

Das Crap-Spiel

Ein problemorientierter Einstieg in die Stochastik (Klasse 11) mit Computernutzung (mit Fortsetzungsmöglichkeiten in allen Standardkursen und der Informatik)

Hinweis: Lehrplan-Unterrichtsinhalte sind blau /kursiv gesetzt.

Der Unterrichtsgang, ohne besondere methodische Varianten, wie z.B. Projektarbeit	Mathematik A, benötigt zur Problemlösung, Modellbildungsphasen, <i>Im Lehrplan genannte Unterrichtsinhalte</i>	Computereinsatz Syntax für Voyage 200	Mathematik B, mögliche Erweiterungen, Variationen, Abzweige
1) Das Spiel vorstellen Lehrer o. ein Schüler o. vorherige Hausarbeit... Spielregeln verstehen.	Algorithmus: Als Text oder Struktogramm (Später als Zustandsgraph) ...		Rezepte, Algorithmen
2) Spielen 1: von Hand würfeln, Erfahrungen sammeln	<i>Zufall und Wahrscheinlichkeit, Aufbereitung von Datenmengen</i> , Daten protokollieren (Gewinn, Verlust, Wurffolge, <i>Häufigkeiten</i> der Summen, mittlere Spieldauer		
3) Wir brauchen mehr Daten, Simulation - ein Würfel - zwei Würfel - Würfelrollen auswerten	Random-Funktion und Int-Funktion Abbildung des Intervalls $[0,1[$ auf die <i>Ergebnismenge</i> $\{1,2,3,4,5,6\}$ bzw. Erzeugung der Menge $\{2,3,4,\dots,10,11,12\}$ <i>Wahrscheinlichkeit von Ereignissen, Laplace-Wahrscheinlichkeit</i> <i>Grafische Darstellung von Datenmengen, Histogramm, Kenngrößen, zweistufiges Baumdiagramm</i>	Rand() Int(6*rand+1) Int(6*rand+1)+Int(6*rand+1) \rightarrow u1(n) Sequenz-Editor Grafische Darstellung, siehe Bilder 1,2 Seq(int(6*rand()+1)+int(6*rand()+1),i,1,6) ergibt 6ZZ aus 2..12 Listen definieren, Plot definieren (Histogramm, x - c1, Frequence - c2)	Methoden der Datensammlung, andere Abbildungen der Random-Funktion Weitere Baumdiagramme zu mehrstufigen Versuchen, Weitere statistische Grundbegriffe
4) Noch mehr Daten – erste Problemlösung über Simulation mit vielen Versuchen	Datenauswertung, s. o.	Falls vorhanden: Das Schüler-Delphi-Programm (exe-File aus dem Informatikunterricht.) oder Simulationsprogramm CRAPAU-TO.EXE	
5) Häufigkeiten, Wahrscheinlichkeiten, von der Häufigkeit zur Wahrscheinlichkeit	Begriffsbildung, <i>Wahrscheinlichkeitsverteilung / Tabelle</i> 2 3 4 5 6 7 ... 12 1/36 6/36 1/36 Rechnen mit Wahrscheinlichkeiten, <i>Pfadregeln: Produkt und Summenregel</i>	Falls vorhanden: Demo-Programm für zweistufigen Baum (exe-File von Leh)	Weitere W-Tabellen

Spielregeln und einige Taschencomputer-Bilder zum Crap-Spiel

```

F1 F2 F3 F4 F5 F6 F7
Zoom Edit All Style Axes...
PLOTS
ui1=0
u2=rand()
ui2=0.
u3=int(6*rand()+1)+int(6*rand()+1)
ui3=0.
u4=5
ui4=5.
u5=floor(n)
ui5=0.
ui1=0.
MAIN RAD APPROX SEQ
    
```

Bild 1 Terme

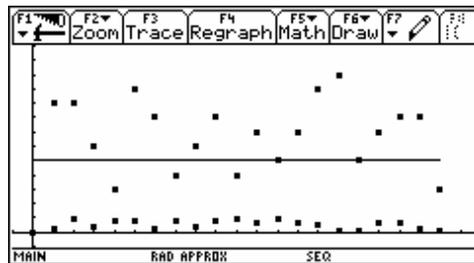


Bild 2, n bis 20, unten alle ZZ aus [0,1] Ergebnisse bei Doppelwurf

	c1	c2	c3	c4	c5
1	2	3			
2	3	5			
3	4	7			
4	5	9			
5	6	9			
6	7	15			
7	8	11			

Bild 3, statistische Daten, Doppelwurf

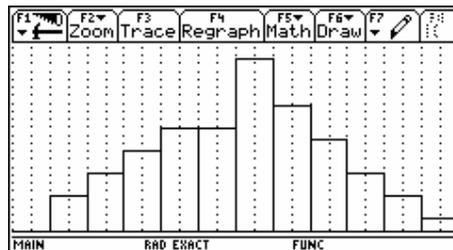


Bild 4, Histogramm dazu

(1)

2 Würfel werden geworfen (oder auch ein Würfel zweimal). Dann wird die Augensumme gebildet. Wir nennen diese im 1. Wurf geworfene Summe S' .

- Wenn man die Augensumme 7 oder 11 wirft, hat man sofort gewonnen!
- Wenn man die Augensumme 2 oder 3 oder 12 wirft, hat man sofort verloren!
- In allen anderen Fällen geht es weiter!

(2)

Wir würfeln erneut mit den beiden Würfeln und bilden wieder die Summe. Wir nennen sie S .

- Wenn man die Summe $S = 7$ hat, hat man verloren.
- Wenn man eine Summe $S = S'$ hat (also wie im ersten Wurf), hat man gewonnen.
- In allen anderen Fällen geht das Spiel weiter bei (2)

Spielregeln

Hinweis: S' ist also immer die Summe des ersten Wurfes

CD zu Vorträgen und Veröffentlichungen zum erweiterten Thema „Markow-Ketten“

Inhalt u.a.

- **Crapspiel-Vortrag** auf der Regionaltagung der MNU in Hessen 2006-09-07 (als ppt-Datei)
- **Simulation des Crapspiels** (Version 1 als Delphi-Programm von Schülern, mit Delphi-Dateien)
- **Simulation des Crapspiels** (Version 2, älteres Programm unter DOS, langsame und schnelle Durchläufe)
- **Umfangreiches Programm zu Markow-Ketten** mit mehreren Bearbeitungsmethoden, u.a. Grafik, ältere DOS Version
- **Herleitung** einer Formel
- **Aufsatz** aus Zeitschrift PM 2003 zu Markow-Ketten mit mehr als 2 Zuständen (**Anwendungsbeispiele**)
- Eine Abituraufgabe
- **Kaufverhalten**, eine Anwendung

15 Euro

Fortsetzung

Der Unterrichtsgang	Mathematik A, benötigt zur Problemlösung, Modellbildungsphasen, <i>Im Lehrplan genannte Unterrichtsinhalte</i>	Computereinsatz Syntax für Voyage 200	Mathematik B, mögliche Erweiterungen, Variationen, Abzweige
6) Entwicklung des Zustandsgraphen unter Benutzung der W-Verteilung	Zustände, Zustandsgraph, Schlaufen		Andere Zustandsgraphen
7) Wege zum Gewinn entlang der Wege im Zustandsgraphen	Aufstellung von Folgen, <i>Produktregel, Additionsregel</i>	Folgen und einzelne Werte	Folgen, Bezug zur Analysis
8) Berechnung von Gewinn- und Verlust-Wahrscheinlichkeit	Grenzwerte von Folgen	Grenzwerte von Folgen	
9) Zusammenfassung der Ergebnisse, Spiel nicht fair, verwendete Mathematik, insbesondere zur Stochastik Abschluss 1, z.B. für Grundkurse	Zusammenfassung	Zusammenfassung	Zusammenfassung
10) Andere Lösungswege, für Leistungskurse	Matrizen, Matrizenpotenzen		Mittelwertsregeln
11) Andere Anwendungen der erworbenen Kenntnisse im Sinne des vorliegenden Stoffplans	xxxxxxxxxxxxxxxx	xxxxxxxxxxxxxxxx	xxxxxxxxxxxxxxxx

Zusammenfassung: Ein derartiger problemorientierter Einstieg in die Stochastik, in dem die ersten Grundbegriffe der Stochastik eingeführt werden, ist mit vielen einfachen Anwendungen (Spielen oder Anderes) möglich. Jedenfalls ist das für die SchülerInnen motivierender und mit mehr Eigenaktivität verbunden, als ein Erarbeiten der Begriffe an vielen kleinen Beispielen. Diese können ggf. auch neben dem gewählten Problem laufen, z.B. in Hausarbeiten.

In den späteren Kursen ist ein Wiederaufgreifen des CRAP-Spiels möglich durch Betrachtung anderer Lösungsmöglichkeiten - in allen drei Standardgebieten, dann besonders beim Leistungskurs:

Analysis	Folgen, Grenzwerte
Lineare Algebra	Matrizenpotenzen, Teilmatrizen, LGS
Stochastik	Simulation, Erzeugung und Güte von Zufallszahlen, andere Probleme an Zustandsgraphen, andere Simulationen
Informatik	CRAP ist ein stochastischer Automat, Programmierung der Simulation und der statistischen Auswertung (ggf. exe-File zur Crap-Automaten-Simulation von Leh).

Literatur:

- Eberhard Lehmann: Wahrscheinlichkeitsrechnung, problemorientierte Unterrichtseinheiten, Volk und Wissen-Verlag, Berlin 1997
Inhalt: Zuverlässigkeit von Bauteilen, eine Studie zum Kaufverhalten, Crap-Spiel, Sammelbilder-Problem, Simulation, Glossar
- Gebietsübergreifende Aspekte und Computereinsatz im Mathematikunterricht am Beispiel des CRAP-Spiels - Vortrag mit Power-Point auf der MNU-Hauptversammlung in Kiel 2005 (später auf meiner Homepage www.snafu.de/~mirza)
CRAP ist ein in den USA häufig gespieltes Würfelspiel. Bei der mathematischen Modellierung dieses Spiels kann mit unterschiedlichen Ansätzen gearbeitet werden. Dabei können alle drei Standardgebiete (Lineare Algebra / Matrizen, Stochastik / Zustandsgraphen / Simulation, Analysis / Folgen) eingesetzt werden. Dabei erweisen sich auch Computeralgebrasysteme als überaus nützlich. Die Bearbeitungen stammen aus der Unterrichtspraxis beider Sekundarstufen.