihre Arbeitsweise, nicht jedoch den inneren Aufbau kennen muß. Das führt insgesamt dazu, dass Problemlösungen schneller erarbeitet werden können, Detailprogrammierung ist weitgehend überflüssig geworden.

Eine ähnliche Arbeitsweise ist nun auch im Mathematikunterricht möglich, denn Computeralgebrasysteme stellen zahlreiche Bausteine zur Verfügung und weitere Bausteine können vom Benutzer selbst definiert werden. Abbildung 2.5.1.a zeigt in einem groben Überblick wie die Arbeit unter Einsatz von CAS ablaufen kann.

Abbildung 2.5.1.b geht detailliertier auf Terme, Termumformungen und Termeinsetzungen ein. Das CAS ersetzt in vielen Bereichen die Handarbeit.

Problemlösen mit Computeralgebrasystemen und ihren Bausteinen

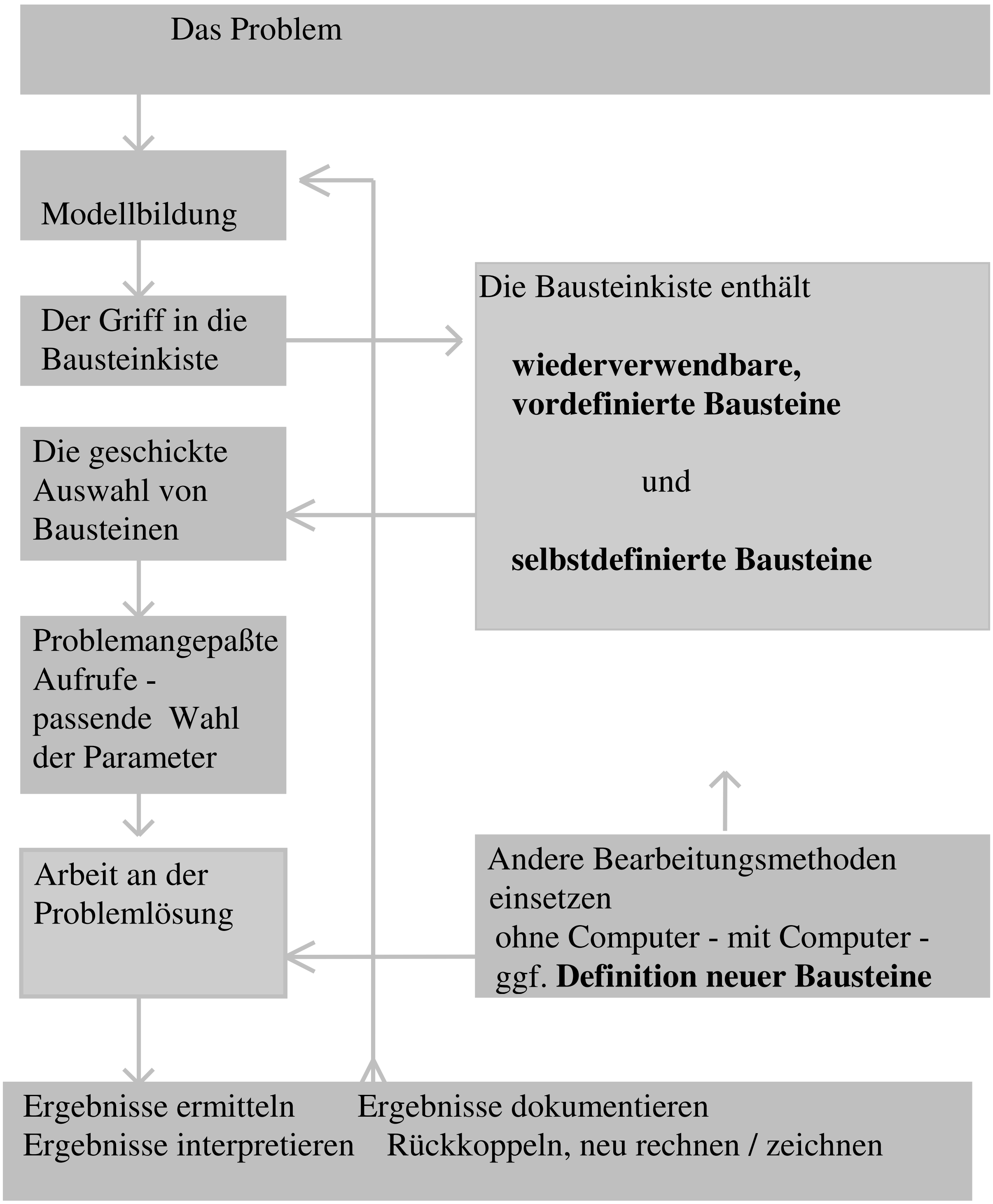


Abb.2.5.1.a : Problemlösen mit CAS und ihren Bausteinen

Die Rolle des Computers beim Thema „Terme“

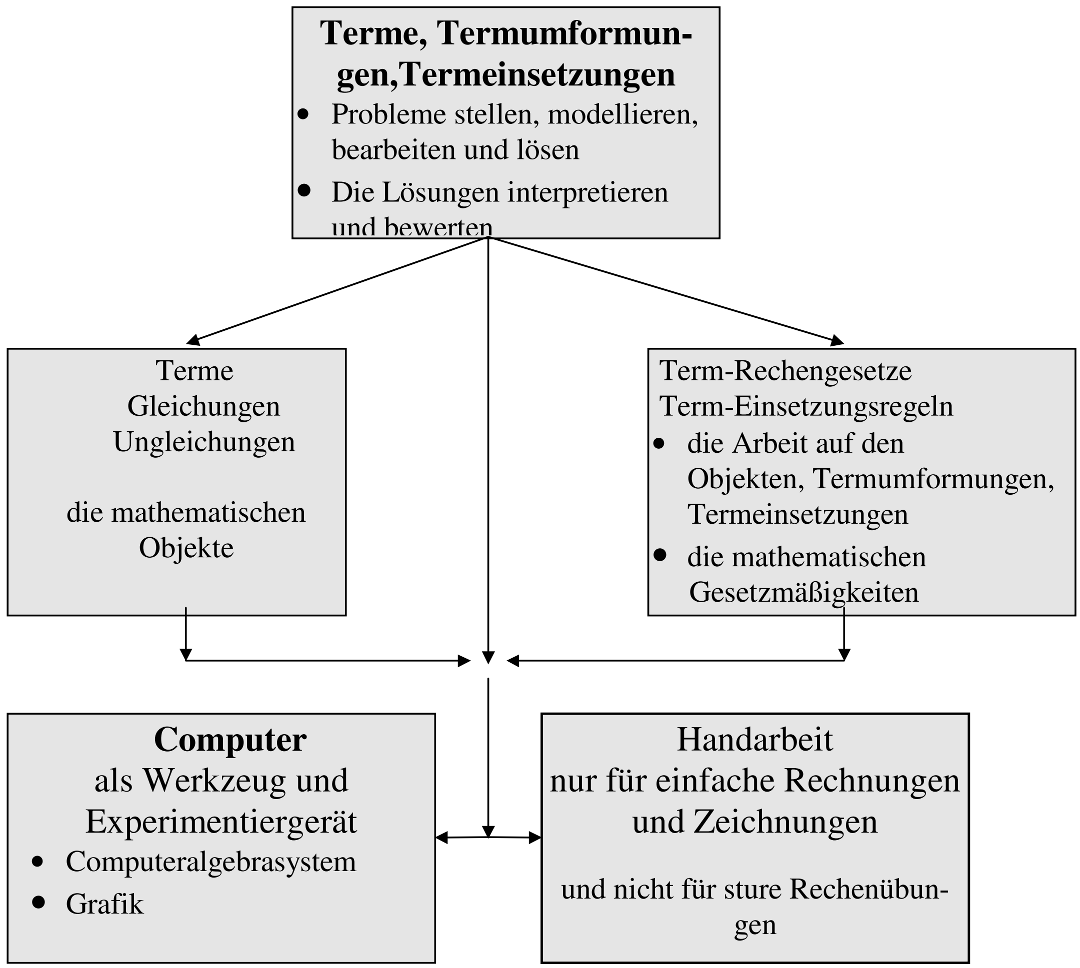


Abb.2.5.1.b: Probleme mit Termen bearbeiten

Der wichtigste Baustoff der Sekundarstufe 1 sind die Terme in vielfältigen Verbindungen. Sie erweisen sich bei der Modellierung von Problemstellungen immer wieder als nützlich. Auf ihnen operieren je nach Problem in vielfältiger Form Verknüpfungen, die vom Computeralgebrasystem bereitgestellt werden.

2.5.2 Auswirkungen des CAS-Einsatzes auf den Mathematikunterricht

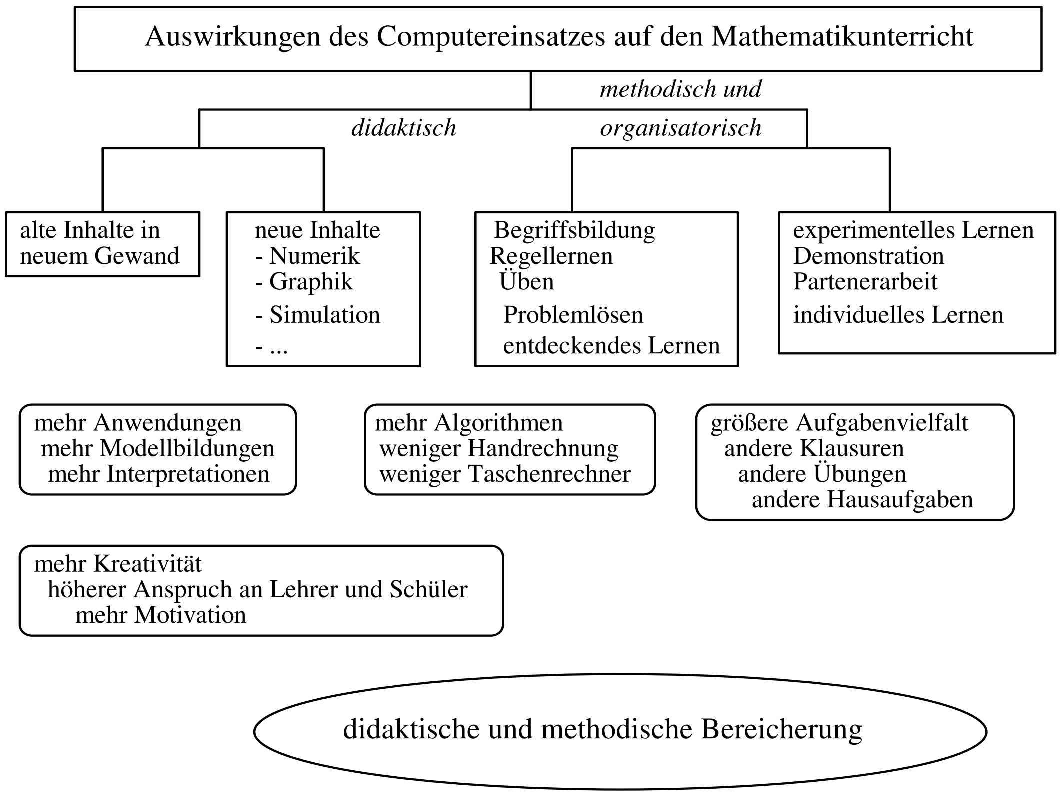


Abb.2.5.2.a: Auswirkungen des Computereinsatzes auf den Mathematikunterricht

Computereinsatz macht den Mathematikunterricht spannender und abwechslungsreicher und ermöglicht stärkeren Anwendungsbezug und größere Problemorientierung.

Neue Ansprüche an den Mathematiklehrer
Die oben zusammengestellten Auswirkungen des Computereinsatzes im Mathematikunterricht führen zu neuen Ansprüchen an den Mathematiklehrer. So muß er Antworten auf Fragen finden, wie z.B.

- Wie geht man mit Anwendersoftware um?
- Wie gestaltet man Übungsphasen?
- Welche Hausaufgaben stellt man?
- Wie werden Klausuren mit Computereinsatz konstruiert?
- Wie nutzt man die Computerkenntnisse der Schüler?
- Welche Arbeitsform wählt man bei Computereinsatz?
- Wie motiviert man Beweise?
- Wie gestaltet man die Ergebnissicherung? Wie gestaltet man Erfolgskontrollen?
- Wie bewertet man Schülerleistungen am Computer?
- Wie kommt man in den Computerraum?

usw.

Der im Mathematikunterricht eingesetzte (gra-phische) Taschencomputer bedeutet eine erhebliche Erweiterung der didaktischen und methodischen Möglichkeiten - insbesondere, wenn auf ihm auch Systeme zum symbolischen Rechnen (CAS, Computeralgebrasysteme) zur Verfügung stehen!
Der im Mathematikunterricht eingesetzte Taschencomputer bedeutet aber auch die Gefahr eines Rückfalls in heute unerwünschte Methoden, wenn man mit ihm zu ausgiebig programmiert. Dann geschieht das nämlich in einer Weise, die in der Informatik gerade bekämpft wird: Es werden schlecht strukturierte Programme geschrieben, die Programme sind maschinenabhängig und es finden kaum Zerlegungen in Teilprobleme statt. Auch werden häufig Sprünge im Programm verwendet.

3. Offener Unterricht mit Termen - Vorschläge für die heutige Unterrichtspraxis

3.1 Grundlegende Ideen des Unterrichtskonzepts

Aus den oben genannten Thesen über Terme und Termumformungen erwächst ein methodisches Konzept unter Berücksichtigung der in Abbildung 3.1.a genannten Aspekte.

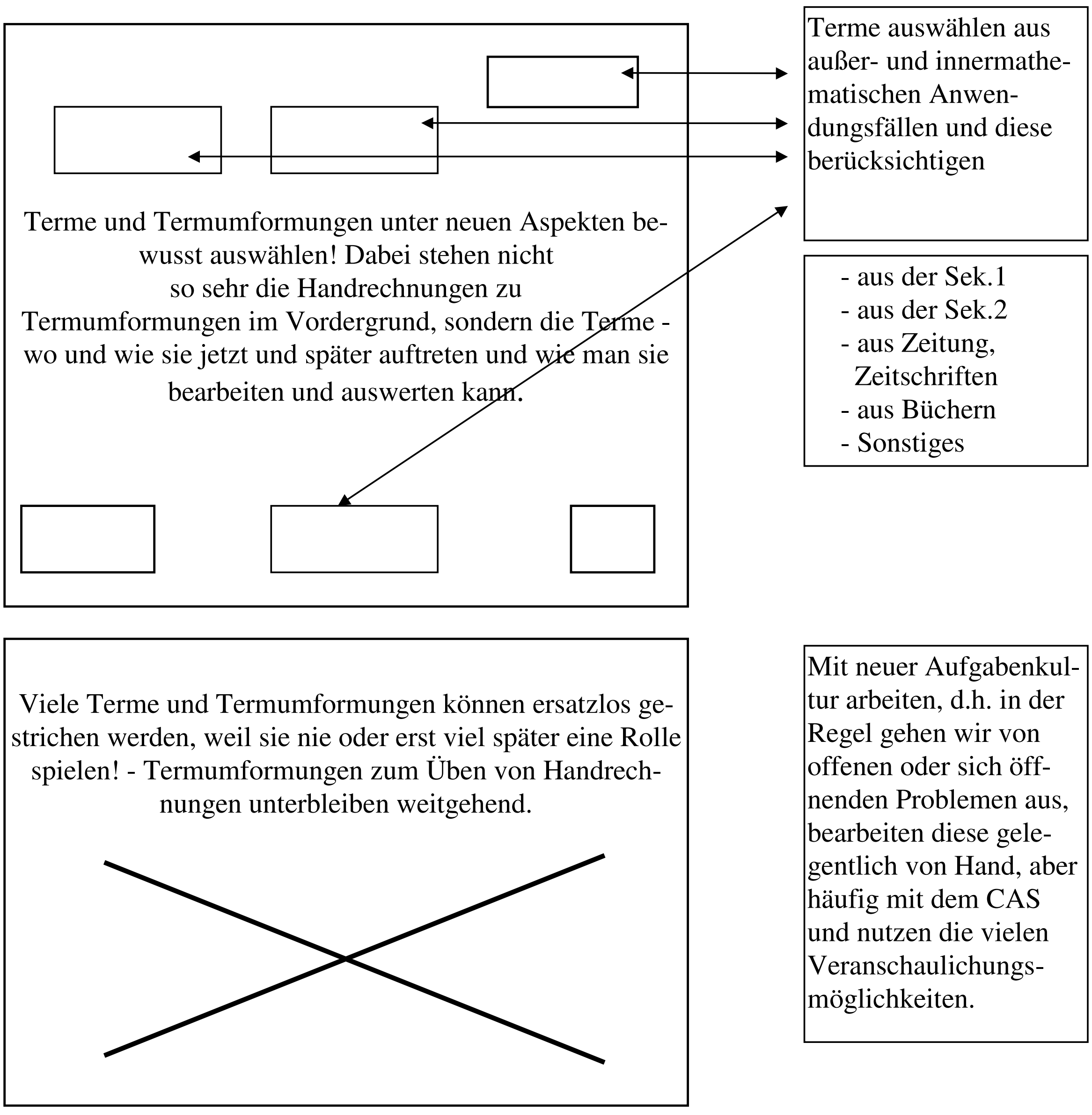


Abb. 3.1.a: Das Unterrichtskonzept „Terme und Termumformungen“

Der mathematische Hintergrund aller Überlegungen sind die

Gesetze für das Rechnen mit Variablen und Termen sowie die Termeinsetzungsregeln

Kommutativgesetze
$a+b = b+a$, $ab = ba$

Assoziativgesetze
$(a+b)+c = a+(b+c) = a+b+c$,
$(ab)c = a(bc) = abc$

Distributivgesetz
$a(b+c) = ab+ac$

Die Gesetze für das Rechnen mit Variablen werden in der Regel in Klasse 7 abgehandelt. Zur Erweiterung der Gesetze auf Terme werden die Variablen a,b,c durch Terme T1, T2, T3 ersetzt.

Es sind im Zusammenhang mit dem Termbegriff im Wesentlichen fünf große Bereiche, denen immer wieder bei verschiedenen Anlässen unser Augenmerk gilt:

Terme	Wo kommen sie her? Wozu braucht man sie?
Termeinsetzungen	Sie sind nötig, um Probleme bearbeiten und auswerten zu können.
Termumformungen	Sie sind nötig, um Probleme bearbeiten und auswerten zu können.
Gleichungen zwischen Termen	Terme miteinander vergleichen, Äquivalenzumformungen durchführen
Termstrukturen	Man muß sie erkennen, um mit Termen umgehen zu können.

Die methodischen Überlegungen orientieren sich besonders an fünf Themenkreisen:

Der methodische Hintergrund aller Überlegungen

Neue Unterrichtskultur	Neue Aufgabenkultur
Neues Üben	Verknüpfung von Hand- und Computerarbeit
Schülerzentrierung	

Der Begriff des Terms wird als Bezeichnung für mathematische Ausdrücke eingeführt - am besten durch Beispiele. Zwei Terme T1 und T2 heißen äquivalent (in der Grundmenge G), wenn die Gleichung T1 = T2 allgemeingültig in G ist.

Terme sollten schon frühzeitig in einer Schreibweise abgekürzt werden, die die verwendeten Variablen bzw. Parameter erkennen läßt. Dabei wird die Sprechweise „Term an der Stelle“ verwendet.
Beispiel 1: Für die Oberfläche eines Quaders haben wir den Term $O(a,b,c) = 2(ab+ac+bc)$ kennengelernt.

- Berechne nun $O(5,3,4)$. - Term an der Stelle $a=5$, $b=3$, $c=4$.
- Ermittle die Kantenlänge a aus $O(a,4,5) = 120$.

Beispiel 2: Berechne den Funktionswert an der Stelle 5, kurz $f(5)$, für $f(x) = 1/x$.

Beispiel 3: $f(a,b.x) = (a-x) * (b-x)$.

- Berechne $f(a,10,3)$

Ein derartiges Vorgehen wird sich später bei den verschiedensten Problemstellungen und insbesondere auch in der Sekundarstufe 2 auszahlen!

Computeralgebrasystem-Bausteine
Für die Verwendung eines Computeralgebrasystems (CAS) - aber auch sonst - wird sich das Arbeiten mit Bausteinen als eine besonders mächtige Methode erweisen (siehe Kap.2.5).

Bausteine

- werden definiert oder sind schon vorhanden,
- werden für Problemlösungen aufgerufen,
- dienen der Strukturierung von Sachgebieten,
- werden analysiert.

3.2 Offener Unterricht mit Termen - Anregungen zum Computereinsatz

3.2.1.1 Flächenberechnungen

Der Geometrieunterricht in der Sekundarstufe 1 liefert uns zahlreiche Formeln, die unter dem Aspekt „Terme“ verwendbar sind. Wir benutzen hier ein Beispiel zur Flächenberechnung.

Beispiel: Der Term a^2 - b^2

Der Term lässt sich für a,b ≥ 0 und a ≥ b deuten als eine Flächeninhaltsberechnung, nämlich der Differenz zweier Quadrate. Die Aufgaben

- Berechne die Differenz der Quadratflächen auf unterschiedliche Weise.
- Zeige, dass sich alle Terme zu a^2 - b^2 umformen lassen.

führen auf (für die Schüler dann sehr einsichtige) die Äquivalenz von Termen.

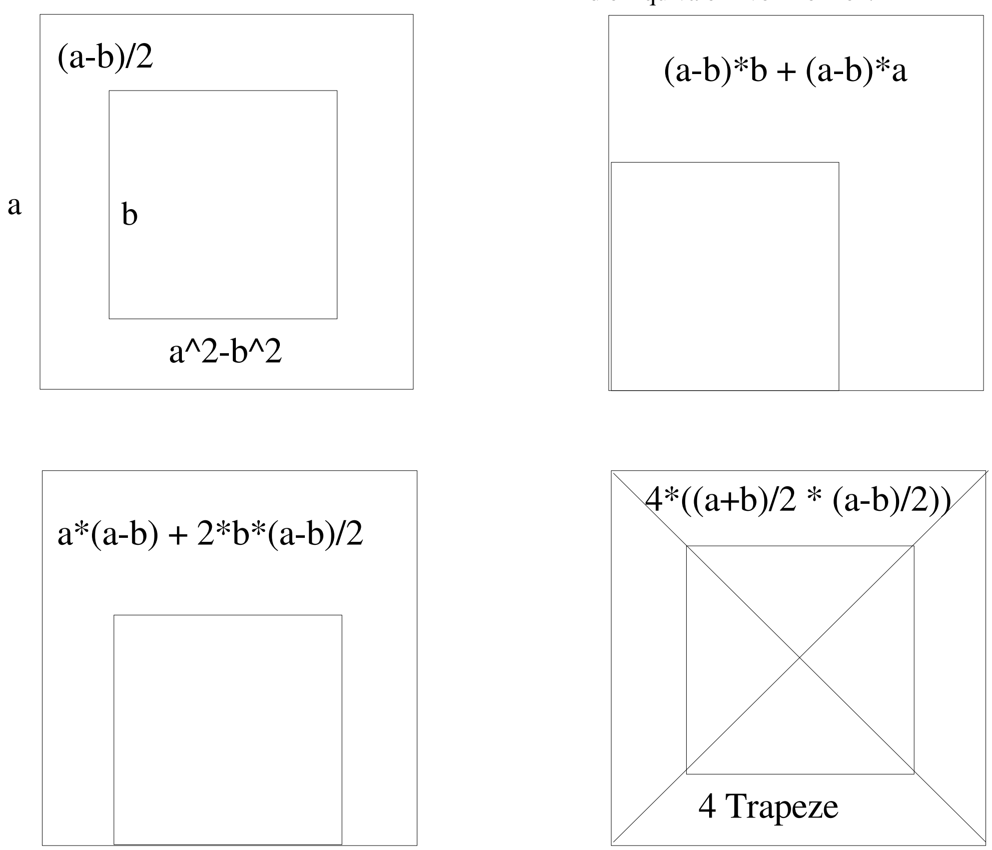
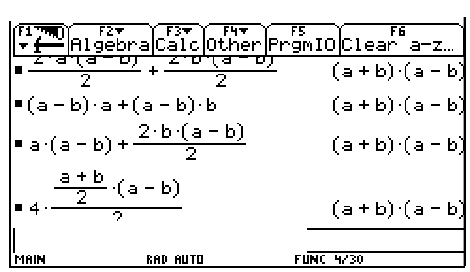


Abb.3.2.1.a Verschiedene Flächenberechnungen

Man kann z.B. so rechnen (oder von einem CAS bestätigen lassen):

Term1(a,b) = 2a(a-b)/2 + 2b(a-b)/2 = a^2 - b^2
Term2(a,b) = (a-b)a + (a-b)b = a^2 - b^2
Term3(a,b) = a(a-b) + 2b(a-b)/2 = a^2 - b^2
Term4(a,b) = 4 ((a+b)/2 * (a-b)/2)= a^2 - b^2



Schon an diesem Beispiel lässt sich gut zeigen, dass ein Computeralgebrasystem diverse Auswirkungen auf den Unterricht haben kann:

(1) Zunächst fällt auf, dass der Rechner in keinem Fall das Ergebnis $a^2 - b^2$ liefert, sondern den äquivalenten Term (a+b)(a-b). Erst die Anweisung expand((a+b)(a-b)) führt zu dem erwarteten Ergebnis.

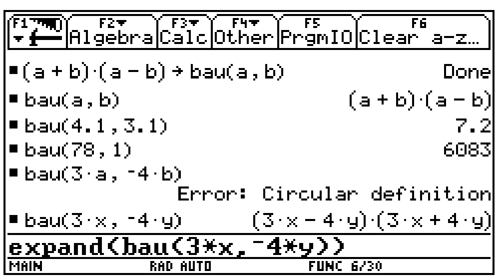
(2)Weiterhin sieht man, dass die Terme in anderer Schreibweise übernommen werden als sie eingegeben wurden. - Wieder ist Erklärungsbedarf vorhanden: Sind die Terme äquivalent?

Wir sehen schon hier:
Die Arbeit mit dem CAS erfordert ein vertieftes Verständnis des Aufbaus von Termen!

Wir betrachten nun einen weiteren Aspekt: Hierzu definieren wir einen CAS-Baustein.

3.2.1.2 Der CAS-Baustein bau(a,b) := $a^2 - b^2$

Hinweis: Über die Arbeit mit CAS-Bausteinen wird in den Kapiteln 2.5 und 3.2.12 genauer informiert.



Wir werden sehen: Frühzeitiges Arbeiten mit Parametern (schon in Klasse 7!) gehört zu den Fundamenten eines modernen Mathematikunterrichts!
Einige Bausteinaufrufe zeigen seine Einsatzmöglichkeiten.

Bausteinaufruf	**Bedeutung**	**Ergebnis**
bau(4.1,3.1)	(4.1+3.1)(4.1-3.1)	7.2
bau(70,1)	(70+1)(70-1)	4899

Wie geht das mit Kopfrechnung?

bau(3x,-4y)	(3x-4y)(3x+4y)	$9x^2-16y^2$

Einsetzung von Termen in einen Baustein.

bau(3a,-4b) Fehlermeldung: Circular definition
Laut Handbuch zum TI-92: Zirkuläre Definition: Diese Meldung weist darauf hin, dass bei einer Vereinfachung eine Endlosersetzung von Variablenwerten auftreten würde, wodurch der Speicherplatz erschöpft würde. Beispiel a+1→a, wobei a eine unbestimmte Variable ist, führt zu diesem Fehler.
Wenn bei unserem Beispiel für a nun stets 3a und für b stets -4b eingesetzt würde, käme es in der ersten Klammer (a+b) zu folgenden Termen
3a-4b, 3(3a) - 4(-4b), 3(3(3a)) - 4(-4(-4b)) usw.
und man ahnt, was passiert.

Wir betrachten weitere Bausteinaufrufe und erkennen neue Möglichkeiten, die uns Vernetzungen zu anderen mathematischen Gebieten aufzeigen.

Bausteinaufruf	**Bedeutung**	**Ergebnis**
bau(x,1)	(x+1)(x-1)	x^2-1

Hierbei ergibt sich eine Vernetzung mit folgenden Themen: Linearfaktoren, Parabeln, Nullstellen, graphische Darstellung.

solve(bau(x,1)=0,x)	Löse (x+1)(x-1)=0	x=1 oder x=-1

Hier wird der Baustein beim Lösen einer Gleichung verwendet.

bau(x,x)	(x+x)(x-x)	0

Warum ergibt sich bei gleichem Parameterwert stets 0? Und wie es es bei bau(x,-x)?

Aufgabenvariationen

$a^2 - b^2 = (a+b)(a-b) \Rightarrow (a^2 - b^2) / (a-b) = (a+b)$.

- Was ergibt sich für $(a^3 - b^3) / (a-b)$?
  Oder
- Zeige durch Handrechnung, dass
  $(a - b) (a^2 + ab + b^2) = (a^3 - b^3)$ gilt.

Ungerade Zahlen lassen sich als Differenz zweier Quadratzahlen schreiben
- Es wird behauptet, dass sich jede ungerade Zahl als Differenz zweier Quadratzahlen schreiben läßt. Überprüfe die Aussage. Überlege, wie sich hierfür das CAS einsetzen lässt.

Die Schüler finden durch Probieren zum Beispiel $21 = 25-4 = 5^2-2^2$ oder auch $21 = 11^2-10^2$.

Wie kann man das systematisieren - eine Methode für andere Fälle finden - einen Algorithmus dafür entwerfen?

Der eventuelle nötige Hinweis auf die binomische Formel $a^2-b^2 = (a+b)(a-b)$ führt zu

5^2-2^2 = (5+2)*(5-2) = 7*3, also zu der Idee der Zerlegung von 21 in 7*3. Und offenbar ist das verwendete a=5 die Mitte von 7 und 3, also (7+3)/2.

Weitere Beispiele ergeben die Strategie bzw. den folgenden Algorithmus:

Wir sind auf der Suche von a und b in der binomischen Formel a^2-b^2 = (a+b)(a-b)

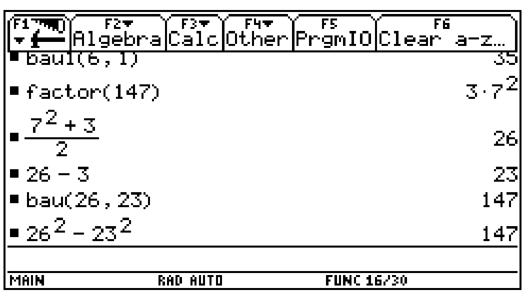
(1) Zerlege die gegebenen Zahl in Primfaktoren:
147= 3*7^2

(2) Suche die Mitte von 3 und 7^2:
(3+49)/2 = 26.
Damit ist a=26 gefunden.

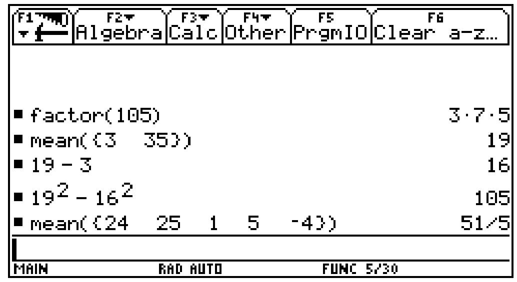
(3) Suche b:
b = 26-3 oder b = 49-26.
Damit ist b=23 gefunden.

(4) (a+b)(a-b) = a^2-b^2 benutzen:
(26+23)(26-23) = 26^2-23^2
Also 147 = 26^2-23^2

Nach der Entwicklung der Lösungsideen können wir das CAS einsetzen:



Wieder ergibt sich eine Möglichkeit, über enge Grenzen einer Problemstellung, wie sie in der Regel im herkömmlichen Unterricht gesetzt werden, hinauszukommen:



In obigem Bildschirmabdruck haben wir einen im CAS vorhandenen Baustein „mean“ (Mittel-wert) benutzt. Mit dessen Hilfe sind nun wieder Vernetzungen möglich:

- zu anderen Aufgabenstellungen, den Mittelwert betreffend und dabei auch
- zu Einblicken in statistische Fragestellungen.

Eine weitere Aufgabenvariation:
Der Term D(n) = (n+1) ^{2} - n^2 stellt für alle natürlichen Zahlen n die Differenz der Quadrate zweier aufeinanderfolgender natürlicher Zahlen dar. Welche Zahlenmenge liefert D(n)?

D(n) = (n+1) ^{2} - n^2 = 2n+1. D(n) ist also immer eine ungerade Zahl!

Die Umkehrung : Es sei D(n) eine ungerade Zahl, z.B. D(n)=15; also 2n+1=15 bzw. n=7., Dann gilt D(n) = 8^2 - 7^2.

Zusammenfassung: Der Term T(a,b)= a^2 - b^2 liefert zahlreiche Interpretationsmöglichkeiten und führt je nach Parameterbelegung und Deutung zu unterschiedlichen Fragestellungen und Bearbeitungen.

3.2.2 Abzählprobleme

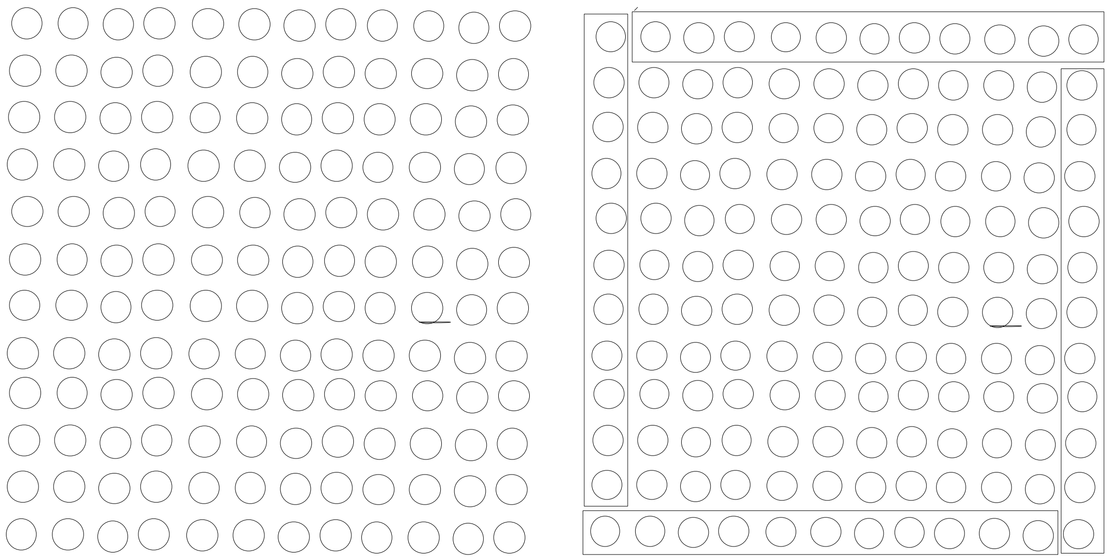


Abb. 3.2.2.a

Abzählvorgänge sind sehr geeignet, um Terme einerseits zu erzeugen und dann auch umzuformen.

Kreise zählen

Abbildung 3.2.2.a zeigt n Kreise in jeder Zeile bzw. Spalte. Es geht nun darum, diese auf verschiedene Weise abzuzählen. Einerseits ist das Ergebnis n^2 unmittelbar einsichtig, aber andere Terme sind ebenfalls denkbar. Termumformungen zeigen die Äquivalenz der Terme. Die Schüler können z.B. feststellen:

$a_1 = n^2$; $a_2 = 2n + 2(n-2) + (n-2)^2$
$a_3 = (n-2)^2 + 4(n-1)$
$= 2n + 2n - 4 + n^2 - 4n + 4$
$= n^2 - 4n + 4 + 4n - 4$
$= n^2$

Die Offenheit der Problemstellung wird durch folgende Aspekte bewirkt:

- *Es gibt viele Terme, Rechenfehler werden „von allein" deutlich!*
- *Andere Figuren können betrachtet werden*
- *Veranschaulichungen sind gut möglich und sie zeigen, dass die Terme äquivalent sein müssen.*

Händeschütteln - ein bekanntes Problem

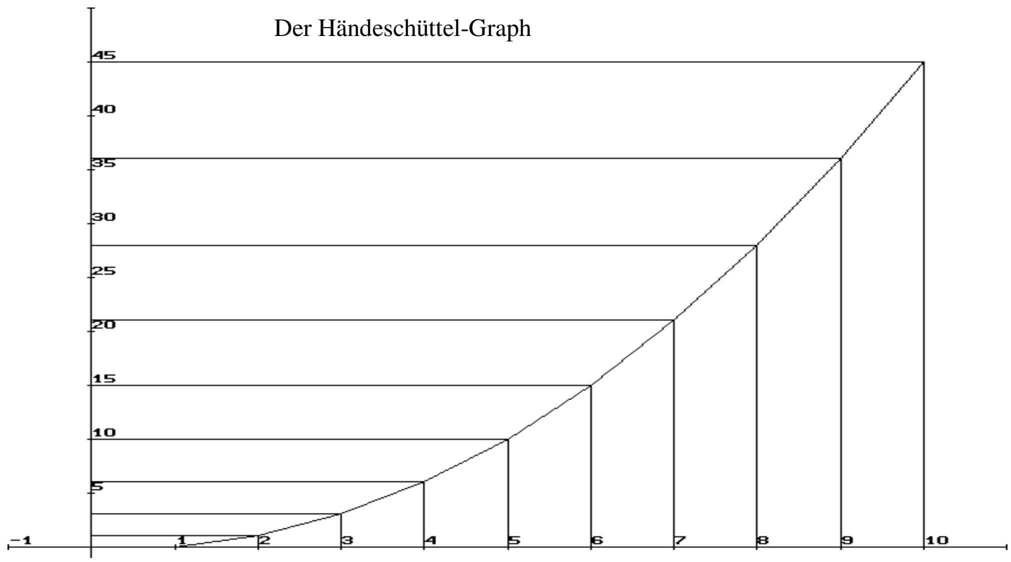
In einem Raum versammeln sich n Personen, jede schüttelt jeder Person die Hand. Wieviel mal wird händegeschüttelt?
S(n) = n(n-1)/2; oder auch
S(n) = (n-1)+(n-2)+... 3+2+1

Wie groß ist S(n) an der Stelle n=12, also S(12)?

Der Händeschüttel-Graph
Hierzu wird S(n)=n(n-1)/2 für eine bis zehn Personen im Koordinatensystem (Anzahl der Personen, Anzahl Händeschütteln) dargestellt. Die Werte können aus der Zeichnung abgelesen werden.
Aber auch eine Wertetafel ist in dieser Situation sinnvoll.

n	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
S(n)	0	1	3	6	10	15	21	28	36	45

Fragestellung erweitern
(1) Kann es sein, dass 235 mal Hände geschüttelt wurden?
(2) a Frauen und b Männer kommen in den Raum. Jeweils nur Frauen und Männer schütteln sich die Hand!



Anzahl der Diagonalen im n-Eck

An einer Zeichnung kann man sich überlegen, dass D(n) = (n-3)+[(n-3)+(n-2)+...+3+2+1]
= (n-3)+(n-3)(n-2)/2 = (n-3)n/2

Aufgaben

Zeichne ein n-Eck und die möglichen Diagonalen. Begründe den Term T1.
T1(n) = (n-3)+((n-3) + (n-4) + (n-5)+.. . +2+1).
Gegeben ist auch der Term T2(n), wobei gilt
T2(n) = (n-3)+(n-3)(n-2)/2. Zeige durch Einsetzen von Werten, dass die Terme T1 und T2 offenbar äquivalent sind.

n	3	4	5	6	7	8
T1	0	2	5	9	14	20
T2	0	2	5	9	14	20

- Berechne jeweils den Abstand zweier aufeinanderfolgender Glieder.
- Forme den Term T2(n) noch weiter um. Das Ergebnis:ist T2(n) = (n-3)n/2.
- Stelle eine Wertetafel für beide Terme auf.

Fertigkeiten bei den hier nötigen Termumformungen (geschickt - ungeschickt)

Der eben benutzte Term (n-3) + (n-3)(n-2)/2 zeigt die Möglichkeiten und die nötigen Fertigkeiten für Termumformungen:

Weg 1:

(n-3) + (n-3)(n-2)/2 = [2(n-3) + (n-3)(n-2)] /2 = (n-3)(2+(n-2)) /2 = (n-3) n /2,
Hauptnenner, im Zähler ausklammern, im Zähler zusammenfassen, das ist geschickter als Weg 2:

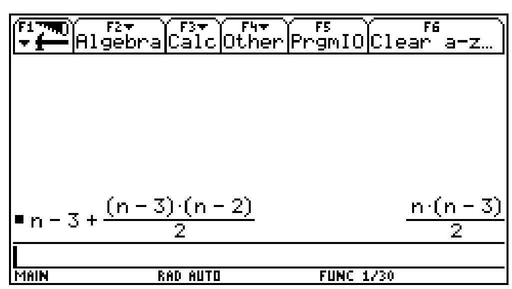
Weg 2:

(n-3) + (n-3)(n-2)/2 = [2(n-3) + (n-3)(n-2)] /2
= [2n-6+n^2-3n-2n+6] /2
= [n^2-3n] /2 = n(n-3) /2.

Wieder kann ein Graph erstellt werden, den man mit dem beim Händeschüttelproblem vergleichen kann - ggf. kann man die beiden Graphen in dasselbe Koordiantensystem zeichnen.

Termumformung mit dem CAS

Und wie macht es das CAS - ohne unsere Mitwirkung bei der Umformung?



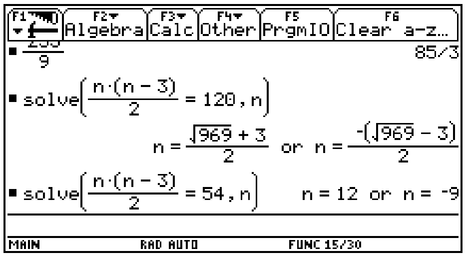
Nach Eingabe des Terms wird sofort umgeformt! Schrittweise Umformung scheint nicht möglich.

Das CAS kann hier methodisch

- als Kontrollinstrument (nach der Handlösung) oder
- zur Vorgabe der von Hand zu bestätigenden Lösung eingesetzt werden. Das muss/soll herauskommen.

Weitere Varianten
Gibt es ein n-Eck mit 120 Diagonalen?

Lösung mit dem CAS:
Solve(n(n-3)/2=120,n)



Besser geht es mit 54 Diagonalen:
Solve(n(n-3)/2=54,n)

Permutationen

Hier kann man z.B. Sitzordnungen in der Klasse betrachten und die Anzahl von Vertauschungen feststellen. Wir kommen zur Fakultät von n, also zu n!.

Auch hier gibt es Möglichkeiten für Termumformungen, etwa

- n! = (n-2)!*(n-1)*n
- Was bedeutet n!/(n-2)! ?

Beide Ergebnisse geben Anlass zu weiteren Diskussionen.

Terme auf dem Lottoschein

(siehe auch Kapitel 4)

1	2	3	4	5	6	7
8	9	10	11	12	13	14
15	16	17	18	19	20	21
22	23	24	25	26	27	28
29	30	31	32	33	34	35
36	37	38	39	40	41	42
43	44	45	46	47	48	49

- Betrachte die Zahlen auf den beiden Diagonalen! Stelle einen Term auf, der die Zahlenfolgen beschreibt.

Nebendiagonale: ND = 6n+7 für n=0,1,2,...6
Spalte 1: 7n+1 für n=0,1,2,...6
Spalte 2: 7n+2 für n=0,1,2,...6 usw.

Aufgaben

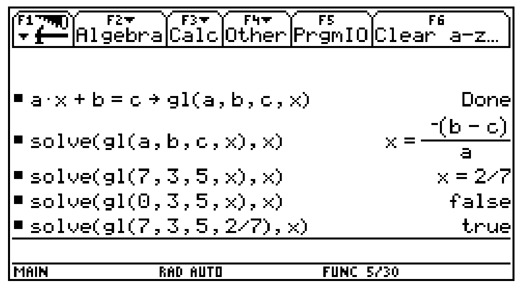
- Wo findet man auf dem Lottoschein die Ergebnisse für den Term (7n+1)+(7n+2)?
- Markiere auf dem Lottoschein den Weg der Zahlen n^2.
- Suche nach weiteren mathematischen Zusammenhängen auf dem Lottoschein.

3.2.3 Das Arbeiten mit Geradentermen - Termeinsetzungen

In Klasse 7 haben wir es mit der Gleichungsform ax+b = c zu tun. Ein CAS bietet uns auch hier die Möglichkeit zu veranschaulichen und zu rechnen.

Bei häufig vorkommenden Termen bzw. Gleichung lohnt sich die Verallgemeinerung mit einem eigenen Baustein. So ist es auch mit der Gleichung ax + b = c. Wir definieren daher

Gleichungsdefinition
GL(a,b,c,x) := (a*x+b = c)



solve(GL(a,b,c,x),x) liefert uns die allgemeine Lösung der Gleichung, wobei man a<>0 zu beachten hat.

Interpretation anderer Bausteinaufrufe

solve(gl(7,3,5,x)x), Ergebnis x = 2/7, berechnet x für die Gleichung 7x+3 = 5.

solve(gl(0,3,5,x)x) ergibt keine Lösung, weil a=0 ist, die Gleichung also 0x+3=5 lautet.

solve(gl(7,3,5,2/7),x) liefert den Wert „true“, da die Einsetzung von 2/7 für x eine wahre Aussage liefert.

gl(2,3,4,5): Ein Aufruf mit a=2, b=3, c=4, x=5 gibt die Auskunft, dass die Gleichung mit diesen Werten nicht erfüllt ist.

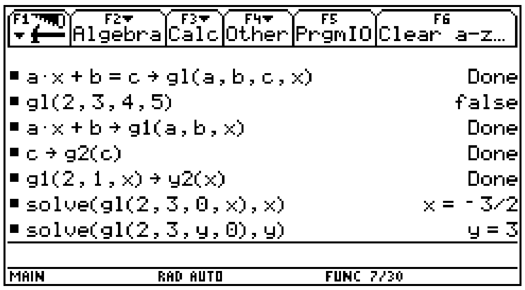
Achsenschnittpunkte berechnen
Die Aufrufe

solve(gl(2,1,0,x),x) und solve(gl(2,1,y,0),y)

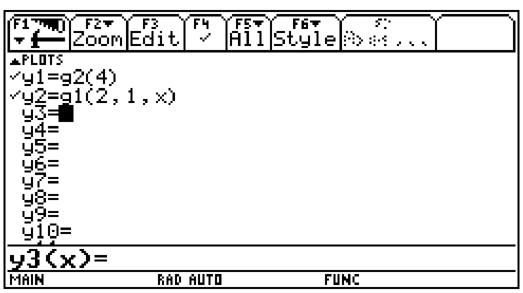
bestimmen uns die Achsenschnittpunkte der Geraden y=2x+1 (x=0 bzw. c=0 setzen).

Zerlegung der Gleichung in zwei Terme
G1(a,b,x) := ax+b
G2(c) := c;

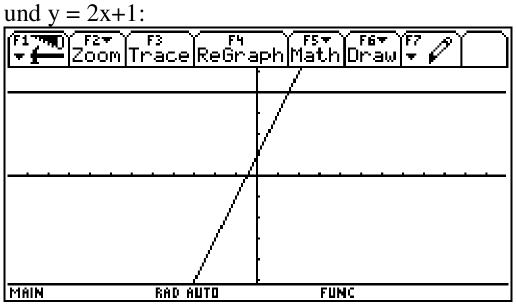
Diese Definition ermöglicht Veranschaulichungen und damit auch noch andere Nutzungsmöglichkeiten:

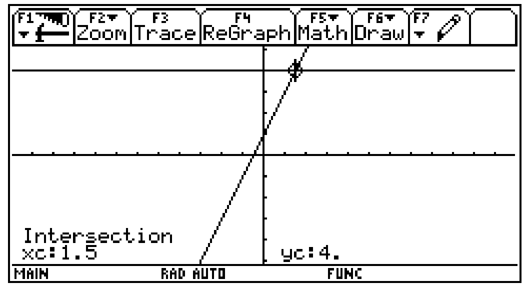

```
■ a·x + b = c → g1(a,b,c,x)        Done
■ g1(2,3,4,5)                     false
■ a·x + b → g1(a,b,x)              Done
■ c → g2(c)                        Done
■ g1(2,1,x) → y2(x)                Done
■ solve(g1(2,3,0,x),x)          x = -3/2
■ solve(g1(2,3,y,0),y)             y = 3
MAIN          RAD AUTO        FUNC 7/30
```

Die linke und die rechte Seite der Gleichung werden als getrennte Terme g1(a,b,x) und g2(c) definiert, die nun mit den Aufrufen g1(2,1,x) bzw. g2(4) in den y-Editor des TI-92 (♦ y=) übernommen werden. So ergibt sich die Möglichkeit der graphischen Veranschaulichung (♦ Graph) von Gleichungen.



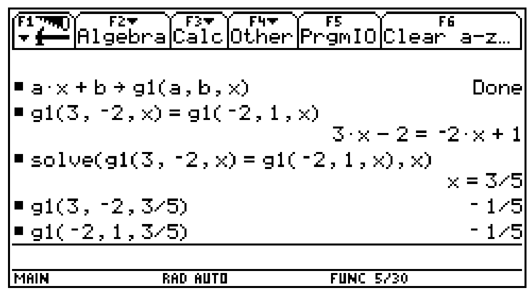
Die folgende Abbildung zeigt die Geraden y = 4 und y = 2x+1:





Anschließend kann man zur automatischen Schnittpunktbestimmung den Befehl „intersection" aufrufen (F5 - intersection) und erhält x =1.5 als Lösung der Gleichung 2x+1=4.

Mit dem Baustein weiter forschen
Das obige Bild zeigt auch, wie man mit einem Baustein weiter forschen kann.


```
■ a·x + b → g1(a,b,x)                Done
■ g1(3,-2,x) = g1(-2,1,x)
                        3·x - 2 = -2·x + 1
■ solve(g1(3,-2,x) = g1(-2,1,x),x)
                                  x = 3/5
■ g1(3,-2,3/5)                       -1/5
■ g1(-2,1,3/5)                       -1/5
MAIN          RAD AUTO          FUNC 5/30
```

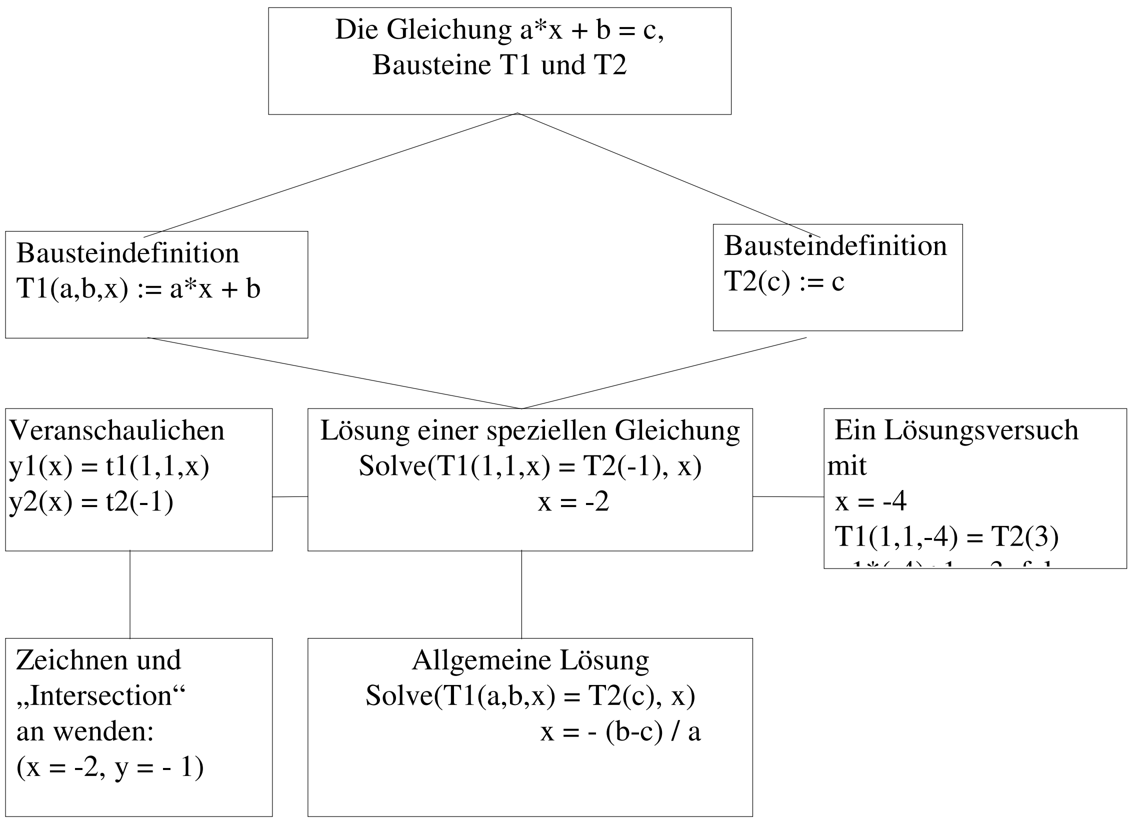
Beispiel einer Bildschirm-Dokumentation
Interpretiere den obigen Bildschirmabdruck! -

Beispieltext: Hier wird der Schnittpunkt zweier Geraden bestimmt. Dazu wird zunächst der Term ax+b als g1(a,b,c) definiert. Damit besteht die Möglichkeit mit verschiedenen Geraden zu arbeiten. Durch die Aufrufe g1(3,2-,x) = g1(-2,1,x) werden die beiden Geradenterme 3x-2 und -2x+1 gleichgesetzt. Mit solve wird der gemeinsame Wert x=3/5 berechnet. Die beiden letzten Aufrufe dienen zur Berechnung des y-Wertes. Damit ergibt sich als Schnittpunkt S(3/5,-1/5).

Überblicksdarstellungen

Das Bausteinprinzip am Beispiel der Gleichung a*x + b = c:

Leider wird im Unterricht häufig vergessen, Überblick über die in letzter Zeit behandelten Gegenstände zu schaffen. Für unsere letzten Überlegungen wäre z.B. die folgende Darstellung nützlich. Der Schüler erkennt an derartigen Abbildungen, welches weite mathematisches Feld erschlossen wird.



3.2.4 Terme am magischen Quadrat

Im Internet kann man unter dem Stichwort „Magische Quadrate“ auf die Suche nach Informationen über dieses spannende, die Schüler immer interessierende Thema gehen. Dabei findet man u.a. die Seite
http://www.pse.che.tohoku.ac.jp/˜msuzuki/MagicSquare.algebra.form.html.
Hieraus zitieren wir (Zitat kursiv gedruckt):

Internet-Zitat
„Algebraic form of magic squares

Japanese version is not availble
3 x 3 square

a	*b*	*c*
d	*e*	*f*
g	*h*	*i*

Let h and i be the independent varables, then the algebraic form ofr the magic square becomes;

10-i	*10-h*	*-5+h+i*
-10+h+2i	*5*	*20-h-2i*
15-h-i	*h*	*i*

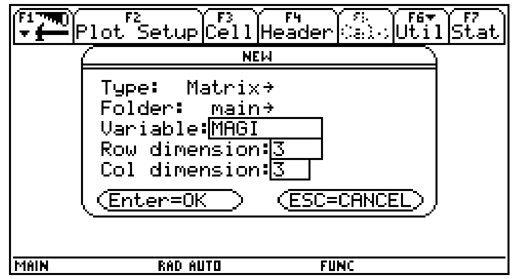
Formula due to Edoourd Lucas (from Lee Sallows´essay)

c-b	*c+a+b*	*c-a*
c-a+b	*c*	*c+a-b*
c+a	*c-a-b*	*c+b* „.

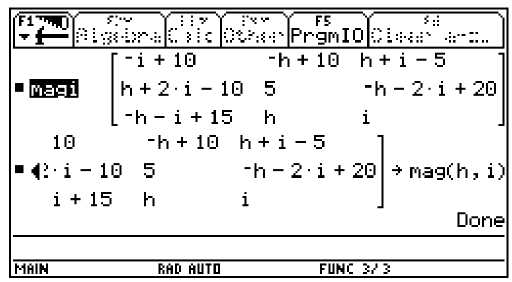
Diese Informationen oder auch nur Teile davon können nun dazu dienen, eine Unterrichtsreihe mit sich öffnenden Fragestellungen einzuleiten.

Problemstellung
(1) Ihr habt sicher schon einmal von Magischen Quadraten gehört!
Irgendein Schüler wird daraufhin bestimmt ein magisches Quadrat anschreiben und erläutern.
(2) Dann können wir z.B. das oben genannte magische (h-i)-Quadrat vorlegen und erforschen lassen.
Im Folgenden wird eine Bearbeitung mit dem CAS des TI-92 gezeigt.

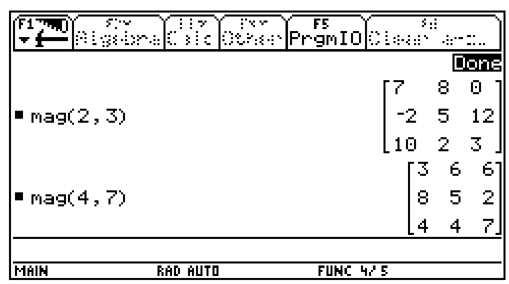
Bearbeitung mit einem CAS
Hinweis: Alle folgenden Fragestellungen sind auch für Handrechnungen motivierend!
Zunächst wird das Quadrat über den Matrizeneditor des TI-92 eingegeben



Wir geben die Matrix unter dem Namen „magi“ ein und definieren anschließend den Baustein MAG(h,i), da ja die Matrix von diesen beiden Parametern abhängig ist.

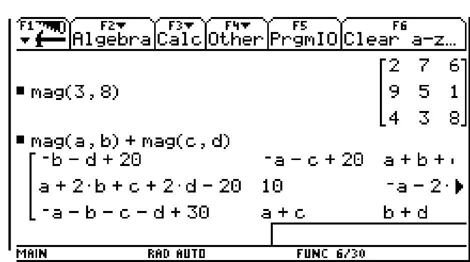


Nun können verschiedene Aufrufe des Bausteins durchgeführt und analysiert werden:



Beim Aufruf mag(2,3) erhalten wir auch negative Zahlen, bei mag(4,7) sind es zwar nur positive Zahlen, aber teilweise kommen diese doppelt vor.

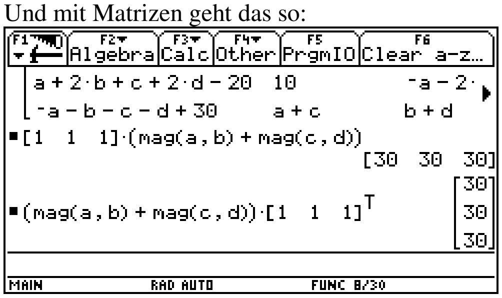
- Gibt es einen Aufruf, der ein Quadrat mit den Zahl 1,2,3,...8,9 (jeweils genau einmal) ergibt?



- Die Summe zweier magischer Qudrate ist wieder ein magisches Quadrat!
- Probieren wir es einfach mit mag(a,b)+mag(c,d)!
- Wie addiert man magische Quadrate?
- Wie ist es mit Vielfachen eines magischen Quadrats?

Termumformungen

Mit der Aufgabe mag(a,b)+mag(c,d) kommt man auch wie selbstverständlich zu Termumformungen. So z.B. für die neue Summe in der letzten Zeile:
[(-a-b+15)+(-c-d+15) + (a+c) + (b+d)] = 30.
(auch für Handrechnungen geeignet!).
Und mit Matrizen geht das so:



Die letzte Zeile bedeutet:
Die Matrizen werden zunächst addiert: mag(a,b)+mag(c,d); dann werden sie mit der Matrix (1 1 1) multipliziert; damit werden drei Zeilensummen gebildet, die hier jeweils gleich 30 sind.

Weitere Termumformungen

- Ist 3*mag(2,3)-5*mag(3,4) ein magisches Quadrat?
- Führen die Quadrate der einzelnen Elemente eines magischen Quadrats wie bei der Addition zu weiteren magischen Quadraten?
- Bilde mag(x,x); siehe Bild rechte Spalte.

Gleichungen im magischen Quadrat

Der folgende Ansatz führt zur Betrachtung von Gleichungen.
Wir betrachten magische (3,3)-Quadrate, allgemein

a	b	c
d	e	f
g	h	i

- Ergänze das magische Quadrat. Es soll die magische Summe 15 haben.

*	*	*
*	5	*
*	2	8

- Ergänze das magische Quadrat. Es soll die magische Summe 15 haben. h und i sollen als Variablen im magischen Quadrat erhalten bleiben.

*	*	*
*	5	*
*	h	i.

Hieraus erwachsen nun etliche Gleichungen, die in Gruppen durch Handrechnung (oder mit dem CAS) gelöst werden können, z.B.:

a + 5 + i = 15 => a = 10-i oder
g + h + i = 15 => g = 15-h-i usw.

Weitere Anschlussprobleme

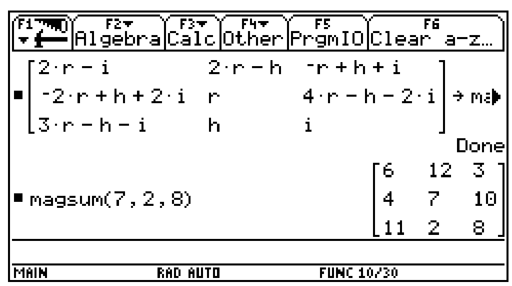
Aus den obigen Andeutungen erwachsen verschiedene Aufgabenvariationen. Aber auch der Übergang zu magischen (4,4)-Quadraten führt weiter und das Internet motiviert noch andere Untersuchungen.

Übergang zu einer beliebigen Summe

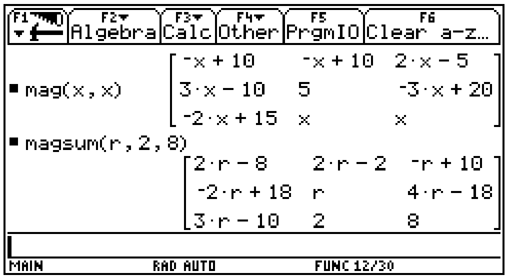
Wenn wir uns die Struktur des Ausgangsquadrats

10-i	*10-h*	*-5+h+i*
-10+h+2i	*5*	*20-h-2i*
15-h-i	*h*	*i*

ansehen und berücksichtigen, dass die magische Summe hier 15 ist und das Element in der Mitte 5=15/3 ist, so liegt der aus den folgenden Bildern ersichtliche Ansatz nahe:



Die Matrix wird als magsum(r,h,i) definiert. In der Tat liefert ein Beispielaufruf magsum(7,2,8) die magische Summe s = 3r = 21. Möglicherweise können wir nun magische Quadrate zu jeder gewünschten magischen Summe s=3r erzeugen. Wann gibt es Lösungen mit nur natürlichen Elementen?

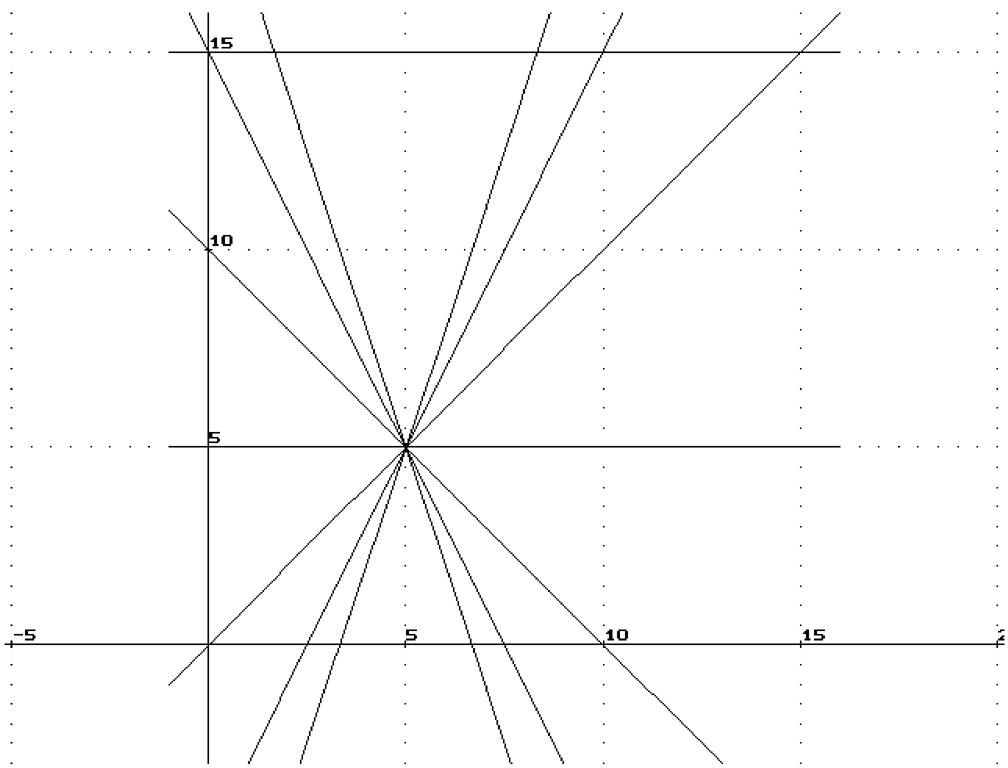


- Interpretiere die Aufrufe magsum(r,2,8) und mag(x,x). Welche Eigenschaften haben diese magischen Quadrate?

Eine geometrische Deutung
Beim Aufruf mag(x,x) kann man die entstehenden Elemente als Geraden deuten und sie zeilenweise in der gleichen Farbe in einem Koordinatensystem darstellen.

y = -x+10	y = -x+10	y= 2x-5	blau
y = 3x-10	y = 5	y = -3x+20	grün
y = -2x+15	y = x	y = x	rot

Auch die Gerade y=15 für die magische Summe wird eingetragen. Was fällt auf? - Alle Geraden zu den Elementen des magischen Quadrats gehen durch den Punkt (5,5). Zeige das rechnerisch! (Termeinsetzung). Gleichzeitig kann man die für die einzelnen Zeilen möglichen (natür-lichen) Zahlen erkennen.



Magische Quadrate in der Linearen Algebra
Magische Quadrate sind ein interessantes Untersuchungsobjekte für die Lineare Algebra, denn magische Quadrate sind besondere Matrizen. Man kommt auf umfangreichere lineare Gleichungssysteme, kann Linearkombinationen von magischen Quadraten bilden und kommt auf Vektorräume magischer Quadrate (siehe z.B. Lehmann,E.: Lineare Algebra mit Vektoren und Matrizen, Metzler-Verlag 1990 - nur noch beim Autor als Kopie erhältlich).

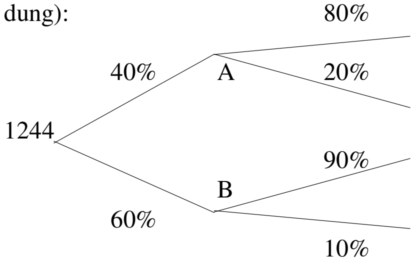
Der Ansatz mit der Matrix $\begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{pmatrix}$ sowie den gleichen Zeilen-, Spalten- und Diagonalensummen s liefert das oben formulierte Ergebnis für die Zeilensummen s - hier über ein lineares Gleichungssystem mit 8 Gleichungen und 9 Variablen (Gauß-Algorithmus)

Zeilen	Spalten	Diagonalen
a+b+c = 1	a+d+g = 1	a+e+i = 1
d+e+f = 1	b+e+h = 1	c+e+g = 1
g+h+i = 1	c+f+i = 1.	

Zusammenfassung
Magische Quadrate leisten gute Dienste für einen offenen Unterricht über Terme und Termumformungen. Sie bereiten gleichzeitig auf Problemstellungen in der Linearen Algebra vor.

3.2.5 Baumdiagramme als Termerzeuger

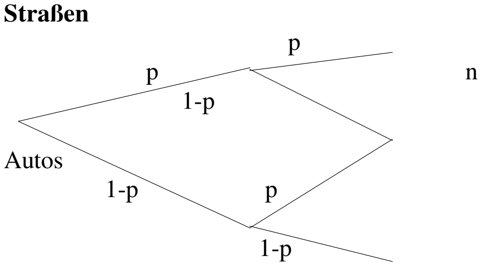
Vorübung: An einer Kreuzung verteilten 1244 Autos in die beiden Richtungen A und B zu 40% bzw. 60%. An der jeweils nächsten Kreuzung teilten sich die Autos weiter auf (siehe Abbildung):



Wieviel Autos durchfuhren die 4 Endpunkte des Baumes?
Lösung für den oberen Weg:
1244*40% = 4976; 4976*50% = 2488 Autos
oder auch
1244*40%*50% = 2488 Autos.

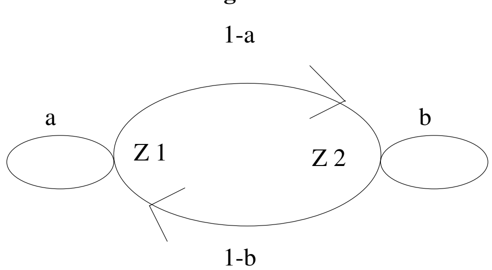
Die Abbildung wird nun verallgemeinert:

Autos verteilen sich nach Prozentsätzen auf Straßen



Die Pfadregel in Bäumen erzeugt Terme
z.B. pp + p(1-p) + (1-p)p

Kauf zweier Zeitungen Z1 und Z2

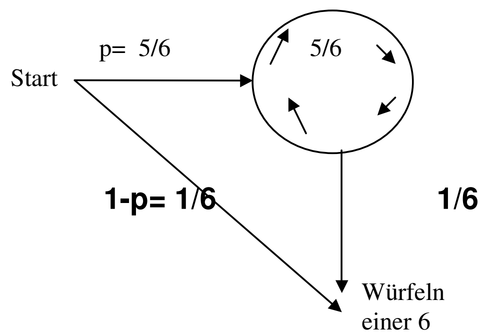


Zum Beispiel bedeutet a^4 (1-a) b^2 die Wahrscheinlichkeit, mit der ein Käufer vier Wochen lang Zeitschrift 1 kaufte, einmal zu Zeitschrift 2 wechselte und zweimal bei dieser Zeitschrift blieb.

Es gibt weitere Inhalte, die in Baumdiagrammen strukturiert werden können.

Das Warten auf einen Erfolg, z.B. auf eine 6 beim Würfeln

Beispielsweise ist die Wahrscheinlichkeit, erst nach 8 Würfen eine 6 zu erreichen, gleich Warte(8) = p^7 (1-p). Eine Tabelle zeigt, wie sich die Werte beim Warten entwickeln.



3.2.6 Terme am Pascal´schen Dreieck

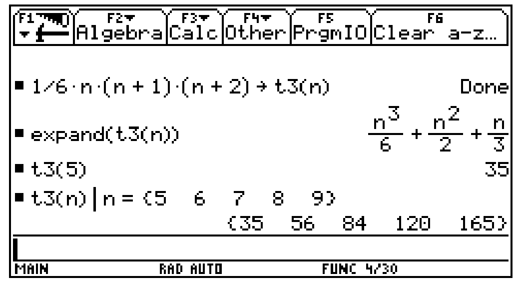
Aufgrund seiner Konstruktion ist das Pascalsche Dreieck eine Fundgrube für Terme.
Zunächst lassen sich die Terme $(a+b)^2$, $(a+b)^3$ usw. leicht ausrechnen, für niedrige Hochzahl von Hand, für höhere Hochzahl mit dem CAS, z.B. $(a+b)^4 = a^4+4a^3b+6a^2b^2+4ab^3+b^4$. Dann wird das Pascal´sche Dreieck entwickelt und es fällt allerlei auf, z.B. für die Schrägen!

```
               1     1
            1     2     1
         1     3     3     1
      1     4     6     4     1
   1     5    10    10     5     1
1     6    15    20    15     6     1
   a     b     c     d
```

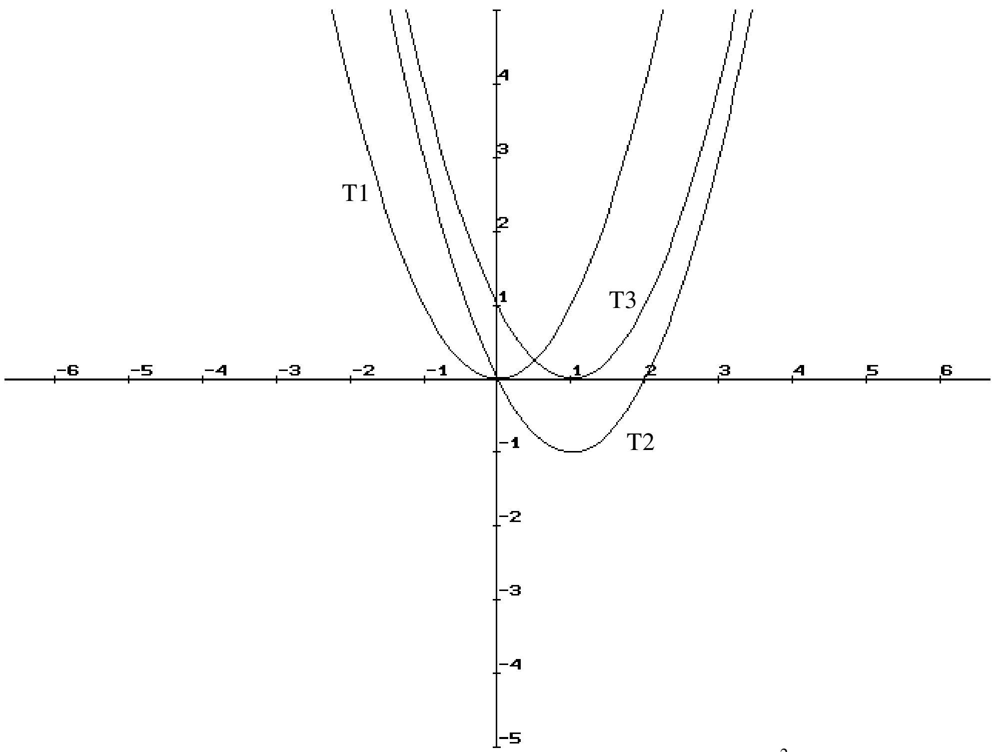
In den einzelnen Schrägen a,b,c,d ergeben sich die Zahlen durch folgende Terme

a T1(n)=n
b T2(n)=0.5n(n+1)
c T3(n)=1/6n(n+1)(n+2)

Diese Terme kann man entdecken lassen oder auch vorgeben und verifizieren lassen. Dabei ist wieder der Einsatz eines CAS angebracht, mit dem man dann auch höhere Zahlen bestimmen lassen kann, etwa T3(5) = 35, was sich andererseits durch die Fortführung des Pascalschen Dreiecks bestätigen läßt.
Damit ergibt sich auch bei diesem Beispiel das Wechselspiel zwischen Term, Termeinsetzung und ggf. Termumformung - was hier gar nicht wünschenswert ist, weil sich die Einsetzungen in der Produktform besser berechnen lassen.



Die Schreibweise t3(n)|n={5,6,7,8,9} bedeutet beim TI-92: Berechne den Term t3(n) für die angegebenen Werte 5,6,7,8,9. Die Ergebnisse sind die nächsten Werte in der Schrägen c.



Den Termaufbau veranschaulichen

Wir veranschaulichen den Aufbau des Terms
$T(x) = (x-1)^2 = x^2 + (-2x) +1$. Er wird zusammengesetzt aus
$T1(x) = x^2$, $T2(x) = T1(x) + (-2x)$
$T3(x) = T2(x) +1$

Den Aufbau von Termen verstehen

Das Pascal´sche Dreieck ist gut geeignet, um die Definition von Bausteinen und ihren Aufruf zu üben. So etwa für den Baustein
$Bau (a,b):= (a+b)^2$.
Aufrufe sind z.B. $Bau (x,1) = (x+1)^2$ und $Bau (x,2) = (x+2)^2$, die nun wieder auf graphisch als Parabeln veranschaulicht werden können.
Auch das Einsetzen von Termen gehört zu diesen Aspekten: $T1(x) = 3x+2$, $T2(x) = 2x-1$ und $Bau (T1(x), T2(x)) = (3x+2 + 2x-1)^2$.
Über die Bedeutung des Erkennens von Termstrukturen für die Arbeit mit einem Computeralgebrasystem informiert Kapitel 3.2.11. Wenn man in seinem Unterricht Ideen einer neuen Aufgabenkultur einbringen möchte, so sollte ein Ausnutzen der Bausteintechnik nicht fehlen; Näheres hierzu finden Sie in Kapitel 3.2.12. In diesem Zusammenhang wird auch auf die Aufsätze [1] und [2] verwiesen.

3.2 7 Summen aufeinanderfolgender Zahlen - ein Beispiel für Aufgabenvariationen

Hinweis: Einige Ansätze zu diesem Thema stammen aus [4, Schupp u.a.]

Ausgangsaufgabe:
- Läßt sich die Zahl 10000 als Summe zweier aufeinanderfolgender natürlicher Zahlen darstellen?

Man glaubt zunächst nicht, dass sich an Hand dieser Fragestellung ein großes Feld von Aktivitäten und damit ein sehr offener Unterricht entfalten kann.

Die Grundidee besteht darin, nach Abwandlungen der Aufgabestellung bzw. nach „Anschlußproblemen" zu suchen - eine Aufgabe, die gern und phantasievoll von Schülern bearbeitet wird.

Anschlußprobleme:
- Suche nach Veranschaulichungsmöglichkeiten von Aufgabenstellung und Lösung!
- Läßt sich die Zahl 10000 als Produkt (Differenz, Quotient) zweier aufeinanderfolgender natürlicher Zahlen darstellen?
- Läßt sich die Zahl 10000 als Summe dreier aufeinanderfolgender natürlicher Zahlen darstellen?
- Läßt sich die Zahl u als Summe aufeinanderfolgender natürlicher Zahlen darstellen?
- Was ist, wenn man die bisher verwendete Grundmenge der natürlichen Zahlen aufgibt?
- Kann man rechnerische bzw. graphische Lösungen (sogar allgemein) finden?
- Was ist, wenn man die Zahlen nicht direkt aufeinanderfolgen läßt?

Mit derartigen Fragestellungen ist die Voraussetzung für offenen Unterricht (Partnerarbeit, Gruppenarbeit, Projektarbeit, ...) gegeben, indem sich experimentelles Arbeiten mit einem CAS schnell als sehr hilfreich erweist.

Aktivitäten
Einige Aktivitäten dazu: Graphisch veranschaulichen, lineare Gleichung lösen, quadratische Gleichung lösen, Propädeutik für Grenzwert von Folgen, argumentieren bezüglich der Lösungsmengen.

Wir nennen einige der entstehenden Terme, die dann in Gleichungen zu Termumformungen einladen.

Terme

n+(n+1) = 10000	n-(n+1) = 10000
n(n+1) = 10000	n/(n+1) = 10000

Allgemeiner:

n+(n+1) = u	n*(n+1) = u	
n/(n+1) = u	n-(n+1) = u	oder
n+(n+1)+(n+2) = u	n*(n+1)*(n+2) = u	

Beispiel:
n+(n+1)+(n+2) = u => 3n+3 = u => 3(n+1) = u
oder auch noch
(n+1) = u/3 => n = u/3 - 1.

Jedenfalls muß u durch 3 teilbar sein, wenn es Lösungen in N geben soll. Also z.B.
u = 81 => n = 27-1, die 3 Zahlen sind 26,27,28.
Aber
u = 86, keine Lösung in N, wohl aber in Q:
n = 86/3 - 1 = 83/3, die 3 Zahlen sind 83/3, 86/3, 89/3.

Kleinere Summenzahlen haben den Vorteil, dass sich die Vorgänge gut (maßstabsgetreu!) graphisch veranschaulichen lassen. Die folgende Abbildung zeigt das für S=21.

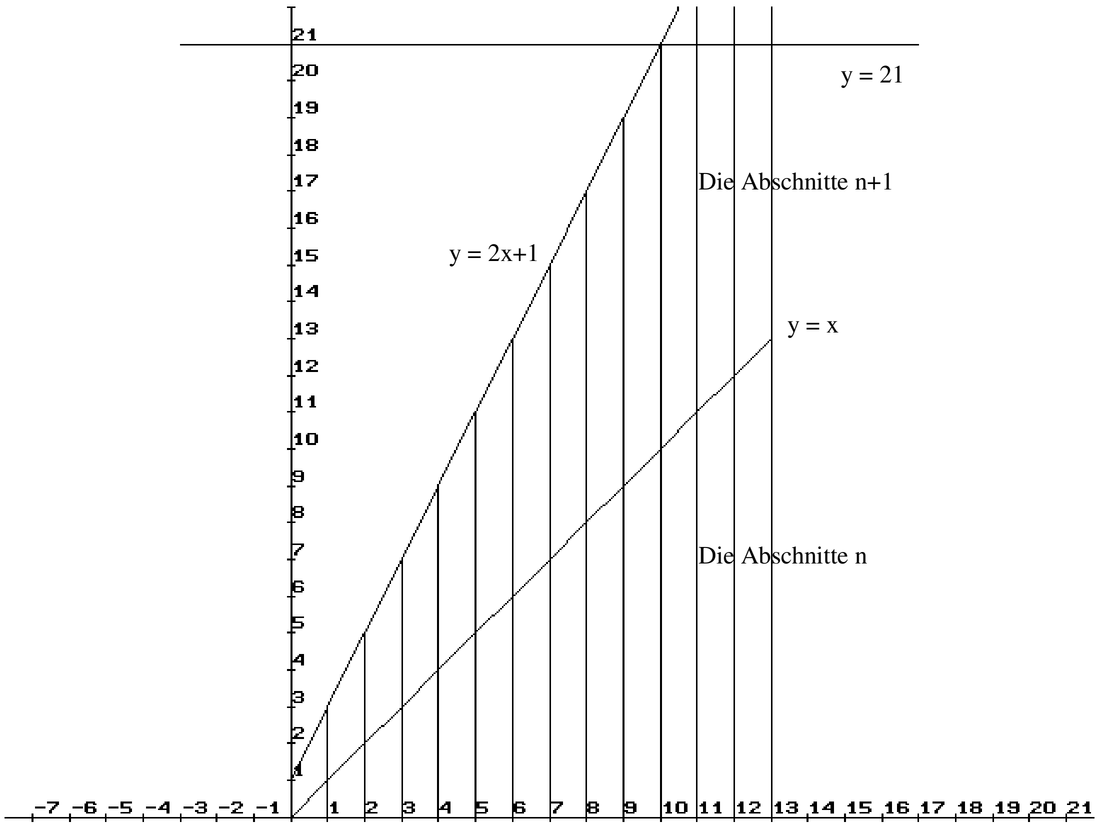


Abb.:3.2.7.a
Graphische Darstellung von n+(n+1) = 21

„Programmierung“ des Funktionenplotters PLOT11
f1: 21 die Summenzahl
f2: n,0,n,n Strecke (n,0) (n,n), Zahl n

f3: n,n,n,n+(n+1)
Strecke (n,n) (n,2n+1), Zahl n-1

f4: n,{n+(n+1)=f1:n:undef},n,0
nur zeichnen, wenn Summe = 21

f5: n,{n+(n+1)=f1:n:undef},n,n+(n+1)
nur zeichnen, wenn Summe = 21

f6: n+(n+1)
die Gerade y = n+(n+1) = 2n+1

Hinweis: Man kann die einzelnen Graphen nacheinander in verschiedenen Farben entstehen lassen, so dass sich eine schöne Veranschaulichung der gedanklichen Abfolge der Problemlösung ergibt.

Die Abbildung führt den Schüler noch weiter; denn offenbar geht es um den **Schnitt der beiden Geraden** y = x+(x+1) = 2x+1 und y = 21. Mit dieser Idee läßt sich weiter verallgemeinern. Offenbar lassen sich derartige Problemstellungen auf den Schnitt zweier Geraden (Gerade und Parabel, ...) zurückführen.
Lösungen von n+(n+1) = u für ganzzahlige u-Werte kann man auf der senkrechten Achse erkennen. Offenbar kann man mit n+(n+1) dort nur ungerade u-Werte erreichen.

Beispiel für experimentelles Arbeiten mit einem CAS
Wir zeigen nun einen der vielen möglichen Ansätze, um zu obiger Thematik mit dem CAS des TI-92 zu arbeiten.
Wir betrachten die zwei Terme zu „Summe bzw. Produkt dreier aufeinanderfolgender (natürlicher) Zahlen“:
TERM(n,u): n+(n+1)+(n+2) = u
TERM1(n,v): n*(n+1)*(n+2) = v

Einige nun mögliche Aktionen mit dem CAS sind in den folgenden Bildern zu sehen:

Folgen

Erste Untersuchungen könnten dem Folgenaspekt dienen:

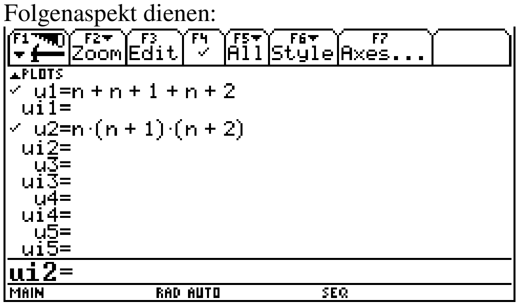


Bild 1: Eingabe der Folgenterme

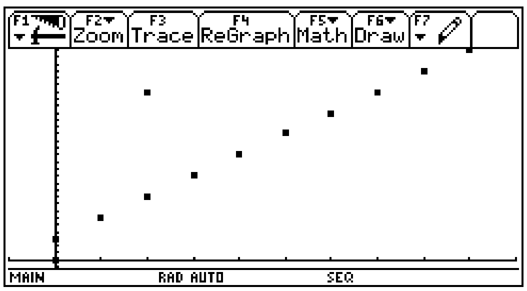
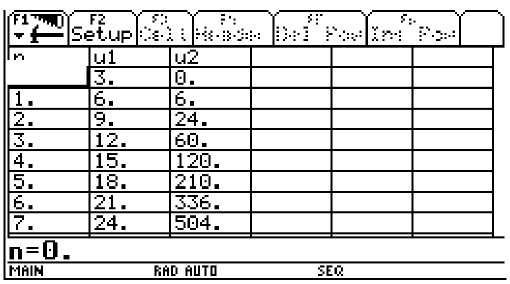


Bild 2: Die Werte der Folge u1 sind gut erkennbar, von der Folge u2 sieht man wenig (warum?). Der erste Wert auf der senkrechten Achse ist (0,3) von Folge u1, (0,0) von Folge u2.
Der Aufruf der zugehörigen Tabelle liegt nahe.



n	u1	u2
	3.	0.
1.	6.	6.
2.	9.	24.
3.	12.	60.
4.	15.	120.
5.	18.	210.
6.	21.	336.
7.	24.	504.

Bild 3: Offenbar sind die Werte der Folge u1 alle durch 3 teilbar!

- Kann man das allgemein nachweisen? (siehe Ausführungen oben)
- Bei der Folge u2: Sind alle Werte durch 6 teilbar?

Die Untersuchung der Folgen zeigt erste Ergebnisse. Für das Produkt 60 bei u2 ergibt sich n=3, also ist erwartungsgemäß 60=3*4*5. Für das Produkt 61 dagegen gibt es keine ganzzahlige Lösung.

Funktionsorientierte Überlegungen

Wir wechseln nun zu einer mehr funktionsorientierten Betrachtung (damit mehr für die Sekundarstufe 2 geeignet). Hierbei werden zunächst die Terme TERM(x,y) und TERM1(x,y) definiert.

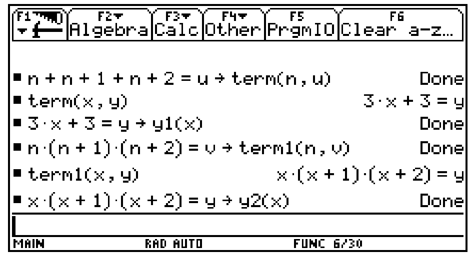


Bild 4: Definition der Terme und Vorbereitungen für die graphische Darstellung

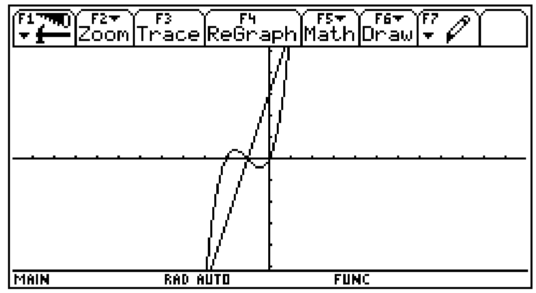


Bild 5: Der Aufruf der Terme mit den Parametern x und y liefert die Funktionsgleichungen und ergibt die Zeichnung der Graphen.

Umkehrfunktionen

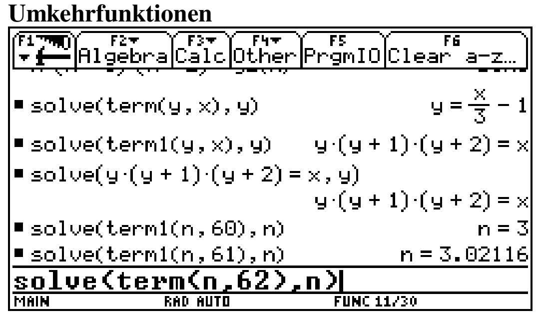


Bild 6: Der Aufruf solve(term(y,x),y) vertauscht die x und y-Werte im Term und löst nach y auf - das ist die Methode zum Ermitteln von Umkehrfunktionen. Für Term1 schafft der Computer die Auflösung nicht! Was ist da los?

Diese Andeutungen mögen genügen, um zu zeigen, in welche Bereiche uns die beiden Termdefinitionen führen können. Man denke dabei auch an den Aufruf der Terme mit Zahlenwerten.

Wichtig ist jeweils die Fragestellung:

Welche inhaltliche (mathematische) Bedeutung liegt bei den Aufrufen vor?

3.2.8 Gleichungen lösen und den Lösungsweg veranschaulichen

Aufgabe

Löse die Gleichung $\frac{5}{2x+2}=\frac{2}{4x-4}$

(Grundmenge G = Q-{1,-1})

.Wir wollen hier zeigen, wie man im Unterricht von der Handrechnung zur Computerlösung mit dem Befehl SOLVE übergehen kann.

a) Handrechnung

b) Schrittweise Rechnung mit dem CAS - Simulation der Handrechnung

c) Lösung mit der Anweisung SOLVE

a) Handrechnung

Möglicherweise wird man so rechnen:

$\frac{5}{2x+2}=\frac{2}{4x-4}$ // Überkreuz-Malnehmen

5 (4x-4)	=	2 (2x+2)	//Ausmultiplizieren
20x - 20	=	4x + 4	// -4x+20
16x	=	24	// :16
x	=	1.5	

Es geht aber auch so : $\frac{5}{2x+2} = \frac{2}{4x-4}$

$\frac{5}{2(x+1)}=\frac{2}{4(x-1)}$ //*(x+1),vorher kürzen

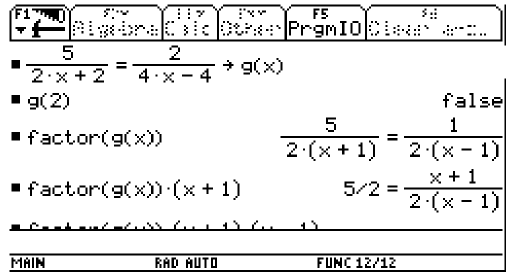
$\frac{5}{2} = \frac{(x+1)}{2(x-1)}$ // *(x-1)*2

5(x-1)	= x+1	// ausmultiplizieren
5x-5	= x+1	// -x+5
4x	= 6	// :4
x	= 1,5	

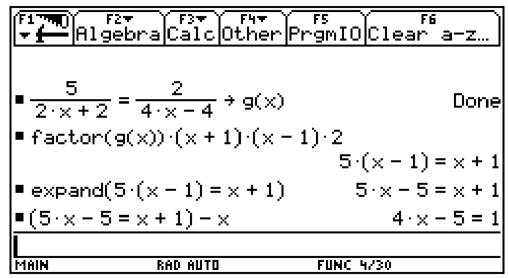
b) Schrittweise Rechnung mit dem CAS

Bevor man die Gleichung nun „schnell“ mit einem CAS löst (mit Hilfe von SOLVE), kann man versuchen, die Gleichung mit einem CAS, aber schrittweise zu lösen - so oder so ähnlich wie von Hand.

Dabei geht es um das Üben der Umformungsstrategie und damit um eine Vorbereitung auf den Befehl „solve“, der all diese Umformungen überspringt.

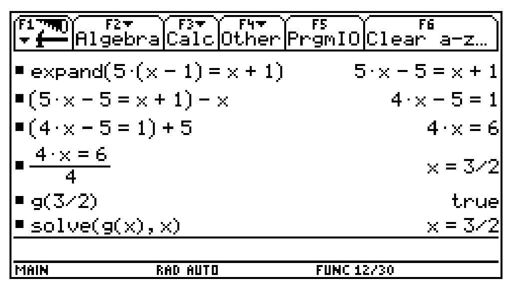


Die Gleichung wird definiert als g(x). Mit g(2) wurde ein erfolgloser Lösungsversuch unternommen. Die ersten Umformungen sind „faktorisieren“ und „multiplizieren“.



Die nächsten Lösungsschritte werden hier zu einer Gesamtstrategie vereint:

factor(g(x)) (x+1)*(x-1)*2*. Dann benutzen wir den Befehl „expand“.



Der letzte Schritt ist die Division durch 4.

Im Bild sehen wir schließlich die Lösung mit der Anweisung „solve“; hier nun erhalten wir die Lösung sofort**.**

Die Umformungen können auch in anderen Reihenfolgen und mit anderen Anweisungen vor sich gehen. In jedem Fall braucht man jeweils neue **Umformungsideen**, die sich aus der **Struktur der jeweiligen Terme** ergeben. Alle Schritte fügen sich zu einer **Gesamtstrategie** zusammen. In diesem Fall wurde das folgende „Programm“ abgearbeitet:

g(x):= (5/(2x+2) = 2/(4x-4))

((expand(factor(g(x))*(x+1)*(x-1)*2)-x)+5)/4

kurz: Solve(g(x),x)

In der Tat ergibt ein CAS bei Eingabe dieser Anweisungen die letzte Gleichung x = 3/2. Ein anderes Schülerprogramm wäre:
(expand(g(x)·(2·x + 2)·(4·x - 4)) - 4·x + 20) /16

c) Lösung mit der Anweisung SOLVE
Wenn Handrechnungen für einfache Beispiele und einige Simulationen von Handrechnungen mit dem CAS vorliegen, ist die Zeit gekommen, um die „Superanweisung" SOLVE zu verwenden. Solve(g(x),x) ergibt sofort die Lösung 3/2. Von nun an ist SOLVE für Termumformungen freigegeben.

Ein weiterer Lösungsweg - veranschaulicht mit einem Funktionenplotter

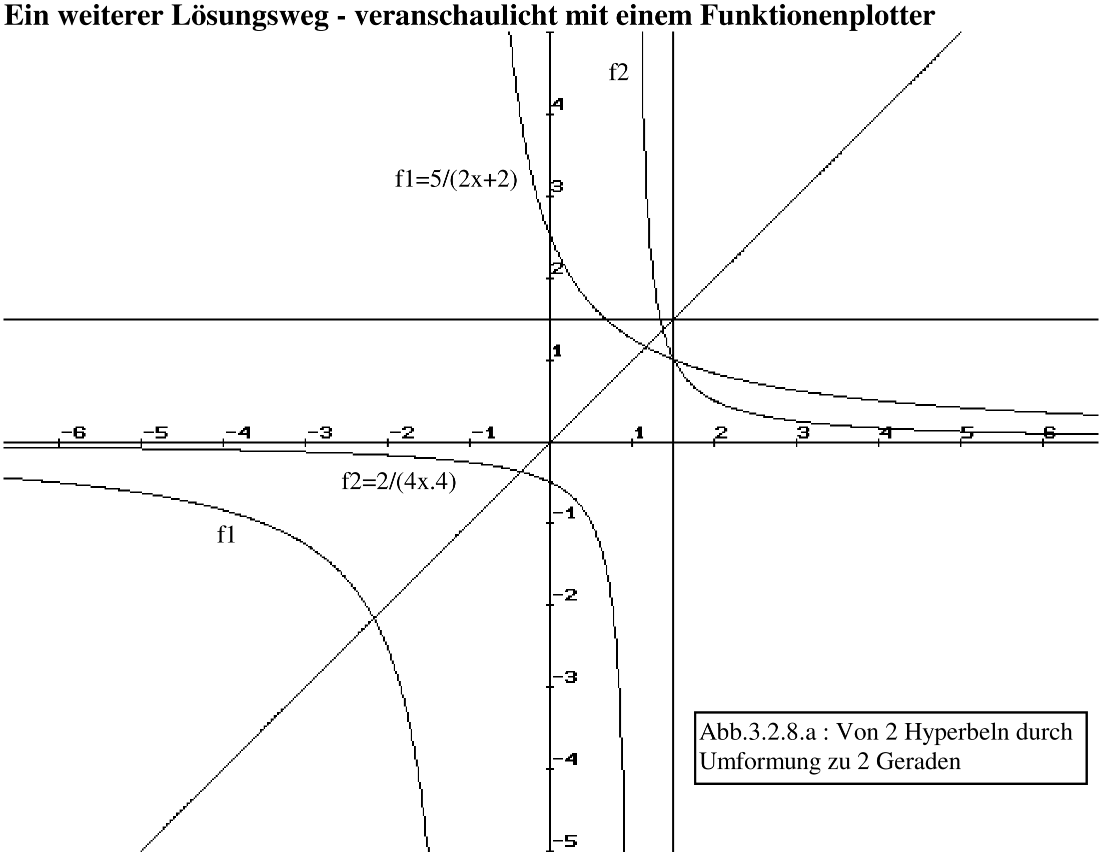


Abb.3.2.8.a : Von 2 Hyperbeln durch Umformung zu 2 Geraden

f1: 5/(2x+2) *eine Hyperbel*
f2: 2/(4x-4) *eine Hyperbel*
f3: senkr -1,1 *die Polstellen, Einschränkung des Definitionsbereichs*
f4: f1*(2x+2)*(4x-4) *über Kreuz malnehmen*
f5: f2*(2x+2)*(4x-4) *über Kreuz malnehmen*
f6: f4-4x+20
f7: f5-4x+20
f8: f6/16 *die Gerade y=x*
f9: f7/16 *die Gerade y=3/2*

Die Grundidee dieser Veranschaulichung besteht darin, jeweils die beiden Seiten einer Gleichung graphisch als Funktionsterme darzustellen. Damit bedeutet das Lösen der Gleichung ein Bestimmen des Schnittpunktes. Da die Gleichungen immer einfacher werden, werden auch die zugehörigen Graphen immer einfacher, schließlich sind es bei x = 3/2 die Geraden y=x und y=3/2, so dass man zuletzt die Winkelhalbierende des 1.Quadranten mit einer Parallelen zur x-Achse schneidet. Alle Schnittpunkte liegen auf einer Senkrechten zur x-Achse, nämlich auf x=3/2.

3.2.9 Nullstellen und Schnittpunkte mit einem CAS - schon in Klasse 8

Graphen und Termumformungen

Computeralgebrasysteme bieten mit den integrierten Funktionenplottern eine gute Möglichkeit, algebraische (Term-) Umformungen mit zeichnerischen Darstellungen zu verknüpfen - sie quasi gemeinsam zu betrachten. Wir demonstrieren das an der folgenden Aufgabe, die die Aspekte

- Termdefinition
- Veranschaulichung
- Termeinsetzung
- Termumformung

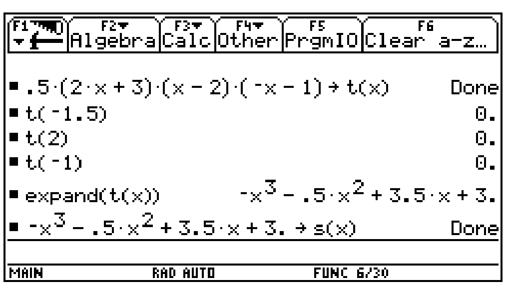
miteinander verbindet.

Aufgabe:
Gegeben ist der Graph zum Term
T(x) = 0.5(2x+3)(x-2)(-x-1).
Zeige, dass der zugehörige Graph die x-Achse bei x_1 = -1.5, x_2 = 2 und x_3 = -1 schneidet. Fertige zunächst eine Zeichnung mit dem CAS an und benutze dieses dann zum rechnerischen Nachweis.

Lösung:
a) Termdefinition
Zunächst wird t(x) definiert, siehe folgendes Bild.

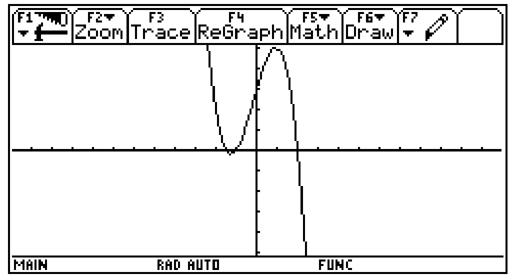
b) Graphische Darstellung
t(x) wird mit t(x) → y1(x) in den y-Editor des TI-92 geschickt und dann gezeichnet. Man erkennt die Schnittpunkte mit der x-Achse.

c) Termeinsetzung
Zum rechnerischen Nachweis werder t(-1.5), t(2) und t(-1) gebildet, für die jeweils eine Klammer des Terms gleich Null wird.



d) Anschlußaufgabe - Termumformung

Das CAS löst mit expand(t(x)) die Klammern auf. Bestätige das Ergebnis durch ausführliche Handrechnung.



Anschlußaufgabe - zweiter Graph
Hat S(x) = -2x^3 - 4x^2 + 2x + 6 den gleichen Graphen?

Schnittpunkte - Äquivalenzumformungen veranschaulichen

Äquivalenzumformungen können veranschaulicht werden, indem man zwei Seiten einer Gleichung getrennt als Funktionsgraphen in einem Koordinatensystem darstellt. Gleichzeitig bearbeit man damit eine Schnittpunktaufgabe.

Das wird hier an der Gleichung
(2x-1)(x+1) = 0.4x+1 gezeigt, die die Schüler in Klasse 8 zwar noch nicht rechnerisch lösen können, wohl aber zeichnerisch.

a) Hierzu werden zuerst die Graphen zu
f1=(2x-1)(x+1) und f2=0.4x+1 gezeichnet Schon hier kann der Schnittpunkt abgelesen und die Lösung der Gleichung damit näherungsweise angegeben werden.

Was ändern nun Äuqivalenzumformungen an dem Sachverhalt?

b) Nun erfolgen die Umformungen von
(2x-1)(x+1) = 0.4x+1 zwecks Beobachtung der graphischen Auswirkungen.

	(2x-1)(x+1)	=	0.4x+1		1.Zeichnung
Umformung 1:	2x^2+x-1	=	0.4x+1	// -1	2.Zeichnung = 1.Zeichnung
Umformung 2:	2x^2+x-2	=	0.4x	//-0.4x	3.Zeichnung
Umformung 3:	2x^2+0.6x-2	=	0		4.Zeichnung

Zwecks übersichtlicher Darstellung werden die einzelnen Zeichnungen farblich unterschieden angelegt (Verwendung eines Funktionenplotters).

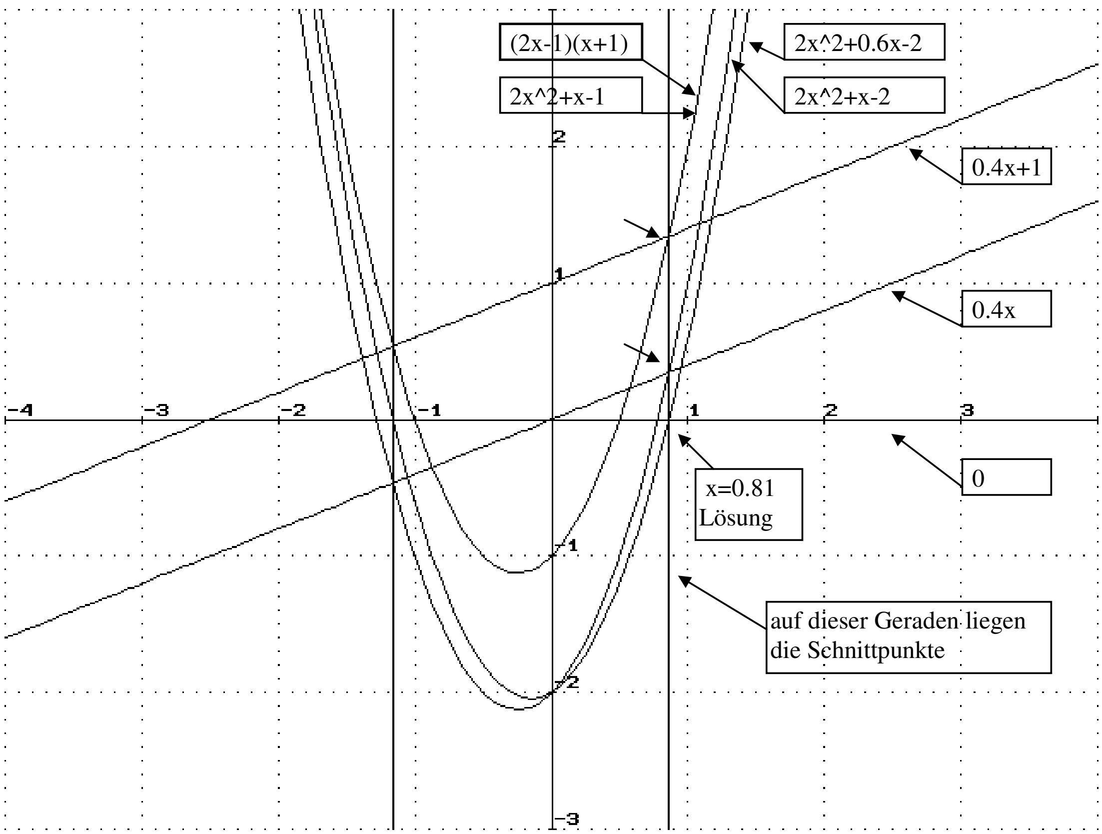


Abb.3.2.9.a: Veranschaulichung von Termumformungen

Die Zeichnung zeigt, wie sich die Parabeln (auf der linken Seite der Gleichung) und die Geraden (auf der rechten Seite der Gleichung) verändern, wobei die Geradengleichungen immer einfacher werden, bis schließlich die x-Achse die letzte Gerade ist. Gleichzeitig wird deutlich, dass die Schnittpunkte aller Konfigurationen auf der senkrechten Geraden x=0.81 liegen.
In der Terminologie des Funktionenplotters HL-PLOT11 wurde geschrieben:

`f 1: (2x-1)(x+1)·`	grün	`f 3: 2x^2+x-1···`	blau, überzeichnet grün
`f 2: 0.4x+1·····`	grün	`f 4: 0.4x+1·····`	blau, überzeichnet grün
`f 5: 2x^2+x-2··`	schwarz	`f 7: 2x^2+0.6x-2··`	lila
`f 6: 0.4x········`	schwarz	`f 8: 0···········`	lila

3.2.10 Interessante Terme - Primzahlterme

Die folgende Problemstellung ist (erstaunlicherweise) gut geeignet für offenen und projektartigen Unterricht.

Aufgabe:
Untersuche die Terme
f1(x) = x^2+x+17 und f2(x) = x^2+x+41.

Warum das? Viel kann doch wohl nicht dahinterstecken!
Vermutlich kommen die Schüler auf die Idee, doch mal einige Werte einzusetzen, x=1 oder x=2 oder ... Vielleicht zeichnen sie auch die zugehörigen Graphen und hoffen auf Ideen.

Es dauert nicht lange, bis das Stichwort „Primzahlen" fällt und damit öffnet sich die Anfangsaufgabe:

- Vermutungen werden formuliert,
- neue Aufgaben entstehen,
- es bilden sich Schülergruppen

und die Arbeit an den Problemen beginnt.

Die Offenheit der obigen Problemstellung wird hier erreicht durch

- Art der Fragestellung
- Art der Bearbeitung (graphisch, Wertetafel, Primzahltafel, Euler,...)
- Bausteinansatz
- Animation der Schüler, von sich aus weitere Fragen zu stellen

Hier folgt ein Ausschnitt aus den möglichen Aktivitäten:

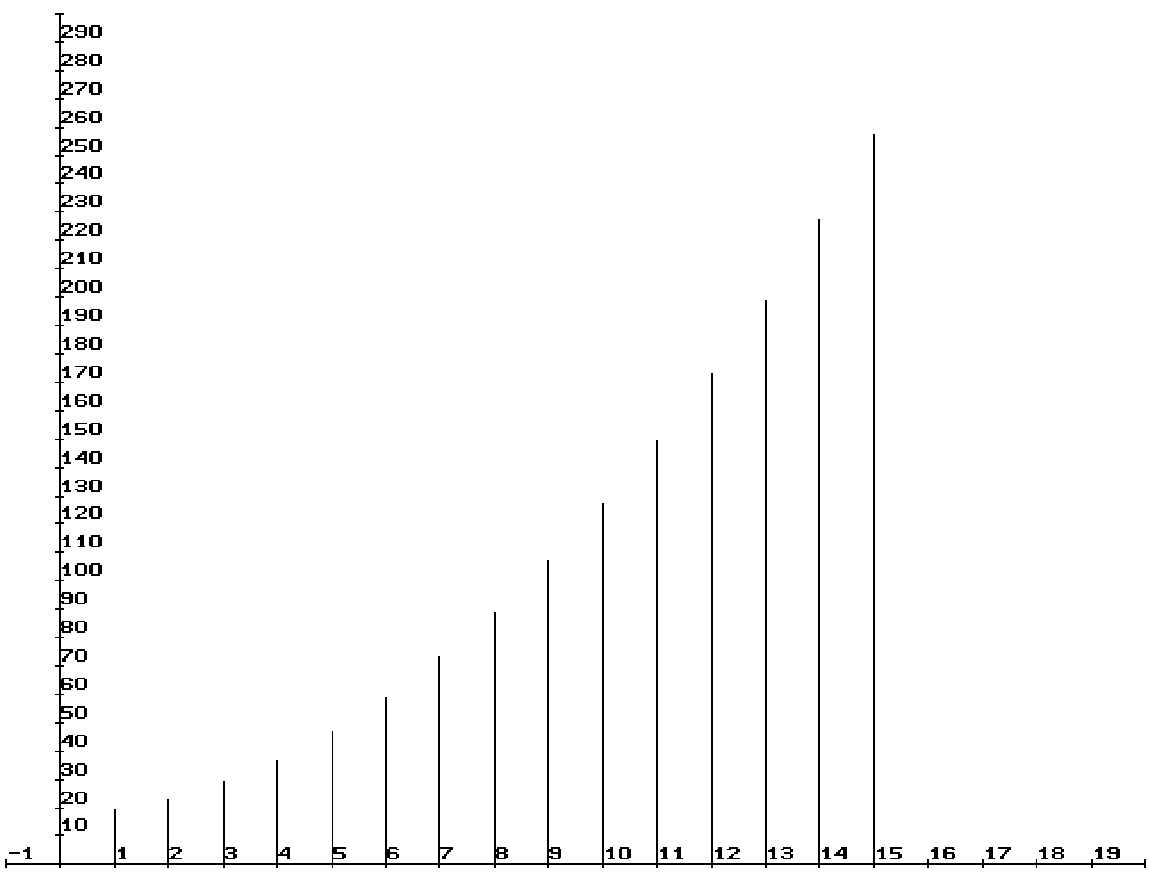


Abb. 3.2.10.a: Primzahlen?

Da die Terme bis auf das allgemeine Glied die gleiche Struktur haben, lohnt sich die

Definition eines Bausteins f1(a,b) := a^2+a+b.
f1(x) = x^2+x+17 erhält man dann durch den Bausteinaufruf: f1(x,17)

Beim Funktionenplotter HL-PLOT11 kann man definieren:

```
f 1: a^2+a+b, Bausteindefinition
f 2: x,0,x,f1(x,17),die einge
     zeichneten Strecken
f 3: f1(x,17), Graph zu x^2+x+17
f 4: f1(x,41), Graph zu x^2+x+41
f 5: f1(x,7),  Graph zu x^2+x+7
```

So erhält man die Wertetafel

x	f2	f3	f4	f5
0.0000	17.0000	17.0000	41.0000	7.0000
1.0000	19.0000	19.0000	43.0000	*9.0000*
2.0000	23.0000	23.0000	47.0000	13.0000
3.0000	29.0000	29.0000	53.0000	19.0000
4.0000	37.0000	37.0000	61.0000	27.0000
5.0000	47.0000	47.0000	71.0000	37.0000
6.0000	59.0000	59.0000	83.0000	49.0000
7.0000	73.0000	73.0000	97.0000	63.0000
8.0000	89.0000	89.0000	113.0000	79.0000
9.0000	107.0000	107.0000	131.0000	97.0000
10.0000	127.0000	127.0000	151.0000	117.0000
11.0000	149.0000	149.0000	173.0000	139.0000
12.0000	173.0000	173.0000	197.0000	163.0000
13.0000	199.0000	199.0000	223.0000	189.0000
14.0000	227.0000	227.0000	251.0000	217.0000
15.0000	257.0000	257.0000	281.0000	247.0000

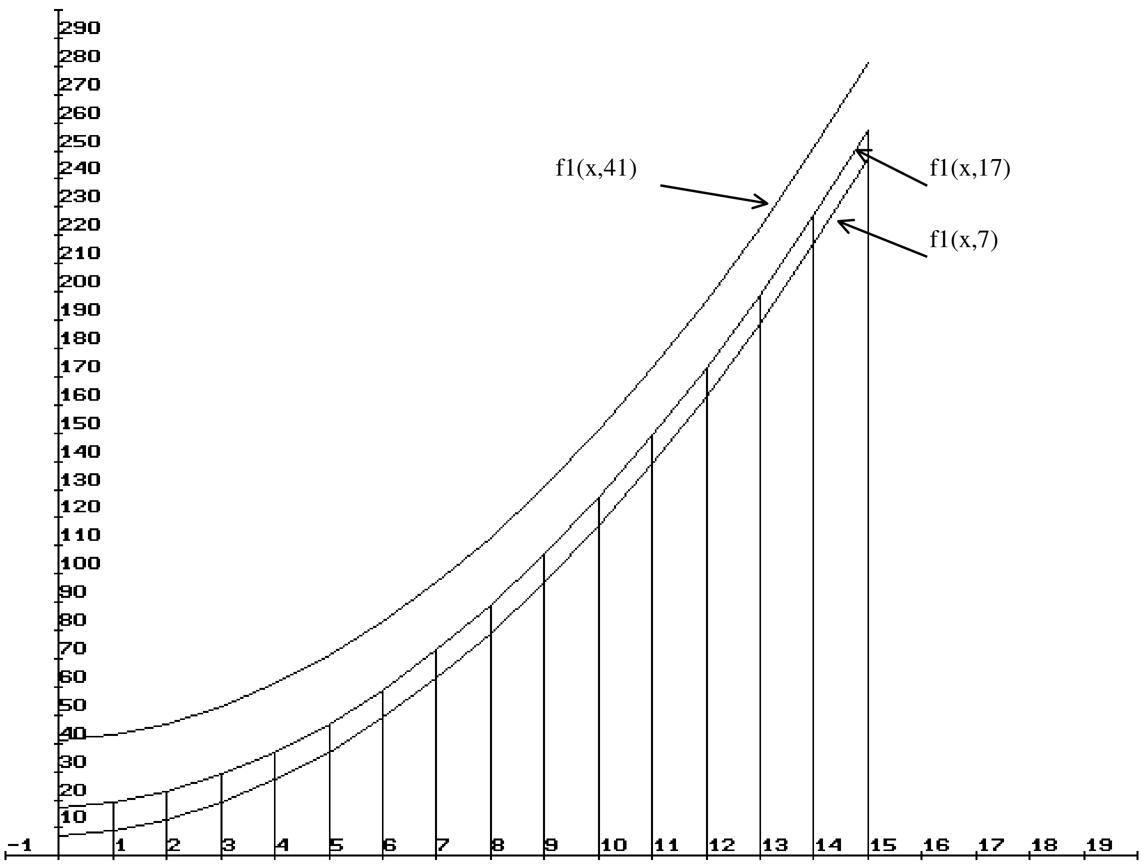


Abb.3.2.10.b: Welche Primzahlen werden erzeugt?

Problembearbeitung mit DERIVE

Arbeitsweg, Ziele:
Arbeit mit selbstdefiniertem Baustein, Kennenlernen von VECTOR und FACTOR
F1(a, b) := a^2 + a + b
F1(x, 17)

x^2 + x + 17
VECTOR(F1(x, 17), x, 0, 30, 1)
[17, 19, 23, 29, 37, 47, 59, 73, 89, 107, 127, 149, 173, 199, 227, 257, ***289 (für x=16, 17*17)*** , 323, 359, 397, 437, 479, 523, 569, 617, 667, 719, 773, 829, 887, 947]

FACTOR(227)
227 (227 ist also Primzahl)
FACTOR(289)
17^2 (289 ist also keine Primzahl)

Einige Anmerkungen zur DERIVE-Bearbeitung:
Da wir möglicherweise mehrere Graphen ähnlicher Art zeichnen wollen bzw. ähnliche Rechnungen planen, empfiehlt sich die Definition eines Bausteins - hier abgekürzt mit F1(a,b). Je nach Art des Bausteinaufrufs können nun verschiedene Aufgaben bearbeitet werden.

Fortsetzungsmöglichkeiten

Bezüglich des Themas „Primzahlen" gibt es nun diverse Fortsetzungsmöglichkeiten, wobei immer wieder Terme auftreten, die ja hier das eigentliche Thema sind.

1) Finde Primzahlen der folgenden Formen
a) $(10^n-1) / 9$; welche Form haben diese Primzahlen?
b) 2^n-1 (Mersennesche Primzahlen)
c) 2^(2^n) + 1 (Fermatsche Primzahlen)

2) Prüfe die Aussage (Wilson Kriterium):
Die natürliche Zahl n ist genau dann eine Primzahl, wenn (n-1)! +1 durch n teilbar ist.
Wieder ermöglichen passende Bausteindefinitionen und Bausteinaufrufe experimentelles Arbeiten zu den obigen Behauptungen.

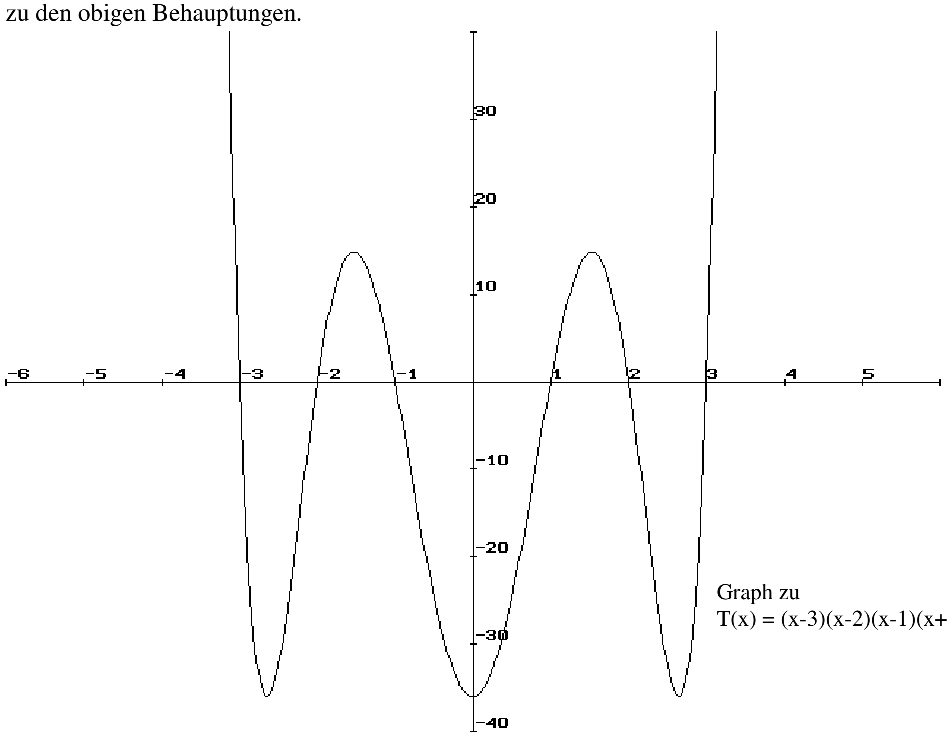
In ähnlicher Weise kann man andere interessante Terme aus innermathematischen Fragestellungen oder auch aus Anwendungsfällen betrachten.

Was fällt dir an dem folgenden Term auf?
T(x) = (x-3)(x-2)(x-1)(x+1)(x+2)(x+3).

Die Antworten oder Fragen können in verschiedene Richtungen gehen, etwa:

- Der Term hat einen systematischen Aufbau.
- Welchen Grad hat die Funktion?
- Man kann die Nullstellen sofort ablesen. Werden diese auch vom CAS gefunden? Immerhin ist es eine Funktion 6.Grades!
- Zeichne den Graphen mit dem CAS. Welche Darstellungsprobleme entstehen?
- Wie kann man den Term noch verallgemeinern?
- Multipliziere die Klammern aus! Nenne den neuen Term S(x).
  Zwischenergebnis:
  $S(x) = (x^2-1)(x^2-4)(x^2-9) = ...$
  Wie geht das möglichst bequem? Überprüfe graphisch, ob du (voraussichtlich) richtig umgeformt hast.
- Welche Informationen gehen bei S(x) verloren?

Andererseits kann der Graph auch gegeben werden und es kann nach Auffälligkeiten gefragt werden.



Graph zu
T(x) = (x-3)(x-2)(x-1)(x+1)(x+2)(x+3)

3.2.11 Termstrukturen

Bei der Arbeit mit Termen - nicht zuletzt auch bei der Benutzung eines CAS - kommt es immer wieder darauf an, die Struktur eines Terms zu erkennen bzw. eine bestimmte Struktur herzustellen, um so Ergebnisse besser auswerten zu können. Zu diesem Aspekt zunächst einige Beispiele:

a) Nullstellen
Wenn es um Nullstellen einer Funktion geht, ist es besser den Term als Produkt von Linearfaktoren zu schreiben. So lässt sich die Gleichung $4(x-2.4)(2x-3) = 0$ besser und schon in Klasse 7 auswerten (Nullstellen $x=2.4$ und $x= 1.5$) als die Gleichung $8x^2-31.2x+28.8=0$, mit der Schüler von Klasse 7 überfordert wären.

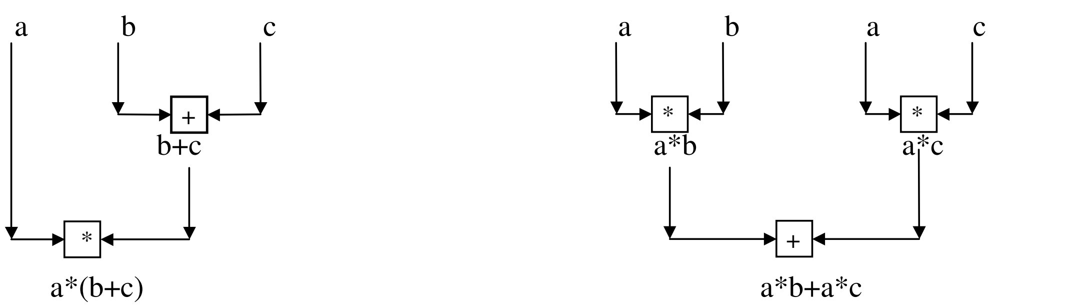
b) Geradengleichung

Mit der Gleichung $y = 4x-2$ verbinden die Schüler dank unseres Unterrichts sofort die Vorstellung einer Geradengleichung, mit $4x-y-2=0$ jedoch nicht.

So kommt es immer wieder darauf an die für das Problem passende Schreibweise eines Terms zu erzeugen und längst nicht immer macht das CAS eine Umformung so, dass wir das Ergebnis auswerten können.

c) Distributivgesetz
Die Struktur von Termen kann gut mit Hilfe von Termbäumen dargestellt werden. So zum Beispiel für das Distributivgesetz:

a*(b+c) = a*b + a*c.



Vom Distributivgesetz wissen wir, dass je nach Anwendung Umformungen von rechts nach links oder von links nach rechts gebraucht werden.

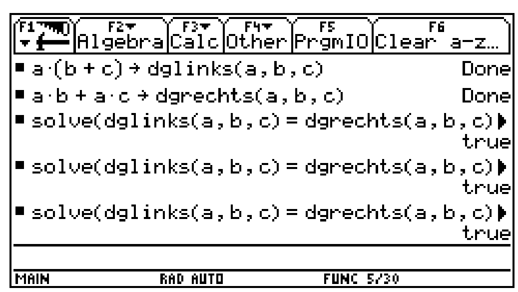
d) Das Distributivgesetz im CAS

Wir definieren
dglinks(a,b,c) := a*(b+c) und
dgrechts(a,b,c) := a*b+a*c.

Danach können wir z.B: ansetzen:
solve(dglinks(a,b,c)=dgrechts(a,b,c),a)
solve(dglinks(a,b,c)=dgrechts(a,b,c),b)
solve(dglinks(a,b,c)=dgrechts(a,b,c),c)

Löst man die Gleichung, so erhält man stets „true“, d.h. die Gleichung gilt für alle a,b,c. Das gilt übrigens auch, wenn man in die Bausteine Funktionen einsetzt:

solve(dglinks(x,x^2,x^3)=dgrechts(x,x^2,x^3),x)
ergibt den Wert true



e) Der Computer als Kontrollinstrument - zuweilen mit Überraschungen

Term-Handrechnungen aller Art können (ohne Lehrer) gut mit einem CAS kontrolliert werden, was erfahrungsgemäß für Schüler recht motivierend ist.. Dabei sind allerdings Überraschungen nicht ausgeschlossen! Ihre Analyse erfordert Schülerwissen über den Aufbau von Termen!

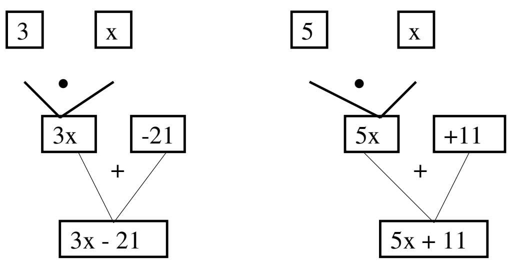
Sei T2(p,q) := 3*p^2*q (mit der TI-92-Syntax).

Dann ergibt der Aufruf
T2(a,1-a) = -3a^2(a-1) und nicht wie erwartet den Term 3a^2(1-a).

f) Rechenbäume (Termbäume)

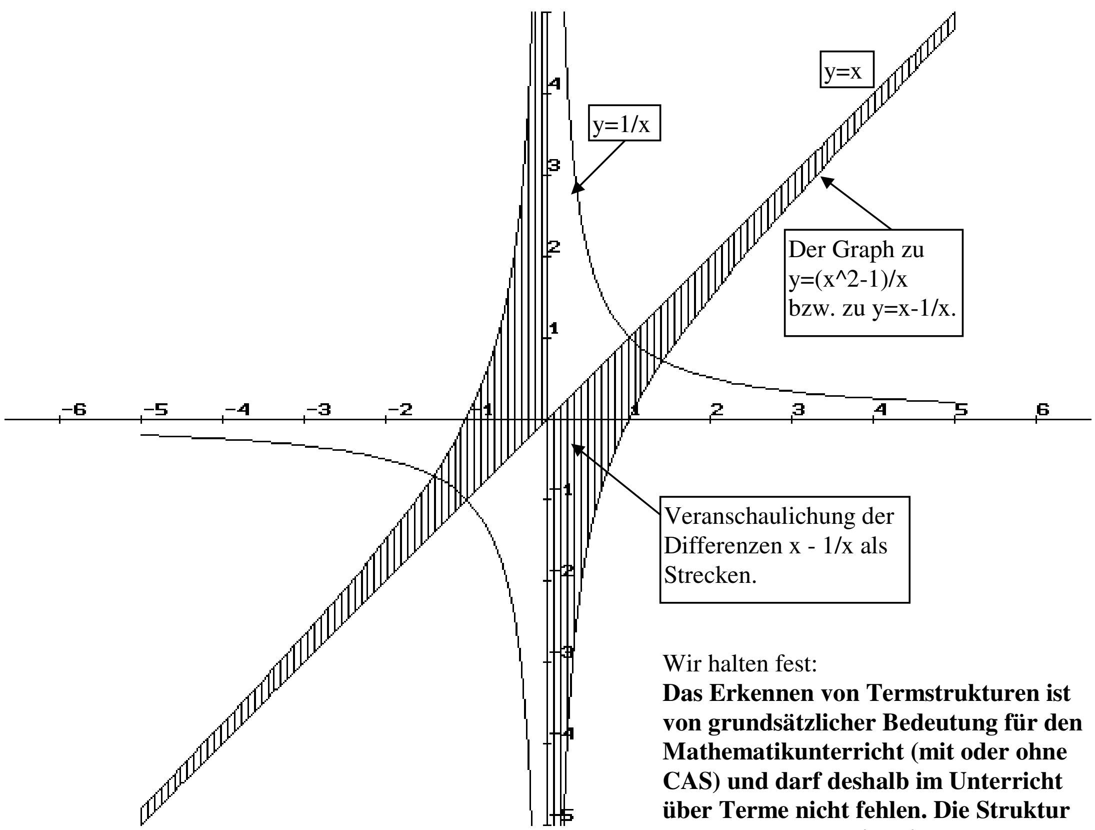
Wir haben oben bereits gesehen, dass es sinnvoll sein kann, Rechnungen aller Art in Termen und Gleichungen durch Rechenbäume darzustellen, in denen die Struktur von Termen analysiert wird. Hierzu noch ein Beispiel:

3x - 21 = 5x + 11



g) Asymptoten

Wir betrachten die Terme
T1(x) = (x^2 -1) / x und
T2(x) = x - 1/x
Bei T1(x) erkennen wir sofort die Nullstellen und die Polstelle x=0, bei T2(x) ist das nicht so leicht zu sehen, stattdessen wissen wir besser, wie sich der Graph aus grundlegenden Graphen (y=x, y=1/x) zusammensetzt und können das für eine instruktive graphische Darstellung nutzen. Außerdem erhalten wir die schräge Asymptote. Auch dieses Beispiel zeigt, dass es auf die Struktur eines Terms ankommen kann.



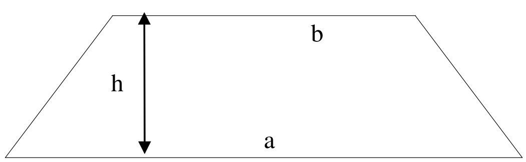
Wir halten fest:
Das Erkennen von Termstrukturen ist von grundsätzlicher Bedeutung für den Mathematikunterricht (mit oder ohne CAS) und darf deshalb im Unterricht über Terme nicht fehlen. Die Struktur von Termen sollte jeweils bewusst gemacht werden, Übungen dazu sind angebracht.

3.2.12 Terme als CAS-Bausteine - ein wichtiger Beitrag zu einem modernen Mathematikunterricht

Das Arbeiten mit CAS-Bausteinen

Bei der Bearbeitung mathematischer Probleme mit Hilfe des Computers werden zunehmend (wie in der Informatik schon länger) Bausteine verwendet. Hierfür haben in letzter Zeit die Computeralgebrasysteme (CAS) einen für den Unterricht entscheidenden Beitrag geleistet. Dabei kann es sich um vom System her vorgegebene Bausteine oder vom Benutzer selbst definierte Bausteine handeln. Wir haben im Verlauf der Darstellung zahlreiche solcher Bausteine kennengelernt. Ein weiteres Beispiel soll nun den Bausteinaspekt vertiefen.

Ein Baustein für Flächeninhalte von Trapezen



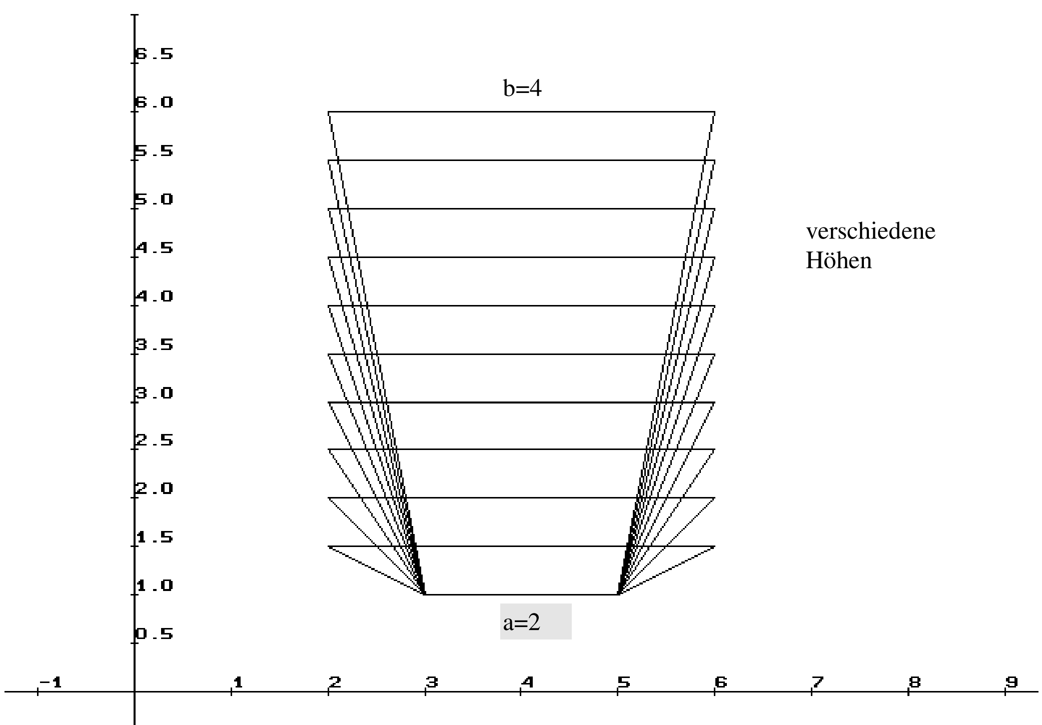
Der Flächeninhalt eines (nicht notwendig gleichschenkligen) Trapezes berechnet sich bekanntlich nach der Formel A = $\frac{a+b}{2}h$.

Da diese Formel für diverse Aufgabenstellungen benötigt wird und aus anderen unterrichtsmethodischen Gründen (siehe unten) erscheint es sinnvoll, einen für diesbezügliche Fragestellungen geeigneten Baustein einzuführen. Da der Flächeninhalt von den drei Parametern a,b,h abhängig ist, erscheint es sinnvoll, $Trap(a,b,h) := \frac{a+b}{2}h$ zu definieren. Die Einführung des Bausteins Trap(a,b,h) mit Nennung der Parameter war bislang nicht üblich. Wir werden jedoch sehen, dass Trap(a,b,h) neue Aspekte in den Mathematikunterricht der Klasse 7 oder 8 hineinbringt. Das soll belegt werden durch einige Bausteinaufrufe, die unterschiedliche Probleme bearbeiten:

Bausteinaufrufe

Hinweis: Für die Veranschaulichungen betrachten wir gleichschenklige Trapeze.

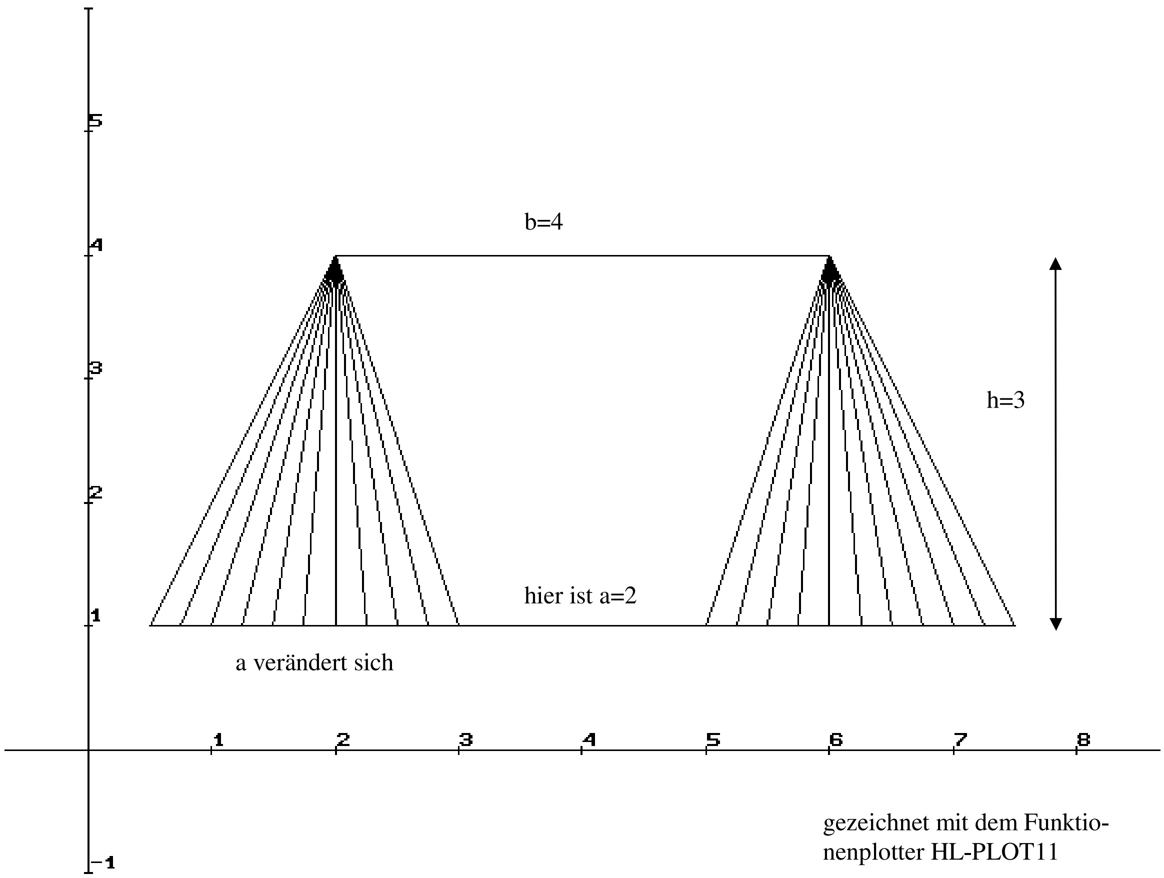
Trap(2,4,3) ist ein Aufruf zur Berechnung einer Trapezfläche, Ergebnis 9 FE
Trap(2,4,h) liefert uns Trapezflächen in Abhängigkeit von der Höhe h. Zeichne solche Trapeze!



Trapeze mit den Seiten 2 und 4 und beliebiger Höhe

gezeichnet mit dem Funktionenplotter HL-PLOT11

Trap(a,4,3) liefert uns Trapezflächen in Abhängigkeit von der Grundseite a, Zeichnung der Trapeze!

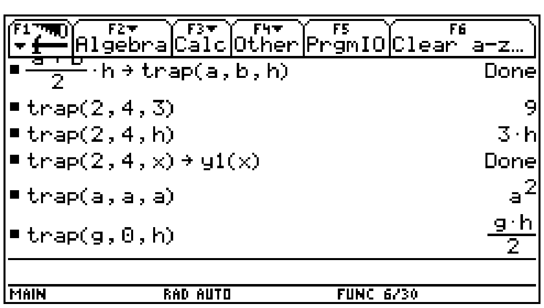


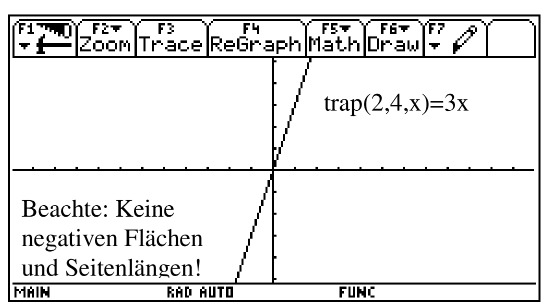
Die Zeichnung stellt weitere Fragen, wie z.B.

- Wie verändert sich a?
- Was geschieht für b=0?
- Wie würde die Zeichnung für feste a=2 und h=3, aber für variables b aussehen?

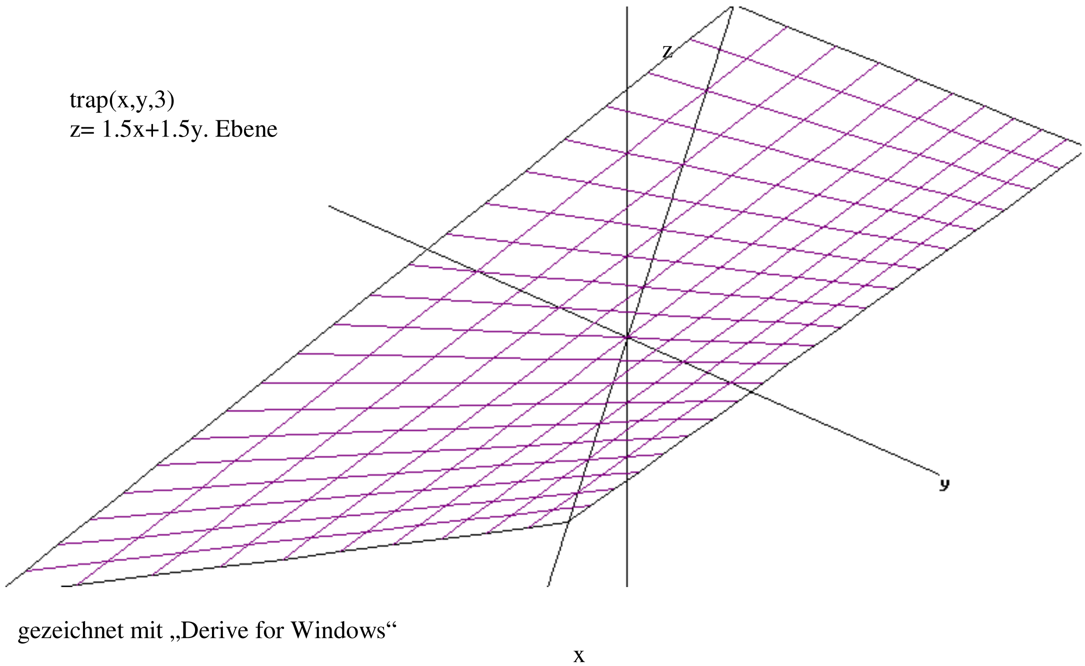
Trap(2,4,x) -> y1(x) liefert uns einen Graphen, der uns Trapezflächen in Abhängigkeit der Höhe x zeigt.
Trap(x,y,3) bringt eine 3-dimensionale Darstellung (die Ebene z = 1.5x+1.5y)
Trap(a,a,a) ergibt die Fläche eines Quadrates mit der Seitenlänge a
Trap(g,0,h) Flächenformel für ein Dreieck mit der Grundseite g und der Höhe h

Für den TI-92 lassen sich die obigen Aufrufe durch die folgenden Eingaben erzeugen:





trap(x,y,3)
z= 1.5x+1.5y. Ebene

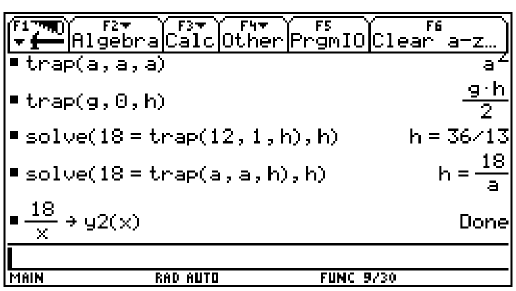


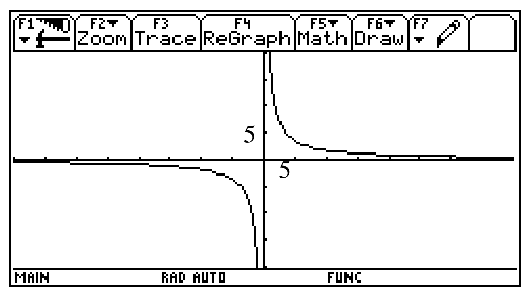
gezeichnet mit „Derive for Windows“

Anwendung von „Solve“ auf den Baustein „Trap“

Gegeben ist ein Trapez mit dem Flächeninhalt A= 18 FE und den Seitenlängen a=12 LE und b= 1 LE. Wie groß ist die Höhe des Trapezes?
Solve(18=Trap(12,1,h),h) ergibt den Wert h=36/13

Was bedeutet der Aufruf Solve(18=Trap(a,a,,h),h) ?

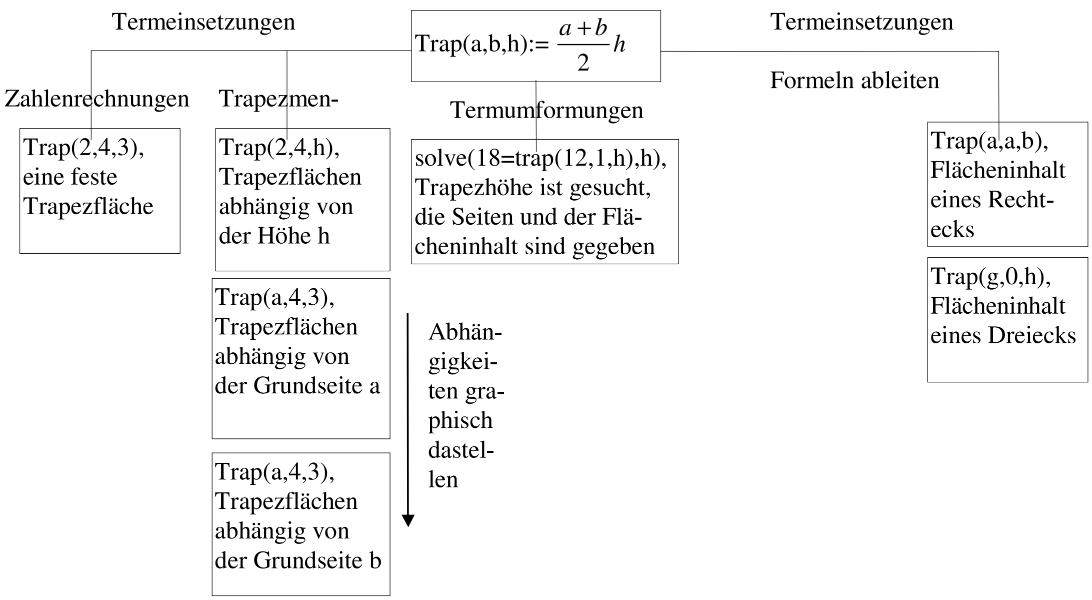




Der Graph zu y=18/x zeigt die Höhe in Abhängigkeit von den (gleichlangen) parallelen Seiten bei gegebenem Flächeninhalt des Trapezes.

Die obigen Beispiele zeigen, dass der Baustein $Trap(a,b,h) := \frac{a+b}{2}h$ eine ihm eigene Mathematik-Welt enthält. Versuchen wir eine Strukturierung der vielen Baustein-Aufrufe. Wir erhalten einen Ausschnitt (über Flächeninhalte) aus der „Mathematik am Trapez“.

Mathematik am Trapez



Von der White-Box zur Black-Box

Offenbar ist in derartigen Bausteinen viel von der Mathematik versteckt, für die man im normalen Unterricht entspechend viel Zeit aufwendet. Diese Welt erschließt sich uns durch Bausteinaufrufe. Bevor wir dazu fähig sind, muß es jedoch erst einmal zur Definition des Bausteins kommen. Das bedeutet für Trap(a,b,h):

(1) Eine konkrete Fragestellung, die auf die Herleitung der Flächeninhaltsformel
A = $\frac{a+b}{2}h$ für das Trapez führt.

(2) Einige Aufgaben zur Benutzung der Formel mit Handrechnung festigen ihren Gebrauch
- noch befinden wir uns in der White-Box der Trapezformel.

(3) Definition des Bausteins:
$Trap(a,b,h) := \frac{a+b}{2}h$

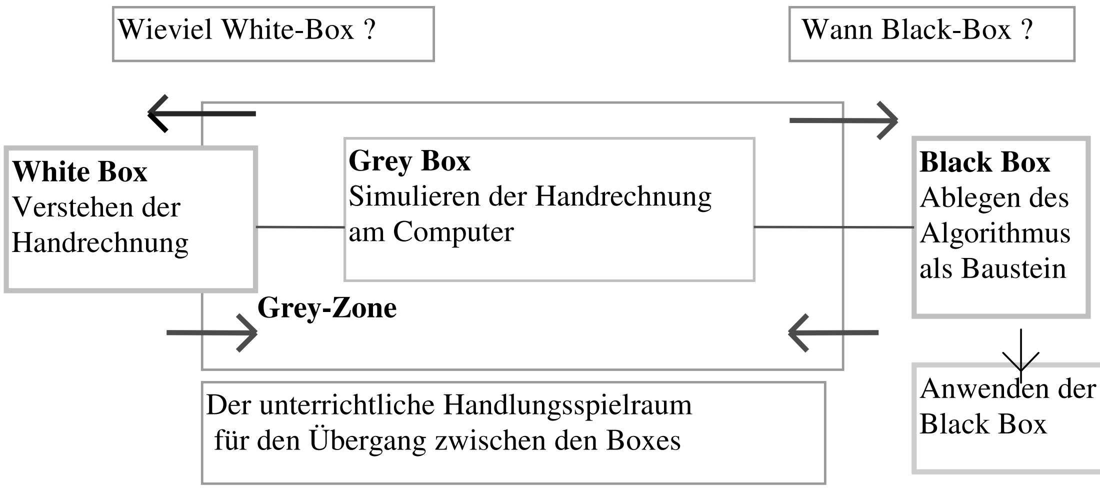
(4) Der Baustein ist nun (und auch für später) zur Bearbeitung weiterer Aufgaben freigegeben
- der Baustein ist zur Black-Box geworden.
(5) Es besteht die Möglichkeit, die Leistungsfähigkeit des Baustein durch geeignete Aufrufe genauer zu analysieren (siehe Abbildung „Mathematik am Trapez“). Damit gewinnen wir gleichzeitig Überblick über eine kleine „Mathematik-Welt“, nämlich den Flächenberechnungen im „Haus der Vierecke“.

Black-Box: Wir wissen, was man in die Black-Box hineinstecken muß (wie man sie sinnvoll aufruft), brauchen aber keine Details, wie die Ergebnisse ermittelt werden - oder dürfen die Details vergessen.

Für die Unterrichtspraxis ist klar, daß der Einführung einer solchen Black-Box das mathematische Verständnis für ihre Arbeitsweise in der Regel vorangehen muß. Das mathematische Verständnis für eine Black-Box wird in einer „**White-Box**“ zusammengestellt.

Die obigen Betrachtungen am Baustein Trap(a,b,h) - und in anderen Fällen ergibt sich die gleiche Problematik - zeigen, dass es ganz wesentlich darauf ankommt, den richtigen (fließenden) Übergang von der White-Box zur Black-Box zu finden. Dieser Übergang findet in einer Grauzone statt, in der auch die Grey-Box enthalten ist.

Die Grauzone - didaktisch-methodischer Handlungsspielraum für den Lehrer

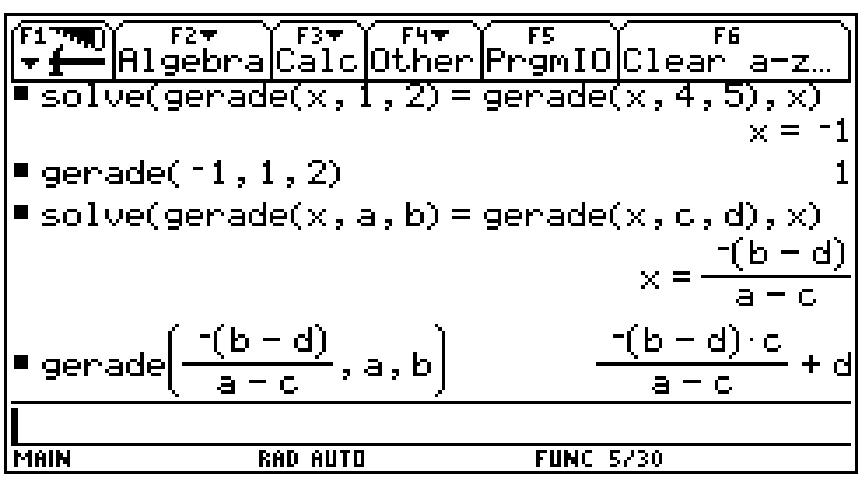


Die Grauzone kann nun je nach Bedarf verschoben, vergrößert oder verkleinert werden. Für welches Vorgehen sich der Lehrer entscheidet ist u.a. abhängig von der jeweiligen Lerngruppe, der Erfahrung im Umgang mit dem Computer, dem Lehrplan und der zur Verfügung stehenden Zeit. In jedem Fall liegt hier für den Lehrer ein erheblicher Handlungsspielraum, den er letzlich nach eigenen Vorstellungen ausfüllen muß. Die Erfahrung zeigt jedoch, daß man immer auch die Grey-Box in den Lehrgang einbeziehen sollte.

Bestimmung des Schnittpunkt zweier Geraden mit Bausteinen

Als Beispiel für die Arbeit mit dem Baustein gerade(x,m,n) betrachten wir die Schnittpunktberechnung zweier Geraden G1 und G2 mit
G1: y = 2x+3,G2: y = 4x+5.

Lösung 1: Mit den Bausteinen gerade(x,m,n) und solve( ) :
Nach der Definition m*x+n => gerade(x,m,n) kann man so verfahren.

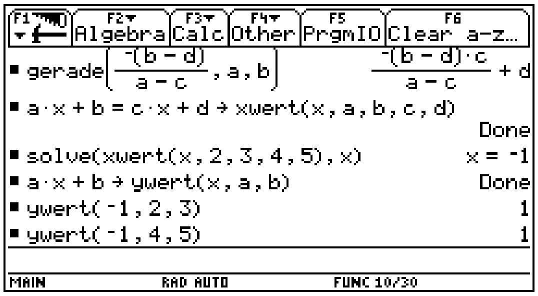


Zahlenbeispiel

Allgemeine Lösung

a <> c !

Lösung 2: Mit den Bausteinen xwert(x,a,b,c,d) und solve

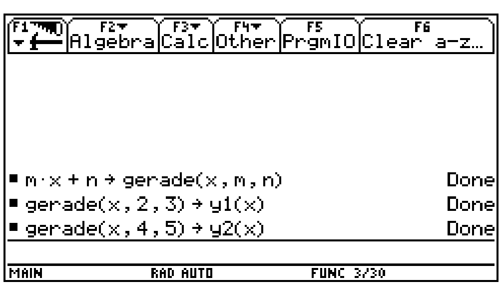


Lösung 3: Mit dem Baustein rref(M)
Ein weit stärkerer Baustein löst ein Gleichungssystem mit Gauß-Eliminationen:
Nach Eingabe der Matrix M für das obige Gleichungssystem, also von

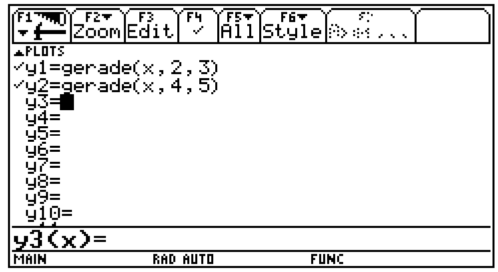
$M = \begin{pmatrix} 2 & -1 & -3 \\ 4 & -1 & -5 \end{pmatrix}$, erhält man mit dem **Baustein rref(M)** $= \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ und kann sofort die Lösung x = -1, y = 1 ablesen.

An dem Beispiel wird sehr deutlich, dass die Computerarbeit ein vertieftes Verständnis für die Zusammenhänge erfordert. Dieses zeigt sich hier in der Definition und Benutzung passender Bausteine, wobei die Schüler durchaus unterschiedliche Definitionen für das gleiche Problem wählen können. Selbstverständlich müssen derartige Bausteindefinitionen geübt werden. Die Bearbeitung mit dem CAS macht aber auch klar, welche Vorteile sich durch die Verwendung der Parameter ergeben bzw. wo möglicherweise Schwierigkeiten auftreten können.

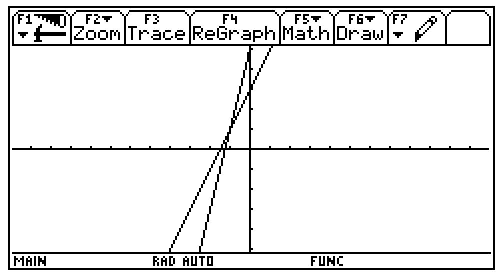
Lösung 4: Graphisch
Eine weitere Lösungsmöglichkeit ergibt sich durch graphische Darstellung. Man betrachte hierzu die folgenden Bilder.



Die beiden Bausteinaufrufe werden in y1(x) und y2(x) gespeichert und können im y-Editor des TI-92 eingesehen werden.



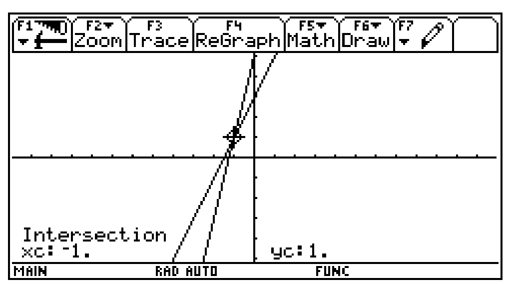
Die zugehörigen Graphen sieht man maßstabsgetreu in der folgenden Abbildung:



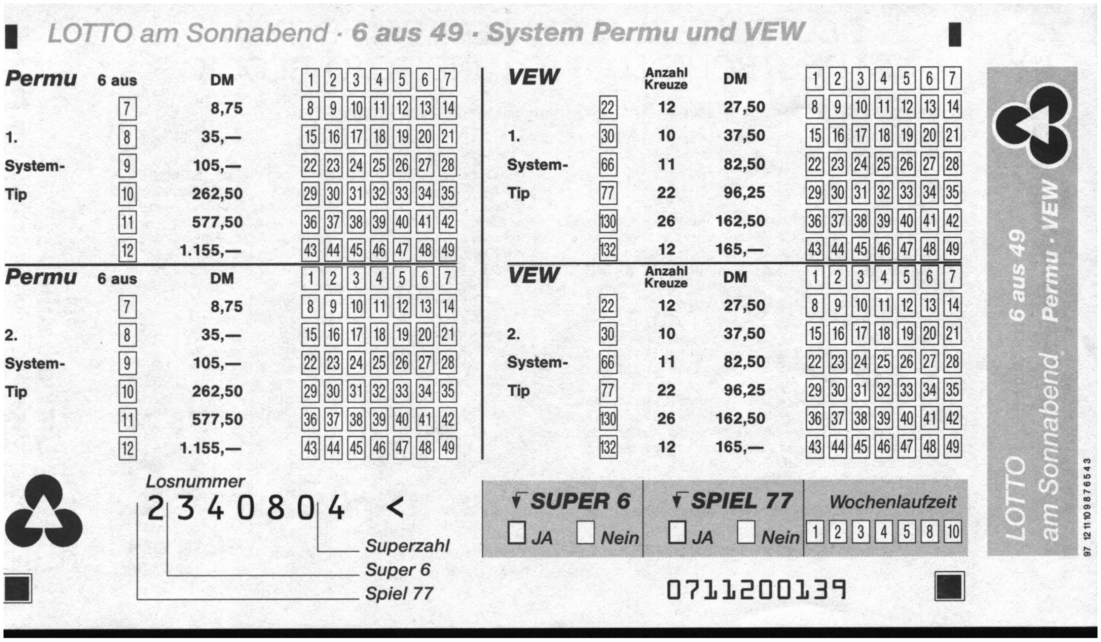
In dem Math-Menü (F5) des Rechners kann man nun die Anweisung „Intersection" aufrufen, die zu den folgenden Fragen auf dem Grafikbildschirm führt:

1 st Curvs	Auswählen von Gerade 1
2 nd Curve	Auswahlen von Gerade 2
Lower Bound	Rechteck um den Schnittpunkt legen, linke Begrenzung
Upper Bound	rechte Begrenzung

Der Cursor wandert nun automatisch zum Schnittpunkt, und es wird angezeigt
x= -1, y= 1.



4. Das Unterrichtsprojekt „Terme auf dem Lottoschein“



LOTTO am Sonnabend · 6 aus 49 · System Permu und VEW

Permu	6 aus	DM							
			1	2	3	4	5	6	7
	7	8,75	8	9	10	11	12	13	14
1.	8	35,—	15	16	17	18	19	20	21
System-	9	105,—	22	23	24	25	26	27	28
Tip	10	262,50	29	30	31	32	33	34	35
	11	577,50	36	37	38	39	40	41	42
	12	1.155,—	43	44	45	46	47	48	49

VEW		Anzahl Kreuze	DM							
				1	2	3	4	5	6	7
	22	12	27,50	8	9	10	11	12	13	14
1.	30	10	37,50	15	16	17	18	19	20	21
System-	66	11	82,50	22	23	24	25	26	27	28
Tip	77	22	96,25	29	30	31	32	33	34	35
	130	26	162,50	36	37	38	39	40	41	42
	132	12	165,—	43	44	45	46	47	48	49

Permu	6 aus	DM							
			1	2	3	4	5	6	7
	7	8,75	8	9	10	11	12	13	14
2.	8	35,—	15	16	17	18	19	20	21
System-	9	105,—	22	23	24	25	26	27	28
Tip	10	262,50	29	30	31	32	33	34	35
	11	577,50	36	37	38	39	40	41	42
	12	1.155,—	43	44	45	46	47	48	49

VEW		Anzahl Kreuze	DM							
				1	2	3	4	5	6	7
	22	12	27,50	8	9	10	11	12	13	14
2.	30	10	37,50	15	16	17	18	19	20	21
System-	66	11	82,50	22	23	24	25	26	27	28
Tip	77	22	96,25	29	30	31	32	33	34	35
	130	26	162,50	36	37	38	39	40	41	42
	132	12	165,—	43	44	45	46	47	48	49

Losnummer
2 3 4 0 8 0 4 <
Superzahl
Super 6
Spiel 77

SUPER 6 JA Nein
SPIEL 77 JA Nein
Wochenlaufzeit 1 2 3 4 5 8 10

0711200139

LOTTO am Sonnabend 6 aus 49 Permu · VEW

Einige grundsätzliche Ausführungen zu Projekten im Mathematikunterricht finden Sie in Kapitel 2.4. Hier soll nun ein möglicher Ablauf eines konkreten Unterrichtsprojekts beschrieben werden. Die hier benutzten Projektideen können in einer 7. oder 8.Klasse verwirklicht werden. Mit den eingangs in einem Brainstorming-Prozess gesammelten Ideen können aber auch Projekte in höheren Klassenstufen durchgeführt werden.

Ein Lottoprojekt kann je nach Themenauswahl weit über die mathematischen Fragestellungen hinausgehen und fachübergreifend in andere Bereiche der Lebenswelt weisen. Je nach Altersstufe wird das Brainstorming unterschiedliche Ergebnisse liefern. Viele Ideen werden sich in der Sekundarstufe 1 nicht verfolgen lassen und sind eher für höhere Klassenstufen geeignet.

Es werden hier insbesondere solche Bereiche herausgegriffen, die das Anliegen „Terme, Termumformungen, Termeinsetzungen“ fördern.

4.1 Brainstorming

- Jeder Schüler bringt zum Unterricht einen Lottoschein mit oder
- jeder Schüler erhält einen Lottoschein oder
- der Lehrer projiziert einen solchen oder
- wir lassen Vorabinformationen aus Lottoannahmestellen holen.

Es folgt eine Bestandsaufnahme und Ideensammlung „Rund um den Lottoschein“:

Es gibt verschiedene Arten von Lottoscheinen,
die Lottoscheine enthalten zahlreiche Informationen. z.B
- Rückseite: Auszug aus den Teilnahmebedingungen
- mehrere Zahlenquadrate von 1 bis 49
- Art der Wette, z.B.:
- Permu (Permutationswette), mit einer Spalte namens „6 aus“ 7,8,....12 und den zugehörigen Preisen
- VEW-Systemwette
- Wochenlaufzeit
- Losnummer
- Zusatzspiele: Super 6, Spiel 77

Was geschieht mit dem insgesamt eingezahlten Geld? Lottoquoten, Lottospenden, Spielsteuer?
Wie ist der Ablauf für einen Kunden beim Lottospielen?
usw.

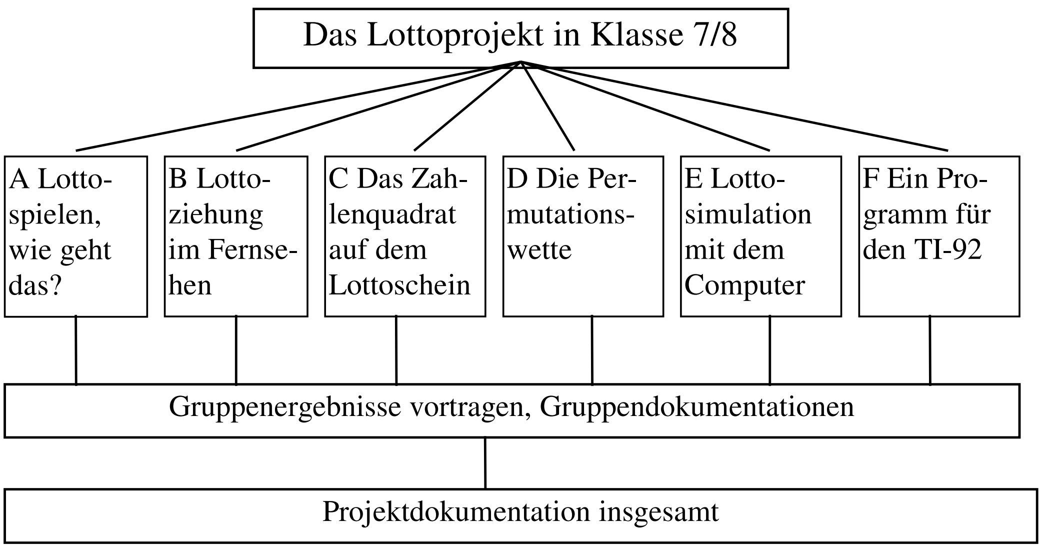
Strukturierung in Themenbereiche

Nach der Sammlung der Ideen sollten diese nach passenden Gesichtspunkten (inhaltliche Verwandtschaft, Schwierigkeitsgrad, ...) geordnet werden. - Auch eine Aufgabe für die Schüler!

Der Lehrer (in seiner Eigenschaft als Projektmanager) entscheidet über die Teilthemenauswahl und sorgt für die Einteilung der Schüler in Gruppen.

4.2 Gruppeneinteilung

Im Folgenden werden einige für die Klassen 7/8 mögliche Gruppenthemen genannt und einige Ansätze für denkbare Fragestellungen und ihre Bearbeitung vorgestellt. Vor Beginn der Arbeit hat der Lehrer den Gruppen mitzuteilen, in welcher Form sie ihren Arbeitsweg und ihre Ergebnisse dokumentieren sollen und dass die Ergebnisse den Mitschülern vorzutragen sind.



4.3 Ausschnitte aus der Teamarbeit

Team A
Lottospielen, wie geht das?

Gehe in eine Zahlenlotto-Annahmestelle. Nenne die einzelnen Schritte (1., 2., 3., ...), , die ein Lottospieler durchführen muss, bis er an der nächsten Ziehung teilnehmen kann.

Ein Blick ins Internet:

Lotto am Samstag
Gegenstand des Lotto am Samstag ist die Voraussage von 6 Zahlen, die jeweils aus der Zahlenreihe 1 bis 49 ausgelost werden (Gewinnzahlen). In einer Ziehung werden neben den 6 Gewinnzahlen eine Zusatzzahl und gesondert eine Superzahl ermittelt. Der Gewinnbetrag eines Spielteilnehmers wird nach dem Totalisatorprinzip errechnet, wobei die Jackpotregel gilt. Die Gewinnsumme in Höhe von 50% des Spieleinsatzes verteilt sich auf 7 Gewinnklassen. Die durchschnittliche Ausschüttung bei 6 Richtigen mit Zusatzzahl liegt bei über 5 Mio.DM. Die Teilnahme am Lotto am Samstag ist in allen Verkaufsstellen der deutschen Lotto- und Totogesellschaft möglich.
Der Spieleinsatz für eine Tippreihe beträgt DM 1,25 zzgl. Bearbeitungsgebühr.Über die Lottozahlen kann man sich dann entweder Samstags-Abends 19.50 Uhr in der ARD live informieren oder per Internet.

Die Gewinnsumme in Höhe von 50 % des Spieleinsatzes verteilt sich auf 7 Gewinnklassen:

Gewinnklassen	*Ausschüttungsanteil je Gewinnklasse*	*Durchschnittliche Gewinnquote*
I 6 Richtige + Superzahl	*6 %*	*3.495.954,00 DM*
II 6 Richtige	*10 %*	*1.165.318,00 DM*
III 5 Richtige + Zusatzzahl	*6 %*	*87.398,85 DM*

IV 5 Richtige	*20 %*	*6.936,42 DM*
V 4 Richtige	*20 %*	*129,05 DM*
VI 3 Richtige + Zusatzzahl	*14 %*	*71,08 DM*
VII 3 Richtige	*24 %*	*9,14 DM*

Ziehungshäufigkeiten der einzelnen Gewinnzahlen seit dem 09.10.1955
Stand: 50/98

1	*2*	*3*	*4*	*5*	*6*	*7*
271	*286*	*291*	*263*	*274*	*285*	*266*
8	*9*	*10*	*11*	*12*	*13*	*14*
258	*284*	*272*	*271*	*266*	*224*	*265*
15	*16*	*17*	*18*	*19*	*20*	*21*
272	*265*	*282*	*278*	*281*	*270*	*297*
22	23	24	25	26	27	28
278	266	260	278	291	281	245
29	30	31	32	33	34	35
266	263	285	326	286	247	273
36	37	38	39	40	41	42
294	281	302	285	274	281	284
43	44	45	46	47	48	49
272	268	258	278	267	295	311

Bemerkungen
Neben den hier vorgestellten "seriösen" Lotterie- und Lotto-Veranstaltern gibt es gerade in letzter Zeit immer mehr zwielichtige Angebote, die oft nach dem Schneeballsystem funktionieren. Auch ist in diesen Angeboten die Rede von "ungeahnten Verdienstmöglichkeiten". Unser Tip: Finger weg!

Team B
Lottoziehung im Fernsehen

Beschreibe den Ziehungsvorgang aus dem Fernsehen! - Die Lottozahlen werden also zufällig gezogen!
Auch dein Taschenrechner kann Zufallszahlen angeben! Wie geht das? Welche Zahlen erzeugt der Rechner? Wie kann man daraus Lottozahlen von 1 bis 49 machen?

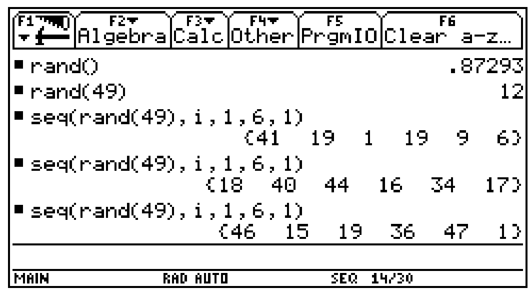
Erzeugung von Lottozahlen

Der Taschenrechner hat eine Taste, mit der man Zahlen aus dem Intervall]0,1] erzeugen kann, die zufällig erscheinen (z.B. die Taste RAN). Einige Ergebnisse beim Drücken der Taste:
0.142 0.451 0.098 0.335 0.866 0.170.

Terme mit Zufallszahlen

Daraus müssen Lottozahlen aus der Menge {1,2,...49} werden - Die Überlegungen führen zum Term
T(z) = int(49*z+1), dabei ist z aus der Menge]0,1]; int(x) schneidet die Nachkommastellen von x ab. Beispiel: int(7.894) = 7

Auf dem TI-92 geht das so:



Der Bildschirmabdruck gibt die einzelnen Schritte wieder, wie sie im Unterricht erfolgen könnten.

1) Es gibt die Funktion rand(), die eine Zufallszahl aus dem Intervall]0;1] erzeugt.

2) Die Funktion rand(n) erzeugt eine Zufallszahl aus der Menge der natürlichen Zahlen {1,2,...n}, wir benötigen hier rand(49).

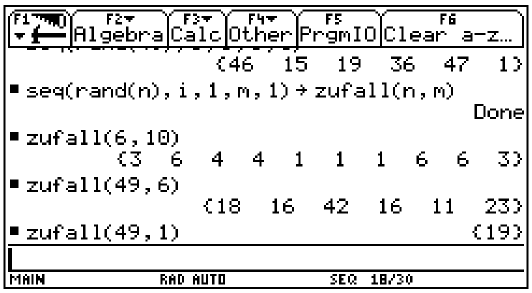
3) seq(rand(49),i,1,6,1) erzeugt 6 Zufallszahlen aus der Menge {1,2,...49}, also eine Lottoziehung.
Allerdings: Unter den 6 Zahlen können auch gleiche Zufallszahlen auftreten! Was nun? - Hierfür bräuchte man ein Programm, das solange Zufallszahlen aus {1,2,...49}erzeugt, bis 6 verschiedene Zahlen gefunden sind.
Wir machen es einfach so: Wir führen immer wieder den Aufruf seq(rand(49),i,1,6,1) durch, bis wir 6 verschiedene Zufallszahlen und damit auch eine vernünftige Ziehung haben.

Termeinsetzungen in einen neuen Baustein

Hier lassen sich wieder Termeinsetzungen durchführen. Dazu definieren wir z.B. am TI-92:

seq(rand(n),i,1,m,1) → zufall(n,m)

und fragen nach der Bedeutung verschiedener Aufrufe. Jeder dieser Aufrufe bedeutet eine Termeinsetzung.



zufall(6,10) gibt uns 10 Zufallszahlen aus der Menge {1,2,...6},
zufall(49,1) gibt uns eine Zufallslzahl aus der Menge {1,2,...49}.

Team C
Das Zahlenquadrat auf dem Lottoschein

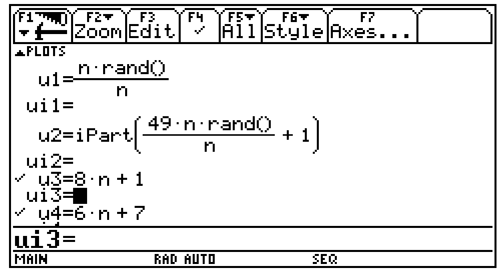
1 2 3 4 5 6 7
8 9 10 11 12 13 14
15 16 17 18 19 20 21
22 23 24 25 26 27 28
29 30 31 32 33 34 35
36 37 38 39 40 41 42
43 44 45 46 47 48 49

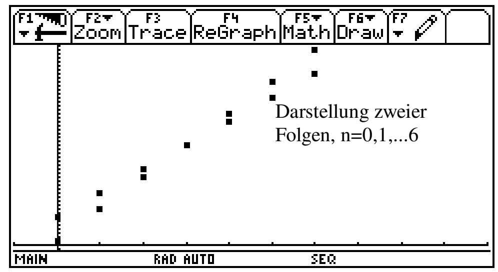
Terme und Zahlenfolgen im Lottoschein

- Betrachte die Zahlen auf den beiden Diagonalen! Stelle einen Term auf, der die Zahlenfolgen beschreibt.

Hauptdiagonale: HD = 8n+1 für n=0,1,2,...6
Nebendiagonale: ND = 6n+7 für n=0,1,2,...6
Spalte 1: 7n+1 für n=0,1,2,...6
Spalte 2: 7n+2 für n=0,1,2,...6 usw.

Im Folgeneditor des TI-92 werden die Folgen HD (als u3(n)) und ND (als u4(n)) eingetragen.





In der Abbildung sind die Folgen HD und ND dargestellt. Welche Punkte gehören zu welcher Folge?

- Welche Folgen ergeben sich, wenn man den Laufbereich für n vergrößert?
- Bilde die Summe der Elemente einer der obigen Folge.
- Wo findet man auf dem Lottoschein die Ergebnisse für den Term (7n+6)?

- Markiere auf dem Lottoschein den Weg der Zahlen n^2.

1 2 3 4 5 6 7
8 9 10 11 12 13 14
15 16 17 18 19 20 21
22 23 24 25 26 27 28
29 30 31 32 33 34 35
36 37 38 39 40 41 42
43 44 45 46 47 48 49

Notiere im Lottoquadrat die Zahlen des Terms T(n) = n(n+1)/2.

1 2 ***3*** 4 5 ***6*** 7
8 9 ***10*** 11 12 13 14
15 16 17 18 19 20 ***21***
22 23 24 25 26 27 ***28***
29 30 31 32 33 34 35
36 37 38 39 40 41 42
43 44 ***45*** 46 47 48 49

Was fällt auf? Beachte dazu auch die folgende Aufgabe.

- Wie groß ist die Summe aller Lottoschein-Zahlen?

- Suche nach weiteren mathematischen Zusammenhängen auf dem Lottoschein.

Team D
Die Permutationswette

- Wie kommen die Preise dafür zustande?
- Eine Formel für die Anzahl von Permutationen von n Elementen
  P(n) = n*(n-1)*(n-2)*...*3*2*1 = n!
  (n-Fakultät).
- Nenne oder erfinde andere Aufgaben, in denen Permutationen gebraucht werden.

Team E
Lottosimulation mit dem Computer

Information: Das Programm Lotto ist 1994 in einem Informatikkurs in Projektarbeit entstanden.
Benutze das Programm durch Aufrufe in einer sinnvollen Reihenfolge.
Stelle folgende Informationen zusammen:

- Was leistet das Programm?
- Notiere eine sinnvolle Folge von Aufrufen durch den Benutzer.
- Auf welche Weise kann man sich einzelne Tipps, aber auch sofort eine große Anzahl von Tipps verschaffen?
- Worauf ist bei der Tippeingabe zu achten?
- Erläutere den Zusammenhang zwischen den Tipps der Kunden und der Lottoziehung.

Hinweis: Das Programm LOTTO ist beim Autor erhältlich. Es ist in Turbo-Pascal geschrieben und läuft also unter MS-DOS.

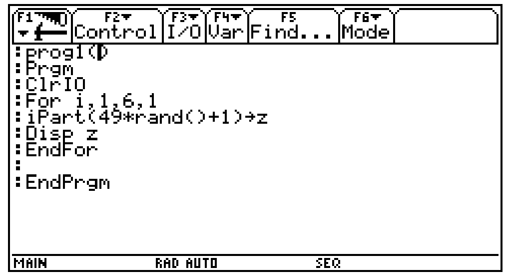
Das Hauptmenü:

```
1 Tippen,von Hand oder Computer
2 Ziehung u. Vergleich mit Tipp
3 Statistik
4 Anleitung, Hilfen
5 Abbruch (Quit)
Bitte mit dem Cursor  auswählen!
```

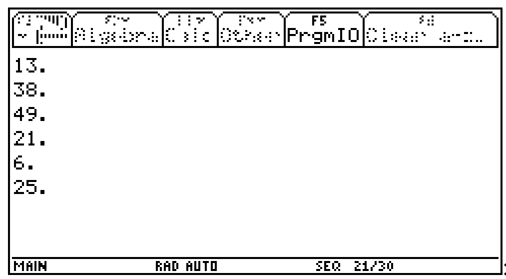
Team F
Ein Programm für den TI-92

Schreibe ein Programm für den TI-92, das 6 Zufallszahlen aus der Menge {1,2,3,...49} erzeugt.

Nach Einweisung der Schüler dieses Teams in das Programmieren mit dem TI-92 könnte sich als Ergebnis der Arbeit ergeben:



Ein Programmaufruf PROG1() im Home-Editor liefert das folgende Ergebnis



Aufgabe:
Für die Ziehungshäufigkeiten der Zahlen 36 bis 49 werden in einer Statistik die folgenden Werte angegeben. Was erwartest du von den Ziehungshäufigkeiten der Zahlen 1 bis 21?

36	37	38	39	40	41	42
294	281	302	285	274	281	284
43	44	45	46	47	48	49
272	268	258	278	267	295	311

4.4 Vortragen der Ergebnisse und Dokumentation

Nach Beendigung der Teamarbeit in den Gruppen werden die Ergebnisse vorgetragen. Eine gute Motivation für eine Gesamtdokumentation besteht u.a. darin, das Endprodukt öffentlich zu machen, z.B. in der Schulzeitschrift, oder es anderen Schülergruppen zur Verfügung zu stellen. Außerdem sind die Dokumentationen Grundlage für eine Klassenarbeit zum Projekt.

5. Eine moderne Klassenarbeit zum Thema „Terme“ in Klasse 8

Bemerkungen zu neuartigen Klassenarbeiten

Eine Änderung von Unterrichts- und Aufgabenkultur führt selbstverständlich auch zu anderen Klassenarbeiten und Klausuren als sie bisher geschrieben wurden.

Während bisher zuweilen selbst die Formelsammlung bei Klassenarbeiten verboten wurde, kann nun sogar die Benutzung auch anderer Hilfsmittel in Erwägung gezogen werden. Das können u.a. sein:

- Das Unterrichtsheft,
- das Schulbuch,
- die Formelsammlung,
- der Taschencomputer.

Die Aufgaben werden anders zu formulieren sein:

- Offener,
- mehr orientiert an Modellbildungen und Ansätzen,
- weniger orientiert an Standardrechnungen,
- nur mit wenig Handrechnung,
- mit Aufträgen zur Interpretation von Ergebnissen,
- mit vorgegebenen Zwischen- oder Endergebnissen,
- mit Vorgeben weiteren Materials,
- mit Computerbenutzung zum Rechnen und Zeichnen und zum Experimentieren,
- mit der Dokumentation der Computerarbeit.

Einige dieser Aspekte werden im Folgenden berücksichtigt:

Eine Klassenarbeit in Klasse 7/8
(je nach Lehrplan)

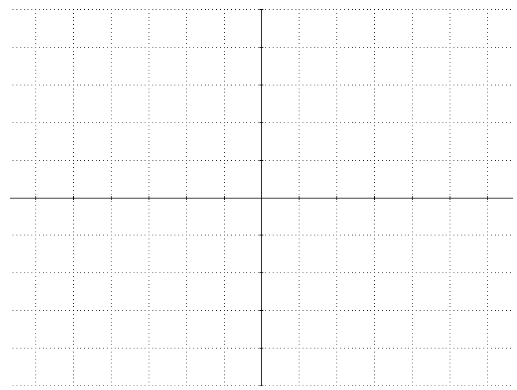
1) Im Internet wird ein magisches (3,3)-Quadrat mit den Variablen a,b,c angegeben. Wir nennen es kurz Q(a,b,c)

c-b	c+a+b	c-a
c-a+b	c	c+a-b
c+a	c-a-b	c+b

1.1. Bilde die Summe der Elemente der 2.Zeile und der Hauptdiagonalen mit ausführlicher Handrechnung. Ist es wirklich ein magisches Quadrat?

1.2 Berechne Q(1,2,3) und Q(c,c,c). Welche Eigenschaften der magischen Quadrate lassen sich feststellen?

2)
2.1 Definiere im CAS des TI-92:
0.5*(x+1)^3 => y1(x) und lasse y1(x) maßstabsgetreu zeichnen. Als Dokumentation bitte eine Skizze unter Berücksichtigung der Punkte A(1,?) und B(-1,?) und der Achsenschnittpunkte. Benutze das beigefügte Kosy.



2.2 Beschreibe den Verlauf des Graphen und begründe die Unterschiede zu 0.5*(x+1)^2 => y2(x).

2.3 Berechne den Term 0.5*(x+1)^3 ausführlich von Hand und überprüfe mit dem CAS.

3) Die Oberfläche eines Quaders betrage 120 qcm. Die Kantenlängen a und b sind bekannt: a=5cm, b=8cm. Berechne die dritte Kante ausgehend von der dir bekannten Oberflächenformel.

3.1 Durch ausführliche Handrechnung (erst allgemein, dann Zahlen einsetzen)

3.2 Mit Hilfe des TI-92-CAS-Bausteins 2ab+2bc+2ac => Ob(a,b,c). Kommentiere dein Vorgehen. Überprüfe dein Ergebnis durch eine geeignete TI-Kontrollrechnung. Notiere den Bildschirminhalt.

Hinweis: Falls die Arbeit als zu lang für eine Schulstunde empfunden wird, kann z.B. 2.2 weggelassen werden.

Lösungen und Bewertung

Lösung zu 1.1: Die Summe der Elemente der 2.Zeile bzw. der Hauptdiagonalen ist:
s(z2) = c-a+b +c +c+a-b = 3c, da a und b herausfallen.

s(hd) = c-b + c + c +b = 3c, da b herausfällt.

Kopfrechnung zeigt, dass sich überall (Zeilensummen, Spaltensummen, Diagonalsummen) die Summe 3c ergibt. Es ist ein magisches Quadrat.

Lösung zu 1.2: Q(1,2,3) =

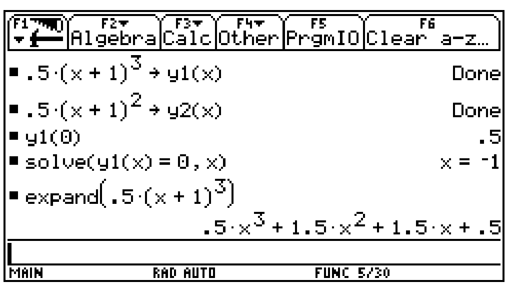
1	6	2
4	3	2
4	0	5

Die magische Summe ist gleich 9. Es kommen Zahlen mehrmals vor.

0	3c	0
c	c	c
2c	-c	2c

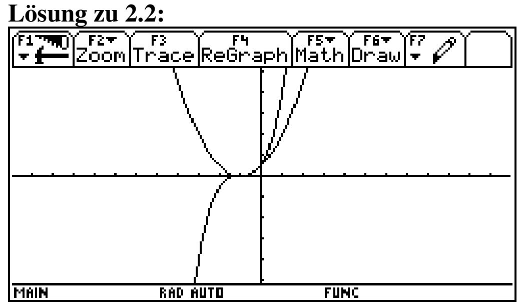
Die magische Summe ist gleich 3c. Es kommen Zahlen mehrmals vor; wenn c positiv ist, ist ein Wert negativ.

Lösung zu 2.1:



Ich definiere y1(x) und y2(x) und lasse zeichnen, dabei Korrektur des Maßstabs mit ZoomDec. Zur Übernahme in das Kosy lasse ich die Achsenschnittpunkte mit y1(0) und solve(y1(x)=0,x) berechnen. Diese sind Sx(-1,0)=B und Sy(0,0.5). Außerdem benutze ich A(1,4) (im Kopf berechnet durch Einsetzen in y1(x)).

Lösung zu 2.2:



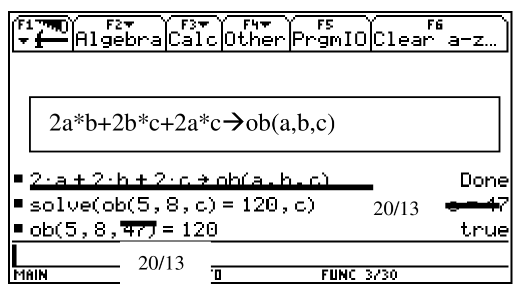
Hinweis: Als Handskizze für y1(x); y2(x) steht auf dem Bildschirm nur zum Vergleich.
Möglicher Text: Der Graph zu y1(x) verläuft im 1. und 3.Quadranten, ein bisschen auch im 2.Quadranten und ist offenbar punktsymmetrisch zu (-1,0). Der Graph von y2(x) dagegen hat nur positive y-Werte, weil quadriert wird. Wegen des ^3 kann y1(x) auch negative Werte haben.

Lösung zu 2.3 : Handrechnung

0.5(x+1)^3 = 0.5(x^2 +2x +1)(x+1)
= 0.5(x^3+x^2+2x^2++2x+x+1)
= 0.5(x^3+3x^2+3x+1)
= 0.5x^3+1.5x^2+1.5x+0.5
(wie das CAS, s.o.)

Lösung zu 3.1:
2a+2b+2c = O => 2c = O -2a-2b => c = O/2-a-b.
Also c = 120/2 -5-8 = 43cm

Lösung zu 3.2:



Zeiteinschätzung
Aufgabe 1: Ca. 15´
Aufgabe 2: 20´
Aufgabe 3: 10´

6. Zusammenfassung

6.1 Wo kommen Terme her - welche Termumformungen sind nötig? Wieviel Termaufgaben sollen es denn nun sein?

Die Antworten sind abhängig von den Unterrichtsvoraussetzungen, wie
(a) Computer stehen nicht zur Verfügung,
(b) Computer stehen gelegentlich zur Verfügung,
(c) Computer stehen immer (auch in den Folgeklassen) zur Verfügung, wenn ihr Einsatz gewünscht wird.
Außerdem ergeben sich unterschiedliche Antworten, je nachdem, ob es um die Benutzung von PCs geht oder um die von Taschencomputern wie den TI-92.

Ausgewählte Themen zu „Terme, Termumformungen, Termeinsetzungen“	**von Hand** **ohne CAS mehr Handrechnung, mit CAS weniger Handrechnung**	**Veranschaulichen** **Nutzen vieler Möglichkeiten, von Hand oder mit CAS, Funktionenplotter,CAD**	**mit CAS arbeiten** **Kontrollen, Veranschaulichungen, Experimente, Bausteine, Dokumentation**
Gesetze, Termeinsetzungen	***unabdingbar***	Graphen, Punkte	Gesetze im CAS, Terme definieren, T(a)
Termstrukturen erkennen	***unabdingbar***	Termbäume	***für Arbeit mit CAS unbedingt nötig***
Binomische Formeln	***unabdingbar***	u.a.Pascal-Dreieck	***Baustein Bin(a,b,n):=(a+b)^n***
Abzählprobleme	Erzeugung äquivalenter Terme, schöne Übungen	Punktmengen, Folgengraphen	Äquivalenz zeigen, Solve(t1(x)=t2(x),x)
Termumformungen	nur einfache Beispiele, ***wenig***	dazugehörige Graphen	mit CAS, Äquivalenz zeigen
Einsetzungen in Terme	***unabdingbar,*** wichtig (jetzt und später)	Graphen, Punkte, Tabellen	***z.B. T(a,b), Term an der Stelle a,b;*** T(3,-2)
Gleichungen lösen	***unabdingbar,*** Termumformungen erwachsen aus den Problemstellungen, einfache Beispiele!	Graphen, Äquivalenzumformungen graphisch	***White-Box, Grey-Box, Black-Box*** ***Solve***(...)
Nullstellen	***wichtig***, Ausblick S2, faktorisieren x^2-2x-8	Graphen	***Solve, Factor, Bausteine für Standardformen***
Schnittpunkte	möglich, Ausblick S2	Graphen	Solve, Factor
Interessante Terme in Mathe- und anderen Anwendungen	***sehr zu empfehlen***, z.B. „Primzahl-terme“	Graphen, Tabellen	***Tabellen mit CAS***, gut zum Experimentieren, Bausteindefinitionen
Terme aus Klausuren der Sek.2	zu empfehlen, weckt Neugier	Graphen usw.	mit Graphen experimentieren
Baumdiagramme als Termerzeuger	zu empfehlen, wichtige Methode	Bäume	
Terme als CAS-Bausteine	auch von Hand möglich, aber richtig sinnvoll erst mit CAS	Graphen, Tabellen	***Wichtige Arbeitsweise in CAS,*** schafft Überblick, fordert Experimentieren heraus

Abb.6.1.a: Von Hand bearbeiten oder mit CAS bearbeiten?

Abbildung 6.1.a versucht eine Zusammenfassung und Wertung verschiedener „Termthemen“ unter den Aspekten

- Bearbeitung von Hand (ohne Computer),
- Bearbeitung mit dem Computeralgebrasystem und
- Veranschaulichungsmöglichkeiten, z.B. mit Computergrafik.

Die Notwendigkeit von Handbearbeitungen - auch bei zusätzlichem Computereinsatz - wird mit den kursiv gedruckten Begriffen wie „unabdingbar“, „wichtig“ , „sehr zu empfehlen“ gekennzeichnet. In der Spalte „mit CAS“ (auch andere Software kommt in Frage) sind die besonders wichtigen Aspekte ebenfalls kursiv hervorgehoben. In allen Fällen spielen Veranschaulichungen eine wesentliche Rolle und in einer Unterrichtsreihe sollte auch die Vielfalt möglicher Themen genutzt werden.
Abbildung 6.1.a gibt zusätzlich einige Hinweise, wie die Bedeutung der einzelnen Themen über Terme gesehen werden kann.

Welche Termtypen werden benötigt?

In Kapitel 3 wurden zahlreiche Vorschläge für Themen über Terme unterbreitet. Wir fassen hier zusammen, welche Terme dort verwendet wurden und gewinnen so einen Eindruck von Termarten, die im Unterricht der Sekundarstufe 1 (vorwiegend in den Klassen 7-9) auftreten - ohne allerdings dabei Vollständigkeit erreichen zu können. So fehlen hier beispielsweise Terme in Zusammenhang mit Exponentialfunktionen oder trigonometrischen Funktionen.

Themenkreis	Beispielterme, Bemerkungen zum Einsatz von CAS
Flächenberechnungen	a^2-b^2, (a-b)*b+(a-b)*a, 4*((a+b)/2 * (a-b)/2)), $(a+b)^2$ **CAS-Bausteine, z.B. bau(a,b):= a^2-b^2**
Abzählprobleme Kreise (Punkte) zählen Händeschütteln Anzahl Diagonalen im n-Eck Permutation	Folgen, Reihen n^2, 2n+2(n-2)+$(n-2)^2$, $(n-2)^2$+4(n-1) n(n-1)/2, (n-1)+(n-2)+...+3+2+1 (n-3)+[(n-3)+(n-4)+... +2+1] , (n-3)+(n-3)(n-2)/2 , (n-3)n/2 , n!, (n-2)! (n-1) n **Termumformungen mit CAS**
Geradenterme Gleichung a*x+b=c Achsenschnittpunkte von Geraden	**Baustein GL(a,b,c,x):=(a*x+b=c**) oder Bausteine T1(a,b,x):=a*x+b und T2(c)=c Verwendung von **SOLVE**, **Grafikkomponente des CAS**
Terme am magischen Quadrat	**Baustein Mag(h,i):=** $\begin{pmatrix} 10-i & 10-h & -5+h+i \\ 10+h+2i & 5 & 20-h-2i \\ 15-h-i & h & i \end{pmatrix}$ Summenbildungen, Gleichungen

Baumdiagramme als Termerzeuger Prozente im Übergangsgraphen Zeitungskauf Warten auf Erfolg	 $p(1-p)+(1-p)p+p^2$ a^4 (1-a) p^2 $(1-p)p^7$ **,Baustein Warte(p,n):=(1-p)*p^n**
Terme am Pascalschen Dreieck	0.5n(n+1), 1/6n(n+1)(n+2), $n^3/6+ n^2/2+n/3$ $(a+b)^3,(a+b)^2$ **Baustein Binobau(a,b,n):=$(a+b)^n$**
Summen aufeinanderfolgender Zahlen und verwandte Fragestellungen, Teilbarkeit	n+(n+1)=u, n*(n+1)=u, n/(n+1)=u, **Baustein Term(n,u):=(n+(n+1)+(n+2)=u)**
Gleichungen und Veranschaulichung Parabel, Gerade, Hyperbel „Umformungsprogramme“	$\frac{5}{2x+2}=\frac{2}{4x-4}$, (2x-1)(x+1) = 0.4x+1 schrittweise Lösung von Hand , **SOLVE, schrittweise Lösung mit CAS, Grafikkomponente des CAS** ((expand(factor(g(x))(x+1)(x-1)2)-x)+5)/4
Nullstellen und Schnittpunkte	f(x) = (2x+3)(x-2)(-x-1), **SOLVE EXPAND, Grafikkomponente des CAS** 2x+3y=5, y=10x-1, y= x^2
„Primzahlterme“	f1(x)=x^2+x+17, **Baustein PT(a,b):= a^2+a+b** Folgen wie $(10^n-1)/9$, 2^n-1
Termstrukturen	Distributivgesetz, Termbäume, Geradengleichung, Asymptoten
Terme als CAS-Bausteine	**Baustein Trapez(a,b,h):=(a+b)*h/2, Bausteinaufrufe** **White-Box, Grey-Box, Black-Box,** Mathematik am Trapez, zahlreiche weitere Beispiele stehen oben
Projekt Lotto Lottoscheinmatrix, Permutationswette, Lottosimulation	Tabelle für Ziehungshäufigkeit der Zahlen, Folgen, z.B. 8n+1, 6n+7, Permutation P(n)=n!, Terme mit Zufallszahlen, **Baustein zufall(n,m):=seq(rand(n),i,1,m,1)**

Abb.6.1.b: Eine Termliste

Die genannten CAS-Bausteine ermöglichen jeweils

- intensive Forschungsarbeiten der Schüler rund um das jeweilige mathematische Objekt
- die Lösung von Aufgaben zu dem Objekt
- Kontrollrechnungen
- einen guten Überblick über die Mathematik rund um das Objekt
- die Verknüpfung mit anderen Objekten

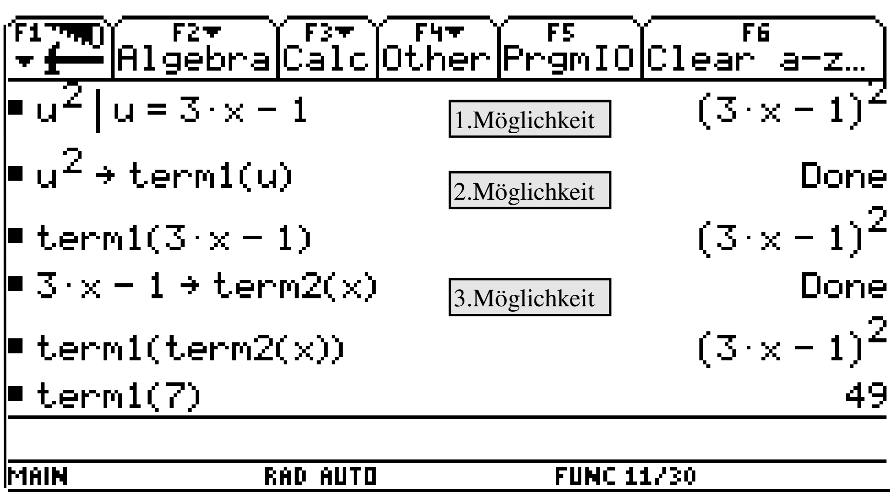
Welche Termumformungen werden gebraucht?

Die obigen Zusammenstellungen zeigen uns auch, welche Termumformungen bei den jeweiligen Themen benötigt werden. Es sind das - unter Beschränkung auf die Klassen 7-8-9 (teilweise, hier ohne Rechnen mit Wurzeln):

- Addieren, Subtrahieren, Multiplizieren, Dividieren „auf beiden Seiten“ bei Gleichungen
  Beim CAS: Das macht SOLVE automatisch oder kann schrittweise simuliert werden.

- Auf den Hauptnenner bringen, Überkreuzmalnehmen, Anwendungen des Distributivgesetzes (Ausklammern, ausmultiplizieren), Zusammenfasssungen, Vereinfachungen
  Beim CAS: Das sind die Anweisungen FACTOR, EXPAND.

- Termeinsetzungen
  Werden in die Variablen eines Terms Terme eingesetzt, so ergibt sich wieder ein Term.
  Beispiel: $y=u^2$ und $u=3x-1$, $y = (3x-1)^2$
  Beim CAS: Es gibt verschiedene Möglichkeiten für Termeinsetzungen, siehe die folgende Abbildung.



6.2 Ein Vorschlag für eine Unterrichtsreihe „Terme - Termeinsetzungen - Termumformungen"

Je nach Lehrplan ist die Unterrichtsreihe in Klasse 7 oder 8 denkbar. Die im Folgenden skizzierte Unterrichtseinheit gibt indirekt weitere Auskünfte, in welchem Umfang Terme bei Einsatz des Computers behandelt werden können. Außerdem wird noch einmal auf die anfangs formulierten Thesen hingewiesen.

(1) Terme kennenlernen - Zahlen in Terme einsetzen

Für verschiedene Problemstellungen werden Terme aufgestellt oder vorgegeben**.** Von Anfang an erfolgt die Abkürzung von Termen in den Formen T(x) oder T(a,b) je nach Art der Variablen. Dabei wird stets auf Visualisierungen geachtet. Termeinsetzungen werden in der Form T(2,9)... geschrieben.

CAS: Das CAS kann erstmals benutzt werden: Die auftretenden Terme werden eingeben, Terme bzw. Bausteine werden definiert, Werte werden eingesetzt, ggf. wird graphisch dargestellt.

(2) Terme umformen

Umformungen können z.B. über Abzählprobleme motiviert werden. Nun entsteht der Zwang, passende Gesetze zu formulieren (z.B. Distributivgesetz) und zu benutzen. Hierbei kann auch mit dem Thema „Termstruktur, Termbäume" begonnen werden - diese Inhalte können auch schon in früherem Unterricht eingebracht werden.

CAS: Die Äquivalenz von Termen wird „kontrolliert" durch etliche Einsetzungen von Zahlen. Später geht das mit
Solve(T1(x)=T2(x),x) - Ergebnis: true.

(3) Gleichungen lösen

Als wichtigste Anwendung können nun Gleichungen gelöst werden. Diese sollten aus Problemen heraus entstehen, z.B. Schnittpunkte, Nullstellen, Anwendungsprobleme. Zunächst erfolgt das in Handrechnung (einfache Beispiele).

CAS: Nach einigen Handrechnungen, bei denen die schrittweise Umformung als Algorithmus formuliert werden sollte („auf beiden Seiten"), wird die Rechnung mit dem CAS nachgemacht - mit Dokumentation! Am Ende erfolgt der Übergang zu „Solve". Die jeweiligen Links-Rechtsterme in den Gleichungen können ggf. im Koordinatensystem veranschaulicht werden.

(4) Die binomischen Formeln - der Baustein Binobau(a,b,n)

Für die Behandlung binomischer Formeln gibt es bekanntlich viele Möglichkeiten; besonders dankbar ist das Pascalsche Dreieck.

CAS: Die binomischen Formeln bieten ein schönes Beispiel für die Definition eines CAS-Bausteins, etwa *Binobau(a,b,n):=(a+b)^n*. Mit diesem Baustein und Aufrufen desselben erschließt sich eine umfangreiche „Mathematikwelt". Einzelheiten hierzu lassen sich nachlesen in [ ].

Beispiele:
Binobau(a,-b,2) = (a-b)^2, 2.binomische Formel
Binobau(x,1,2) = (x+1)^2, Gleichung einer Parabel, diese graphisch darstellen!

(5) Übungen zu Termen - Bearbeitung teils mit Verwendung des CAS und teils von Hand, Arbeiten mit Bausteinen

Vielfältige Aufgaben unter Verwendung des CAS bearbeiten

- Üben, Terme zu finden (Übungsaufgaben entstehen aus der Modellierung von Problemen)
- Lösungsansätze beschreiben
- Bearbeiten mit und ohne Black-Box
- Veranschaulichungen üben
- Üben von Dokumentationen
- Entwurf und Beschreiben der verwendeten Strategien üben
- Interpretieren üben, z.B. von vorgelegtem Material (z.B. von Ansätzen, dokumentierten Termumformungen) oder von Lösungen
- Durchdenken / Bewusstmachen des mathematischen Hintergrunds
- Termstrukturen aufzeigen
- gelegentliche Handrechnungen, Kontrollieren mit dem CAS

Wo liegen hierbei die Grenzen „vernünftiger“ Termumformungen?

Die folgenden Beispiele stammen aus einem Schulbuch. Es enthält noch umfangreichere Aufgaben. Die Aufgaben sind plaziert innerhalb von Aufgabenkaskaden - ohne jeden Bezug zu übergeordneten Problemstellungen. Ähnliche Vorgehensweisen findet man in vielen Schulbüchern.

? $27ab-12a^2+13bc-a^2+3ab-12bc+ab-55$

? $2t^3t : \frac{2}{9} -4t\,t^5 : \frac{2}{3} +15\,t^2\,t^2 : \frac{5}{7}$

? $\frac{2}{5}(20y) - \frac{1}{3}(27y) - 7 = \frac{2}{7}(21y)$

? $6u(-3u+7) + 8u^2 > 5(2u-3) - 10\,u^2$

? $\frac{5x-2y-1}{3a} - \frac{a-2b}{6ab} - \frac{b-2}{15b} + \frac{1}{15} + \frac{1}{30}b$

Antworten zur Frage nach „vernünftigen“ Termumformungen ergeben sich aus den Ausführungen in diesem Heft. Die obigen Aufgaben jedenfalls müssen als ungeeignet für einen modernen Mathematikunterricht bezeichnet werden.

Abschließend halten wir noch einmal fest:

Der Unterricht über Terme und Termumformungen besteht zur Zeit in erheblichem Maße aus unnötigem **Vorratslernen** - häufig noch weit über das später Benötigte hinaus. Das läßt sich leicht ändern, egal, ob mit oder ohne CAS-Einsatz.

Terme sind nicht einfach da! **Terme erwachsen aus konkreten Problemstellungen**. Deshalb sollte man solche Probleme auch stellen und bearbeiten. Dabei kann der reguläre Lehrplan auch verlassen werden zugunsten einer Vernetzung mathematischer Inhalte.

Stupides Üben von Termumformungen muß unterbleiben! Viele Termumformungen sollte man dort besprechen, wo sie gebraucht werden.

Wohl aber können Funktionen mit Parametern betrachtet und damit das durchgängig wichtige **Prinzip der Definition/ Verwendung / Analyse von Bausteinen** eingeleitet werden.

Es ist ein wesentliches Unterrichtsziel, die **Struktur von Termen** erkennen zu können. Mit dieser Fähigkeit ist es dann auch möglich, Computeralgebrasysteme zielgerichtet einzusetzen.

Nach jeweils einfachen Beispielen für die verschiedenen Termtypen sollte stets **der Übergang zum Arbeiten mit dem CAS** erfolgen.

Das Arbeiten mit dem CAS erfordert eigene Strategien und Dokumentationstechniken und muss geübt werden. Das Üben sollte mit gelegentlichen Handrechnungen verbunden werden.

Literatur

[1] Lehmann, E.: Wieviel „White-Box" und wann „Black-Box"? - Mathematik mit Computeralgebra-Bausteinen des TI-92, in *Mathematik in der Schule*, 1998, Heft 3, Pädagogischer Zeitschriftenverlag Berlin

[2] Lehmann, E.: Mathematikunterricht mit einem Computeralgebrasystem - Analyse des Bausteins Binobau(a,b,n):=(a+b)^n, voraussichtlich 1999 in der Zeitschrift *MNU*

[3] Lehmann, E.: Lineare Gleichungssysteme - Eine Unterrichtsreihe im Grundkurs Klasse 12 mit DERIVE, in
Bericht über die 13.Arbeitstagung des Arbeitskreises „Mathematikunterricht und Informatik" in der GDM, 1995, diVerlag Franzbecker, Horst Hischer & Michael Weiß (Hrsg.)

[4] Schupp, H. u.a. (Universität des Saarlandes, Saarbrücken): Forschungsprojekt: Aufgabenvariation als Heurismus, Fassung Februar 1998 (inzwischen gibt es eine neuere Fassung). - Ein bedeutender Beitrag zu den Themen „Neue Aufgabenkultur" und „Offener Unterricht".

Benutzte Hard- und Software

[5] Texas-Instruments: Taschencomputer TI-92 mit seinem Computeralgebrasystem

[6] Lehmann, E.: Dynamischer Funktionenplotter PLOT11, Version 1998

Sachverzeichnis