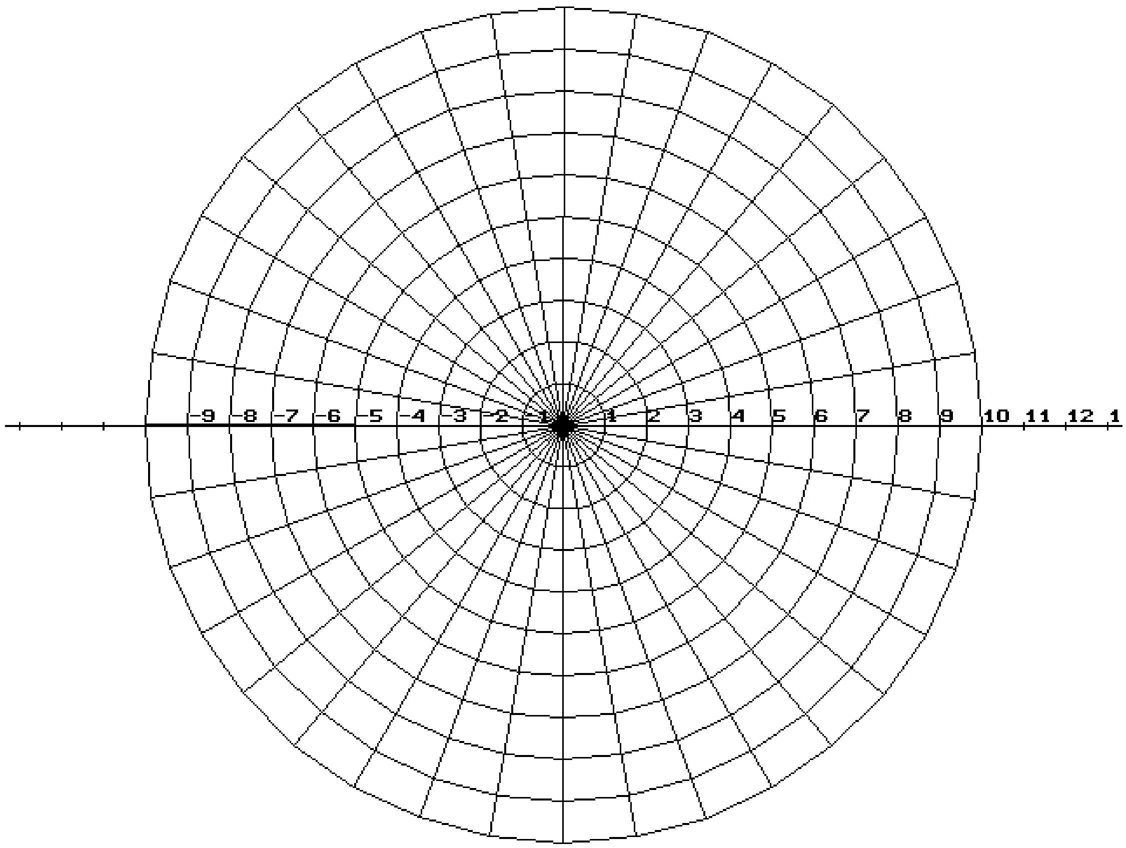
MATHEMATIK UND INFORMATIK
an der Rückert-Schule

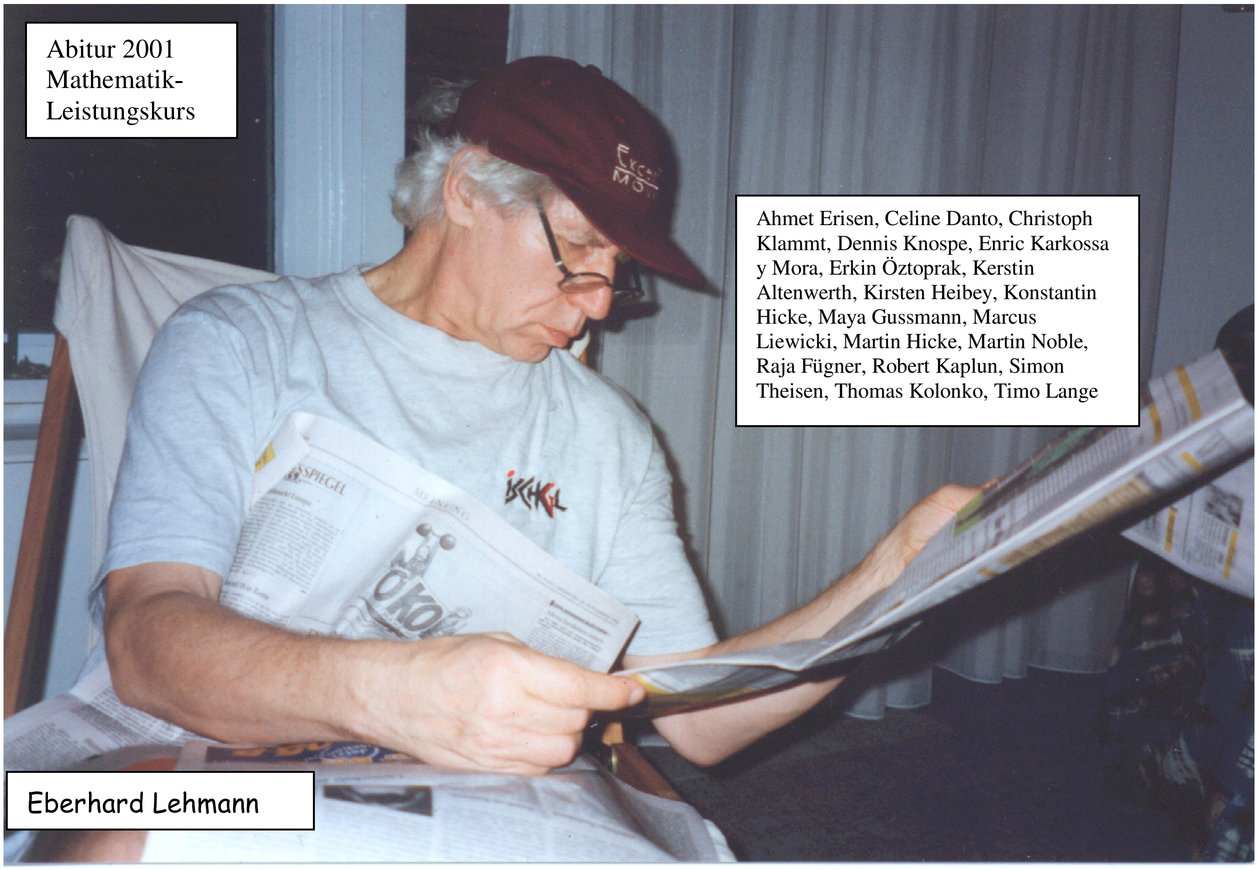
Berichte aus den Fachbereichen Mathematik und Informatik
Sonderheft - April 2001



Ein Sonderheft des Leistungskurses Mathematik
über eine

Entdeckungsreise zu Kurven
in Polarkoordinaten und Parameterdarstellungen

Eberhard Lehmann



Die Projektidee

In einer Formelsammlung finden sich zwei Seiten mit den Gleichungen besonderer Kurven, insbesondere in Polarkoordinaten– und in Parameterdarstellung mit den uns bekannten schönen und neugierig machenden Namen, aber ohne Zeichnungen. Jede Schülergruppe konnte nun einen Kurventyp auswählen und erhielt den Auftrag, auf circa vier Seiten eine Entdeckungsreise zu der jeweiligen Relation darzustellen. Hilfsmittel: Funktionenplotter HL-PLOT11, TI-92, Internet.

Inhaltsverzeichnis Sonderheft April 2001

Weitere Mitglieder des Leistungskurses: Celine Danto, Ahmet Erisen, Erkin Öztoprak
(konnten sich seinerzeit leider an diesem Projekt nicht beteiligen)

Dieses Heft wurde von mir herausgegeben als Dank an den Leistungskurs Mathematik für die langjährige gute Zusammenarbeit – mit vielen SchülerInnen von Klasse 9 bis Klasse 13 und bis zum Abitur im Jahre 2001.

Herausgeber: Fachbereichsleiter Eberhard Lehmann, E-Mail mirza@snafu.de
Fachbereich Mathematik der Rückert-Oberschule,
Mettestraße 8, 10825 Berlin, Telefon 030-90167171

Die Projektidee

Eberhard Lehmann

Vorwort

Die folgenden Beiträge über besondere Kurven – meistens von je zwei Schülern eines Mathematik–Leistungskurses Klasse 12 (mit 21 Schülern) – entstanden unter den folgenden Voraussetzungen.

Aus dem vorhergehenden Unterricht:
Im Unterricht wurde genauer über die Zykloide gearbeitet: Graphen, Herleitung von Gleichungen, Fallunterscheidungen, Steigungsberechnungen, Flächenberechnungen usw. Zur Bearbeitung im Unterricht standen u.a. das Computeralgebra-System (CAS) des TI-92, der Funktionenplotter PLOT11 (besonders gut zu Animationen und zum entdeckenden Forschen geeignet) und das Internet zur Verfügung. Diese Hilfsmittel wurden dann auch bei der hier geschilderten Partnerarbeit verwendet.

Klausur:

In einer Klausur ging es dann um Pascalsche Schnecken und um Lissajous-Kurven. Diese Klausur wird unten vorgelegt.

Die Projektidee:
In einer Formelsammlung finden sich zwei Seiten mit den Gleichungen besonderer Kurven, insbesondere in Polarkoordinaten– und in Parameterdarstellung mit den uns bekannten schönen und neugierig machenden Namen, aber ohne Zeichnungen. Jede Schülergruppe konnte nun einen Kurventyp auswählen und erhielt den Auftrag, auf maximal vier Seiten eine Entdeckungsreise zu der jeweiligen Relation darzustellen. Hilfsmittel: Funktionenplotter HL-PLOT11, TI-92, Internet.

1. Eine Klausur: Lissajous-Kurve, Pascalsche Schnecke

1.1 Der Klausurtext

2. Leistungskurs-Klausur, Kurs Leh-MA2, 26.6.00

Aufgabe 1 (Lissajous Figuren)

Zur Information

URL: cip.physik.uni-bonn.de/~preusser/applets.../lissajous.html
Last modified on: 13-Apr-1998 - 3K bytes - in German
[Translate] [More pages from this site]

Lissajous Figuren

Bei einem System, das gleichzeitig in zwei aufeinander senkrecht stehenden Ebenen schwingen kann, beobachtet man Lissajous-Figuren, die zuerst von Jules Antoine Lissajous 1857 in Paris demonstriert wurden:

Diese Figuren, die oben im Applet zu sehen sind entstehen durch Überlagerung zweier harmonischer Schwingungen:

f1(t) = A1 sin (w1t)
f2(t) = A2 sin (w2t + p)

Aufgabentext
In der Notation des Funktionenplotters PLOT11 ist gegeben
f1: cos(t),sin(t)
f4: cos(t),sin(4t) (hier ergibt sich eine Lissajous-Kurve, siehe oben)
t stammt aus dem Intervall [0, 2pi]

1.1 (ca. 15´) Erstellen Sie die entsprechende Zeichnung mit dem TI-92, und übernehmen Sie die Zeichnung als saubere Skizze auf kariertes Papier. Hinweis: Geeignete Größe wahlen! Beachten Sie bei der Anlage der Skizze auch die folgenden Aufgaben. Papier quer nehmen.

1.2 (ca. 10´) Berechnen Sie die Punkte P(t) mit t aus {0,1,2,3,4,5,6}. Markieren Sie diese Punkte in der Skizze mit • .

1.3 (ca. 20´) Berechnen Sie den Inhalt der Fläche zwischen Kurve und x-Achse. Tragen Sie dazu auch den Graphen der zu integrierenden Funktion in Ihre Skizze ein (andere Farbe).

1.4 (ca.15`) Legen Sie eine Tabelle der Steigungen der Tangenten in den Punkten P(t) von Aufgabe 1.2 an.

1.5 (ca. 20´) Analysieren Sie nun den Baustein

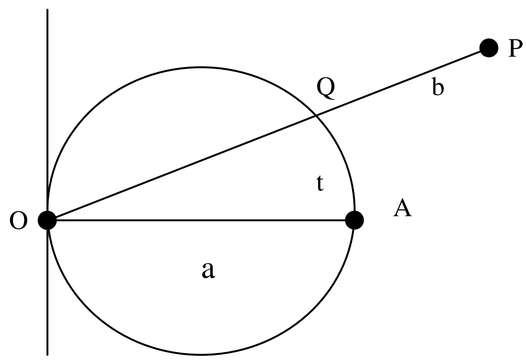
cos(t)	**→ lisx(t)**
sin(u*t)	**→ lisy(t,u),**
wobei für u ganze Zahlen gewählt werden.	

Die Analyse soll den Aspekt "Graphen und ihr Zusammenhang mit den Termen" betreffen.

1.6 (ca. 5´) Welcher Zusammenhang besteht zwischen dem in 1.5 definierten Baustein und dem im WWW-Text definierten Baustein?

Aufgabe 2 (Pascalsche Schnecken)

Gegeben ist ein Kreis über dem Durchmesser a = OA (auf horizontalen Achse). Von O aus ziehen wir alle möglichen Radiusvektoren (Strecken OQ, wobei Q auf dem Kreis). Dann wird OQ über Q um die konstante Länge b verlängert bis zu den Punkten P. Der geometrische Ort der Punkte P heisst Pascalsche Schnecke.



2.1 (ca. 15´) Die Gleichung der Pascalschen Schnecke (unten soll sie hergeleitet werden) lautet r(t,a,b) = a*cos(t) + b. Erstellen sie mit dem TI–92 eine Zeichnung der Schnecke für a = 4 und b = 3. Zeichnen Sie auch den erzeugenden Kreis mit ein. Wie lässt sich das im Polarkoordinatensystem bewerkstelligen?

2.2 (ca. 15´) Leiten sie die Gleichung r = a*cos(t) + b der Pascalschen Schnecke her, siehe obige Figur.

2.3 (ca. 15´) Wie groß sind die Steigungen der Tangenten der Pascalschen Schnecke r(t,4,3) im Punkt (x = 0, y = 0)?

2.4 (ca. 25´) Zeichnen sie andere Pascalsche Schnecken in Abhängigkeit von den Parame-tern a und b. Treffen Sie Fallunterscheidungen.

2.5 (ca. 10´) Berechnen sie die Bogenlänge der Pascalschen Schnecke r(t,4,3) für t von 0 bis 2pi. Das geht mit der Formel s = Integral(sqrt(r^2 + (dr/dt)^2) dt in den Grenzen Winkel t von Alpha bis Winkel Beta.

2.6 (ca. 15´) Leiten Sie die Formel aus 2.5 her. Hinweis: Als Formel für die Bogenlänge von Kurven mit y = f(x) haben wir hergeleitet: Integral(sqrt [1+f´(x)^2]) dx für x von a bis b.

1.2 Einige Lösungsansätze

Zu Aufgabe 1

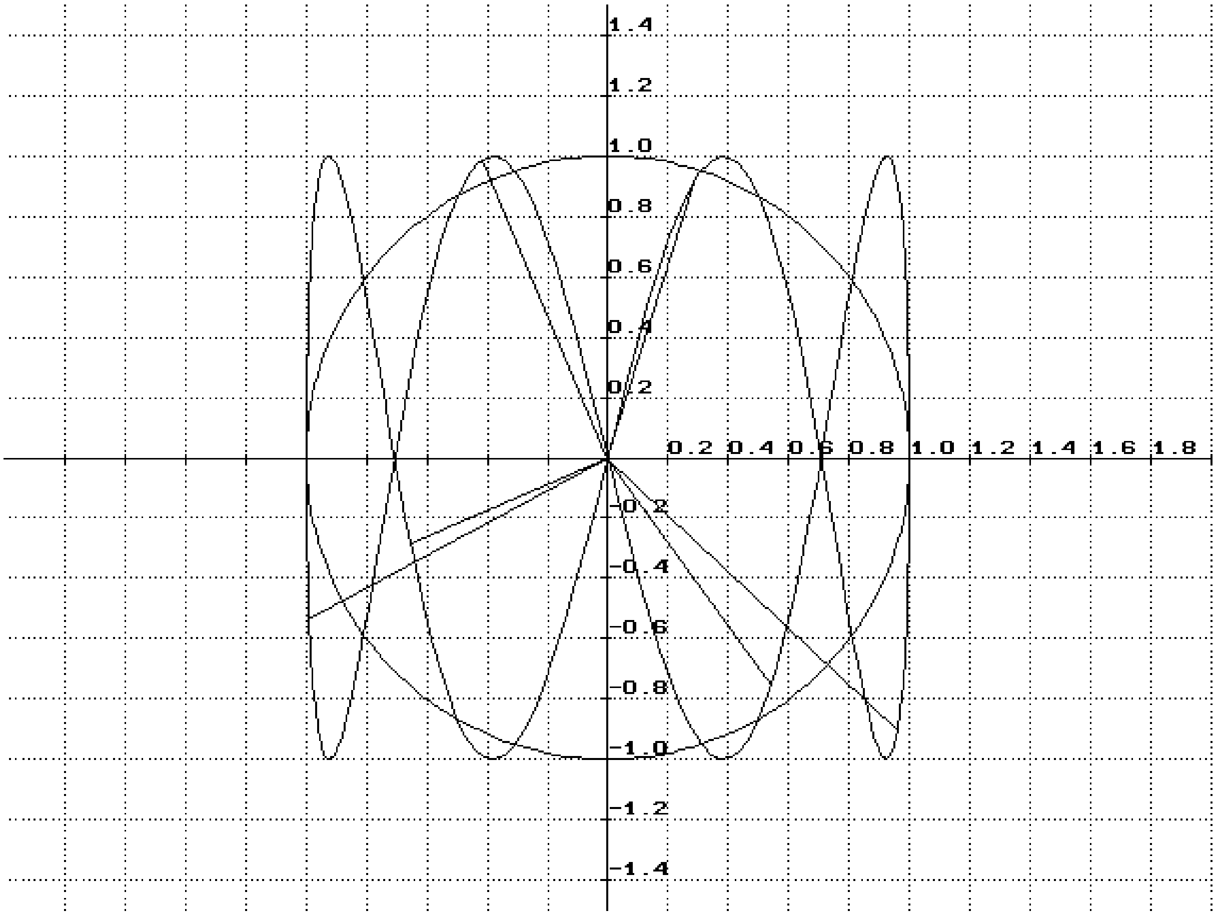


Abb.1: Einheitskreis, Lissajous-Kurve, Radien zu ausgewählten Punkten (Aufgabe 1.2)
Die Skizze wurde hier mit PLOT11 erstellt, in der Klausur war es eine Handskizze, die vom TI-92 übernommen wurde.

Programmierung für PLOT11:
f1: cos(t), sin(t)
f2: cos(t), sin(4t)
f3: 0,0,cos(u),sin(4u) mit t aus [0, 6.28] und u aus {0,1,2,3,4,5,6}

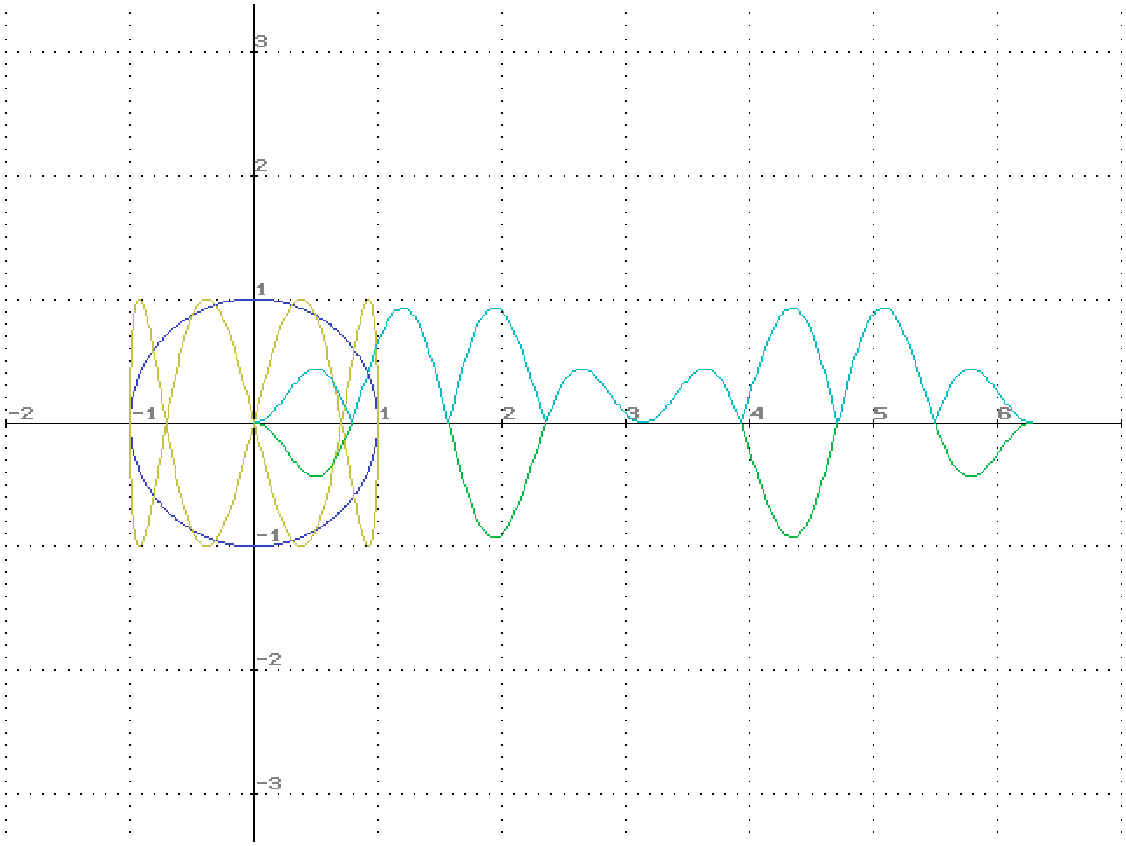


Abb.2: Einheitskreis, Lissajous-Kurve, die zu integrierende Funktion (Aufgabe 1.3)

Zu Aufgabe 2

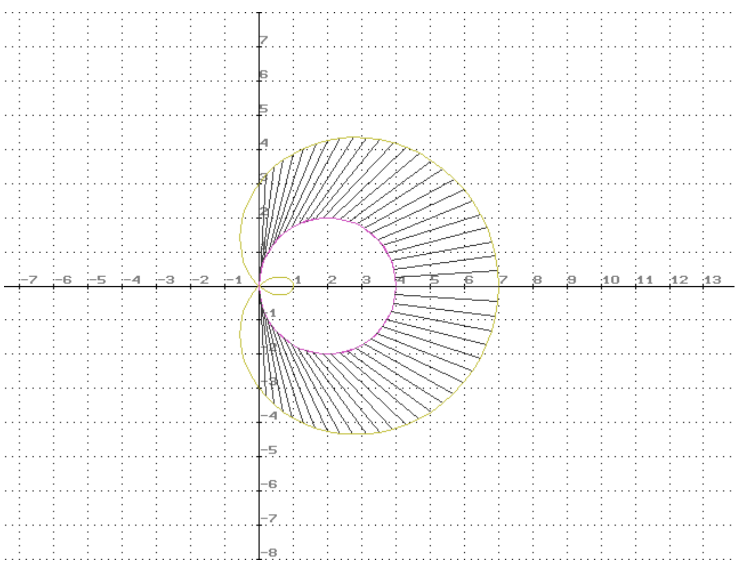


Abb.3: Pascalsche Schnecke mit einigen Radien(für t aus [0, pi/2]

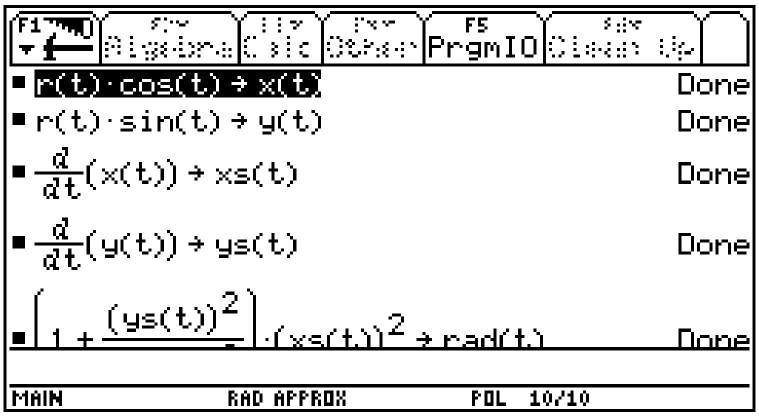
Programmierung von PLOT11

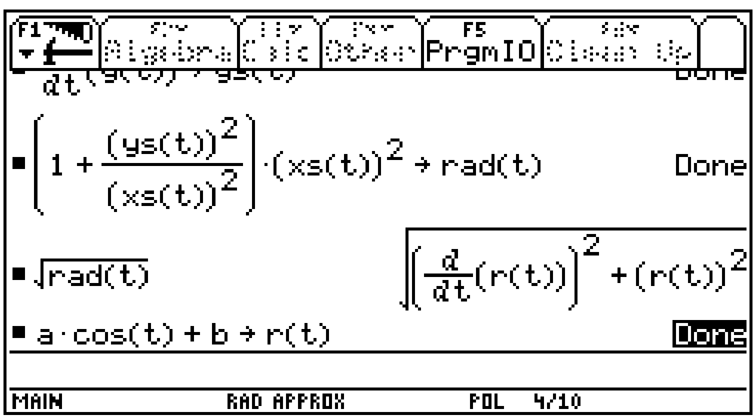
f1:	t, u	Kreise um (0,0), hier nicht gezeichnet
f2:	a*cos(t)+b	
f3:	t, f2(4,0)	Schnecke für a = 4, b = 0, Kreis!
f4:	{(t<pi/2) | (t>3pi/2): t : undef}, f2(4,0), t ,f2(4,3)	Radien für t aus [pi/2, 3pi/2]
f5:	t,f2(4,3)	Schnecke für a = 4, b = 3

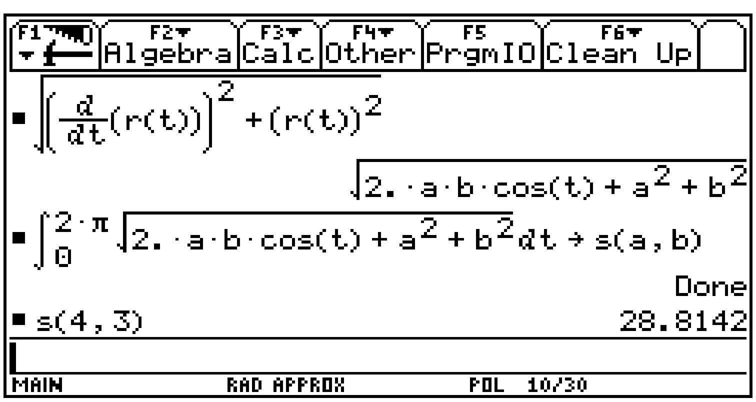
Einstellung von Polarkoordinaten-Darstellung t aus [0, 2pi]

Lösung zur 2.6, 2.5 mit TI-92-Benutzung

Formelherleitung







Laut Definition der Polarkoordinaten.
(die Def. muss man wissen)

Die Ableitungen.
(kann der TI bestimmen)

In der neuen Formel steht dt, in der alten steht dx = dx(t). Es gilt
dx(t)/dt = x´(t) , also
dx(t) = x´(t) dt
(Idee muss man haben)

x´(t) wird in die Wurzel hineingebracht
(diese Idee muss man haben)

Dann ergibt sich der Radikand.
(kann der TI bestimmen)
Herleitung fertig.

Berechnung Bogenlänge:

Für r(t) = acos(t)+b wird:

Insgesamt ergibt sich für t aus [0, 2π] die Bogenlänge 28.81 LE
(kann der TI bestimmen)