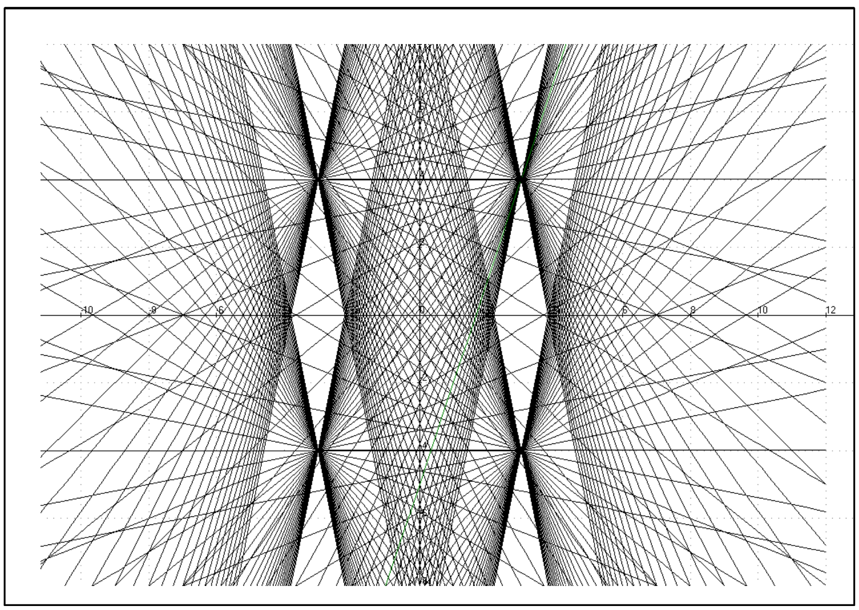
Mathematik-Unterricht mit Parametern

– Sekundarstufe 1–



Eberhard Lehmann

Schroedel-Verlag

Inhaltsverzeichnis

Vorwort

Adressatenkreis des Heftes

Das vorliegende Heft wendet sich an **Lehrer,** die die neuen Möglichkeiten von Computeralgebrasystemen (CAS) im Unterricht ausprobieren wollen. – Das Heft ist aber auch so konzipiert, dass es für die konkrete Arbeit im Unterricht geeignet ist und damit auch in die Hand der **Schüler** gegeben werden kann. Hierzu dienen u.a. der jeweils einleitende Text und die vielen Arbeitsblätter.

Die Unterrichtseinheiten entnehme man dem Inhaltsverzeichnis. Sie stammen alle aus dem Standardstoff der Sekundarstufe 1 (Klasse 7 bis Klasse 10). Durch passende Vertiefungen oder zur Einführung in die Arbeit mit Bausteinen sind viele Teile auch für den Unterricht in der Sekundarstufe 2 verwendbar.Der **Anhang** dient der mehr theoretischen Grundlegung und ist für den Lehrer oder für im Umgang mit CAS bereits erfahrene Schüler gedacht.

Neue Möglichkeiten durch Verwendung von Parametern

Computeralgebrasysteme und andere Mathematik-Software haben in den letzten Jahren zahlreiche neue Möglichkeiten für den Mathematik-Unterricht eröffnet. Aufsätze in den Fachzeitschriften, Bücher und Hefte mit konkreten Unterrichtsbeispielen und Lehrplanentwürfe zeigen, dass diese Möglichkeiten von engagierten Lehrern inzwischen erkannt und schon gut ausgenutzt werden. Schulbücher dagegen halten sich noch sehr zurück.

Bei den bisherigen Überlegungen wird ein besonderer Aspekt, der sich zu einer Leitidee entwickeln kann, noch wenig beachtet wird. Es handelt sich um die **Arbeit mit Bausteinen** (Modulen), die die Idee der **Parameter** schon frühzeitig - **schon in der Sekundarstufe 1** - ermöglicht. Mit Parametern wird bisher in der Regel erst in der Sekundarstufe 2 gearbeitet – und das meist in bescheidener Weise.

CAS und andere Programme lassen die Arbeit mit Bausteinen zu, beispielsweise kann man einen Baustein gerade (...) für die Punkt-Steigungsform einer Geraden definieren:

gerade(x,m,a,b) : = m*(x−a)+ b	nach der Syntax von DERIVE5
Aufrufbeispiel: gerade(x, 2, 3,4)	
define gerade(x,m,a,b) = m*(x−a)+ b	oder
m*(x−a)+ b → gerade(x, m, a, b)	nach der Syntax des TI-92-Plus
Aufrufbeispiel: gerade(x, 2, 3,4)	
f1: c*(x-a) + b	nach der Syntax von HL-Plot-Win
Aufrufbeispiel: f1(3,4,2)	

Andere Bausteine sind schon vorhanden, etwa für das Bilden von Funktionsableitungen.

Bausteine sind deshalb so wichtig, weil man sie unter verschiedenen Zielsetzungen verwenden kann und weil sie die Erreichung diverser Lernziele des Mathematikunterrichts unterstützen; Näheres hierzu siehe Anhang.

Für das frühzeitige Arbeiten mit Parametern schon in der Sekundarstufe 1 sprechen u.a. folgende Gründe:

- Die vielen in der Sekundarstufe 1 auftretenden Formeln aus Algebra und Geometrie enthalten ohnehin Parameter.
- Die bewusste Berücksichtigung dieser Parameter führt zu einer Verbreiterung des mathematischen Wissens.
- Die Wahl verschiedener Einsetzungen bei Parameteraufrufen (Zahlen, Variabeln oder sogar Funktionen und andere Datenobjekte) führt zu mehr Verständnis und zu einer Verknüpfung verschiedener mathematischer Bereiche.
- Viele mathematischen Unterrichtsgegenstände lassen sich besser begreifen, wenn man nicht mit Einzelexemplaren arbeitet, sondern mit mehreren Exemplaren gleichzeitig hantiert und damit Vergleichsmöglichkeiten hat und ggf. Fallunterscheidungen leichter durchführen kann.
- Erfahrungen aus der Informatik zeigen, dass das Arbeiten mit Parametern, z.B. bei Prozedurdefinitionen und -aufrufen keine besonderen Probleme bereitet.
- Bisher wird das Arbeiten mit Parametern erst in der Sekundarstufe 2 als wichtiges Konzept angesehen (häufig erst bei Kurvenscharen). Eine rechtzeitige Vorbereitung und Einübung in der Sekundarstufe 1 an einfacheren Beispielen – wie es nun durch die CAS möglich ist – nutzt dem späteren Unterricht.

Verwendete Software:
- CAS des TI-92-Plus (Texas Instruments)
- DERIVE 5 (Texas Instruments)
- ANIMATO (H. und E.Lehmann, mirza@snafu.de)
  Animationen mit Funktionen / Relationen, Funktionenplotter, Windows-Version 2001

Eberhard Lehmann,
Berlin, im Januar 2002

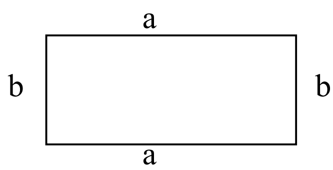
1. Parameter bei Flächeninhalten und Umfangsberechnungen von Rechtecken

1.1 Rechtecke

Unterrichtsvoraussetzungen:
Wir kennen die Formeln für den Umfang und den Flächeninhalt von Rechtecken:

Umfang **U = 2a + 2b**

Flächeninhalt **A = a*b**



Die Berechnung von Umfängen und Flächeninhalten ist also bei Rechtecken abhängig von den Variablen a und b. Die obigen Formeln werden aussagekräftiger, wenn wir das auch auf der linken Seite berücksichtigen und schreiben:

U(a,b) = 2a + 2b bzw. A(a,b) = a * b.

Dabei sind a und b sogenannte „**Parameter**", für die man zum Beispiel Zahlen oder auch Variable (oder sogar Terme) einsetzen kann.

So deutet z.B. U(5,6) die Aufgabe, den Umfang eines Rechtecks mit den Seiten a = 5 LE (Längeneinheiten) und b = 6 LE zu berechnen, also U(5,6) = 2*5 + 2*6 = 22. Der Umfang beträgt also 22 LE.

U(x, 3) = 2x + 6 ist der Term für ein Rechteck, das den Umfang 2x + 6 hat. Man kann aber den Term auch graphisch deuten und im Koordinatensystem eine Gerade dafür zeichnen. So erhält man eine Aussage über die Veränderung des Umfangs.

Aufgabe 1.1.1:
Löse die folgende Aufgabe durch Handrechnung und beschreibe das Bild der Computerrechnung.

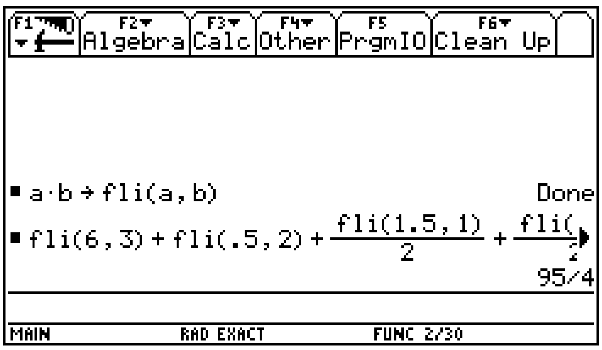


Abbildung 1.1.1 auf Seite 7 zeigt die Ansicht eines Hauses. Berechne die Inhalte der vier sichtbaren Flächen.

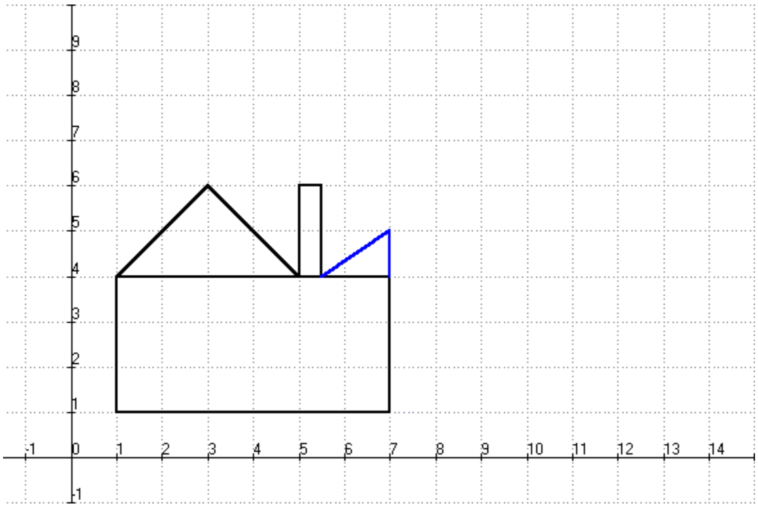


Abb. 1.1.1: Hausflächen

Im Computerbild erkennt man die Definition eines Bausteins für den Flächeninhalt (fli) eines Rechtecks: **a*b → fli(a,b).**

Anschließend wird der Baustein mehrfach benutzt.

Aufgabe 1.1.2:
Definiere den Umfangsbaustein **2a + 2b → umf(a,b)** zur Berechnung der Umfänge aller Rechtecke von Abb. 1.1.2**.** Berechne dann alle Umfänge unter Benutzung dieses Bausteins.

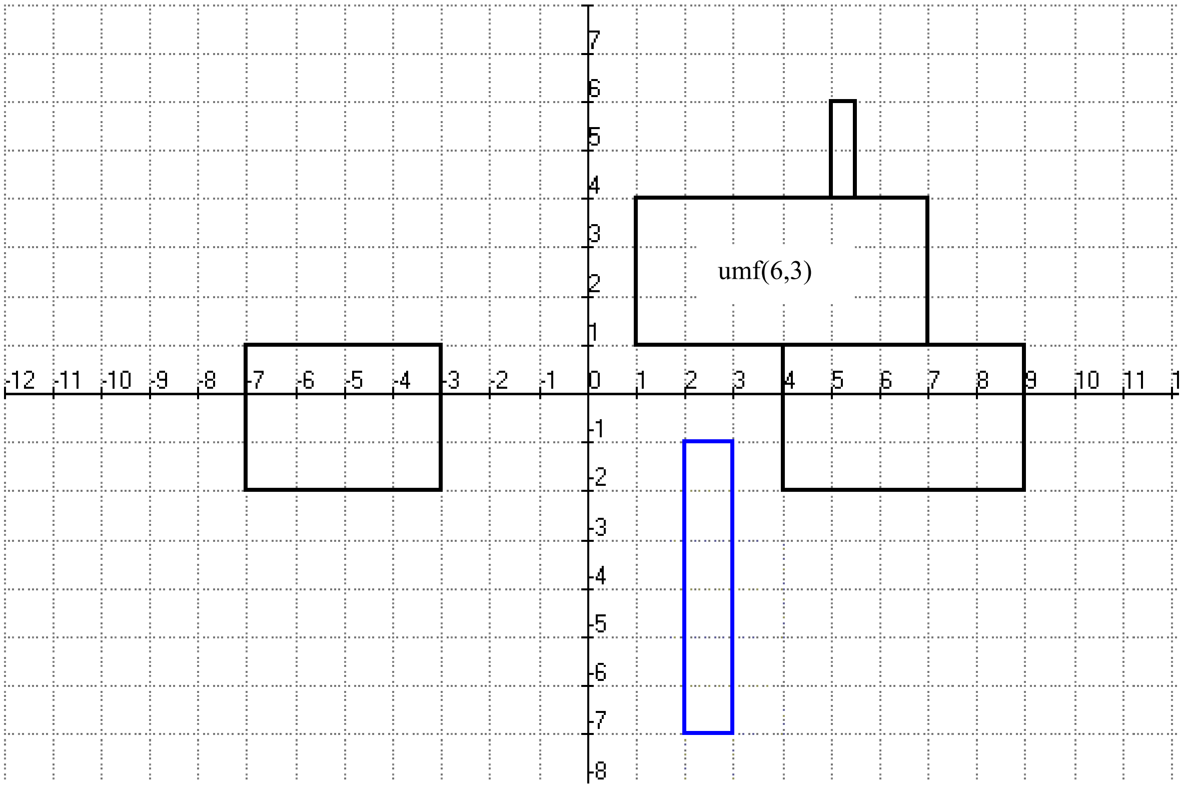


Abb. 1.1.2: Rechteckumfänge

Aufgabe 1.1.3:
Veranschauliche den Bausteinaufruf „umf(1,x)". Beachte: Umf(1,x) = 2*1+2*x = 2+2x. Man kann also den Term für umf(1,x) in ein Koordinatensystem zeichnen, siehe Abb. 1.1.4. Schreibe einen passenden Text dazu.

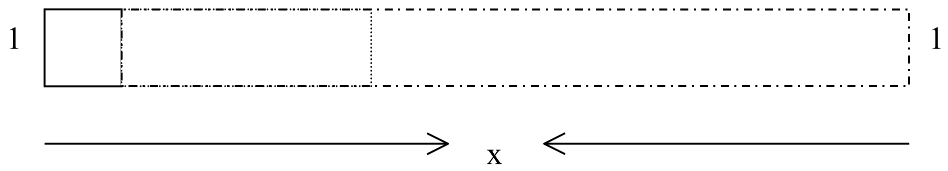


Abb.1.1.3: Rechtecke mit den Seiten 1 LE und x LE, Umfang Umf(1,x).

Aufgabe 1.1.4:

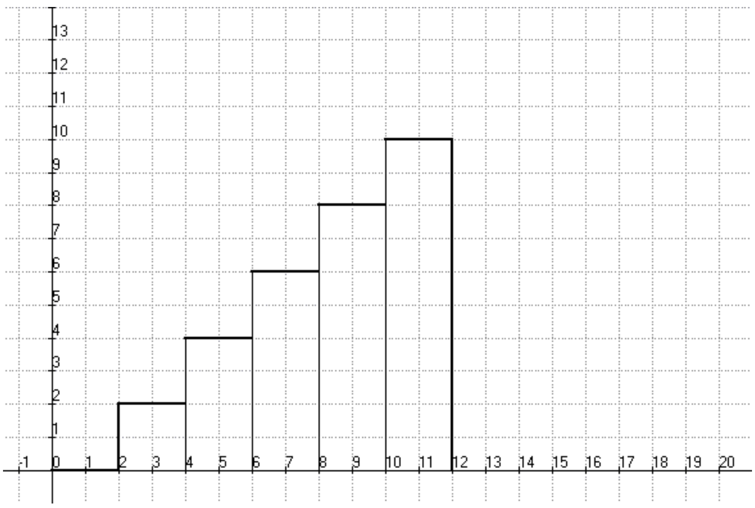
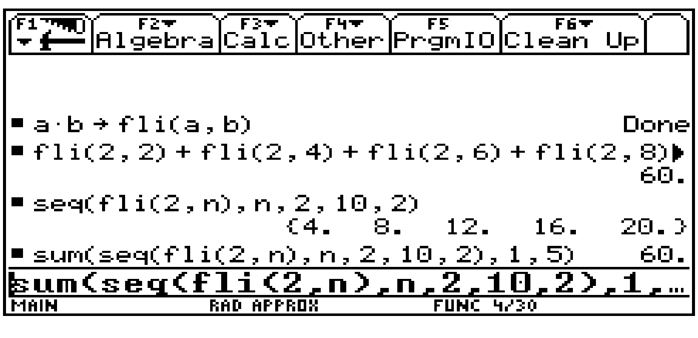


Abb.1.1.4: Rechtecktreppe

Berechne den Flächeninhalt der Rechtecktreppe mit Hilfe des Bausteins fli(a,b).

Lösung:
Erläutere die folgenden Lösungswege und erprobe sie an deinem CAS.
1) fli(2,2)+fli(2,4)+fli(2,6)+fli(2,8)+fli(2,10), oder
2) wenn man auch die Teilergebnisse sehen möchte: seq(fli(2,n),n,2,10,2) und
3) sum(seq(fli(2,n),n,2,10,2),1,5) = 60 FE.



Weitere Aufgaben
a) Die Ausgaben des Computers fordern zu weiteren Fragestellungen auf! Formuliere solche Fragen!
b) Berechne andere Rechtecktreppen.
Beachte hierzu das Arbeitsblatt

Abb. 1.1.5: Lösung mit dem Taschencomputer TI-92-Plus

Arbeitsblatt 1.1: „Rechteck-Kunst" am Wohnhaus

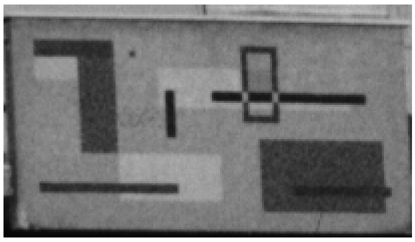


Abb. 1: Foto aus Cosenza in Calabrien / Italien

Aufgabe 1:
- Skizziere das Kunstwerk auf dem Balkon in vergrößerter Form. Färbe die Flächen.
- Berechne die Rechteckflächen. Benutze einen passenden Baustein.

Aufgabe 2:
Entwirf selbst Balkonflächen aus Rechtecken / Dreiecken.

Arbeitsblatt 1.2: Rechteckfläche und Rechteckumfang

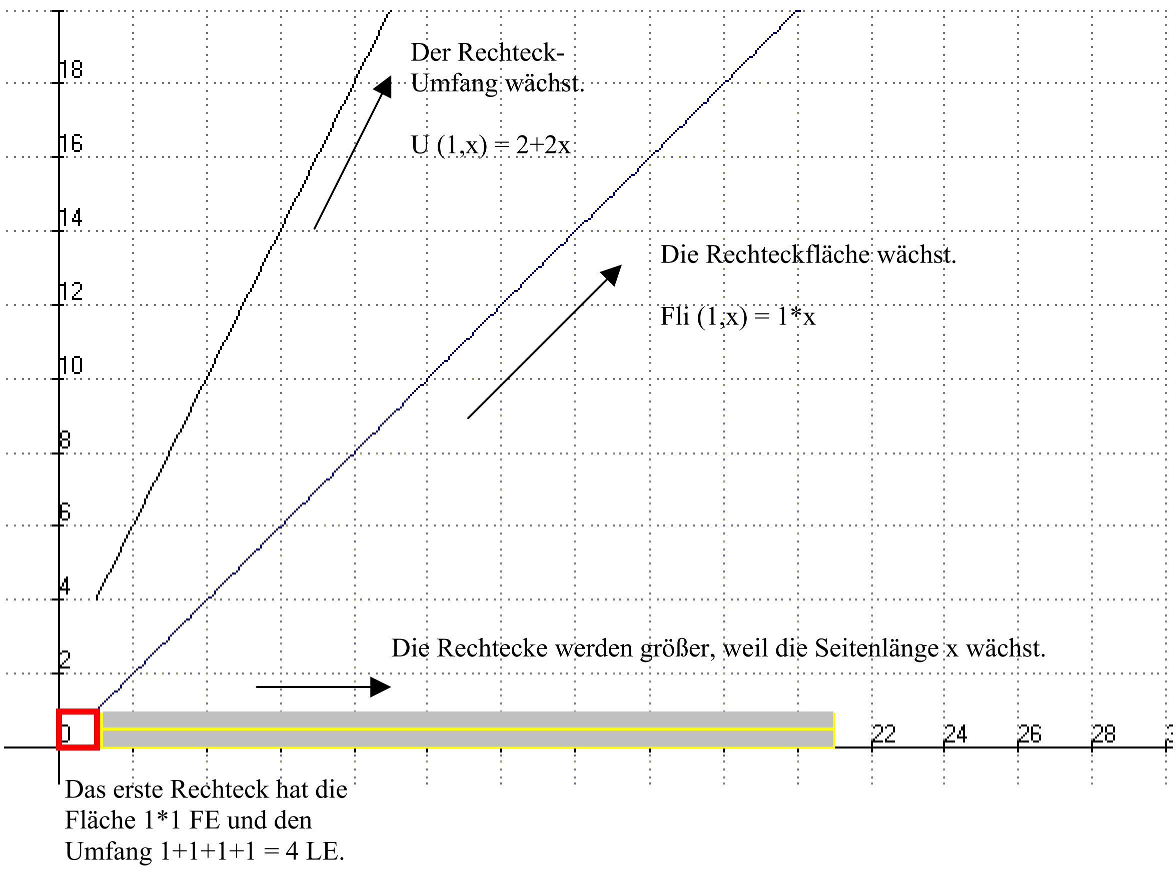


Abb. 1: Animation für die Veränderung von Flächeninhalt und Umfang von Rechtecken

Aufgabe 1:
Erläutere Abbildung 1 unter dem Gesichtspunkt „Abhängigkeit von Rechteckfläche und Rechteckumfang von den Seitenlängen”

Aufgabe 2:
Erstelle mit Hilfe des CAS die Graphen für U(2,x), U(x,2), Fli(2,x), Fli(x,2).. Was bedeuten die Bausteinaufrufe ausführlich geschrieben?

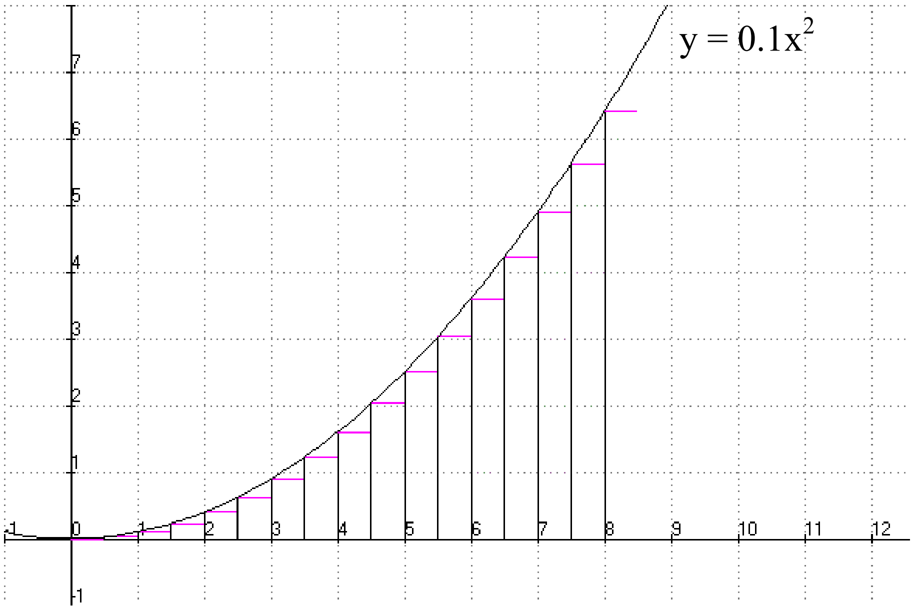
Aufgabe 3:
Berechne mit dem CAS die Flächeninhalte und Umfänge der folgenden Rechtecke:

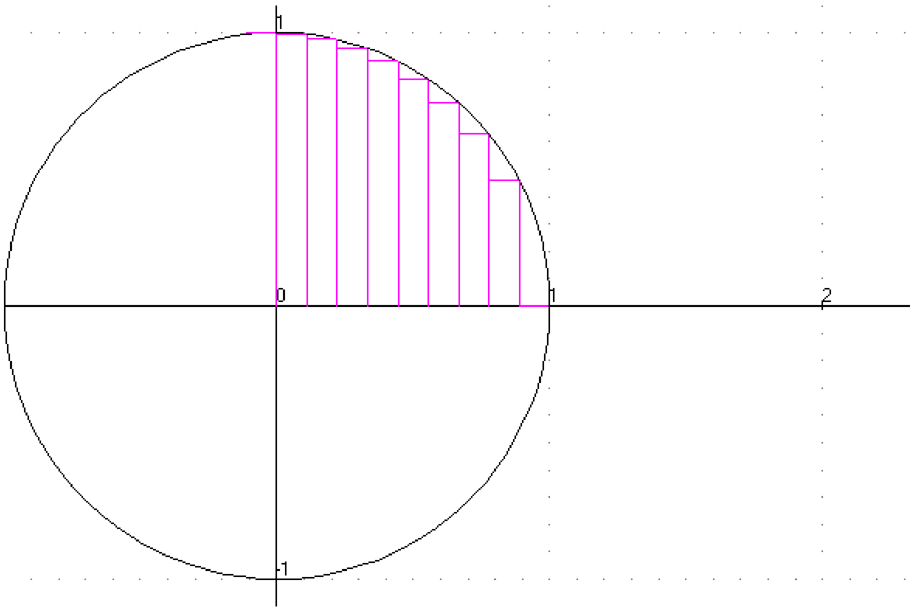
Rechteckseite 1 in cm	1.12	6.1	11	10.2	140
Rechteckseite 2 in cm	4.12	5.1	1.1	10.2	123

Benutze die Bausteine U(a,b) und Fli(a,b).

Arbeitsblatt 1.3 Rechtecktreppen an der Parabel und am Kreis

Die beiden folgenden Abbildung zeigen, dass man mit Rechtecktreppen auch noch andere Flächenprobleme bearbeiten kann.





Aufgabe 1:
Beschreibe die beiden Abbildungen.

Aufgabe 2:
Mit den Rechtecktreppen kann man angenäherte Berechnungen für den Inhalt eines Viertelkreises und für den Flächeninhalt unter einem Parabelbogen berechnen. Begründung? Führe solche Berechnungen durch.

1.2 Zusammenfassung - Mathematik mit Rechteck-Parametern

In Kapitel 1.1 haben wir Rechteckberechnungen in verschiedenen Situationen durchgeführt. Die Formeln für Flächeninhalt und Umfang eines Rechtecks sind lange bekannt.

Von Bedeutung wurde nun die Sichtweise, die Seitenlängen a und b eines Rechtecks als Parameter aufzufassen:

U(a,b) = 2a + 2b bzw. A(a,b) = a * b.

Damit kann man in Computeralgebrasystemen zwei viel verwendbare Bausteine definieren:

a*b →	fli(a,b)	für den Flächeninhalt
2a+2b →	umf(a,b)	für den Umfang

Diese Bausteine wurden in verschiedenen Aufgabenstellungen benutzt.

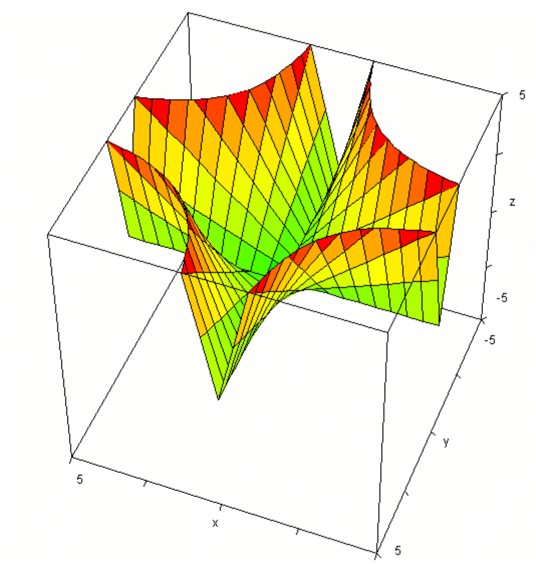
Mit den Aufgaben, Flächeninhalte unter einer Parabel und im Kreis zu berechnen, haben wir bereits einen Beitrag für späteren Unterricht geleistet.
Hierzu wird besonders an die beiden besprochenen CAS-Eingaben erinnert:

seq(fli(2,n),n,2,10,2)	Berechnung einer Folge von Rechteck-Flächeninhalten
sum(seq(fli(2,n),n,2,10,2),1,5)	Aufsummierung von Rechteckinhalten

In die obigen Bausteine kann man nicht nur Zahlen, sondern auch Variablen einsetzen:

So liefert zum Beispiel umf(x, 7) den Geradenterm 2x+14, so dass man die Veränderung des Umfangs von Rechtecken mit der Seite 7 und den Seiten x graphisch veranschaulichen kann.

Ausblick: | fli(x,y) | = | x*y|



Absolutbetrag von x*y,

eine Fläche im dreidimensionalen Raum

2. Parameter bei magischen Quadraten

2.1 Forschen, Entdecken und Beweisen

Unterrichtsvoraussetzungen:
Im Internet finden wir bei Eingabe des Suchbegriffs „magische Quadrate" mehrere interessante Formeln, mit denen man magische Quadrate erzeugen kann. Diese Formeln können auf vielfältige Weise benutzt werden, um Mathemeatik auf verschiedenen Niveaustufen zu betreiben. – Hier wird eine Formel zur Erzeugung von (3,3)-Quadraten herausgegriffen und unter folgenden Aspekten bearbeitet:

- Darstellung des magischen Quadrates mit Hilfe von Parametern
- Definition eines passenden Bausteins
- Arbeit mit dem CAS
  – Experimentelles Arbeiten
  – Aufgabenlösen
  – Algebraische und graphische Deutungen

Die benötigten Vorkenntnisse sind gering und entsprechen denen aus Klasse 7. Bei der Arbeit mit dem Baustein können dann Fragen unterschiedlichen Schwierigkeitsgrads entstehen.

Aufgabe 2.1.1:
Gib das magische Quadrat mag3(i,h,k) von Seite 14 entsprechend der Vorgabe in den Abbildungen 2.1.1 und 2.1.2 in dein CAS ein.

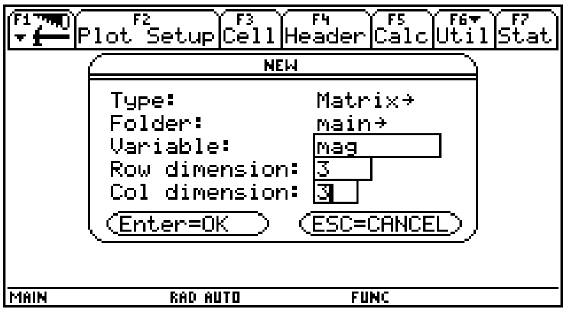


Abb. 2.1.1

1. APPS drücken
2. Data/Matrix/Editor → New (ENTER)
3. Data → Matrix (ENTER)
4. Variable mag (siehe Abb. 3.1)
5 Row 3 und Col 3 (ENTER)
6. Nach ENTER erscheint eine Tabelle. Dort werden die Elemente des Magischen Quadrates eingegeben.
7. Zum Home-Editor

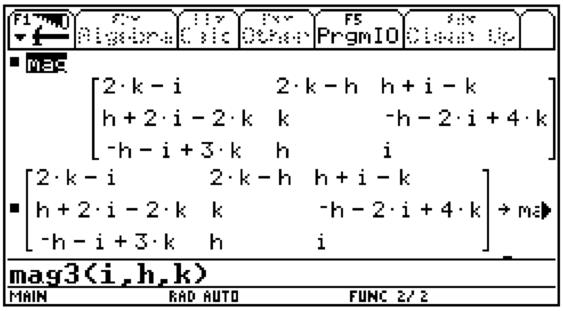
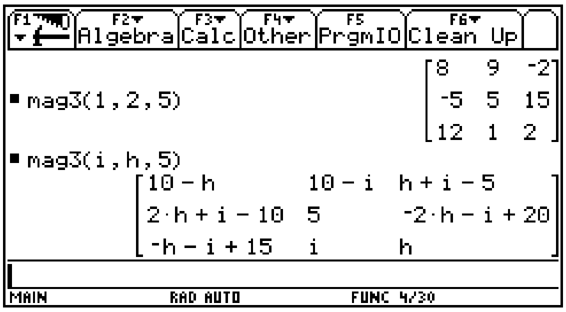


Abb. 2.1.2

Hier wurde die eingegebene Matrix namens mag im Editor aufgerufen.

Man holt sich die Matrix in die Eingabezeile und definiert den Baustein mag3(i,h ,k)

Aufgabe 2.1.1
a) Überprüfe die Funktionstüchtigkeit deines Bausteins durch die Aufrufe magi(1,2,5) und mag3(i,k,5).
b) Liegen wirklich magische Quadrate vor?



Erfolgreiche Überprüfung!
Was fällt alles so auf?

Die magische Summe ist gleich 5.

Aufgabe 2.1.3
Zeige, dass die magische Summe gleich 15 (aus 3*5) ist. – Hinweis: Die magische Summe entsteht als Summe aller Elemente jeder Zeile, jeder Spalte und der beiden Diagonalen.

Aufgabe 2.1.4
Nun geht es ans Forschen und Entdecken. Dabei wird sich der Baustein mag3(i,h,k) als ideales Hilfsmittel erweisen. Noch ein paar Tipps, falls du noch nie auf diese Weise geforscht hast. - Viel Spaß, es gibt viel zu entdecken. Auch im Internet steht so Einiges!

Tipps und Tricks zum Forschen, Entdecken und Beweisen am Beispiel des Bausteins

$$\text{mag3}(i,h,k) = \begin{array}{|lll|} \hline 2k-i & 2k-h & h+i-k \\ h+2i-2k & k & -h-2i+4k \\ -h-i+3k & h & i \\ \hline \end{array}$$

(1) Für die Parameter i, h und k kann man andere Zahlen, aber auch andere Variable einsetzen. Damit hat man den Baustein „aufgerufen” (Bausteinaufruf).

(2) Beim Einsetzen sollte man aber immer nur die Werte für einen Parameter ändern, sonst erkennt man die Auswirkungen der Änderungen nicht mehr.

(3) Die jeweiligen Ergebnisse sollte man genauestens studieren: Auffälligkeiten und Regelmäßigkeiten? Auch das Bilden von Summen ist häufig nützlich.

(4) Man kann oft auch graphische Veranschaulichungen, z.B. im Koordinatensystem erstellen. Dazu ist es nützlich, einen Parameter durch x zu ersetzen und (beim TI-92) Ergebnisse in y1(x) usw. zu speichern.

(5) Es ist auch möglich, zwei Bausteinaufrufe miteinander zu verknüpfen, z.B. mag3(1,2,5) + mag3(2,1,5).

(6) Wenn du eine Entdeckung beweisen willst, musst du versuchen, allgemein zu arbeiten. Du musst dich also in der Regel von speziellen Zahlen trennen.

Arbeitsblatt 2.1: Check the Square

Beim Umgang mit magischen Quadraten wird man häufig nachprüfen müssen, ob es sich wirklich um ein magisches Quadrat handelt. Dazu ist das Bilden von Zeilen-, Spalten- und Diagonalsummen nötig. Mit Hilfe der sogenannten Matrizenrechnung geht das auch mit einem CAS ganz leicht.

Zur Information:
Matrizen sind rechteckige Schemata aus Zahlen, Variablen oder gar aus Funktionstermen. Magische Quadrate sind also besondere Matrizen, nämlich quadratische Matrizen. Matrizen kann man – sofern sie paarweise dafür geeignet sind – miteinander addieren oder multiplizieren. Dabei gelten dann einige Rechenregeln.

Du lernst jetzt an einem für uns geeigneten Beispiel die Rechnung zur Multiplikation zweier Matrizen kennen.

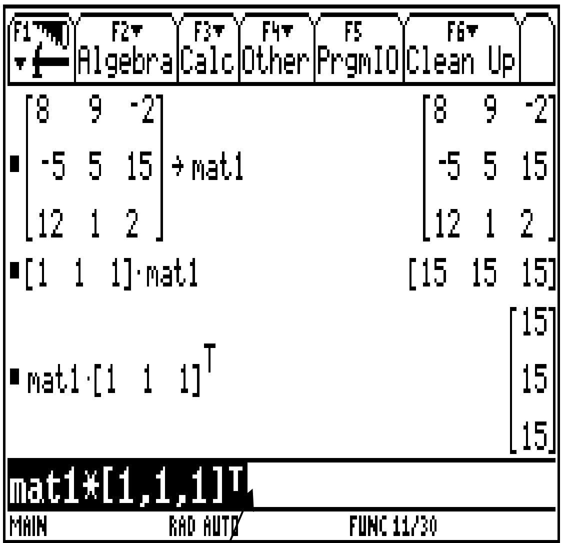
8	9	-2
-5	5	15
12	1	2

1*8

1	1	1

1*8+1*(-5)+1*12	1*9+1*5+1*1	1*(-2)+1*15+1*2
= 15	15	15

Die Matrix I = [1 1 1] wurde mit der Matrix des magischen Quadrats multipliziert. Dazu wird jeweils die eine Zeile der Matrix I genommen und jeweils mit einer Spalte der anderen Matrix verknüpft (man spricht von Skalarprodukt „Zeile * Spalte”). Die Rechnung ergibt die drei Spaltensummen. Alle Summen sind gleich 15, also gleich der magischen Summe.
Am TI-92 sehen Eingabe, Rechnung und Ergebnis so aus:



Abkürzung der schon gespeicherten Matrix mit dem Namen „mat1”

Bilden der Spaltensummen

Bilden der Zeilensummen. Jede Zeile der Matrix mat1 wird mit der Spalte $[1\ 1\ 1]^T$ „multipliziert”. $[1\ 1\ 1]^T$ ist eine andere Schreibweise für die Spalten-matrix

1
1
1

Hinweis: Mit den Diagonalensummen geht das nicht so einfach.

Hinweis: Das T findet man beim TI-92 mit der Tastenfolge „2nd catalog (blättern) T”

Arbeitsblatt 2.2:
Graphische Darstellung von magischen Quadraten, Teil 1

Wenn wir den oben definierten Baustein mag3(i, h, k) aufrufen mit mag3(x, 2, 5) so ergibt sich das folgende magische Quadrat (überprüfe das!):

mag3(x, 2, 5) =

8	10–x	x-3
x-6	5	16-x
13-x	x	2

Jeder Term in diesem magischen Quadrat kann als Term über eine Gerade aufgefasst werden, also gezeichnet werden. Das Ergebnis ist die folgende Abbildung 1.

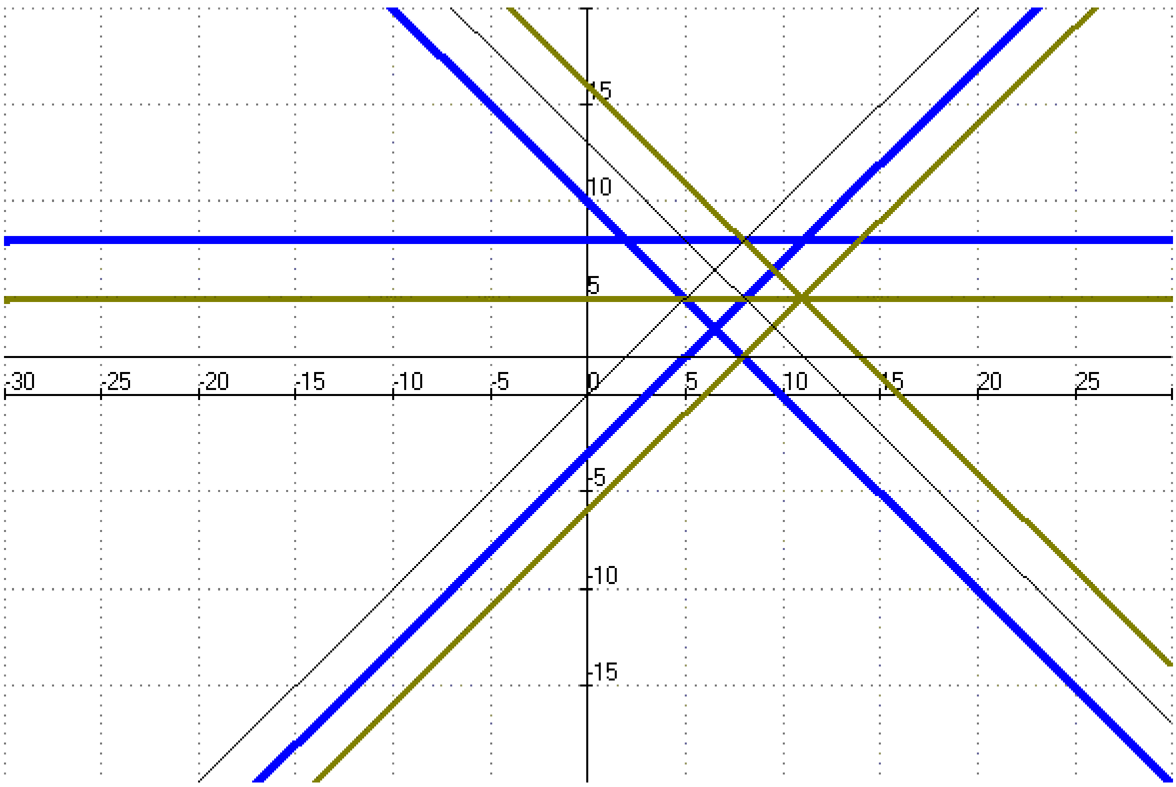
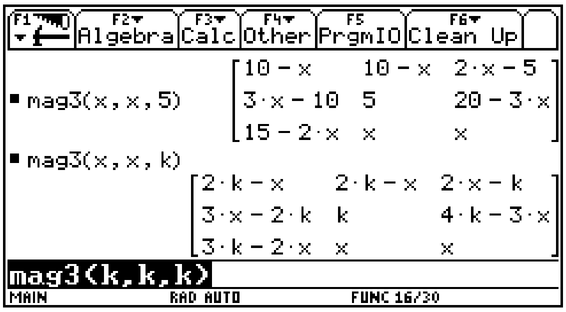


Abb. 1: Die Geraden zu einer Zeile der Matrix sind in gleicher Zeichenstärke dargestellt.

- Welche Gerade gehört zu welchem Matrixelement? Beschrifte die Geraden mit den zugehörigen Termen.
- Was fällt am Zeichenergebnis auf?
- Untersuche andere Bausteinaufrufe: Behalte das x bei, ändere nur immer einen Wert (siehe „Tipps und Tricks: Forschen und Entdecken”).

Arbeitsblatt 2.3:
Graphische Darstellung von magischen Quadraten, Teil 2



Aufgabe 1: Der Aufruf mag3(x, x, 5) erzeugt Terme in x , die man gut in einem Koordinatensystem darstellen kann, siehe Abb.1. Probiere statt der Summenzahl 5 (es gilt 3*5=15) noch andere Summenzahlen.
Welche Idee steckt hinter dem Aufruf mag3(x, x, k)?

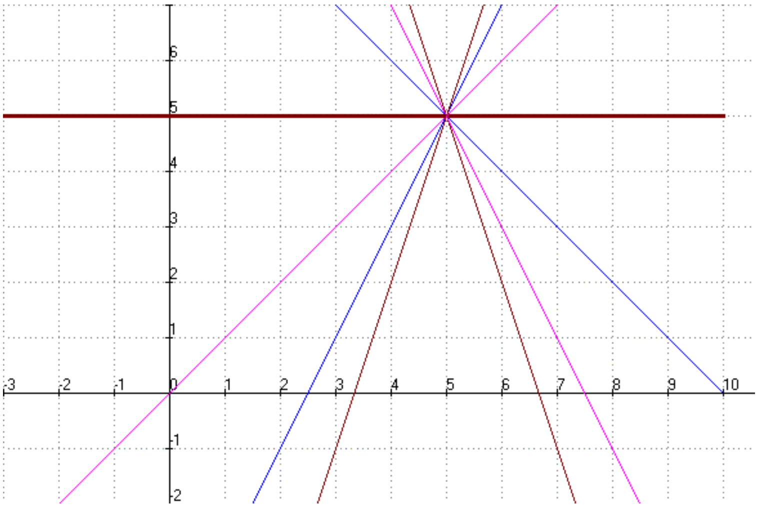


Abb.1: Graphische Darstellung des Bausteinaufrufs mag3(x, x, 5)

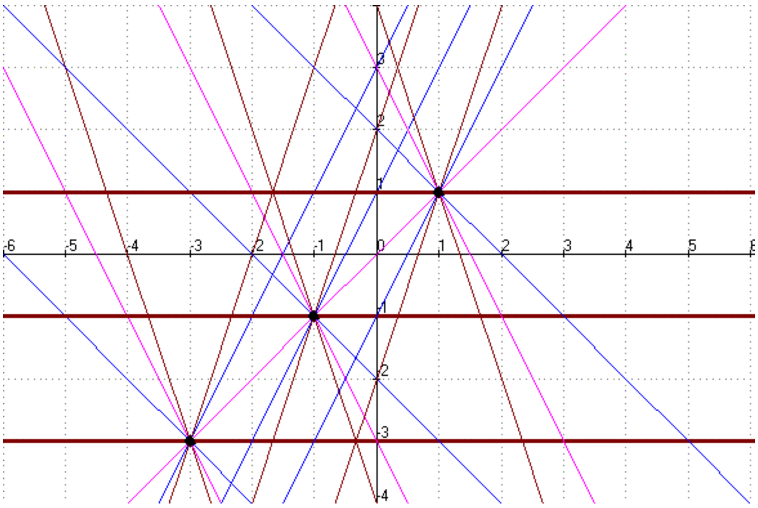


Abb.2: Graphische Darstellung der Bausteinaufrufe mag3(x, x, ?)

Aufgabe 2:
In diesem Sinn kannst du weiter experimentieren und entdecken. Notiere deine Ergebnisse in übersichtlicher Form.

2.2 Zusammenfassung - Mathematik an magischen Quadraten

- Die obigen Forschungsarbeiten mit Hilfe des Bausteins

$$M = \text{mag3}(i,h,k) = \boxed{\begin{matrix} 2k-h & 2k-i & h+i-k \\ 2h+i-2k & k & -2h-i+4k \\ -h-i+3k & i & h \end{matrix}}$$

  haben gezeigt, dass in den magischen Quadraten viel Mathematik verborgen ist.

- Man kann leicht nachweisen, dass die Summe der Elemente jeder Zeile bzw. der jeder Spalte und die Summe der Diagonalelemente von M immer gleich ist, hier ist die magische Summe s = 3k, also das Dreifache des mittleren Elements. Zur Rechnung kann die Zeilenmatrix [1 1 1] bzw. die Spaltenmatrix $[1\ 1\ 1]^T$ benutzen.

- Alle Matrizen der Form Zahl * mag3(i, h, k), z.B. 4 * mag3(i, h, k), sind wieder magische Quadrate.
  Hinweis: Bei 4 * mag3(i, h, k) wird jedes Element von mag3(i, h, k) mit 4 multipliziert.

- Man kann sogar beweisen: Wenn A und B (zueinander passende) magische Quadrate sind, dann sind auch die „Linearkombinationen" $r_1 * A + r_2 * B$ (mit r_1, $r_2 \in 3$) magische Quadrate.

- Für die Parameter i, h und k in mag3(i, h, k) kann man Einsetzungen vornehmen, die zu zahlreichen neuen Erkenntnissen führen. Verwendet man auch die Einsetzung „x", so können auch graphische Darstellungen mit bemerkenswerten Eigenschaften erzeugt werden (parallele Geraden, Geraden gehen durch einen Punkt usw.).

- Aus der Literatur oder dem Internet kann man sich andere Formeln für magische Quadrate (auch größer als 3*3) besorgen. Viele der oben genannten Eigenschaften lassen sich dann sofort übertragen.

- Die Formeln für magische Quadrate kann man sich z. B. aus linearen Gleichungssystemen besorgen, indem man für alle Zeilensummen, Spaltensummen und Diagonalsummen eine Gleichung notiert, z. B. für

$$\boxed{\begin{matrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{matrix}}$$

a+b+c = s (magische Summe) usw.

Das Gleichungssystem – in diesem Fall 8 Gleichungen mit 9 Variablen – kann dann mit Hilfe eines CAS gelöst werden.

3. Bausteine erzeugen Geradenlandschaften

3.1 Bilder mit vielen Geraden

In dieser Unterrichtseinheit geht es darum, viele Geraden in ein Koordinatensystem zu zeichnen – so, dass eindrucksvolle „Geradenlandschaften” entstehen. Ein Beispiel sieht man in Abb. 3.1.1.

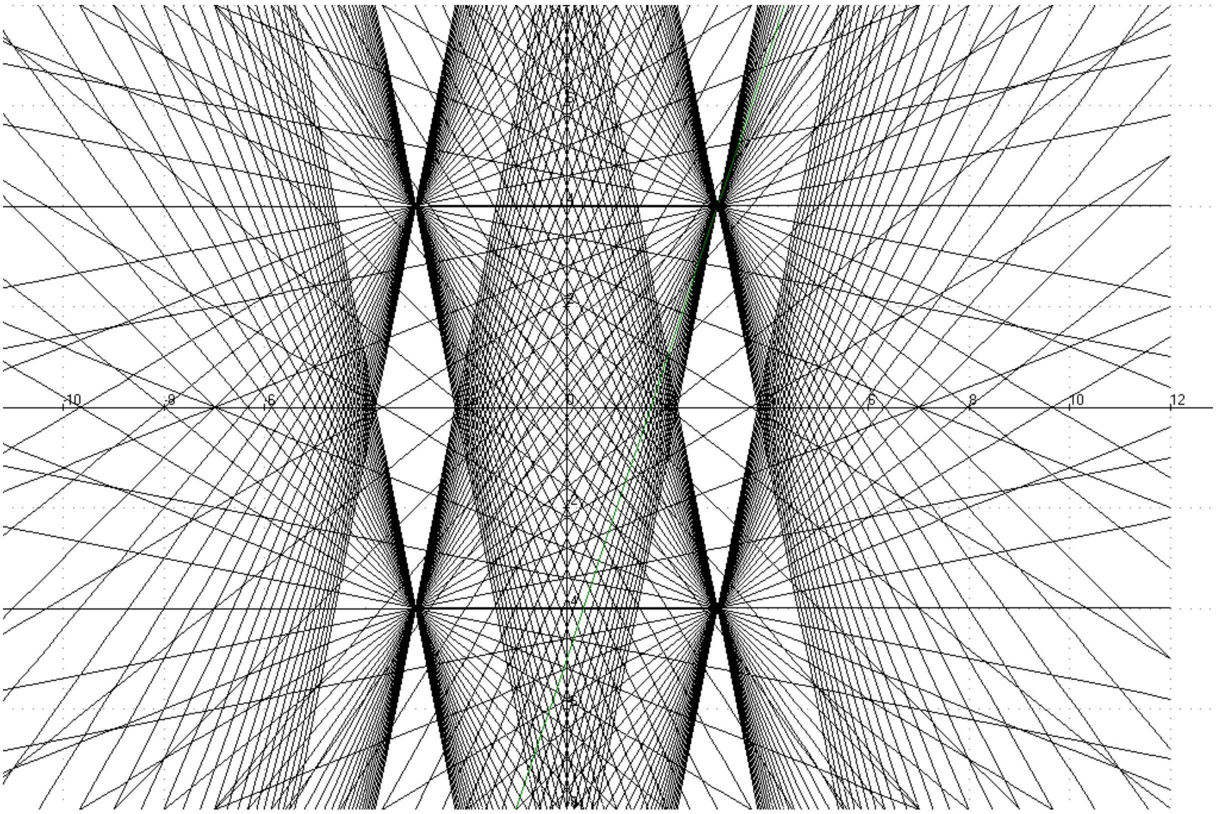


Abb. 3.1.1: Beispiel einer eindrucksvollen „Geradenlandschaft”

Unterrichtsvoraussetzungen

Man sollte zumindest die Form *y = mx + n (Beispiel y = 2x – 1)* einer Geradengleichung kennen, wobei bekanntlich m die Steigung der Geraden und n den Abschnitt auf der y-Achse angeben. Mit dieser Form seien einige Aufgaben bearbeitet worden, dabei sind sicher solche Geraden auch ins Koordinatensystem eingezeichnet worden. Zur Erinnerung an die Begriffe *Gerade, Steigung, Steigungsdreieck, Abschnitt auf der y-Achse usw.*, kann Abbildung 1 auf dem Arbeitsbogen 3.1 dienen.
Als Software für diese Unterrichtseinheit sind u.a. geeignet:
CAS DERIVE, CAS des TI-92, Animationsplotter / Funktionenplotter HL-ANIMATO. Mit dem TI-92 wird man nur einige wenige Geraden zeichnen lassen. Mit dem Animationsplotter kann man die Zeichenvorgänge dynamisch steuern.

Arbeitsblatt 3.1: Zeichne viele Geraden

Aufgabe 1:
Erläutere die folgende Abbildung und beschrifte sie in geeigneter Weise.

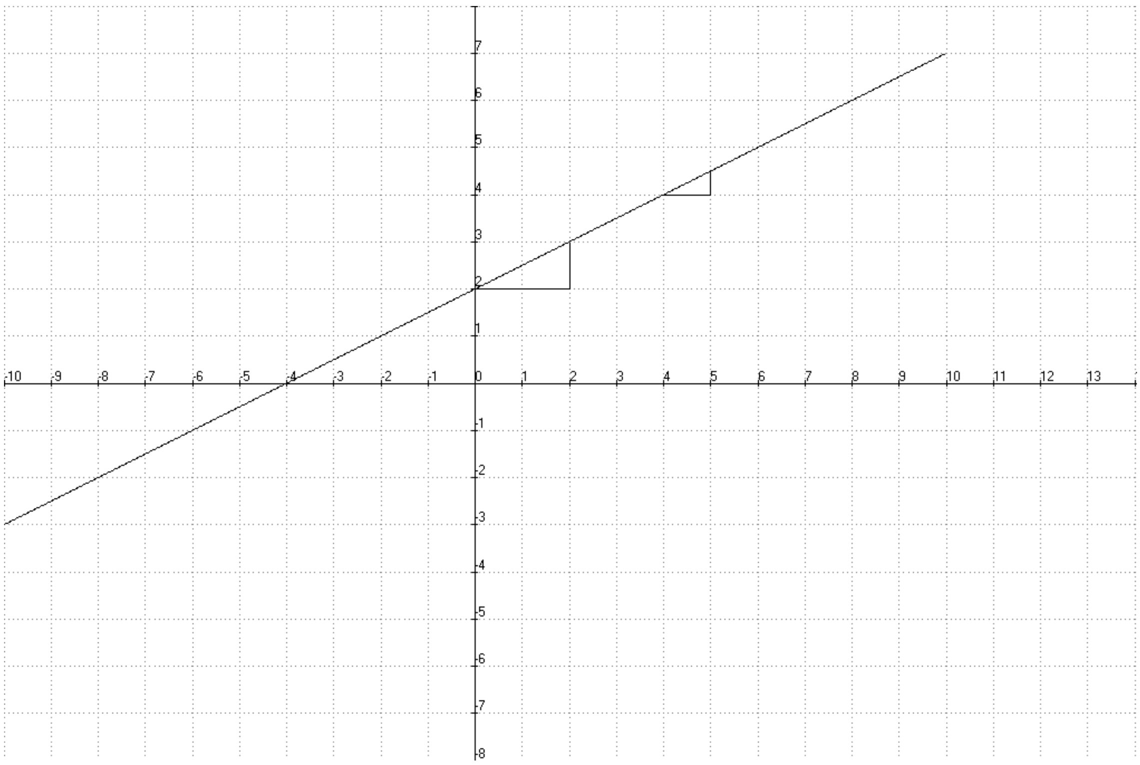


Abb.1: Wiederholung von Begriffen zur Geradengleichung y = mx + n.

Aufgabe 2:
Zeichne möglichst viele Geraden durch den Punkt P1(3,4). Benutze dein CAS (Computeralgebrasystem) oder andere passende Software.

Lösungsansätze zu Aufgabe 2:

(1) Wenn wir nur erst <u>eine</u> Gerade durch den Punkt (3;4) hätten! Sagen wir mal, die Gerade mit der Steigung m = 1.	y = mx + n 4 = 2*3 + n n = –2 y = 2x – 2 tatsächlich: 4 = 2*3 – 2 (wahre Aussage, Punkt auf Gerade)
(2) Noch eine Gerade durch P1(3;4)!	...
(3) Und nun noch viele weitere Geraden durch P1(3;4)!	...

Aufgabe 3: Kommentiere die obige Lösung!

Das Zeichnen vieler Objekte kann man sich sehr erleichtern, wenn man einen geeigneten Baustein benutzt.

Ein Baustein für Geraden

Für Abbildung 3.1.1 kann es der Baustein **gerade(x, m, n) : = m*x + n** sein.

Warum?

Erläuterung	Mathematische Herleitung
Wir wissen, dass y = mx + n.	$y = mx + n$
Da alle Geraden durch den Punkt P1(3;4) verlaufen sollen, müssen die Koordinaten x = 3 und y = 4 alle Geradengleichungen erfüllen. Die Werte können in die Gleichung eingesetzt werden.	$4 = 3m + n$
In dieser Gleichung kommen nun nur noch Steigung m und Achsenabschnitt n vor. Für das Paar (m,n) gibt es viele Möglichkeiten, etwa (1, 1), (5, –11).	Zum Beispiel m = 1, dann n =1, m = 5, dann n = –11.
Wenn wir nun z.B. m variabel lassen, errechnet sich n mit der nebenstehenden Formel. Damit kann man nun zahlreiche Geradengleichungen ganz schnell angeben – und alle gehen durch den Punkt P1(3;4).	$n = 4 - 3m$ m n Geradengleichung 1 1 $y = x + 1$ -1 7 $y = -x + 7$ 0.5 2.5 $y = 0.5x + 2.5$
Alle Geradengleichungen haben die nebenstehende Form:	$y = mx + (4 - 3m)$
Benutzen wir den bekannten Geradenbaustein **gerade(x, m, n) : = m*x + n**, so lassen wir m bestehen und können für n den Term 4 – 3m einsetzen.	**gerade(x, m, 4-3m)** **zeichnet viele Geraden durch den Punkte P1(3;4), je nach Wahl von m.**

Aufgabe 3.1.1:
Die folgende Seite gibt noch einige Anregungen zu Geradenlandschaften. Du kannst sie nachbauen oder besser deine eigenen erfinden.

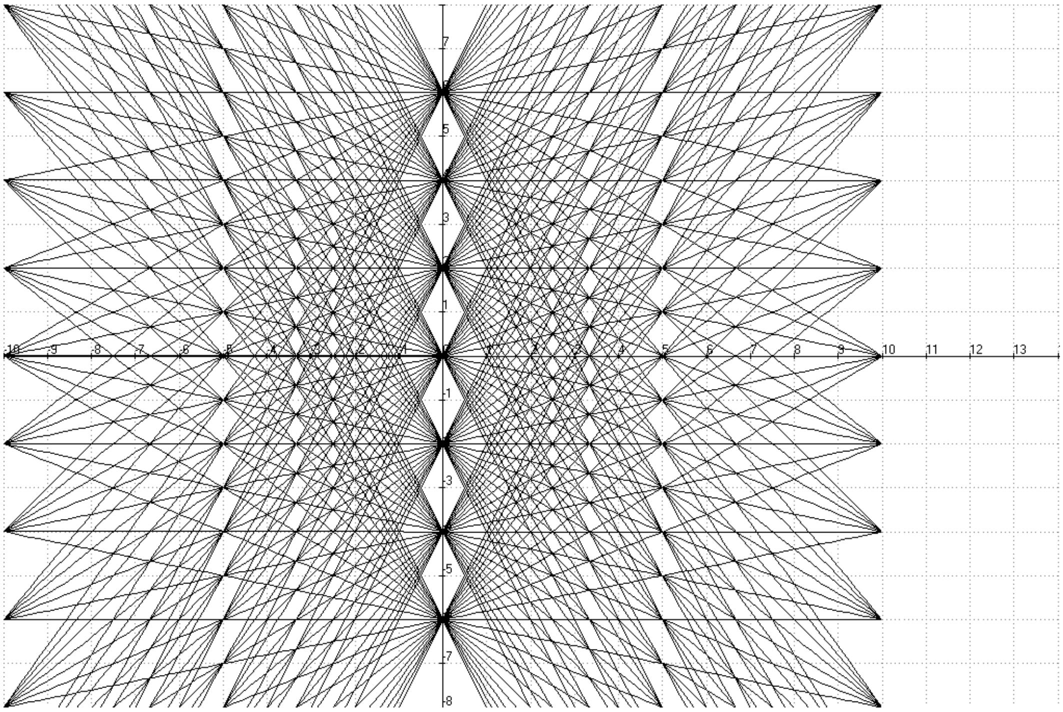


Abb. 3.1.2: Geradenlandschaft 2

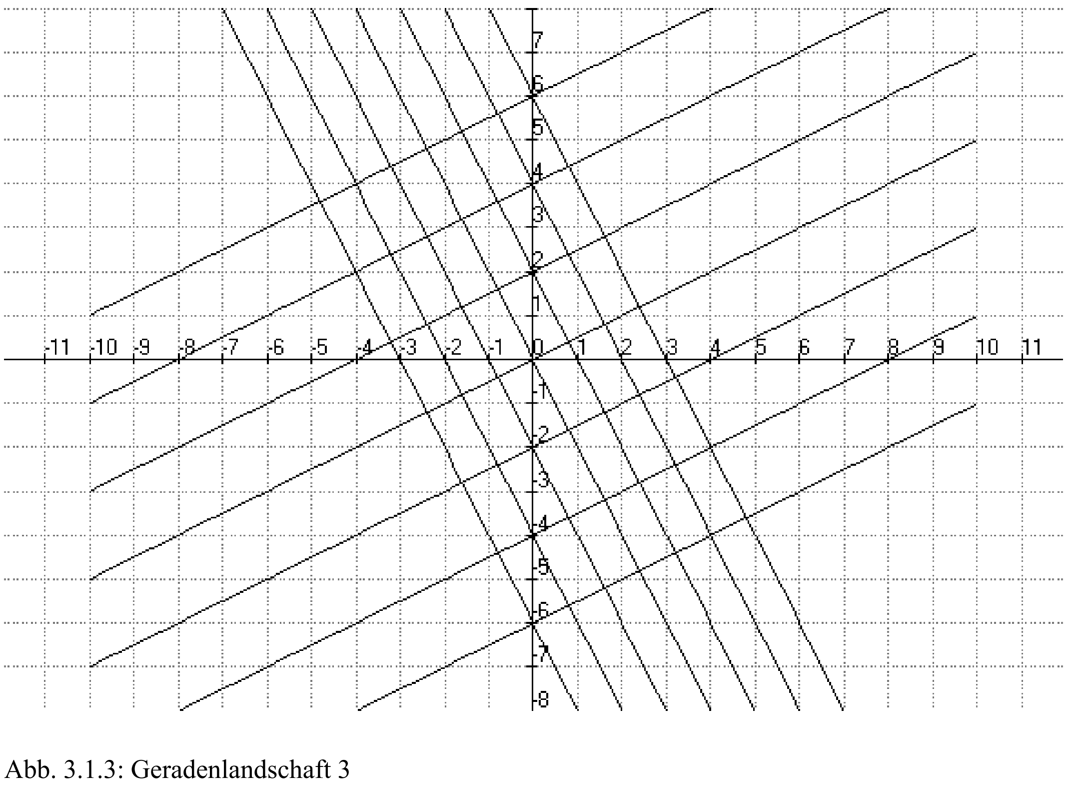
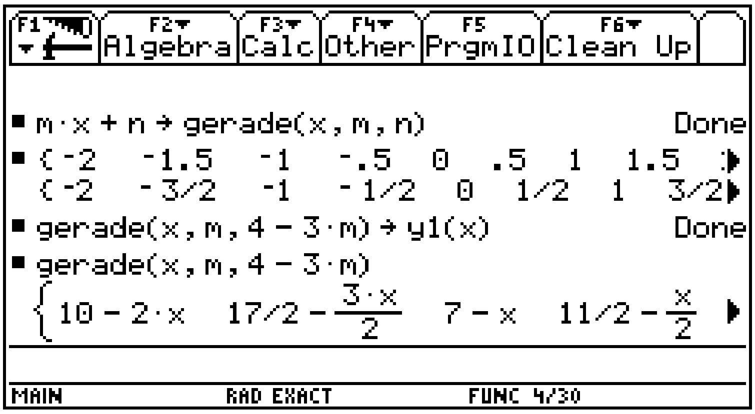
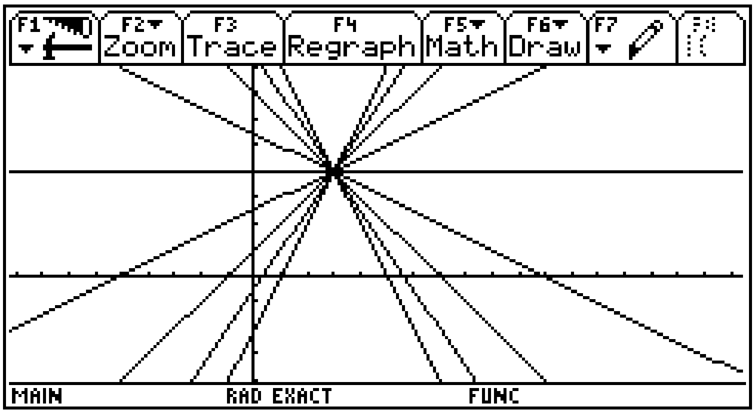


Abb. 3.1.3: Geradenlandschaft 3

Arbeitsblatt 3.2: Benutzung des Bausteins **gerade(x, m, n) : = m*x + n**

Aufgabe 1: Erläutere die beiden folgenden Bildschimkopien:

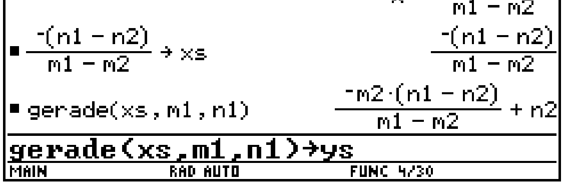




Für Erläuterunen
Hier wird m als Menge definiert. y1(x) wird für die Zeichnung benötigt.

Aufgabe 2:
Erzeuge viele parallele Geraden mit den Steigung m1 = –1/3 und m2 = 3.
Was fällt auf?

Aufgabe 3:
In ein CAS werden die folgenden Bausteinaufrufe eingegeben. Notiere die zugehörigen Terme in mathematischer Schreibweise und erläutere die Ergebnisse der Aufrufe.
a) gerade(x, 5, 5) → y1(x), für das CAS des TI-92.
b) gerade(x, 5, 5), gerade(2, 5, 5), gerade(2, 5, 5) = 15, gerade(2, 5, 5) = 12.
c) solve(gerade(x, 2, 3) = gerade(x, -1, 2.9), x).
d) solve(gerade(x, m1, n1) = gerade(x, m2, n2), x), siehe folgende Abbildung.



Arbeitsblatt 3.3: Punkt-Steigungsform

Der Geradenbaustein gerade2(x,m,a1,b1) : = m*(x - a1) + b1

Aufgabe 1:
Arbeite den folgenden Text durch. Berate dich mit deinem Nachbarn.

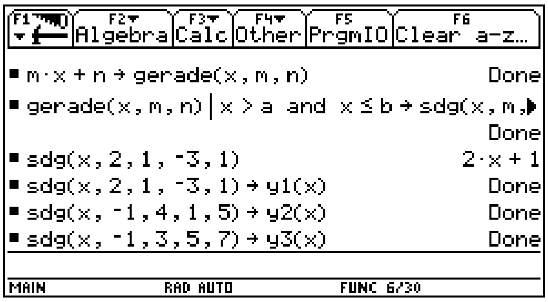
Neben der Geradengleichungsform y = mx + n gibt es auch noch andere Formen, wie z.B. die *Punkt-Steigungsform* (y – y1) = m*(x – x1), bzw. y = m*(x – x1) + y1. Diese Geradengleichungsform ist besonders geeignet für die Aufgabe, viele Geraden durch einen Punkt zu zeichnen. Als Punkt kann man sofort (x1; y1) benutzen und m kann verschiedene Steigungswerte durchlaufen.
Man muss nun nur noch y = m*(x – x1) + y1 als Baustein definieren. Für den TI-92 ist die Variable y1 für Zeichnungen vergeben, wie bezeichnen daher den Punkt mit (a1, b1) und definieren:

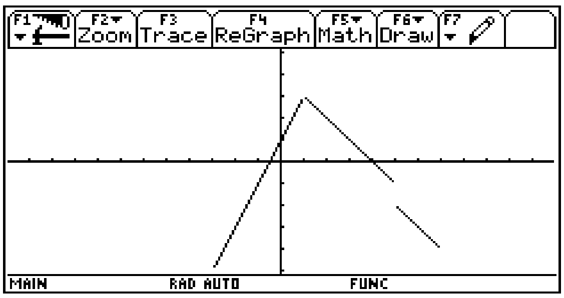
gerade2(x,m,a1,b1) : = m*(x - a1) + b1 Baustein für die Punkt-Steigungsform einer Geraden

Nun können wir die Geraden durch P1(3; 4) durch den Aufruf gerade2(x, m, 3, 4) erzeugen.

Aufgabe 2:
Was leisten die Aufrufe gerade2(x, m, –3, 4), gerade2(x, m, 3, –4), gerade2(x, m, –3, –4)?

Aufgabe 3:





Erläutere die beiden Bildschirmabdrucke! Rechts sieht man eine stückweise definierte Funktion. Hinweis: „sdg” stückweise definierte Gerade.
Erzeuge das Bild noch einmal, nun aber mit Hilfe der Punkt-Steigungsform, also mit Hilfe des Bausteins gerade2(...).

3.2 Baustein-Analyse - ein Geraden-Projekt

In Kapitel 3.1 ist der Geradenbaustein in vielfältiger Weise benutzt worden. Die Abbildung 3.2.1 bietet nun eine sehr inhaltsreiche Zusammenschau. **Die Untersuchung dieser Überblicksdarstellung kann man als Baustein-Analyse bezeichnen.**

Projektaufgabe:
Zerlegt die Abbildung in Teilbereiche! Bildet Arbeitsgruppen, die dann jeweils einen Teilbereich näher untersuchen. Erzeugt dazu passende Bilder und erläutert den Zusammenhang mit dem jeweiligen Bausteinaufruf.

Die folgende Abbildung zeigt einige Anwendungsmöglichkeiten des Bausteins gerade(x,m,n).

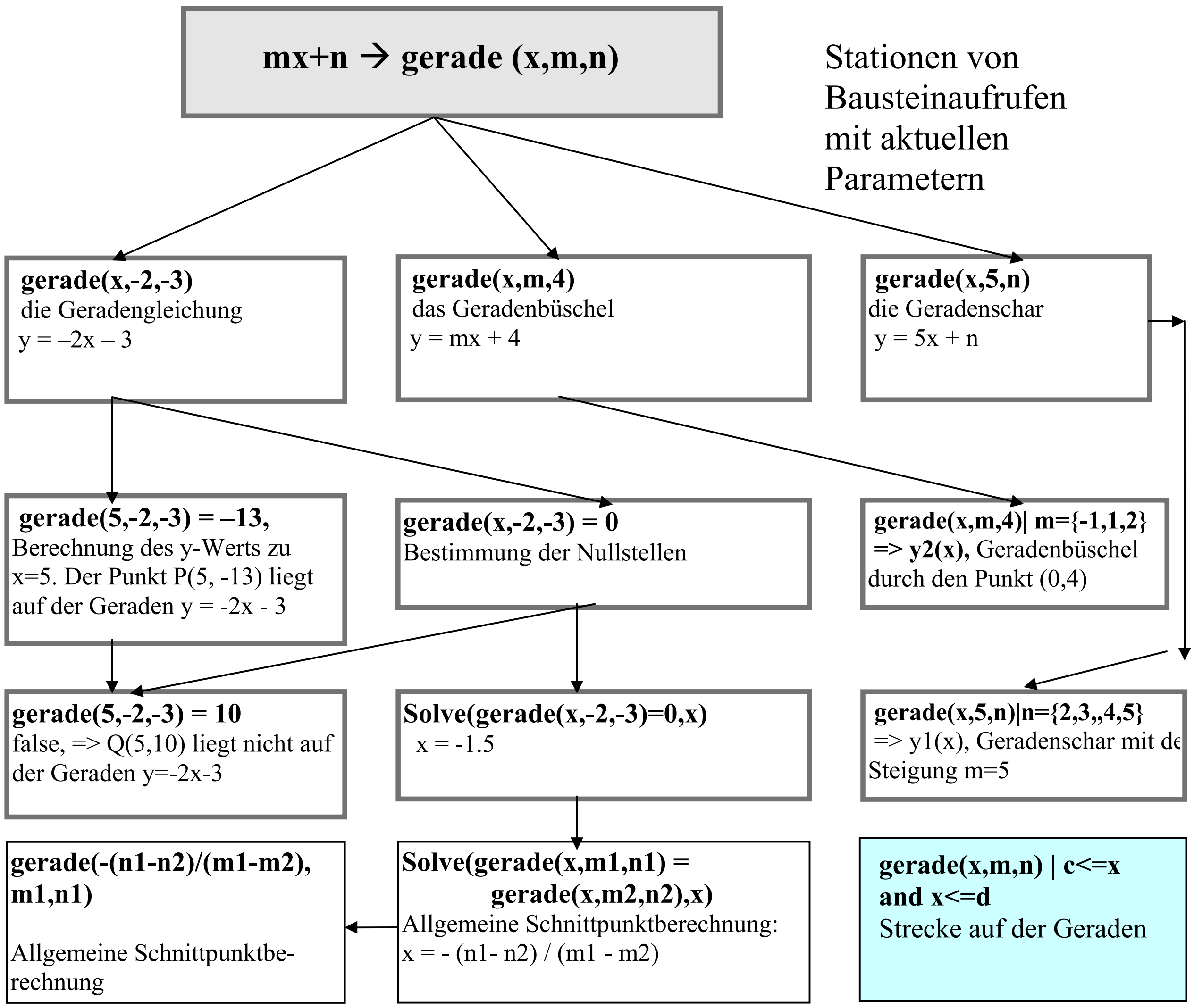


Abb. 3.2.1: Untersuchung von Aufrufen des Bausteins gerade(x,m,n)

Hinweis:
Etliche Antworten auf die sich stellenden Fragen finden sich auf den vorhergehenden Seiten.

3.3 Zusammenfassung – Parameter bei Geraden

Was haben uns die vorhergehenden Betrachtungen für die Erweiterung unserer mathematischen Kenntnisse gebracht?
Vorher haben wir ja bereits mit einzelnen Geraden-Exemplaren mittels verschiedener Fragestellungen gearbeitet. Dabei haben die Parameter m und n aus der allgemeinen Geradengleichungen y = m*x + n bestimmte Werte angenommen, z. B. m = 2 und n = 3.

Geradenwälder

Wir haben nun die Betrachtung von einzelnen Geradenexemplaren verlassen zugunsten umfangreicherer Geradenmengen, von „Geradenwäldern".

Diese Sichtweise führte uns zu spannenden Bildern und Geradenmustern, die uns die Bedeutung der Parameter m (Steigung) und n (y-Achsenabschnitt) deutlich vorführte – durch dynamische Entstehung der Zeichnungen.

So können wir jetzt die Menge aller Geraden durch einen bestimmten Punkt durch einen Bausteinaufruf erfassen:

Baustein m*x + n → gerade(x,m,n)

Beispiel: Alle Geraden durch P1(3; 4)	Allgemein: Alle Geraden durch den Punkt P(a; b)
y = mx + n 4 = 3m + n n = 4 – 3m y = mx + (4 – 3m) Bausteinaufruf: **gerade(x, m, 4–3m)** zeichnet viele Geraden durch den Punkt P1(3;4), je nach Wahl von m. Man spricht von einem **Geradenbüschel**.	y = mx + n b = am + n n = b – am y = mx + (b – am) Bausteinaufruf: **gerade(x, m, b–am)** zeichnet viele Geraden durch den Punkt P(a;b), je nach Wahl von m. Man spricht von einem **Geradenbüschel**.

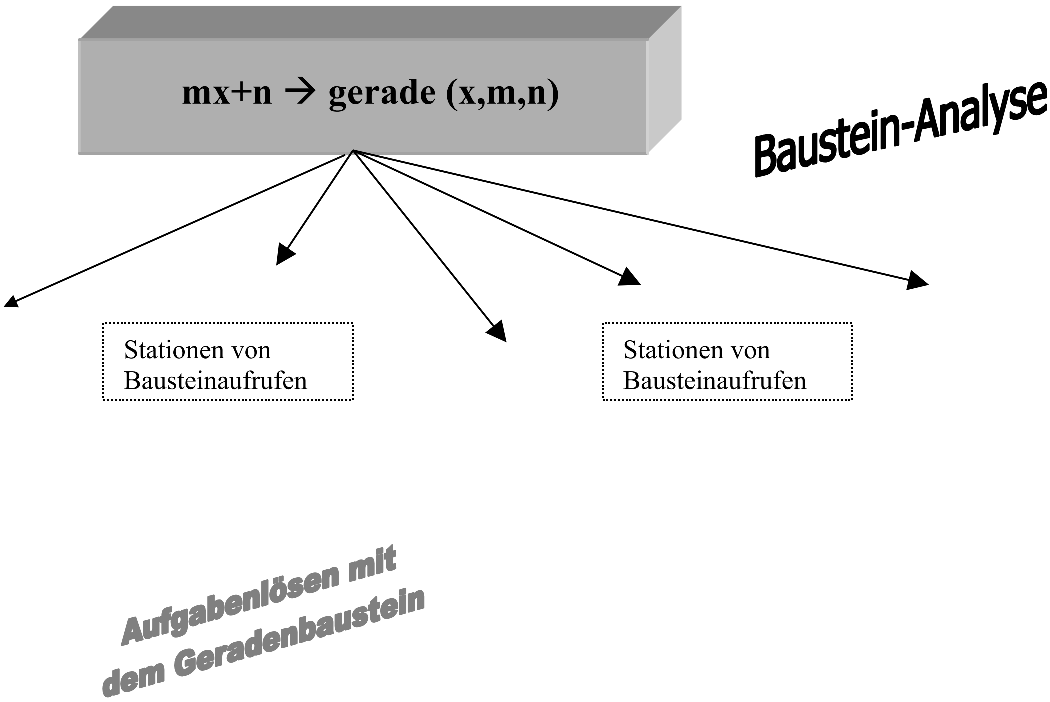
andere Geraden-Bausteine

Punkt-Steigungsform (Punkt (a1, b1), Steigung m)
gerade2(x,m,a1,b1) : = m*(x - a1) + b1

Achsenabschnittsform (x-Achsen.-Abschnitt a, y-Achsen-Aschnitt b)
gerade3(x, a, b) : = b*(1 – x/a)

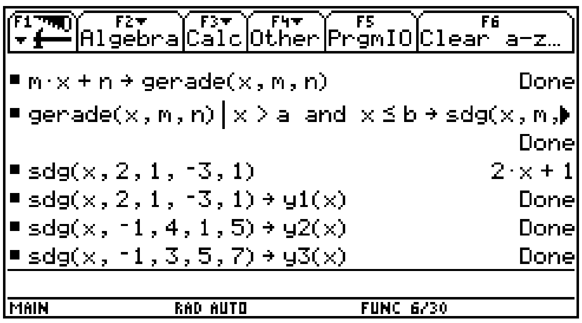
Wir haben an dem Arbeitsblatt 3.3 erkannt, dass sich mit anderen Geradengleichungsformen und zugehörigen Bausteinen entsprechend arbeiten lässt. Diese Bausteine beinhalten gegenüber dem Baustein gerade(x,m,n) gleiche aber auch noch andere Möglichkeiten

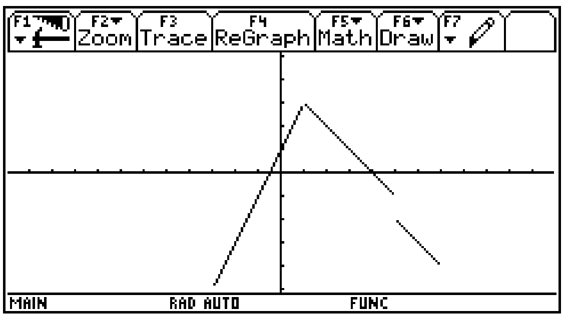
Wir haben weiterhin gesehen, dass es sich lohnt, einen Baustein zu analysieren, denn das verschafft uns einen umfassenden **Überblick über ein mathematisches Teilgebiet.**



Es gehörte zu den wichtigen Erkenntnissen, dass der eingeführte Baustein für die Lösung verschiedenartiger Aufgabenstellungen geeignet war. Beim Aufgabenlösen empfiehlt es sich also häufig, nach einem geeigneten Baustein Ausschau zu halten.

→ Ausblick: Ein Strecken-Baustein





Nach der Definition des Bausteins werden hier mit Hilfe der zusätzlichen Bedingungen Strecken bzw. stückweise definierte lineare Funktionen erzeugt.

Ein Streckenbaustein: **gerade(x,m,n) / x>a and x<=b → sdg(x, m, n, a, b)**

Aufgabe: Erprobe den Streckenbaustein für verschiedene Parameterwerte. Versuche dabei, systematisch vorzugehen. Wann zeigen sich Schwächen des Bausteins?

4. Parameter helfen bei der Konstruktion linearer Gleichungssysteme

4.1 Von der Handarbeit zur CAS-Benutzung

Unterrichtsvoraussetzungen

Die folgende kleine Unterrichtseinheit dient der Festigung der Arbeit mit linearen Gleichungssystemen, getreu dem Motto „Weniger rechnen – mehr verstehen". Bei der Konstruktion von linearen Gleichungssystemen mit vorgegebener (gedachter) Lösungsmenge tritt der Aspekt des Verstehens in den Vordergrund. Der Schüler hat bereits Gleichungssysteme von Hand und auch mit dem Rechner gelöst. Er weiss, dass die Lösungsmenge aus Paaren besteht (oder auch leer ist) und kann Lösungen durch Probe bestätigen. Nützlich ist auch die Kenntnis der Zusammenhänge zwischen LGS und linearen Funktionen mit ihren Graphen.

Das Problem

In deinem Schulbuch findet ihr jede Menge linearer Gleichungsysteme, meistens sogar mit der erfreulichen Eigenschaft, dass die Lösungen so schöne glatte Werte sind.

Schöne LGS bauen –
wie geht das?

Aufgabe 4.1.1

Ein LGS soll die Lösungsmenge L = {(4, 5)} haben. Könnt ihr das LGS finden?

Lösung

Du scharfes Nachdenken werdet ihr das wohl schnell heraus haben.

Ein LGS von Paul	Ein LGS von Anke
Möglicherweise wird Paul die Gleichungen (1) $4x + 2y = 26$ (2) $8x - 7y = -3$ aufstellen.	Anke macht es ganz raffiniert: (1) $1x + 0y = 4$ (2) $0x + 1y = 5$ Was hat sie sich wohl gedacht?

Die obige Frage ist also nicht ganz richtig gestellt. Es gibt nicht das LGS, sondern sogar mehrere (unendlich viel), die das Paar (4, 5) als Lösungspaar haben, z.B. auch

(1) $4r + 2t = 26$

(2) $8r - 7t = -3$.

Aber

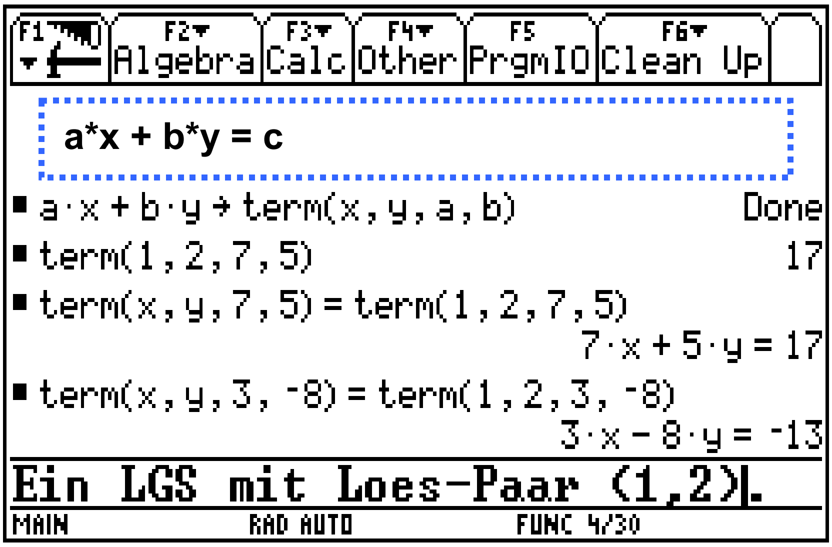
das ist doch alles etwas mühsam, um viele LGS zu bauen – für jeden Schüler eins! Wozu haben wir unser Computeralgebrasystem? Computer sind doch immer dann besonders geeignet, wenn es um viele Daten (hier Gleichungen) geht!

Arbeitsblatt 4.1: LGS mit CAS

Weniger rechnen
mehr verstehen!

Das Problem

Wie baut der Lehrer lineare Gleichungssystem mit so schön „glatten” Lösungen?



Die Mathematik	und deine Erläuterungen
a*x + b*y = c	
a*x + b*y → term(x,y,a,b)	Ein Baustein für den Term der linken Seite wird mit seinen 4 Parametern x, y, a, b definiert.
Das LGS soll jetzt mal das Lösungspaar x=1 und y=2 haben – und für a und b denken wir uns Werte. term(1,2,7,5) = 17	Das ist der Wert für die rechte Seite des LGS! Warum?
term(x,y,7,5) = term(1,2,7,5) 7x + 5y = 17	7x + 5y = 17 eine Gleichung ist gewonnen!
term(x,y,3,–8) = term(1,2,3,–8)	3x – 8y = –13 eine zweite Gleichung!

Aufgabe 1: Erstellt je 5 LGS mit den Lösungspaaren (3, 4), (-2,2), (8,12), (7,3).

Arbeitsblatt 4.2: LGS mit CAS und Zufall

Information (vielleicht kennst du das schon)
Mit dem Computer (auch mit einem normalen Taschenrechner) kann man würfeln! Beim TI-92-Plus geht das so:

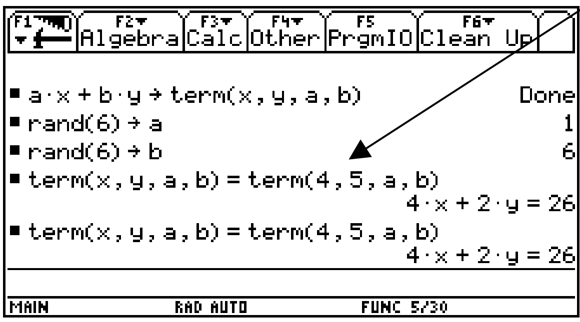
RAND( )

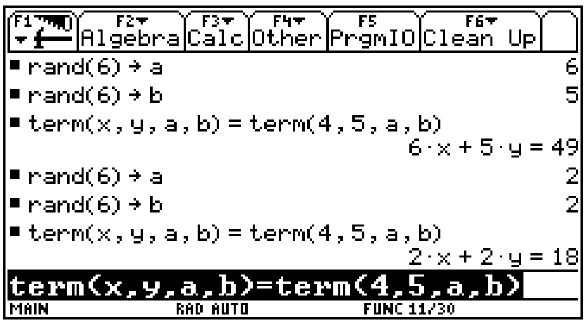
Aufgabe 1
Bearbeite die Tabelle

Eingaben: Betätige nach der Eingabe des Befehls jeweils mehrmals die Enter-Taste!	Ergebnisse und dein Kommentar dazu
rand()	
rand(10)	
rand(6)	
rand(49)	

Aufgabe 2
Erläutere das folgende Bild!

Das Lösungspaar soll (4, 5) sein.





Erläuterung:
a*x+b*y ist die linke Seite einer linearen Gleichung. Sie wird unter dem Namen term(x,y,a,b) gespeichert. Wir sprechen vom „Baustein" term(x,y,a,b). Nun kann man den Baustein aufrufen, z.B.
term(1,2,3,4), hierbei ergibt sich 11 (rechne nach),
term(1,2,a,b), hierbei ergibt sich a*1+b*2.

Bitte weiterschreiben: →

Aufgabe 3: Erstellt je 5 LGS mit den Lösungspaaren (3, 4), (-2,2), (8,12), (7,3).

4.2 Eine graphische Bearbeitung

Aufgabe 4.2.1

> Die Frage nach vielen linearen Gleichungssystemen mit der Lösungsmenge L={(4, 2)} lautet in „graphischer Formulierung" so:
>
> Ermittle viele Geraden, die alle durch den Punkt P(4, 2) gehen.

Begründe diese Feststellung!

Aufgabe 4.2.2
Besprich die folgende Tabelle mit deinem Nachbarn!

$y - y_1 = m*(x - x_1)$ $y = y_1 + m*(x - x_1)$	Wir arbeiten mit der Punkt-Steigungsform einer Geraden (falls dir diese nicht bekannt ist: Eine Seite weiter findest du eine Herleitung der Punkt-Steigungsform!
$y = 2 + m*(x - 4)$	Der Punkt P(4, 2) soll auf den Geraden liegen.
$2 + m*(x - 4)$ / m = {-3, -2, -1, 0, 1, 2, 3} → geraden(x, m) geraden(x,m) → y1(x)	Wir benutzen das CAS des TI-92-Plus und definieren den Baustein geraden(x, m), wobei m die angegebene Menge durchläuft. Zum Zeichnen im Graphik-Editor.

Aufgabe 4.2.3
Erzeuge die Bilder 1 und 2.

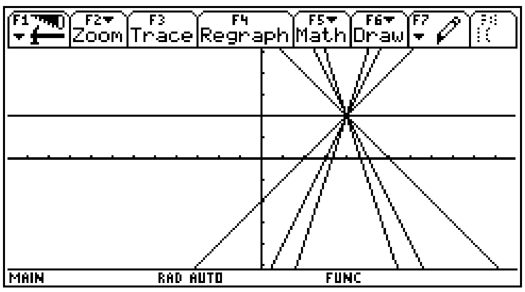


Bild 1

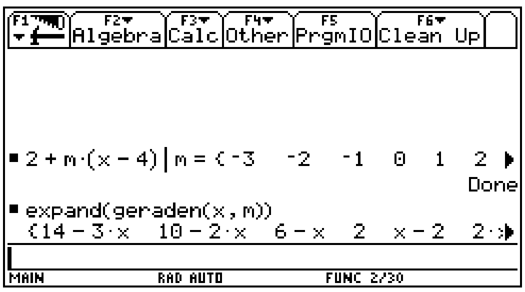


Bild 2

Aufgabe 4.2.4
Mit den Ergebnissen von Bild 2 kann man die Geradengleichungen notieren. – Nenne anschließend verschiedene Gleichungssysteme mit dem Lösungselement (5, 2).

4.3 Zusammenfassung – Parameter bei linearen Gleichungssystemen

Wir haben verschiedene Methoden kennengelernt, mit denen man lineare Gleichungssysteme mit 2 Variablen, also Gleichungen der Form ax + by = c, mit vorgegebener Lösungsmenge konstruieren kann.

- Von Hand: Für a und b beliebige Zahlen (Zahl1, Zahl2) wählen, für x und y die Lösungselemente einsetzen. Das Ergebnis ist die rechte Seite (rS) der linearen Gleichung. Dann kann eine Gleichung notiert werden, sie hat das Aussehen:
  Zahl1 * x + Zahl2 *y = rS. In dieser Weise lassen sich leicht viele Gleichungen aufstellen und zu linearen Gleichungssystemen zusammenfassen.

- Eine CAS-Lösung ergibt sich so (Arbeitsblatt 4.1):
  a*x + b*y → term(x, y, a, b) Bausteindefinition
  term(x, y, awert, bwert) = term(lx, ly, awert, bwert) Bausteinaufrufe
  ° x, y sind die Variablen,
  ° lx, ly sind die gewünschten Lösungswerte
  ° awert, bwert sind selbstgewählte Werte für die Koeffizienten a und b

- Eine weitere CAS-Lösung (Arbeitsblatt 4.2):
  a*x + b*y → term(x, y, a, b) Bausteindefinition
  rand(9) → awert Zufallswert für a
  rand(9) → bwert Zufallswert für b
  Dabei liefert rand(9) ganzzahlige Zufallswerte aus der Menge {1, 2, 3, ..., 8, 9}, die hier als Koeffizienten gewählt werden.
  term(x, y, awert, bwert) = term(lx, ly, awert, bwert) Bausteinaufrufe
  ° x, y sind die Variablen,
  ° lx, ly sind die gewünschten Lösungswerte
  ° awert, bwert sind per Zufall bestimmten Koeffizienten a und b

- Es gibt eine bemerkenswerte Verbindung zur Aufgabe, viele Geraden durch einen Punkt zu zeichnen.

Eine Ergänzung:
Falls du für Geraden nur die Gleichungsform y = mx + n kennst, wird dir folgende Herleitung für die Punktsteigungsform $y-y_1 = m(x-x_1)$ angeboten:

y = mx + n, der Punkt P1(x1, y1) liegt auf der Geraden, also
$y_1 = mx_1 + n$
$n = y_1 - mx_1$
$y = mx + y_1 - mx_1$, also $y-y_1 = m(x-x_1)$. Das ist die Punkt-Steigungsform.

Erweiterungen – was kann so alles an Fragen auftreten?
- Man kann sofort auch Gleichungssysteme mit 2 Variablen und mit vorgegebener Lösungsmenge notieren, bei denen die Anzahl der Gleichungen größer (kleiner) als 2 ist.
- Es können sich Sonderfälle bei den oben angegebenen Bauplänen ergeben!
- Wie lauten Problemlösungen für 3 Gleichungen mit 3 Variablen?
- Bei Verwendung der Matrizenschreibweise kann man auch noch andere Lösungen finden.

5. Grasbüschel – Streckenbausteine

Unterrichtsvoraussetzungen

In Kapitel 2 haben wir uns mit Geradenbausteinen beschäftigt. Strecken können als Teilmengen von Geraden aufgefasst werden. Sie treten bei vielen Situationen auf: Als Dreiecksseiten, als Lote, als Sehnen in Kreisen usw.

Aufgabe 5.1:
Beschreibe die in Abbildung 4.1 erkennbaren Strecken mittels ihrer beiden Eckpunkte! Wodurch entstehen für einige der Strecken Probleme beim Angeben der Eckpunkte?

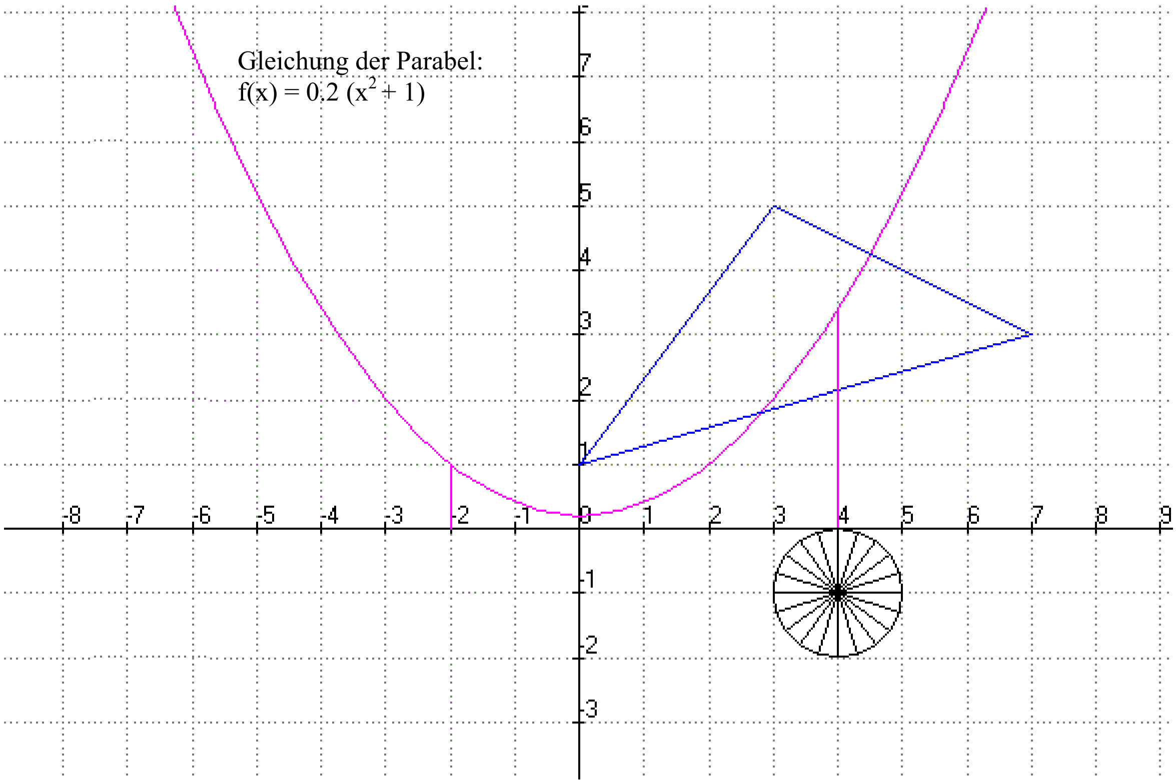


Abb. 5.1: Allerlei Strecken

Aufgabe 5.2
Wie heißen die Gleichungen der Dreiecksgeraden?

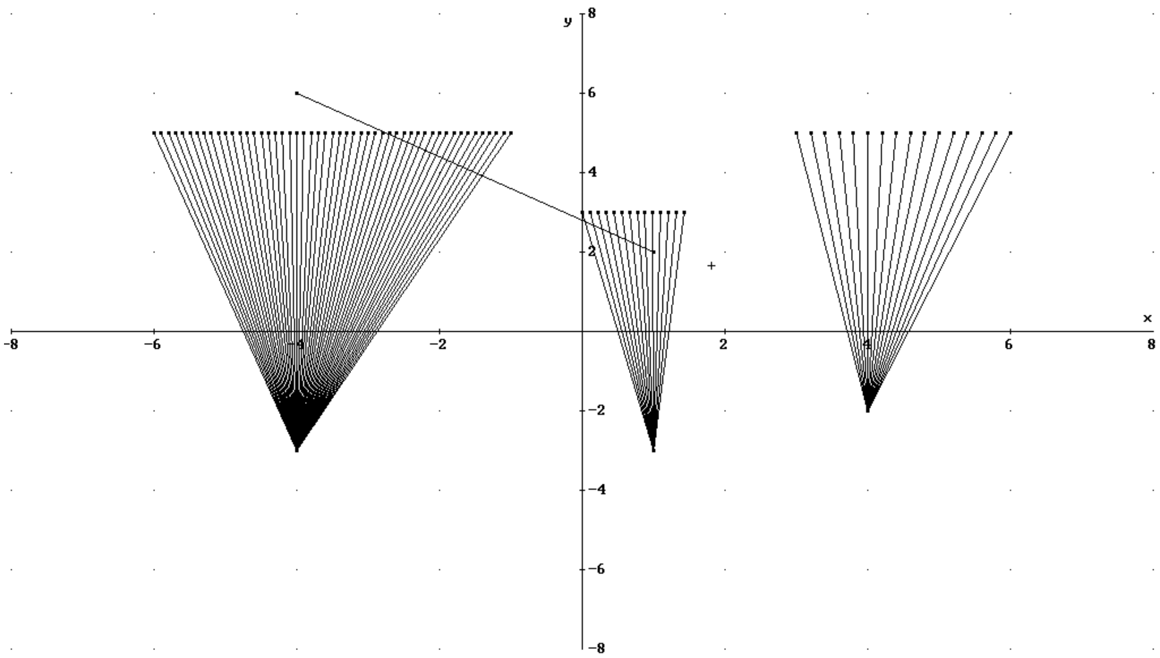
Aufgabe 5.3
Versuche, die Sehnen des Kreises in einer Handzeichnung (etwas vergrößert) zu erzeugen.

Das folgende Arbeitsblatt zeigt, wie man auf einfache Weise viele Strecken mit einem CAS erzeugen kann.

Arbeitsblatt 5.1 – Zeichnen von Strecken mit DERIVE 5

Das Computeralgebrasystem des Programms DERIVE5 ermöglicht das Zeichnen von Strecken auf die folgende Weise:

1) Es wird definiert: **strecke(a, b, c, d) := [[a, b], [c,d]]**
[a, b] das ist eine Liste für den Anfangspunkt $P_1(a, b)$ der Strecke
[c, d] das ist eine Liste für den Endpunkt $P_2(c,d)$ der Strecke
[[a, b], [c,d]] das ist eine Matrix, mit der man dann die Strecke P_1P_2 zeichnen kann.
Dazu geht man in DERIVE 5 so vor:
Aktivieren von 1) Extras
2) Anzeige
3) Punkt
4) Im Feld "verbinden" auf den Schalter "ja" klicken
5) Nun kann man z.B. eingeben „strecke(1,2,-4,4)”. Zum Zeichnen muss der Term dann noch im Algebrafenster ausgewertet werden mit „vereinfachen”, „algebraisch”



Aufgabe 1
Erläutere die folgenden Eingaben in das DERIVE-Programm sowie die dazugehörigen Ausgaben. Beachte dazu auch die Abbildung.

`strecke(1,2,-4,4)`

`VECTOR(strecke(-4,-3,c,5),c,-6,-1,0.1)` *(Dieser Term muss nach der Eingabe mit „vereinfachen”, „algebraisch” ausgerechnet werden.)*

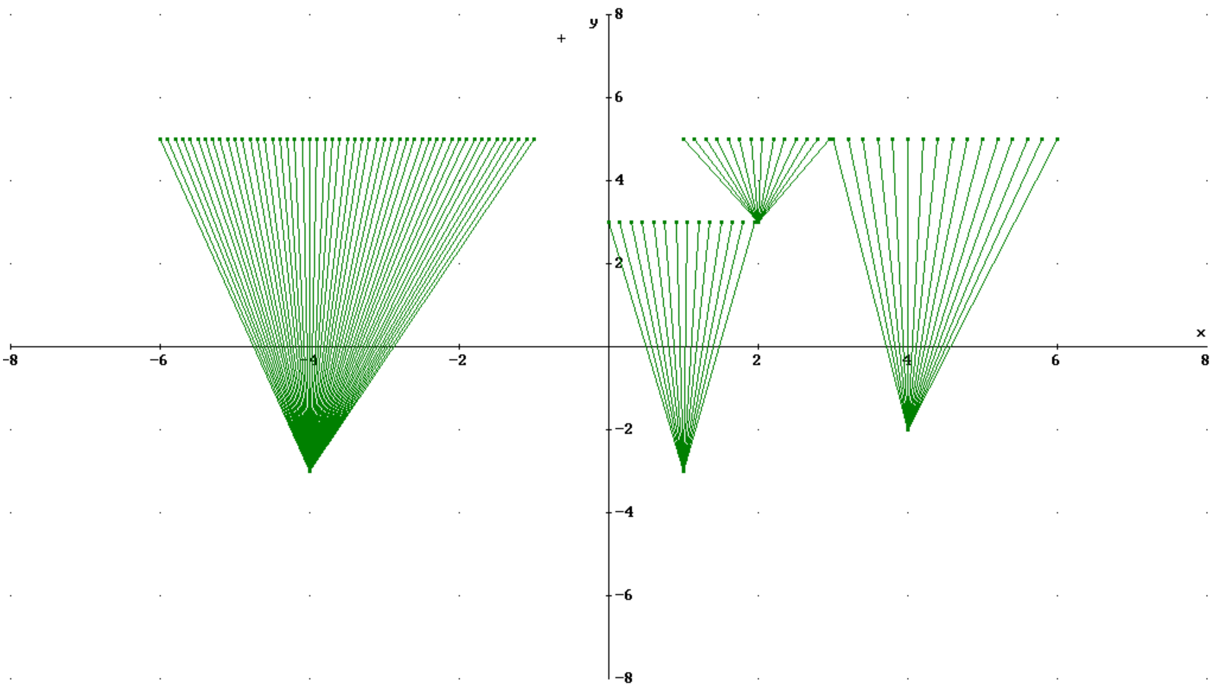
```
[-4,-3],[-6,5]],[[-4,-3],[-59/10,5]],[[-4,-3],[-29/5,5]],[[-4,-3],
[-57/10,5]],[[-4,-3],[-28/5,5]],[[-4,-3],[-11/2,5]],[[-4,-3],[-27/5,5]],
```

```
[[-4,-3],[-53/10,5]],[[-4,-3],[-26/5,5]],[[-4,-3],[-51/10,5]],[[-4,-3],
 [-5,5]],[[-4,-3],[-49/10,5]],[[-4,-3],[-24/5,5]],[[-4,-3],[-47/10,5]],
[[-4,-3],[-23/5,5]],[[-4,-3],[-9/2,5]],[[-4,-3],[-22/5,5]],[[-4,-3],
[-43/10,5]],[[-4,-3],[-21/5,5]],[[-4,-3],[-41/10,5]],[[-4,-3],[-4,5]],
[[-4,-3],[-39/10,5]],[[-4,-3],[-19/5,5]],[[-4,-3],[-37/10,5]],[[-4,-3],
[-18/5,5]],[[-4,-3],[-7/2,5]],[[-4,-3],[-17/5,5]],[[-4,-3],[-33/10,5]],
[[-4,-3],[-16/5,5]],[[-4,-3],[-31/10,5]],[[-4,-3],[-3,5]],[[-4,-3],
[-29/10,5]],[[-4,-3],[-14/5,5]],[[-4,-3],[-27/10,5]],[[-4,-3],
[-13/5,5]],[[-4,-3],[-5/2,5]],[[-4,-3],[-12/5,5]],[[-4,-3],[-23/10,5]],
[[-4,-3],[-11/5,5]],[[-4,-3],[-21/10,5]],[[-4,-3],[-2,5]],[[-4,-3],
[-19/10,5]],[[-4,-3],[-9/5,5]],[[-4,-3],[-17/10,5]],[[-4,-3],[-8/5,5]],
[[-4,-3],[-3/2,5]],[[-4,-3],[-7/5,5]],[[-4,-3],[-13/10,5]],[[-4,-3],
[-6/5,5]],[[-4,-3],[-11/10,5]],[[-4,-3],[-1,5]]]
[4,-2],[3,5]],[[4,-2],[16/5,5]],[[4,-2],[17/5,5]],[[4,-2],[18/5,5]],
[[4,-2],[19/5,5]],[[4,-2],[4,5]],[[4,-2],[21/5,5]],[[4,-2],[22/5,5]],
[[4,-2],[23/5,5]],[[4,-2],[24/5,5]],[[4,-2],[5,5]],[[4,-2],[26/5,5]],
[[4,-2],[27/5,5]],[[4,-2],[28/5,5]],[[4,-2],[29/5,5]],[[4,-2],[6,5]]]

VECTOR(strecke(2,3,c,5),c,1,3,0.15)

VECTOR(strecke(1,-3,c,3),c,0,2,0.15)

[[[1,-3],[0,3]],[[1,-3],[3/20,3]],[[1,-3],[3/10,3]],[[1,-3],[9/20,3]],
[[1,-3],[3/5,3]],[[1,-3],[3/4,3]],[[1,-3],[9/10,3]],
[[1,-3],[21/20,3]],[[1,-3],[6/5,3]],[[1,-3],[27/20,3]],
[[1,-3],[3/2,3]],[[1,-3],[33/20,3]],[[1,-3],[9/5,3]],[[1,-3],[39/20,3]]]
```



Aufgabe 2
Erzeuge viele Grasbüschel auf mehreren zur x-Achse parallelen Geraden. Auf diese Weise kann eine Graslandschaft entstehen. – Gestalte eine eindrucksvolle Graslandschaft! Vielleicht gelingt es dir, auch noch Blumen zu pflanzen.

Arbeitsblatt 5.2 – Übungsaufgaben

Aufgabe 1
Wie heißen die Gleichungen der Dreiecksgeraden von Abbildung 5.1?

Lösung für die Gerade durch die Punkte A(7; 3) und B(3; 5):

Lösung	Deine Erläuterung in Textform
f(x) = m*x + n f(7) = m*7 + n 3 = 7*m + n f(3) = m*3 + n 5 = 3*m + n 1) 3 = 7*m + n 2) 5 = 3*m + n -------------------------------------- –2 = 4*m, m = – 0.5 5 = 3*m + n 6.5 = n f(x) = –0.5*x + 6.5	

Aufgabe 2
Begründe: Die Gleichung der Strecke zwischen den Punkten A(7,3) und B(3,5) kann auch durch die Menge {–0.5*x + 6.5 | x >= 3 and x <= 7} beschrieben werden. – Wie lauten die Mengen bei den anderen beiden Dreiecksseiten?

Aufgabe 3
Was ergibt die Zeichnung zu den DERIVE-Termen (siehe dazu Arbeitsblatt 5.1)?

1) VECTOR(strecke(2, 3, 5, d), d, 1, 3, 0.15)

2) VECTOR(strecke(1, -3, 3, d), d, 0, 2, 0.15)

3) VECTOR(strecke(1, -3, c, 0), c, 0, 5, 0.10)

6. Baustein-Parameter erzeugen Gebirgsgraphen

6.1 Parameter in der binomischen Formel –

Unterrichtsvoraussetzungen:
Die binomische Formel $(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$ ist bekannt und für einige einfache Terme angewendet worden.

Aufgabe 6.1.1:
Definiere einen Baustein für den binomischen Term $(a + b)^2$. Erprobe dann diesen Baustein für die Terme $(2x+3y)^2$, $(1.5a – 2b)^2$ und $(2a+3b+4c)^2$.

Lösung für den TI-92 Plus:
Siehe Abbildung 6.1.1. Hier wurde der Baustein **(a + b)² → binom2(a,b)** definiert.

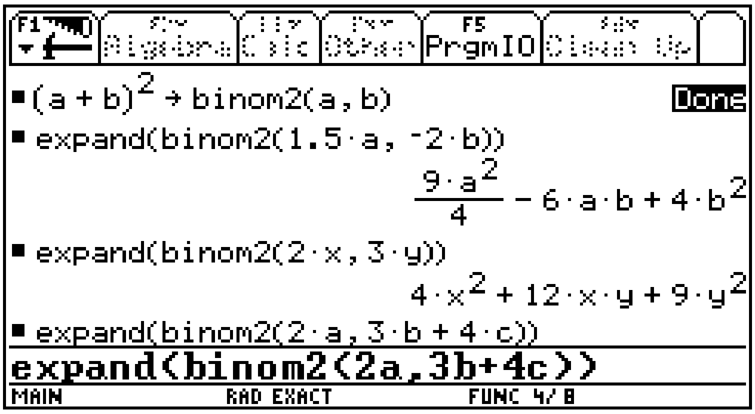


Abb. 6.1.1: Arbeit mit dem Baustein binom2(a,b)

Notiere hier die ausführlich geschriebenen Terme in der mathematischen Schreibweise:

Besonders bemerkenswert ist, dass auch der Aufruf **expand(binom2(2a, 3b+4c))** bearbeitet wird. Das gilt auch für andere entsprechende Aufrufe, siehe Abb. 6.1.2.

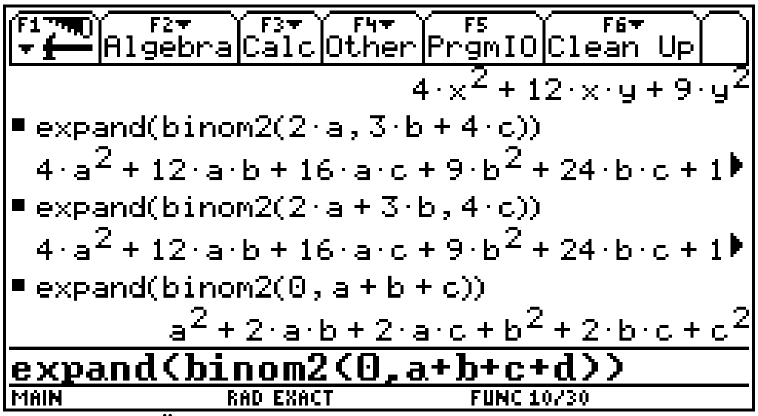


Abb. 6.1.2: Überraschende Anwendungen des Bausteins

Notiere hier die ausführlich geschriebenen Terme in der mathematischen Schreibweise:
$(2a + (3b + 4c))^2$

...

...
...

Aufgabe 6.1.2:
Die Bausteinaufrufe zeigen verschiedene Anwendungsmöglichkeiten des Bausteins. Formuliere hierzu einen passenden Text.

Visualisierungen des Bausteins (a + b)^2 → binom2(a,b)

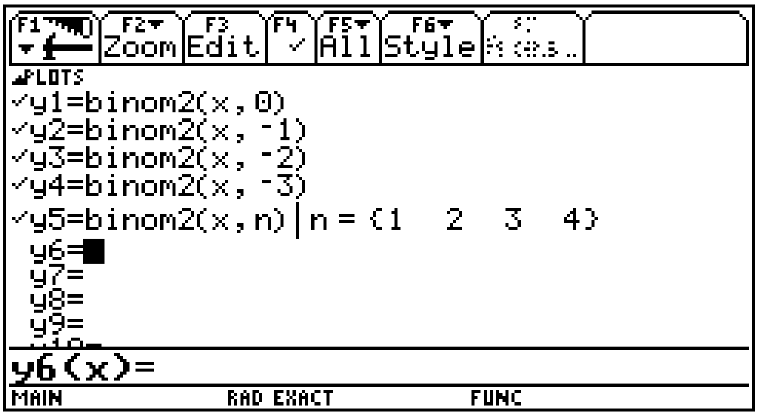


Abb. 6.1.3: Bausteinaufrufe im y-Editor des TI-92-Plus

Aufgabe 3
binom2(x,0) = $(x+0)^2 = x^2$, das ist die Normalparabel $y = x^2$.

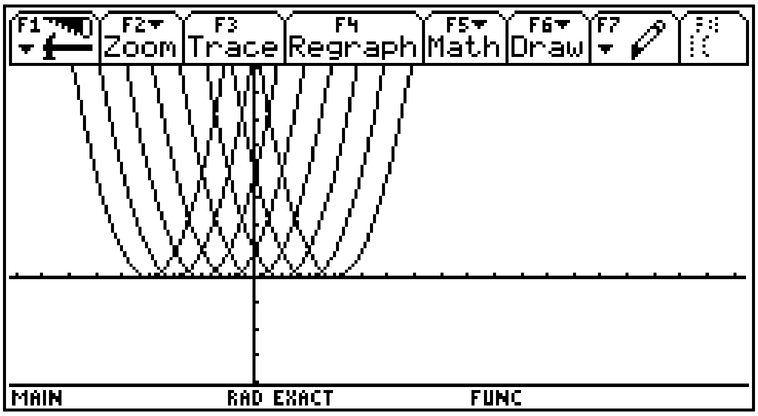


Abb. 6.1.4: Und wie heißen die Gleichungen dieser Graphen?

Aufgabe 4
Welcher Graph gehört zu welchem Bausteinaufruf? Begründe deine Entscheidungen!

Aufgabe 6.1.3:
Zeichne ein **Parabelfeld**, indem du überall auf dem Bildschirm diverse Parabeln platzierst. Benutze geeignete Bausteinaufrufe, ähnlich wie oben.

Meine Lösung siehst du in Abb. 6.1.5. Aber es gibt sicher noch schönere Parabelfelder!

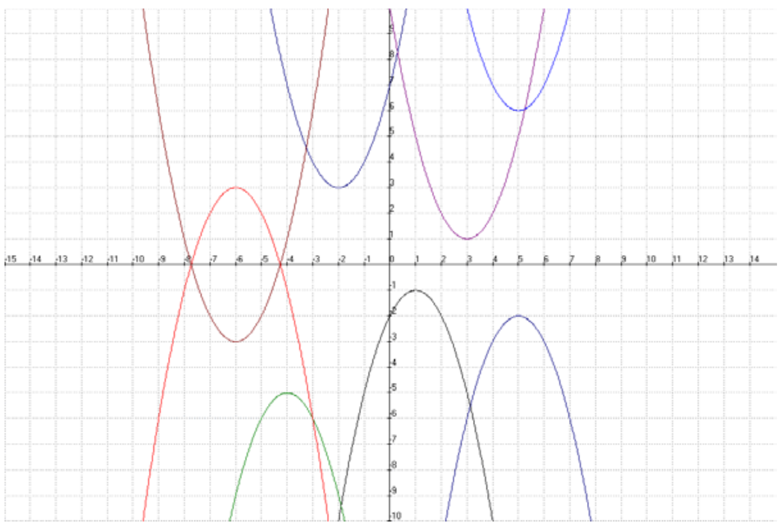


Abb. 6.1.5: Parabelfeld

6.2 Parabelberge und Binomische Gebirge

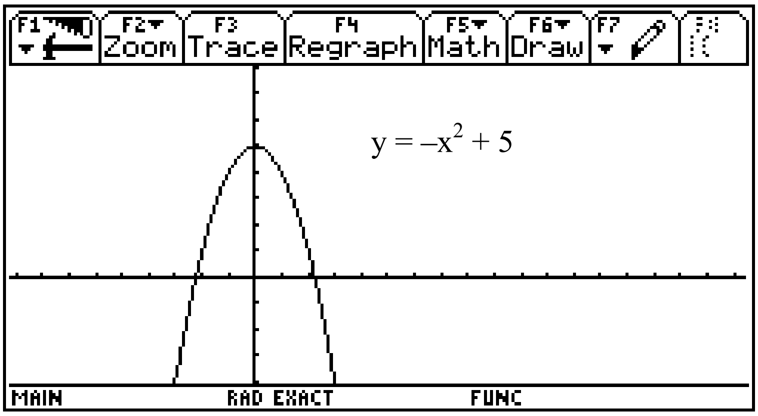


Abb. 6.2.1: Ein Parabelberg

Der Aufruf **–binom2(x,0) + 5** liefert einen Graphen, der in etwa die Form eines Berges hat, siehe Abbildung 4.2.1.

Es wäre allerdings noch schöner, wenn dieser Parabelberg auf der x-Achse stehen würde. Und vielleicht kann man noch weitere Berge zeichnen. Abb. 6.2.2 und Abb. 6.2.3 geben einige Anregungen für die nächste Aufgabe!

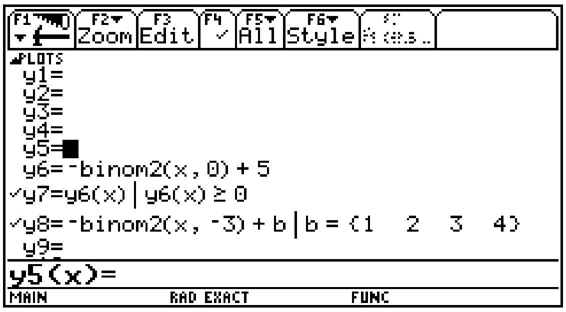


Abb. 6.2.2: Ideen für Parabelberge

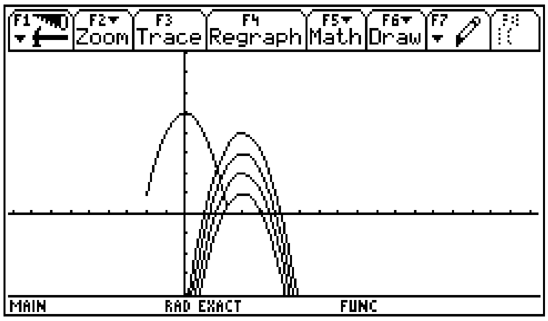


Abb. 6.2.3: Das geht noch besser!

Aufgabe 6.2.1:
Erstelle eine Parabel-Berglandschaft! Benutze dein CAS.

Lösung zu Aufgabe 6.2.1:
Hier wird eine Lösung gezeigt, die mit dem Animations-Plotter ANIMATO erstellt wurde.
Hinweis: ANIMATO ist ein Funktionenplotter, mit dem man besonders wirkungsvolle Animationen mit Hilfe von Termen erstellen kann (Bezug beim Autor des vorliegenden Heftes).

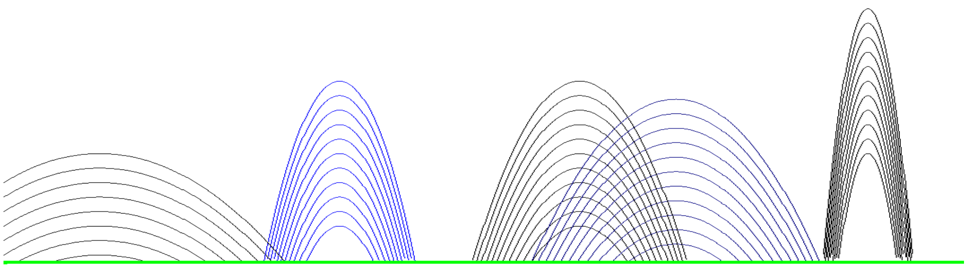


Abb. 6.2.4: Parabelberge

Diese Lösung soll nun ausführlicher dargestellt werden, denn auch in dieser Software wurde ein Baustein benutzt.

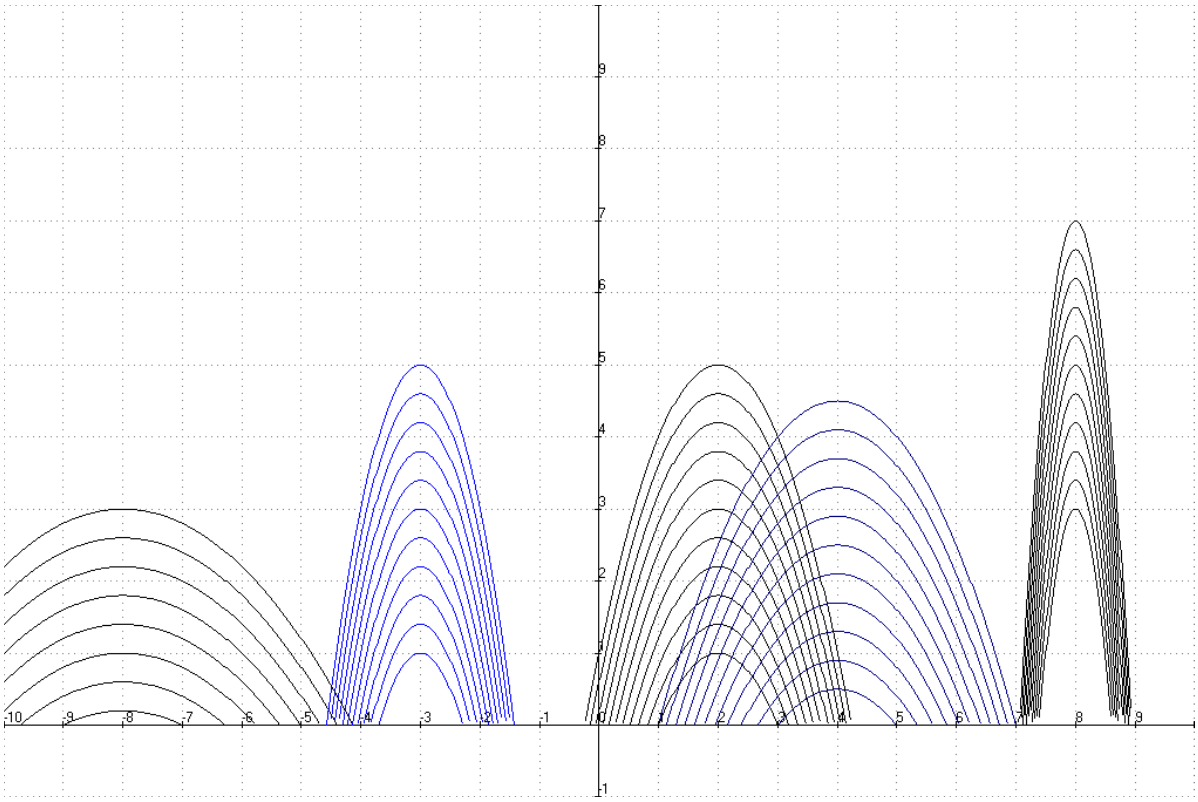


Abb. 6.2.5: Parabelberg im Koordinatensystem

Der folgende Auszug ist das Protokoll des eingegebenen Programms und der Bildschirm-daten:

```
f1=-a*(x-b)^2+c
f2={f1(1,2,u)>0:f1(1,2,u):undef}
f3={f1(2,-3,u)>0:f1(2,-3,u):undef}
f4={f1(0.5,4,u-0.5)>0:f1(0.5,4,u-0.5):undef}
f5={f1(0.2,-8,u-2)>0:f1(0.2,-8,u-2):undef}
f6={f1(8,8,u+2)>0:f1(8,8,u+2):undef}
f7={f1(1,2,1)>0:f1(1,2,1):undef}
f8={f1(1,2,1)>0:f1(1,2,1):undef}
xmin=       -10
xmax=        10
ymin=        -1
ymax=        10
xgrid=        1
ygrid=        1
-name=
-range0= -10,0.02,1000
-range1= 1,0.4,10
```

1000 x-Werte

10 u-Werte von 1 an und mit in 0.4-Schritten

Unter f1 steht ein Baustein mit den drei Parametern a,b,c. Er beschreibt Parabeln
a: Steilheit
b: Verschiebung längs der x-Achse
c: Verschiebung längs der y-Achse.

f2 bedeutet: Wenn die y-Werte f1(1,2,u) größer als 0, dann die Werte zeichnen, sonst nicht. Dabei ist die Parameterbelegung: a=1, b=2, c=u und u nimmt die Werte 1, 1.04, 1.08 usw. bis 5 an (siehe links)

6.3 Eine binomische Fläche im Dreidimensionalen

Unterrichtsvoraussetzungen:
Mit einem CAS kann man auch dreidimensionale Zeichnungen anfertigen lassen. Der naheliegende Aufruf binobau(x,y,2), also $z = (x+y)^2$ führt uns in die dreidimensionale Mathematikwelt. Alle sind erstaunt über die graphische Darstellung, die genug Anlass zu weiteren Fragestellungen gibt. Die folgende Unterrichtsequenz kann in Klasse 9 oder Klasse 10 durchgeführt werden – als Einführung in das dreidimensionale Koordinatensystem oder auch im Rahmen der darstellenden Geometrie. Für die Schüler der Sekundarstufe 1 sind Darstellungen dieser Art i.a. Neuland, so dass methodisch sorgsam vorgegangen werden muss.

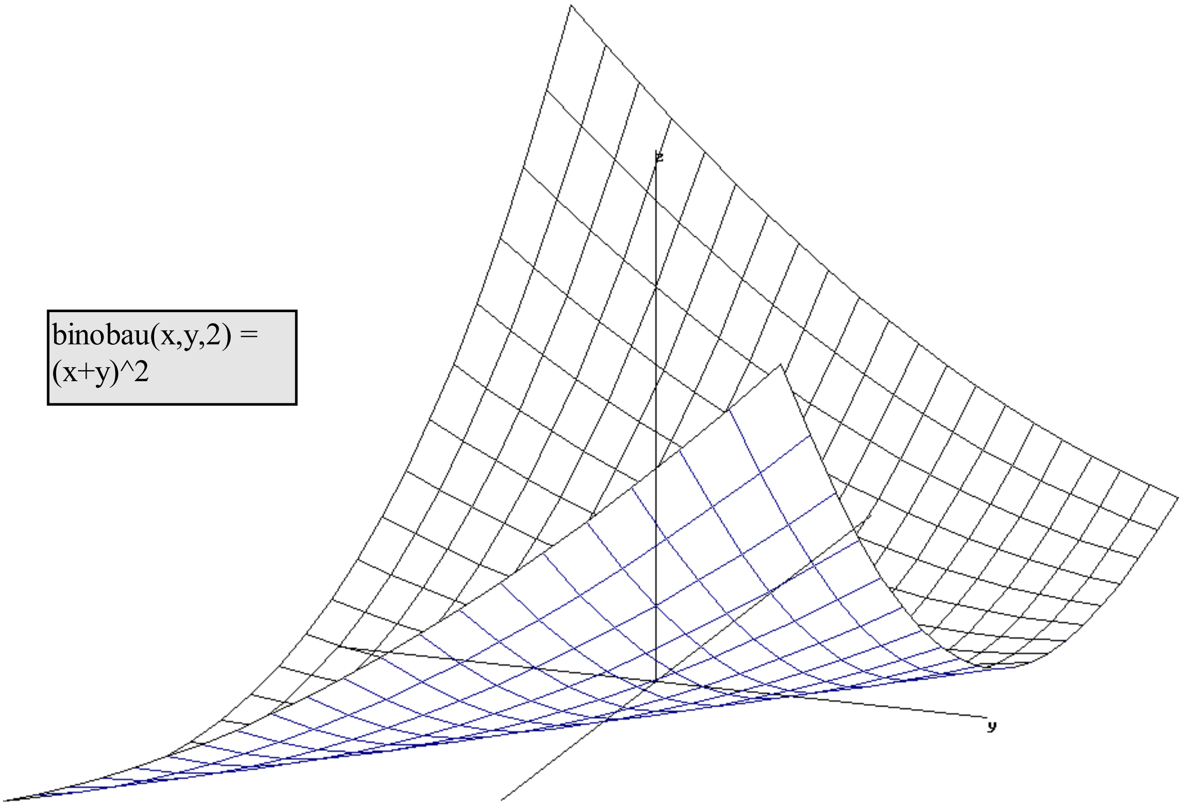
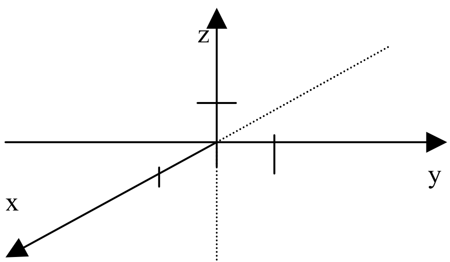


Abb. 6.3.1: Binobau(x,y,2) bzw. $z = (x+y)^2$

Aufgabe 6.3.1:
Du hast dich bisher vermutlich nur mit zweidimensionalen Koordinatensystemen befasst. Nun kommt noch eine z-Achse dazu.



Du kannst dir die Achsen als Kanten in deinem Klassenraum vorstellen.
Wo liegen die Punkte (x,y,z) mit (0,0,0), (1, 0, 0), (0, 1, 0), (0, 0, 1), (1, 1, 1), (2, 0, -2)?

Aufgabe 6.3.2:
Nenne einige Punkte auf der Fläche von Abb. 6.3.1!

Lösung:
Wir kommen zu einer Wertetafel für den dreidimensionalen Raum.

x	*0*	*1*	*-1*	*2*
y	*0*	*1*	*-1*	*-2*
z	*0*	*4*	*4*	*0*

Rechne nach! Zum Beispiel gilt: $(1+1)^2 = 4$.

Die Erläuterung der räumlichen Zusammenhänge in Abbildung 6.3.1 gelingt auf elementare Weise.

Wir
- stellen fest, dass keine weiteren Punkt auf den Achsen zur Fläche gehören und

- finden die Gerade $y = -x$, auf der die Fläche lagert:
  $z = 0 \Rightarrow z = (x+y)^2 = 0 \Rightarrow x + y = 0 \Rightarrow y = -x.$

- Für alle anderen *x*- , *y*-Werte ist *z* positiv, weil *(x+ y)* quadriert wird, so dass die Fläche auf und oberhalb der *(x,y)*-Ebene verläuft.

- Dazu kommt eine Veranschaulichung mit einem Blatt Papier.

- Ein Schüler erläutert das Parallelogramm-Raster auf der Fläche.

Aufgabe 6.3.3:
Durch welchen Bausteinaufruf ist Abbildung 6.3.2 entstanden? Sie hängt eng mit Abbildung 6.3.1 zusammen!

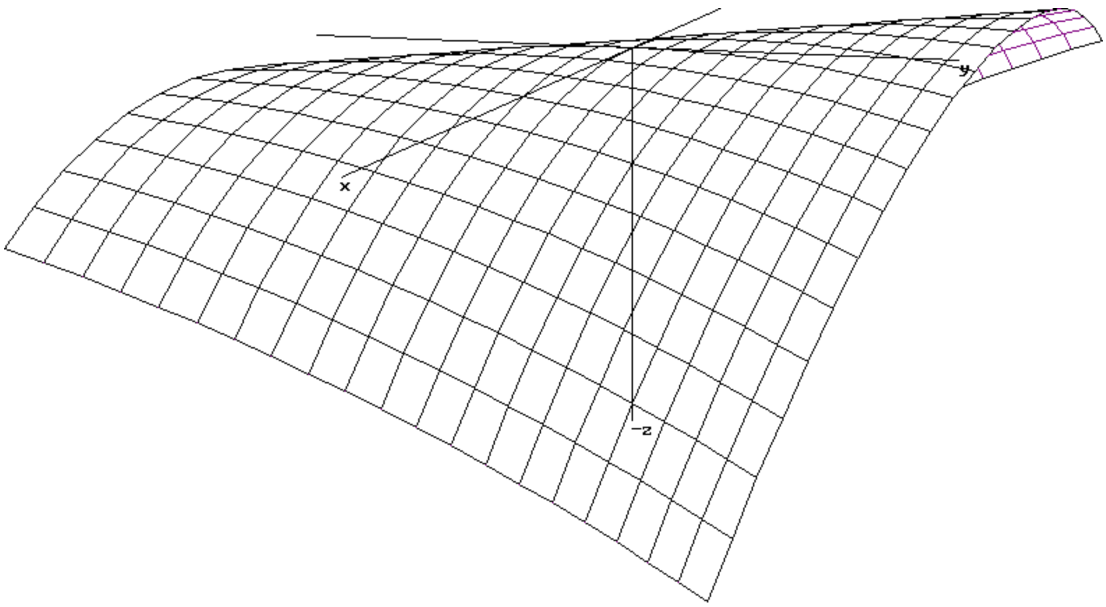


Abb. 6.3.2. Der Aufruf lautet –Binobau(x,y,2)

Weitere Fragen liegen nahe, werden jedoch hier in der Sekundarstufe 1 nicht weiter verfolgt:

- Was ist beim Aufruf Binobau(x,y,3) grundsätzlich anders?
- Was ist bei Binobau(sin(x),y,2), siehe Abbildung.6.3.3? Die Einbeziehung von Winkelfunktionen liegt in Klasse 10 nahe.

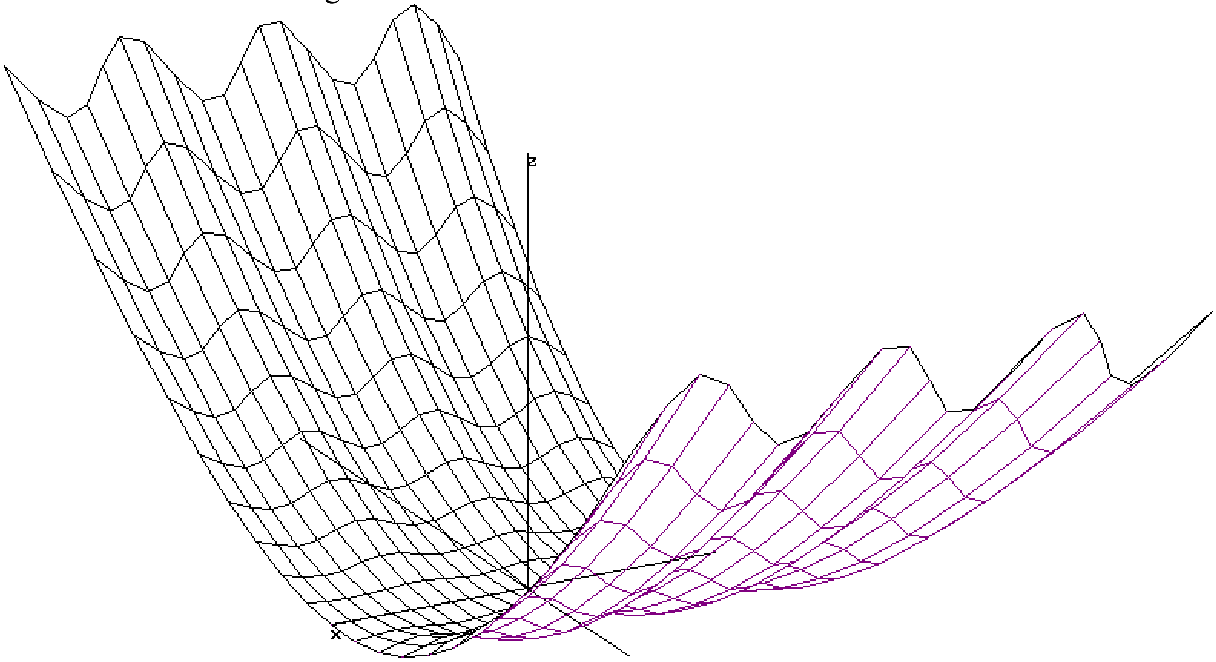


Abb. 6.3.3: Binobau(sin(x),y,2)

6.4 Der Baustein (a + b)^n →Binobau(a,b,n)

Binobau(a,b,2) - Binobau(a,b,3) - das Pascalsche Dreieck

Unterrichtsvoraussetzungen:
Am naheliegensten ist der Aufruf Binobau(a,b,2), also *(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2*, denn er liefert uns die erste binomische Formel, die die Schüler bereits aus Klasse 8 kennen. Ebenso nahe liegt das weitere Experimentieren mit den Aufrufen Binobau(a,b,3), Binobau(a,b,4) usw. Das Pascalsche Dreieck entsteht und gibt genug Anlass für weitere Fragenstellungen.

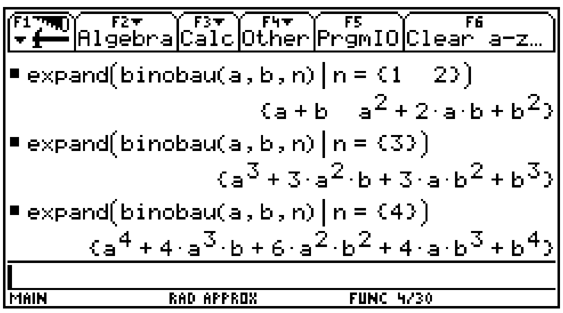


Abb. 6.4.1

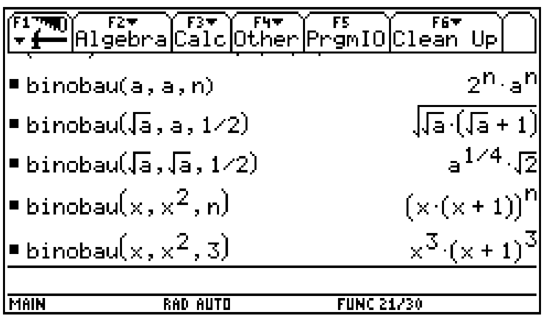
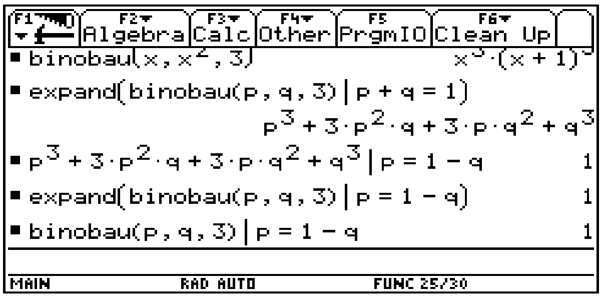


Abb. 6.4.2

Aufgabe: Erläutere die Bildschirmabdrucke der Abbildungen 6.4.1 und 6.4.2.

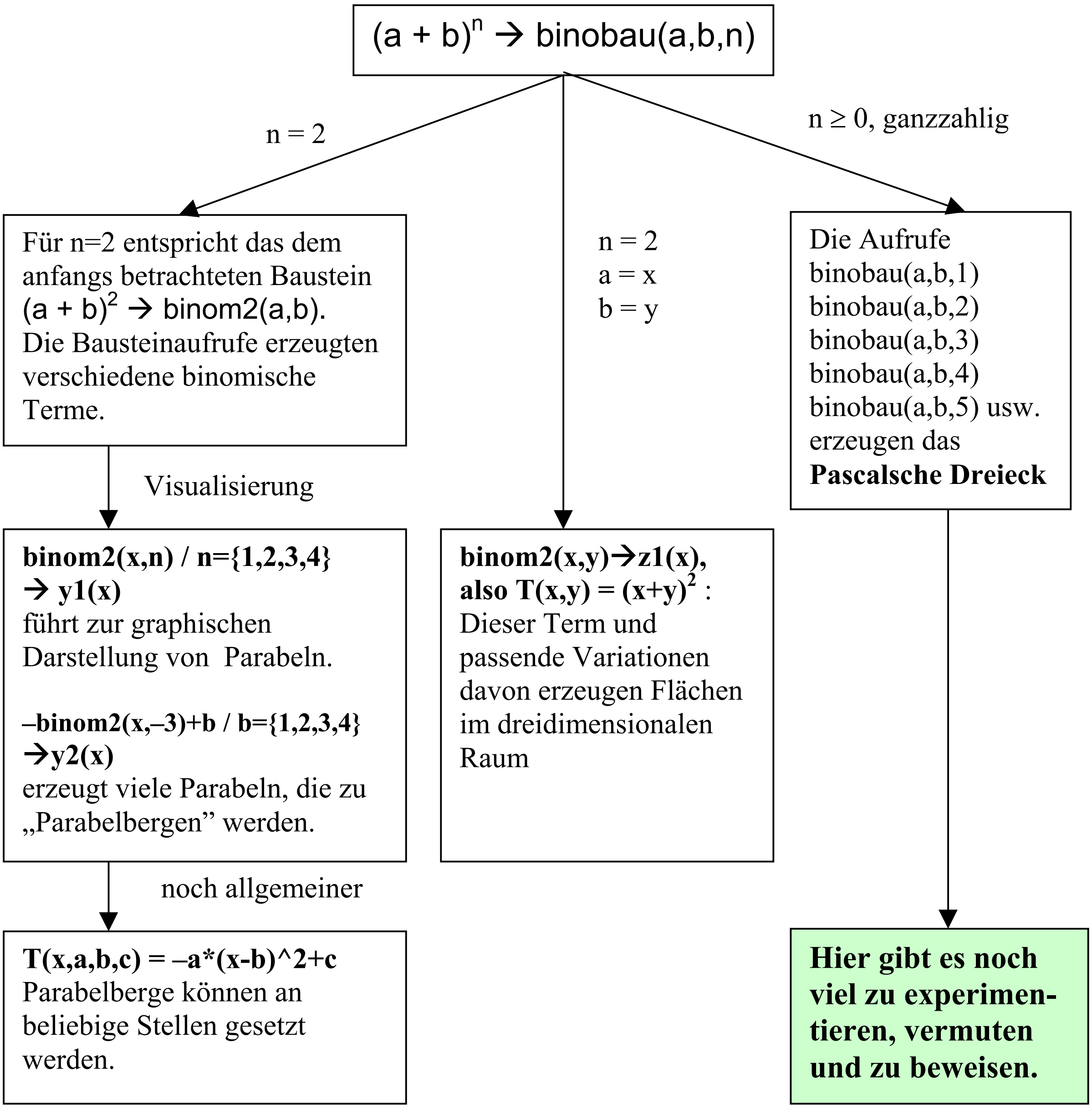


Aufgabe:
Den Rechner verstehen!
Wieso ergibt sich 1?

Wer Wahrscheinlichkeitsrechnung kann, wird hier noch mehr sagen können!

6.5 Zusammenfassung – Parameter in binomischen Formeln

Wir haben uns mit einigen Möglichkeiten der Benutzung des binomischen Bausteins $(a + b)^2$ → binom2(a,b) bis hin zum noch allgemeineren Baustein $(a + b)^n$ → binobau(a,b,n) beschäftigt. Eine Übersicht zeigt die Problemauswahl:



7. Bausteine helfen beim Projekt „Kreise”

7.1 Unterrichtsvoraussetzungen und Planung

Die Sinusfunktion und Cosinusfunktion sind einschließlich ihrer Graphen bekannt. Dabei wurden die Winkel sowohl in Gradmaß als auch in Bogenmaß benutzt. Möglicherweise kennst du auch die Erzeugung der Sinusfunktion mit Hilfe des Einheitskreises. Hieran erinnert Abbildung 7.1.1. Angesichts dieser Voraussetzungen ist eine Durchführung des Projekts in Klasse 10 oder höheren Klassen möglich.

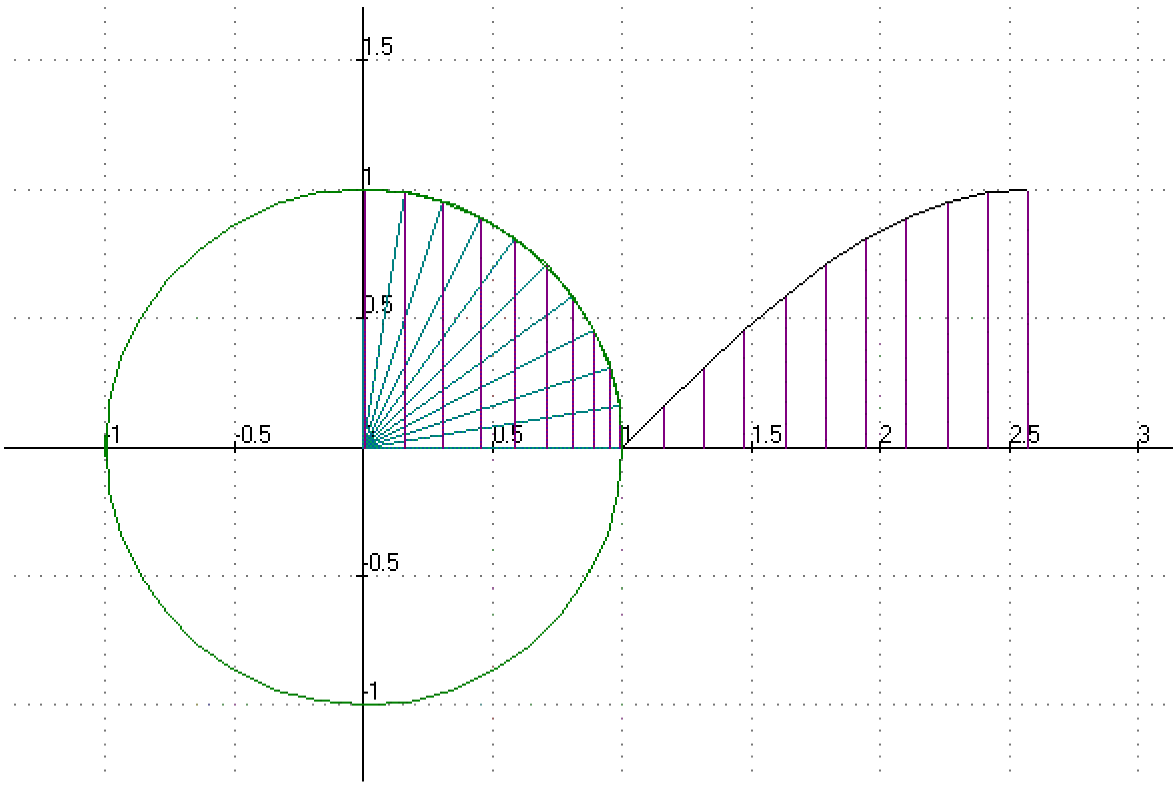


Abb. 7.1.1: Erzeugung der Sinuskurve (um 1 nach rechts verschoben!) aus dem Einheitskreis

Aufgabe 7.1.1:
Beschreibe die Erzeugung der Sinuskurve aus Abbildung 7.1.1.

Der Projektplan:

Bei dem Projekt „Kreise” werden verschiedene Themen, die mit Kreisen zu tun haben, von verschiedenen Schülergruppen bearbeitet.

(1) Anfangs wird eine gemeinsame Arbeitsgrundlage geschaffen. Diese besteht insbesondere in der Fähigkeit *einen Kreis mit Hilfe von x = cos(t) und y = sin(t), also in Parameterdarstellung zu erzeugen*.

(2) Dann erfolgt die Gruppeneinteilung nach den von den Schülern beschlossenen oder vom Lehrer gewünschten Gesichtspunkten.

(3) Zum Einstieg in die eigentliche Arbeit erhält jede Gruppe ein Arbeitsblatt mit der Aufgabenstellung (diese wird recht offen formuliert sein) und eventuell notwendigen Informationen. Jede Gruppe bearbeitet dann das von ihr übernommene Thema,

(4) erstellt eine Dokumentation ihrer Arbeit und

(5) stellt ihre Arbeitsergebnisse in einem Vortrag vor.

(6) Zuletzt werden die mathematischen Ergebnisse aller Gruppen in gemeinsamer Arbeit zusammengestellt, wobei insbesondere die Gemeinsamkeiten der Arbeitsergebnisse betont werden.

Als Themen sind hier vorgesehen:
Gruppe 1: Kreis-Kunst auf der Wiese
Gruppe 2: Entwurf eines Kirchenfensters
Gruppe 3: Türgitter
Gruppe 4: Entwurf einer „Uhr” auf dem Bildschirm
Gruppe 5: Vom Kreis zur Ellipse

Die Arbeitsgrundlage

Unsere gemeinsame Arbeitsgrundlage ist die
Parameterdarstellung des Einheitskreises
x = cos(t), y = sin(t).

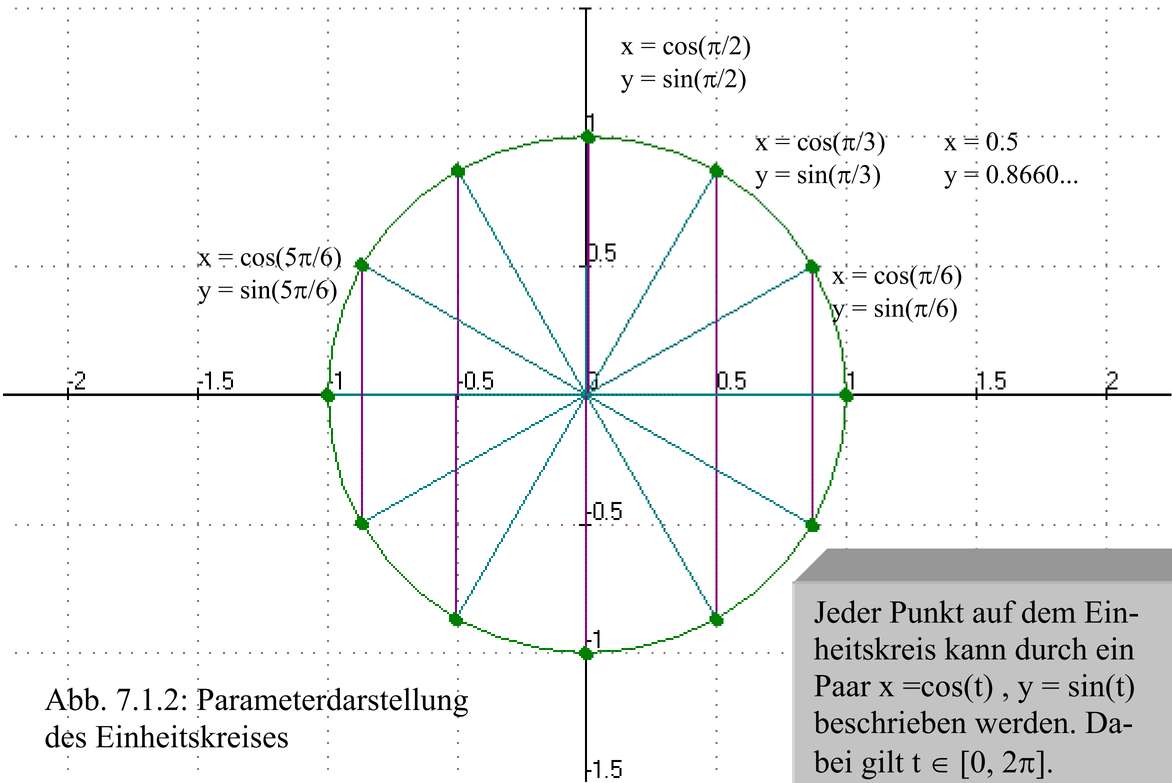


Abb. 7.1.2: Parameterdarstellung des Einheitskreises

Jeder Punkt auf dem Einheitskreis kann durch ein Paar x =cos(t) , y = sin(t) beschrieben werden. Dabei gilt t ∈ [0, 2π].

Immer noch gemeinsam:

Aufgabe 7.1.2:
Erläutere, warum man jeden Einheitskreispunkt durch ein Paar (x, y) mit x =cos(t) , y = sin(t) mit $t \in [0, 2\pi]$ beschreiben kann.

Aufgabe 7.1.3:
a) Berechne die Punkte des Einheitskreises zu den Winkeln mit t = 0.5, t = 1, t = 2, t = 3, t = 4, t = 35°, t = 270°, $t = 2\pi$.
b) Berechne den Winkel t zu den Kreispunkten (0.5, 0.8860), (–0.5, –0.8860).
c) Liegen die Punkte (0.5, 0.88), auf dem Einheitskreis?

Aufgabe 7.1.4:
Die folgende Abbildung zeigt viele Kreise an verschiedenen Stellen des Koordinatensystems. Wie heißen die jeweiligen Gleichungen der Kreise?

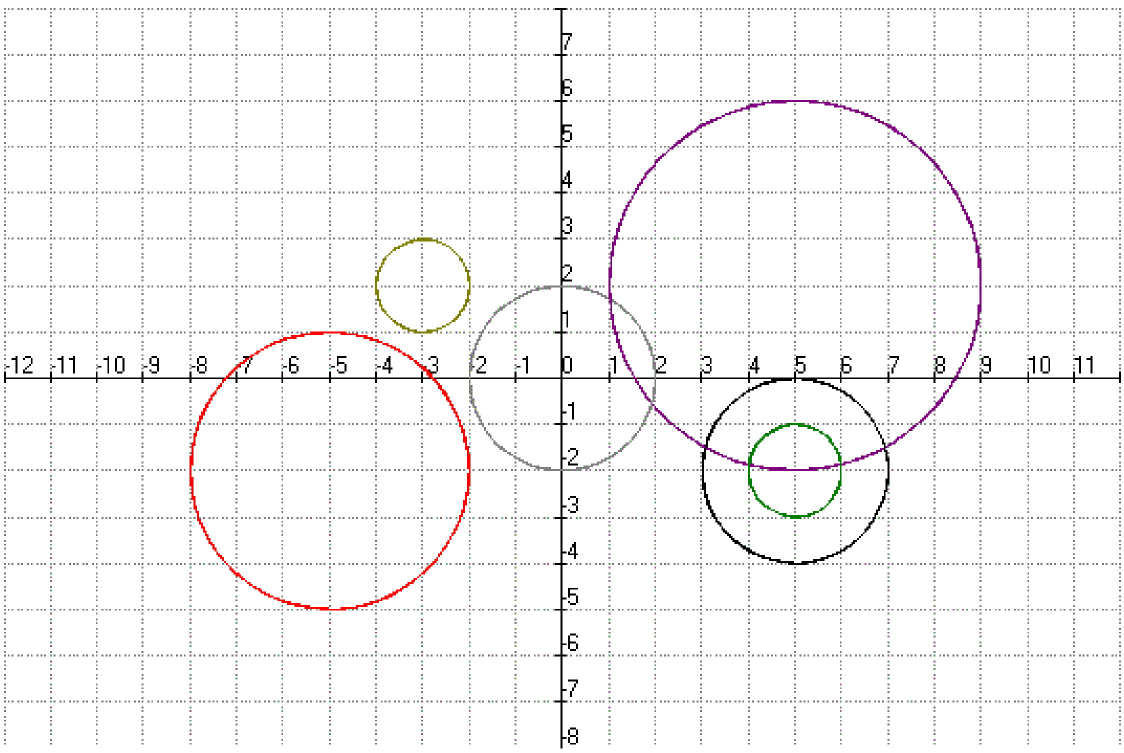


Abb. 7.1.3: Viele Kreise an unterschiedlichen Positionen

7.2 Die Arbeitsblätter der Projekt-Gruppen

Nachdem bekannt ist, wie man einen Einheitskreis erzeugen kann, kann man nun seiner Fantasie freien Lauf lassen und Kreise auch an anderen Stellen des Koordinatensystems erzeugen. So entstehen z.B. „Kreislandschaften” oder Muster von Tischdecken. Auch ist es nicht mehr weit von Kreisen hin zu Ellipsen. Und schließlich kommen Kreisformen auch überall in der Architektur vor, etwa in Kirchenornamenten. Diese Feststellungen bilden nun die Grundlage für die folgenden Arbeitsblätter.

Arbeitsblatt 7.a: Kreis-Kunst auf der Wiese

Aufgabe:
Erstelle eine „Kunstlandschaft”. Es sollen vorwiegend Kreise verwendet werden.

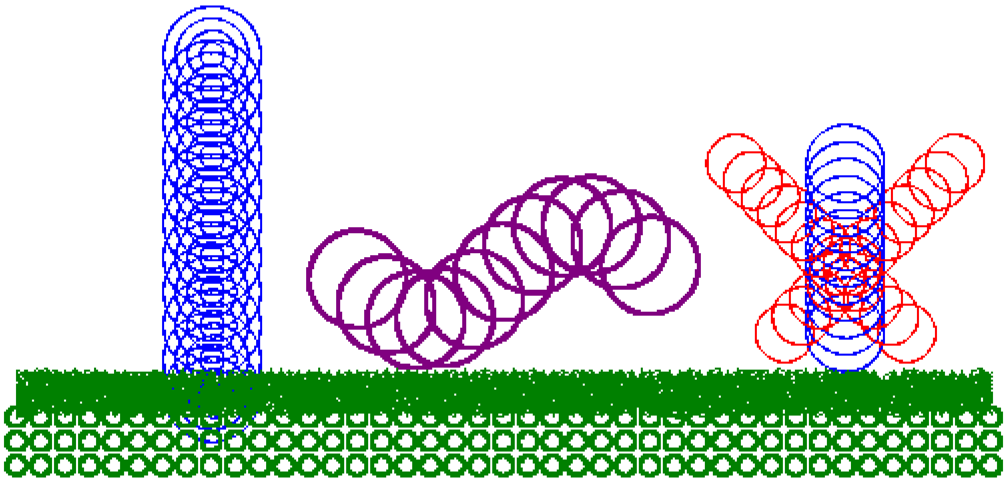


Abb.1: Beispiel einer Kunst-Kreislandschaft

Hinweise:
Abbildung 1 ist in experimenteller Arbeit entstanden. Das Koordinatensystem ist erst zum Schluss ausgeblendet worden. Man erkennt, dass immer wieder Mengen von Kreisen vorkommen. Es ist daher zweckmäßig, mit einem *„Kreisbaustein”* und geeigneten Parametern zu arbeiten. Dieser Baustein kann dann mit den gewünschten Einsetzungen für die Parameter aufgerufen werden. Aufgabe 7.4 kannst du als Vorbereitung für deine Bearbeitungen ansehen.

Der *„Rasen”* der Landschaft kann einfach mit der Anweisung „rand( )”, also mit Zufallszahlen (z.B. mit Werten zwischen 0 und 1), erzeugt werden.

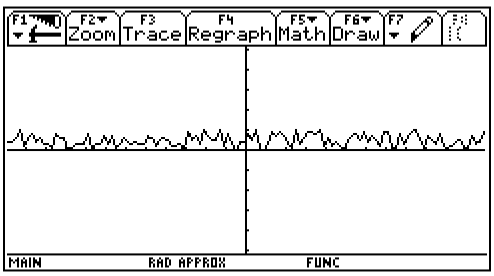
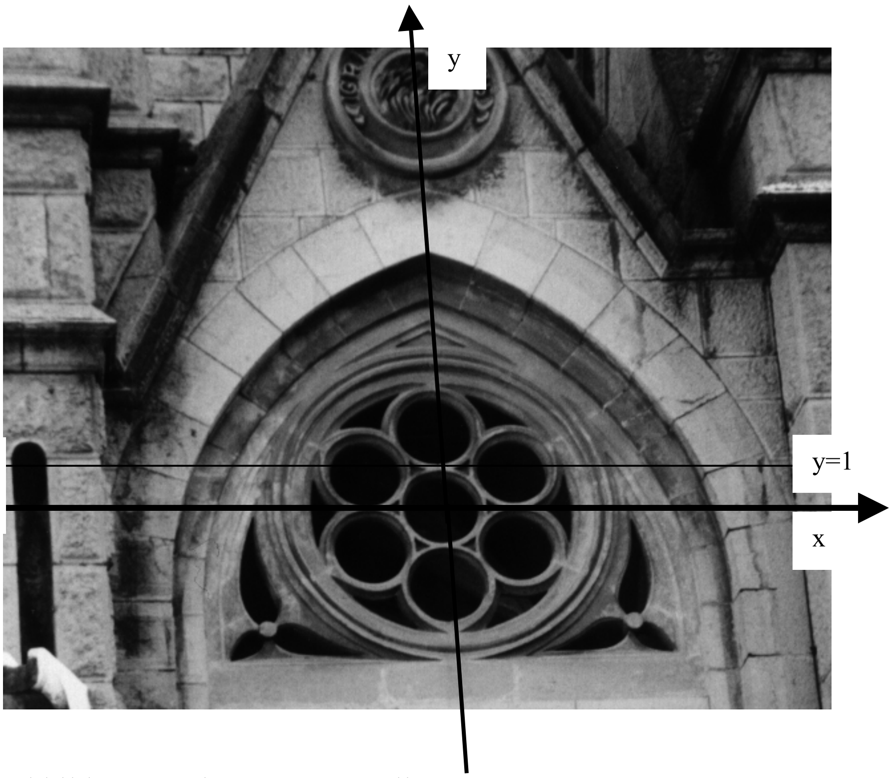


Abb.2:
Zufallsgras am TI-92

rand ( ) → y1(x)

Arbeitsblatt 7.b: Kirchenfenster



In der folgenden Aufgabe wird die Architektur in dem nebenstehenden Bild etwas näher analysiert. Grundlage für die zahlenmäßige Erfassung ist das eingezeichnete (x,y)-Koordinatensystem, das hier etwas verzerrt ist, was ignoriert werden darf. In O liegt also ein rechter Winkel zwischen den Achsen vor.

Abbildung 1: Ein Foto aus Mallorca

Aufgabe 1

Um den Koordinatenmittelpunkt liegt eine Einheitskreis.

a) Wie lauten die Gleichungen der sechs berührenden Kreise in Parameterdarstellung? Hinweis: Vorsicht mit den Mittelpunkten der Kreise links und rechts!

b) Zeige durch eine geeignete Konstruktion mit dem CAS oder anderer Software, dass sich durch Aufrufe des (x, y) –Bausteins

```
a*cos(t) + b → xkreis(t, a, b)
a*cos(t) + c.→ ykreis(t, a, c)
```

alle Kreise aus Abb.1, aber auch noch beliebig viele weitere Kreise erzeugen lassen.

Aufgabe 2

Erzeuge ähnliche Ornamente – nur aus Kreisanordnungen.

Arbeitsblatt 7.c: Türgitter

Aufgabe:
Das abgebildete kunstvolle Türgitter enthält unter anderem zahlreiche Kreise. – Versuche eine ähnliche Kreisanordnung unter Benutzung eines CAS oder eines Funktionenplotters. Vielleicht gelingt es sogar noch mehr als die Kreise einzuzeichnen!

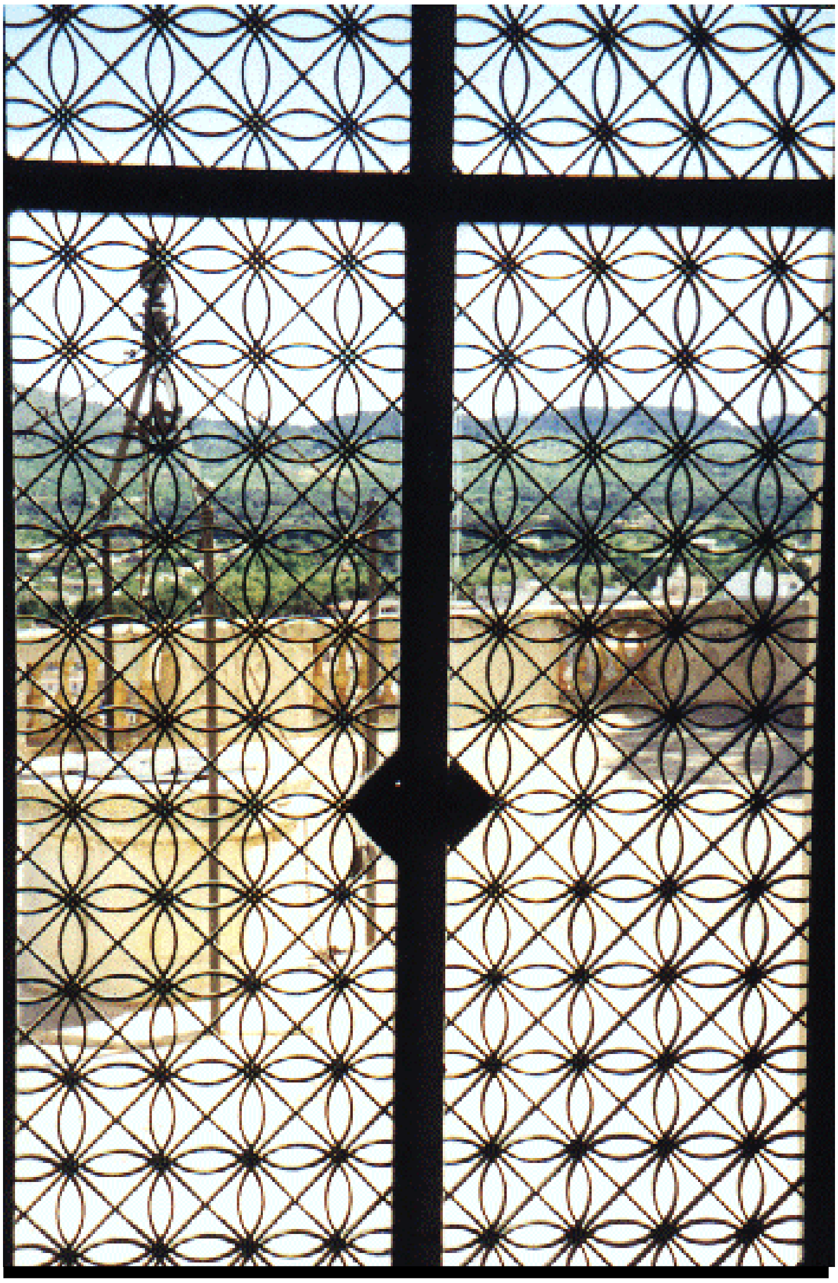


Abb.1: Ein kunstvolles Türgitter

Arbeitsblatt 7.d: Entwurf einer Uhr

Aufgabe:
Die Abbildung zeigt einen ersten Entwurf einer (noch recht normalen) Uhr.
1) Setzt diesen Entwurf fort, so dass ein vollständiges Uhrenbild entsteht.
2) Entwerft nun selbst eine Uhr!

Hinweis: Es ist zweckmäßig, bei der Arbeit das Koordinatensystem mitzuführen, um die Lage der Objekte besser überprüfen zu können.

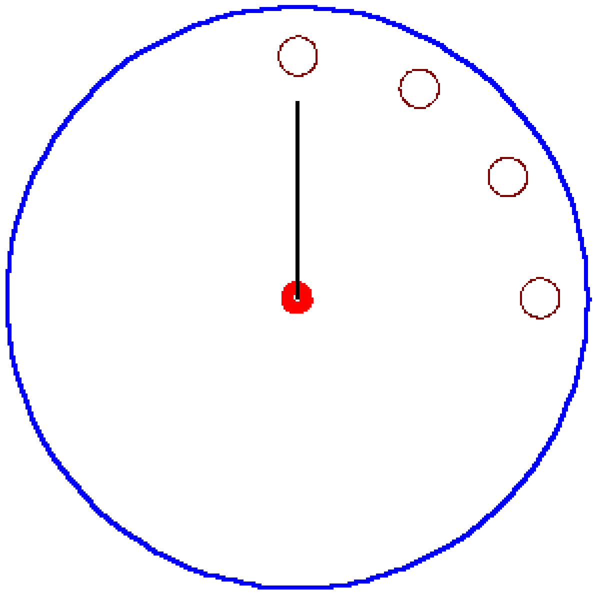


Abb.1: Eine „Kreis-Uhr”

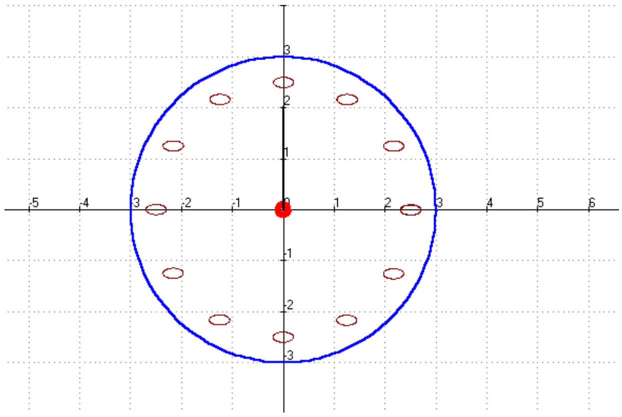


Abb.2: Eine „Kreis-Ellipsen-Uhr”

Arbeitsblatt 7.e: Vom Kreis zur Ellipse

Aufgabe
1) Erkläre die Abbildungen 1 und 2 dieses Arbeitsblatts.
2) Zeichne eine „Ellipsenlandschaft".

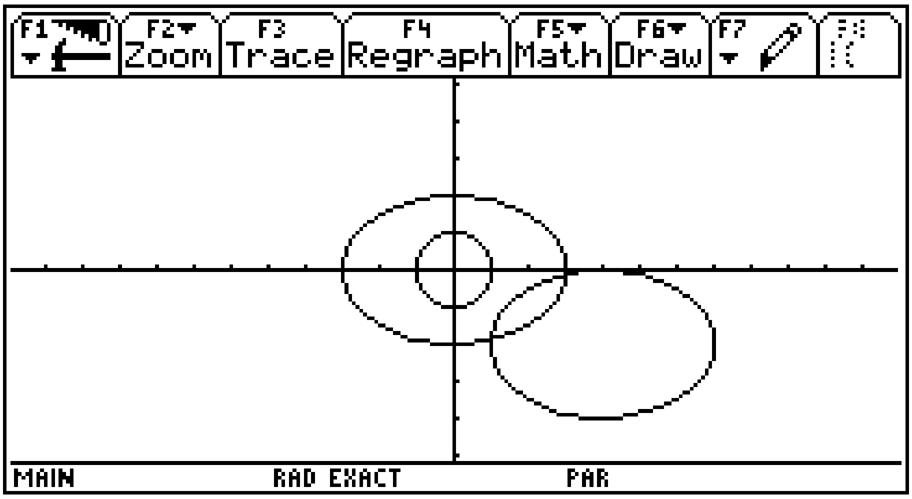


Abb.1: Vom Kreis zur Ellipse - wie geht das?

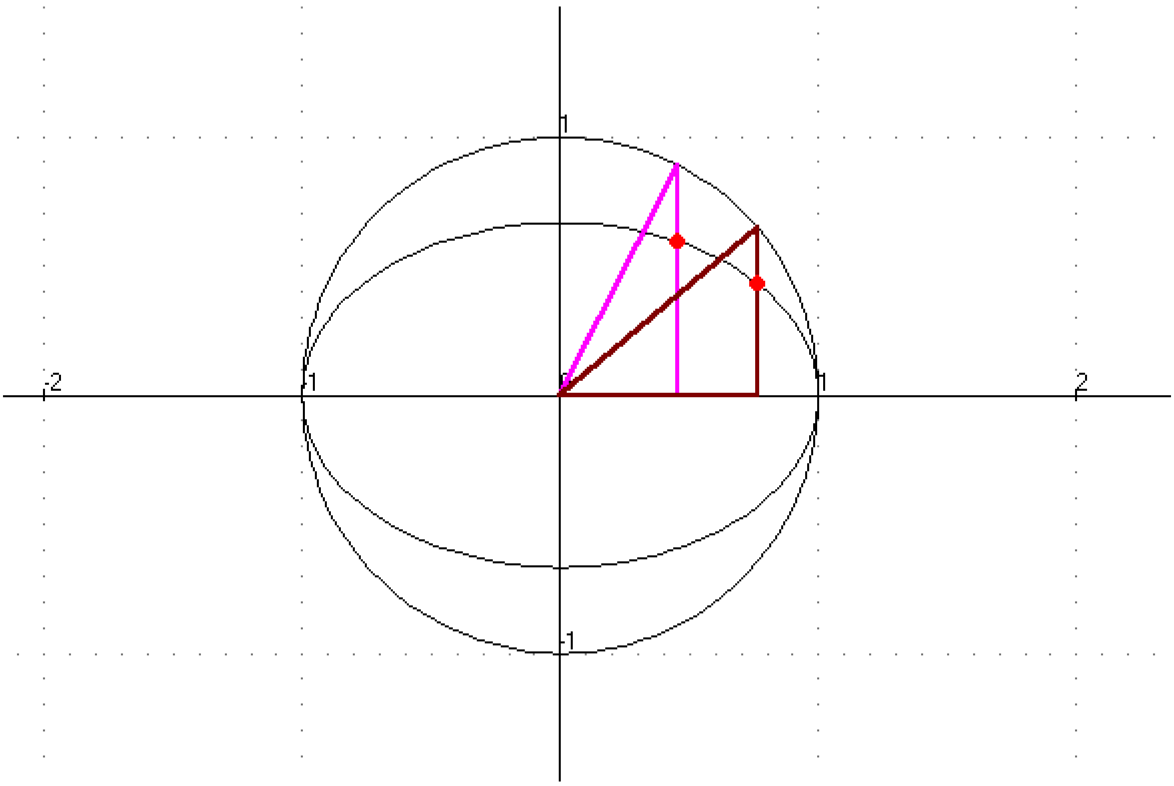


Abb.2: Vom Kreis zur Ellipse - wie geht das?

7.3 Zusammenfassung – Kreis in Parameterdarstellung

Beim Vortragen der einzelnen Gruppenergebnisse werdet ihr gemerkt haben, dass die benutzten mathematischen Hilfsmittel immer ähnlich waren. In der folgenden Übersicht, die ihr auch selbst erstellen könntet, werdet ihr eure Arbeit sicher wiederfinden.

Der Einheitskreis in Parameterdarstellung:

x(t) = cos(t), y(t) = sin(t)

Einheitskreis nach rechts oder links verschieben:
x(t,b) = cos(t) + b
y(t) = sin(t)

Einheitskreis vergrößern bzw. verkleinern (Radius a):

x(t,a) = a*cos(t)
y(t,a) = a*sin(t)

Einheitskreis nach oben oder unten verschieben:
x(t) = cos(t)
y(t,d) = sin(t) + d

Einheitskreis achsenparallel verschieben und vergrößern bzw. verkleinern (beliebige Kreise):
x(t, a, b) = a*cos(t) + b
y(t, a, d) = a*sin(t) + d

Die Eingaben als Baustein beim TI-92-Plus sieht man in Abbildung 1 (Eingaben im Home-Editor), die Zeichnung dazu in Abbildung 2.

Ellipsen

x(t, a, b) = a*cos(t) + b
y(t, c, d) = c*sin(t) + d

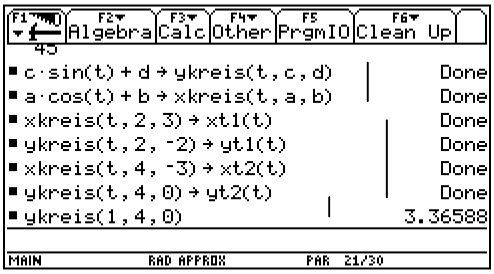


Abb. 7.3.1: Eingaben im Home-Fenster

- Die Eingabe des Bausteins.
- Zwei Bausteinaufrufe:
  Kreisradien = 2 bzw. 4.
- ykreis(1,4,8) = 4*sin(1)+8 = 3.36588,
  das ist der y-Wert des Kreises für den Bogen der Länge 1.

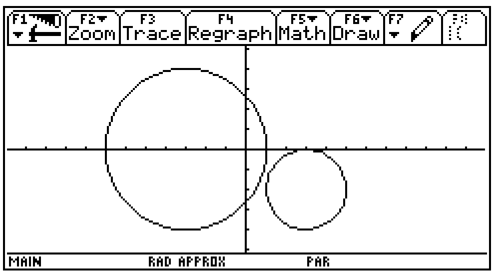


Abb.7.3.2: Ausgabe im Grafik-Fenster

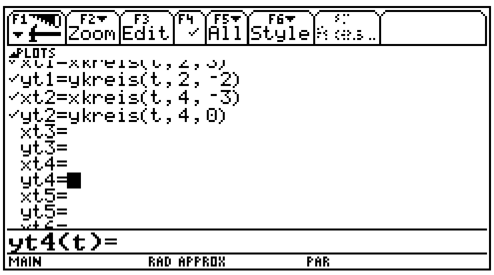


Abb.7.3.3: So sieht der y-Editor aus.

Mit dem Ergebnis unserer Projektarbeit dürfen wir wohl zufrieden sein. Wir können nun

- Kreise in beliebiger Lage im Koordinatensystem darstellen,
- Ellipsen dartellen, deren Achsen parallel zu den Koordinatenachsen sind,
- passende Bausteine definieren, die die verwendeten mathematischen Hilfsmittel zusammenfassen und deren Aufrufe viele Darstellungsmöglichkeiten mit Kreisen und Ellipsen zulassen.

Ein Tipp zum Experimentieren mit dem Baustein:
Probiert den Aufruf

```
xkreis(t, t, -3)
ykreis(t, t, 0)
```

7.4 Übungsaufgaben zum Projektabschluss

Aufgabe 7.4.1:
Stellt euren Mitschülern zwei Aufgaben aus dem von euch bearbeiteten Themenbereich. Lasst die Aufgaben bearbeiten und korrigiert sie.

Aufgabe 7.4.2:
Bearbeitet in gemeinsamer Arbeit das Arbeitsblatt 7.f.

Aufgabe 7.4.3:
Ergänze die Inhalte der folgenden Tabelle mit den verschiedenen Kreisdarstellungen:

Wurzeldarstellung	Parameterdarstellung	Darstellung in Polarkoordinaten
$x^2+y^2= 6$ bzw. $y = \sqrt{(6-x^2)}$, $y = -\sqrt{(6-x^2)}$		
	$x(t) = 3*\cos(t)$, $y(t) = 3*\sin(t) + 5$	
		t aus [0°, 360°], Radius r = 6.5
$(x-3)^2 + (y+4)^2 = 25$ bzw. $y = \sqrt{?}$		

Aufgabe 7.4.4:
Nenne Gleichungen für die Kreise mit den angegebenen Mittelpunkten und den genannten Radien.
a) M(0, 0), r = 12 b) M(1, 5), r = 3 c) M(–3, –4), r = 1 d) M(2.5, 1), r = 4.5.

Aufgabe 7.4.5:
Nenne Punkte auf den Kreisen von Aufgabe 3.

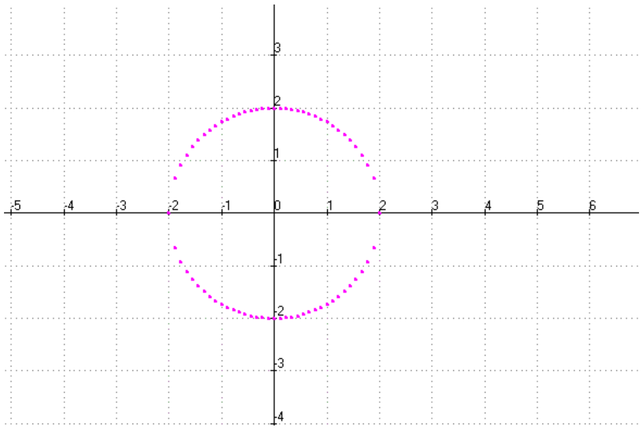
Aufgabe 7.4.6:
Untersuche die Lage selbst gewählter Punkte zu den in Aufgabe 7.4.4 genannten Kreisen. Wähle die Punkte so, dass verschiedene Lagen berücksichtigt werden (im Kreis, auf dem Kreis, außerhalb des Kreises). Benutze geeignete Rechnungen.

Arbeitsblatt 7.f:

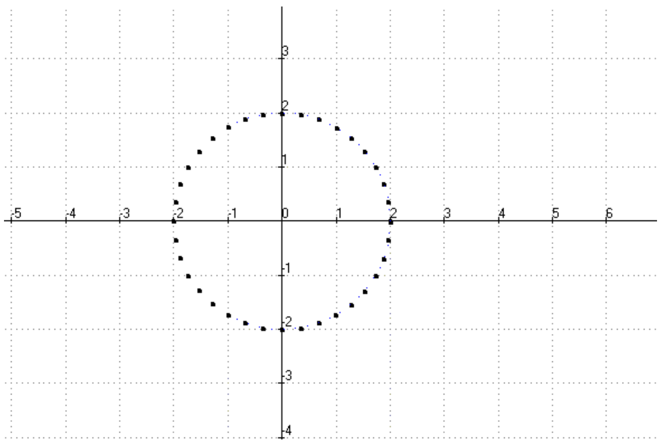
Nicht ganz leicht!

Dreimal „Kreis mit dem Radius r = 2”.

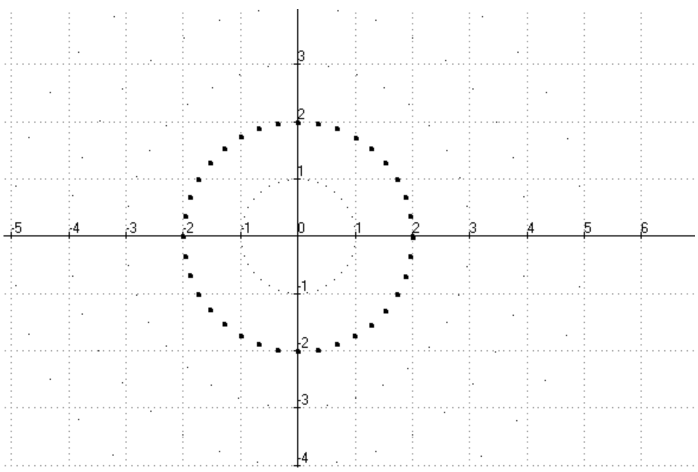
(1) $x^2 + y^2 = 2^2$



(2) $x(t) = 2*\cos(t)$
$y(t) = 2*\sin(t)$



3) r=2, α = t
Polarkoordinaten!
Informiere dich!



Aufgabe:

Erkläre die drei Darstellungen. Vergleiche!

Anhang: Das Bausteindreieck

A.1 Zum Begriff des Parameters –die Bedeutung von Parametern im Unterricht

Im Duden Informatik (2.Auflage, Dudenverlag, 1993, S.507) wird definiert:

„**Parameter**: Platzhalter in einer Programmeinheit, der erst bei der konkreten Verwendung (↑Aufruf) der Programmeinheit festgelegt wird. Die in der Programmeinheit stehenden Platzhalter bezeichnet man als **formale Parameter**, die im Aufruf der Programmeinheit stehenden Werte als **aktuelle Parameter**. Programmeinheiten sind ↑ Prozeduren, ↑ Funktionen, ↑ Module oder andere spezielle Konstrukte. ... Parameter können ↑ Konstanten, ↑ Variablen, ↑ Marken, ↑ Prozeduren, ↑ Funktion usw., d.h. alle in einem Programm definierbaren Objekte sein."
„**Parameterübergabe**: Bei einem ... ↑ Aufruf müssen die formalen Parameter auf festgelegte Art durch die aktuellen Parameter ersetzt werden."

Bekanntlich sind Kurvenscharen ein Standardthema in der Analysis, das viel interessante Mathematik beinhaltet und nicht ohne Grund beliebt im Unterricht und bei Klausuraufgaben ist. Hierbei werden die Schüler - möglicherweise erstmals - auch mit dem Umgang mit Parametern vertraut gemacht. Weitere Gebiete, in denen schon lange mit Parametern gearbeitet wird, sind die vektorielle analytische Geometrie (z.B. bei Geradengleichungen) oder Kurven in Parameterform. Dabei werden vielfach knappe Termabkürzungen wie f, r, y verwendet, mit denen man viel an Verständnis und an unterrichtlichen Möglichkeiten verschenkt. Schreibweisen, die die Parameter explizit nennen, erweisen sich als günstiger. So schreibt man z.B.:

Kurzschreibweise	ausführliche Notation / Aufrufbeispiel
Kurvenscharen $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$ mit $x,a,b,c,d \in 3$,	$f(x, a, b, c, d) = ax^3 + bx^2 + cx + d$ Aufrufbeispiel: $f(x, 1, 2, 3, 4)$
Vektorielle Geradengleichung $r = r_1 + tu$,	$r(t) = r_1 + tu$ Aufrufbeispiel: $r(5)$
Kurve in Parameterform $x = \cos(t)$, $y = \sin(t)$	$x(t) = \cos(t)$ und $y(t)= \sin(t)$ Aufrufbeispiel: $x(\pi/3)$, $y(\pi/3)$
Trapez-Flächeninhalt $A = (a + b) / h$	$A(a,b,h) = (a + b)*h / 2$

Es lohnt sich, derartige Schreibweisen schon frühzeitig - schon in der Sekundarstufe 1 (ab Klasse 7!) – zu verwenden. Welche Gründe sprechen dafür, was ist zu beachten?

- Die Terme erscheinen unter einem gemeinsamen Aspekt, indem die Schreibweise auf das Wesentliche reduziert wird, nämlich auf die gewählte Einsetzung, Unterschiede werden deutlicher.

- An der kompakten Schreibweise (z.B. f(x,a,b,c,d)) wird deutlicher, dass man diverse Einsetzungen für die Parameter vornehmen kann. Dieser Aspekt verstärkt die Motivation, Einsetzungen zu erproben und gibt damit den Anreiz zu experimenteller Arbeit.

- Statt der einzelne Exemplare eines Objekttyps rücken nun Teilmengen von Objekten ins Blickfeld. Zum Beispiel ist nun nicht mehr nur eine einzelne Kurve von Interesse, sondern es geht gleich um Kurvenscharen – und erst aus dem Vergleich verschiedener Exemplare erschließen sich in der Regel die entscheidenden Eigenschaften. Damit wird auch der Wunsch nach Fallunterscheidungen unterstützt.

- Die Überlegungen bezüglich der einsetzbaren Werte verbreitern das Anwendungsfeld des Terms auf (manchmal unerwartete) unterschiedliche Bereiche. So ist es z.B. möglich in gewisse Terme statt reeller Zahlen auch quadratische Matrizen einzusetzen.

- Die Schreibweise mit Parametern ist „computeralgebra-freundlich" und wird von den CAS-Systemen entsprechend unterstützt – sowohl in algebraischer, als auch in grafischer Hinsicht. Beispiel: `define parabel(x, p, q) = x^2 + p*x +q`.

- Die schon für die Sekundarstufe 1 sehr nützliche Konzeption von Unterricht unter Parameter-Aspekten erweist sich als ausgezeichnete Vorbereitung für die Probleme der Sekundarstufe 2.

Wir können somit festhalten:

Im „Denken in Parametern und Bausteinen" liegen erhebliche unterrichtliche Möglichkeiten, die sich durch die Verwendung von Computeralgebrasystemen (CAS) und Funktionenplottern noch verstärken bzw. erst machbar werden.

Es ist jedoch zu beachten:

Beim Unterricht mit dem Parameterkonzept muss dafür gesorgt werden, dass der zugrunde liegende, ausführlich geschriebene Term stets im Blickfeld bleibt.

A.2 Das Bausteindreieck

Die folgenden Ausführungen sind zunächst für den Lehrer als grundlegende Informationen über die didaktisch-methodischen Möglichkeiten des Bausteineinsatzes gedacht. – Wenn Schüler länger mit Bausteinen gearbeitet haben, sollten auch sie diese Ausführungen verinnerlichen. Das wäre ein wesentlicher Beitrag zur Schaffung von Transparenz mathematischer Methoden.

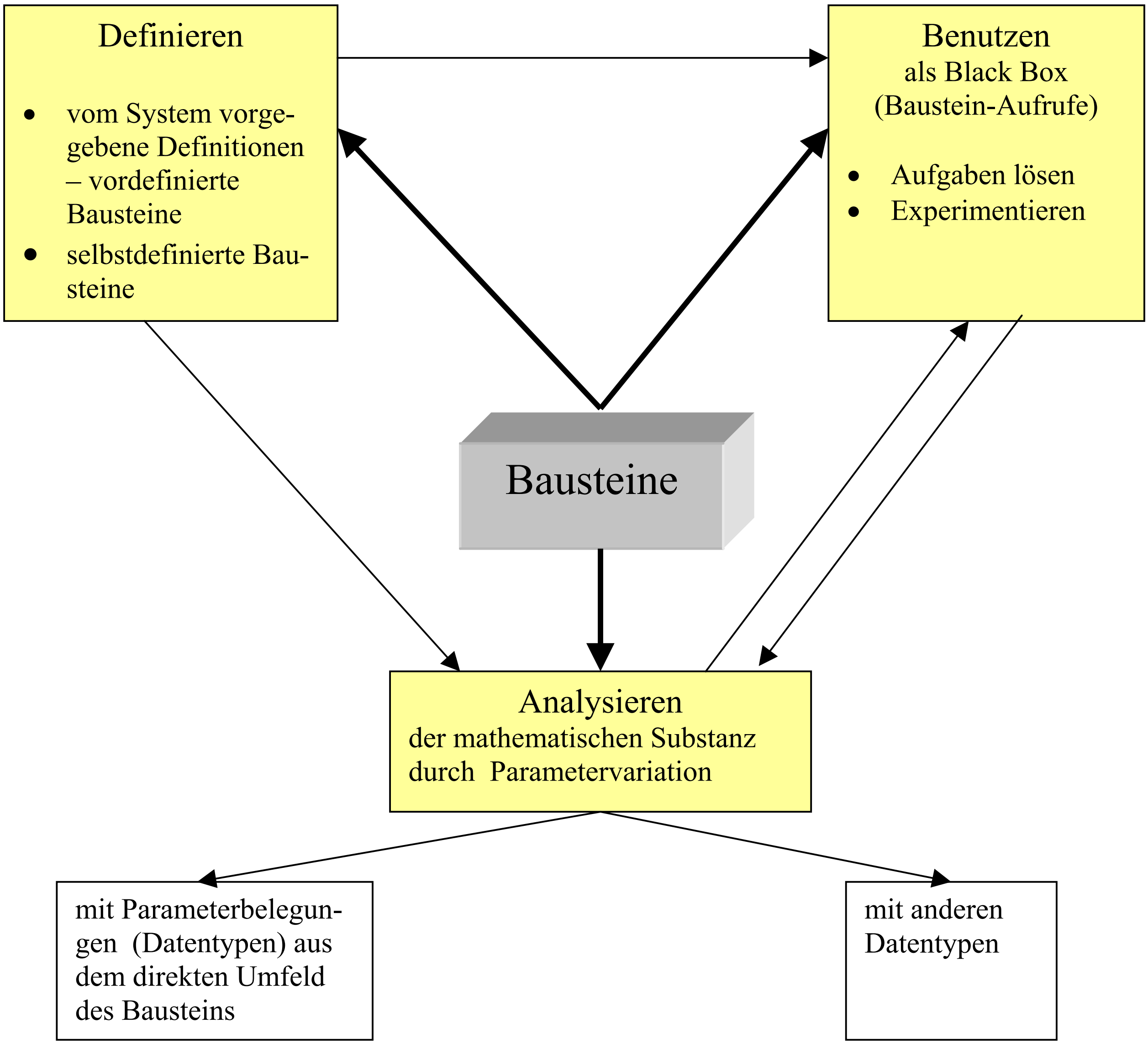


Abb. A.2.1: **Das Baustein-Dreieck**: Definieren, Benutzen, Analysieren

Die Überlegungen von Abb.A.2.1 werden an einem konkreten Beispiel in Abbildung A.2.2 verdeutlicht.

Das Bausteindreieck an einem Beispiel

Beispiel, siehe auch Abbildung A.2.2:
Bausteindefinition bino2(a,b):= $(a+b)^2$
a und b sind formale Parameter

Aufrufe:bino2(3x, -2y) oder bino2(5,6)
3x, –2y bzs. 5, 6 sind aktuelle Parameter

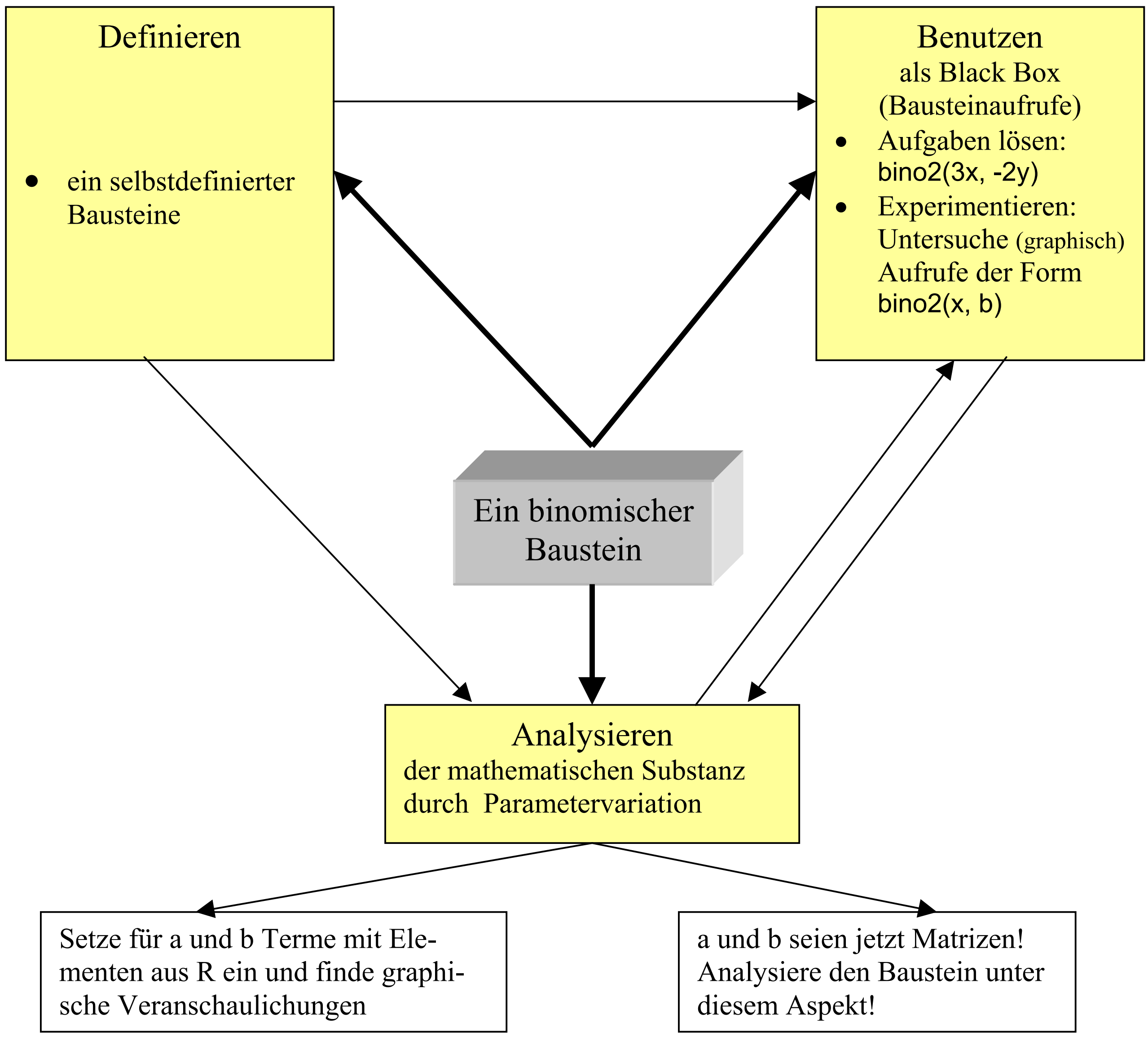


Abb. A.2.2: Das *Baustein-Dreieck* am Beispiel eines binomischen Bausteins

Eine Unterrichtsreihe mit Baustein-Verwendung könnte an jeder der drei Ecken des Bausteindreiecks beginnen.

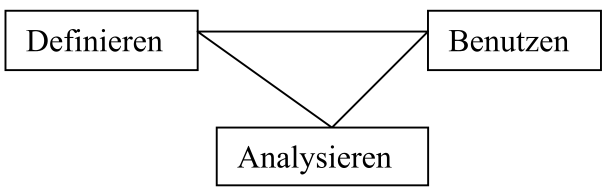


Abb. A.2.3: Startpunkte für die Arbeit mit Bausteinen

A.3 Bausteine definieren, benutzen, analysieren

Alle folgenden Ausführungen sind davon abhängig, wie weit die Schüler bereits Bausteine kennen oder ihnen erstmals begegnen. Je nach Situation sind dann unterschiedliche Wege möglich. Wir beginnen hier mit der Definition eines Bausteins.

A.3.1 Definieren eines Bausteins

> Es gehört zu den bevorzugten Arbeitsweisen mit einem CAS, Objekte (Terme, Gleichungen usw.) mit einem passenden Namen und geeigneten Parametern zu versehen, jedenfalls wenn das Objekt mehrmals verwendet werden soll.

In dieser passenden Bezeichnung liegt bereits eine wesentliche Grundlage für die Definition von Bausteinen und die Arbeit mit ihnen. Deshalb sollten solche Bezeichnungen schon nach kurzer Zeit eingeführt werden. Die Namen der Bezeichner sollten treffend („sprechend”) gewählt werden, aber auch nicht zu lang sein:

Beispiele:

Anlass, Erläuterung	Definition des Bezeichners	Benutzen des Bezeichners
Die Gleichung 2x+3(x–4) = 6 wird z.B. abgekürzt mit gleich1(x).	gleich1(x) : = 2x+3(x–4) = 6	• gleich1(3), ist 3 eine Lösung? • solve(gleich1(x),x), löse die Gleichung nach x auf
Der Funktionsterm f(x) = a*sin(x) soll häufiger benutzt werden.	funkf(x, a) : = a*sin(x)	• funkf(x, 2), die Funktion y = 2sin(x)
Wir wollen Anwendungen binomischer Formeln bearbeiten.	binomi(a,b,n) : = (a+b)^n	• binomi(a,b,3) • binomi(x,1,2)
Für den folgenden Unterricht werden mehrfach Zeichnungen der Differenzenquotientenfunktion benötigt..	diffq(x,h) : = (f(x+h)–f(x)) / h	• f(x) : = sin(x) Diffq(x, 0.1) • f(x) : = e^x Diffq(x, 0.1)

Wenn wir nun einen Bezeichner mit Parametern benutzen, so ist damit auch bereits ein Baustein definiert.

Im folgenden wird eine Unterrichtseinheit beispielsweise mit dem Aspekt **„Baustein benutzen”** gestartet.

A.3.2 Benutzen eines Bausteins

In diesem Fall liegt der Baustein solve(...) fertig, also schon definiert vor. Er ist eine Black Box, die vielleicht auch schon früher verwendet wurde oder die für die Schüler neu ist. Er dient jetzt beispielsweise zur Lösung der folgenden Aufgabe.

Aufgabe:	**Lösung:**
Bestimme den Schnittpunkt der Geraden g1 und g2. g1: y = 2x +1, g2: –3x – 4y = +2	*Im Schnittpunkt S der beiden Geraden (falls sie einen besitzen) sind x- und y-Wert bei beiden Geraden gleich. Somit kann man S durch Lösung eines linearen Gleichungs-systems bestimmen.*
Falls der Baustein bekannt ist	*Hierfür können wir den Baustein* solve *benutzen:* ***solve(y = 2x +1 and –3x – 4y = +2, {x,y})****.* *Als Schnittpunkt ergibt sich S(-6/11, –1/11).*
Falls der Baustein nicht bekannt ist:	Nun müsste der Lehrer oder ein kundiger Schüler diese Möglichkeit des Lösens von linearen Gleichungssystemen vorführen und erläutern.

Zusammenfassung:
Bei dieser Aufgabe wurde der Baustein solve(...) zur Lösung eines linearen Gleichungssystems verwendet – also als Black Box., denn für den Lösungsalgorithmus haben wir uns hier nicht interessiert.

A.3.3 Bausteine sind Black-Boxes

Die Abbildungen A.3.3-a und A.3.3-b spiegeln zwei wichtige Aspekte der Arbeit mit Bausteinen wider:

(1) Ein Baustein, der in Form einer Black Box vorliegt, wird analysiert – eine White Box entsteht.

(2) Ein Baustein wird schrittweise entwickelt, bis er als Black Box „abgelegt” wird.

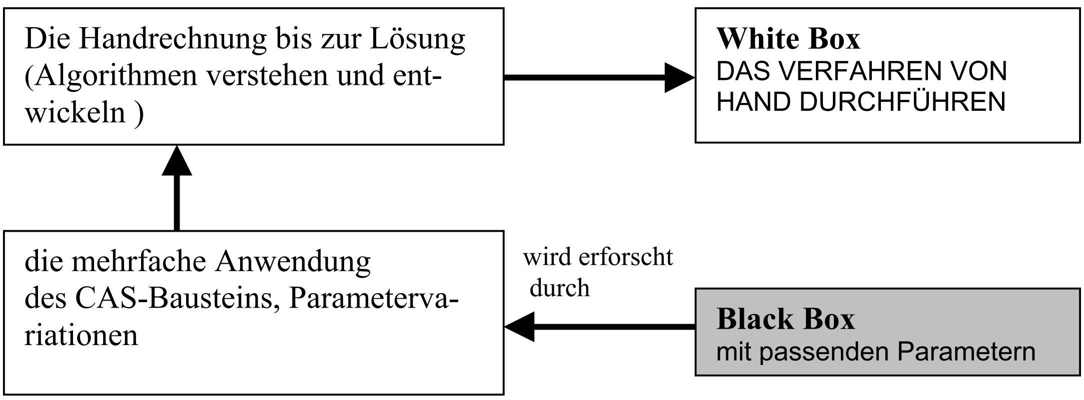


Abb. A.3.3-a: Ein Baustein wird erforscht (analysiert)

Bausteine - Black Boxes

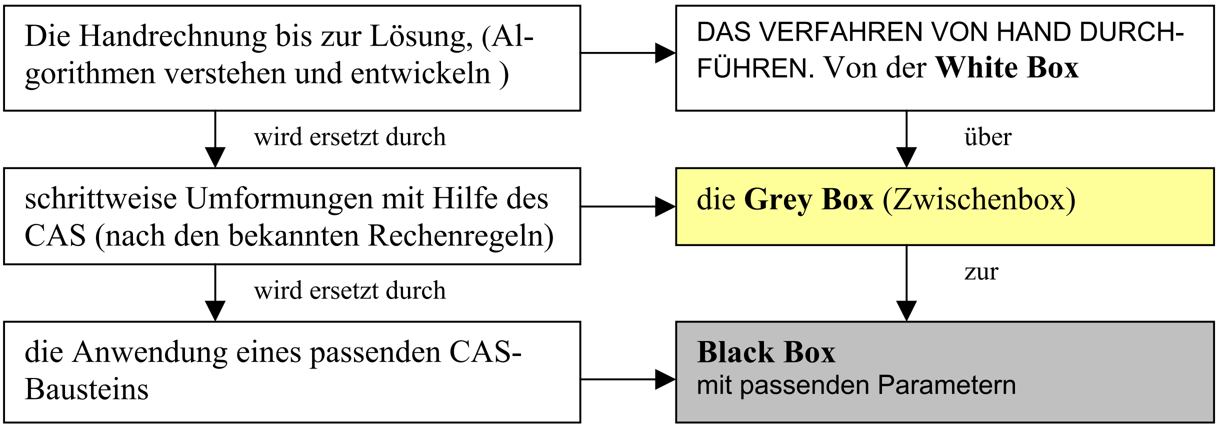
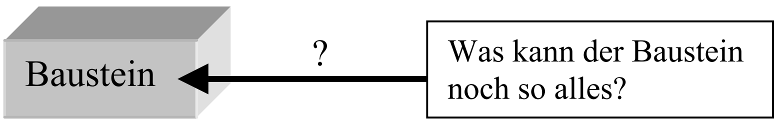


Abb. A.3.3-b: Hinführung zu Bausteinen und Black Boxes

A.3.4 Analyse eines Bausteins

Hat man einen Baustein mehrfach benutzt und einige seiner Anwendungsmöglichkeiten erkannt, besteht möglicherweise der Wunsch, in ihn hineinzublicken



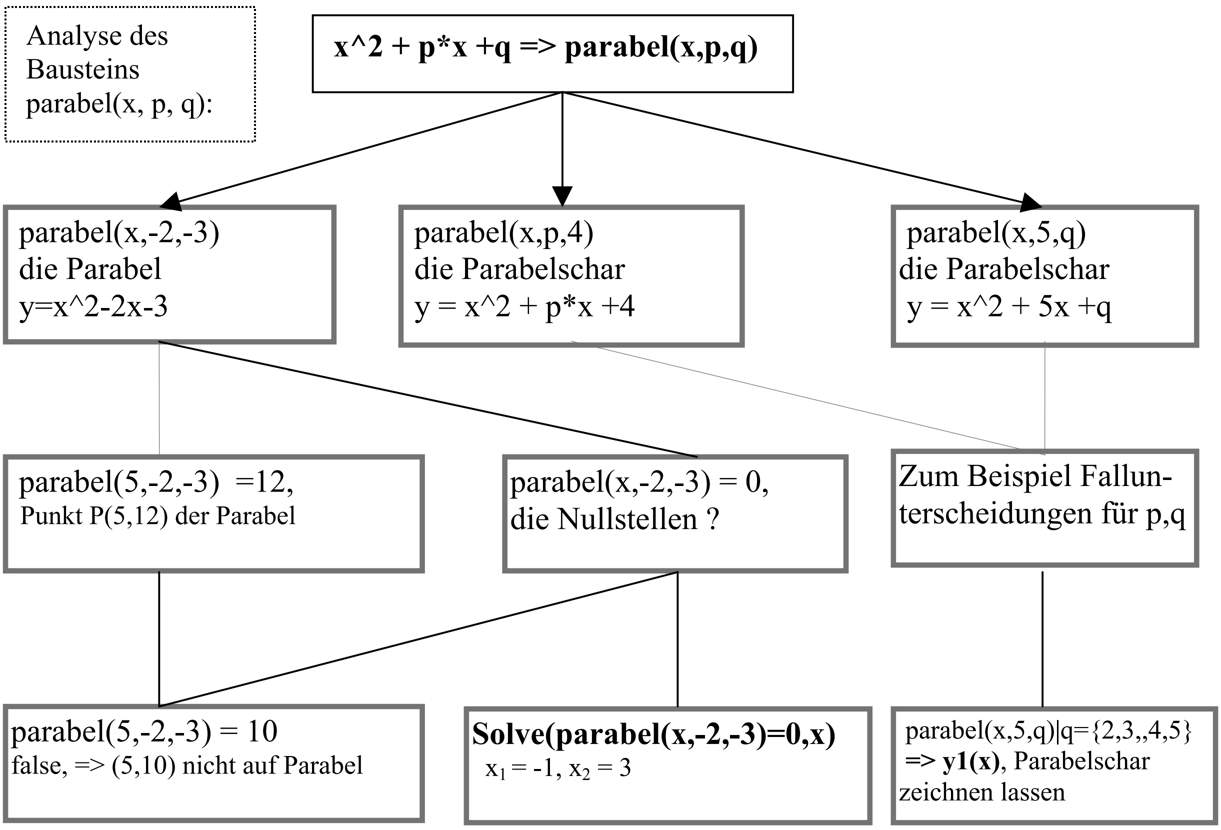


Abb. A.3.4-a : Einige Stationen möglicher Bausteinaufrufe mit aktuellen Parametern

A.4 Warum Bausteine mit Parametern im Unterricht? Unterrichtserfahrungen

Bausteine bringen Terme mit Parametern in eine übersichtliche und kompakte, leicht verwendbare Form.

Erweiterung des Vorrats an Strategien zur Problembearbeitung
Die Suche nach einem Lösungsansatz ist häufig auch die Suche nach einem geeigneten, schon vorhandenen oder noch zu definierenden Baustein.

Allgemeine Lösungen von Problemen rücken wieder mehr in der Vordergrund
Da Bausteindefinitionen in der Regel mit Parametern erfolgen, werden auch die mit Zahlenwerten gestellten Aufgaben schon beim Lösungsansatz häufig verallgemeinert.

Mehr Selbständigkeit bei der Arbeit mit mathematischen Inhalten
Ein vorhandener oder gerade definierter Baustein regt wegen seiner Parameter von sich aus zum Forschen und Entdecken an. Offene Unterrichtsformen unterstützen diesen Ansatz.

Viele Objekte werden gleichzeitig bearbeitet
Der Unterricht wird sich nicht mehr so viel mit einzelnen Objekten beschäftigen. In der Regel können nun auch frühzeitig ganze Klassen von Objekten betrachtet werden (Beispiel: Statt Untersuchungen und Aufgaben zu einer einzelnen Geraden kann es nun solche zu Geradenscharen geben). Dieser Ansatz berücksichtigt die Erkenntnis, dass man aus dem Vergleich mehrerer Objekte und ihrer Strukturierung wesentliche Einsichten gewinnen kann. Dabei wird auch das Überblickswissen gefördert.

Bausteine vernetzen
Jeder Baustein enthält eine eigene kleine „Mathematikwelt“, die auch den Schülerinnen und Schülern deutlich werden kann. An die Stelle vieler Einzelaufgaben tritt nun eine miteinander vernetzte (durch den Baustein) zusammengehörige „Mathematikwelt“.

Die bisher übliche sequentielle Abarbeitung des Lehrplan wird aufgebrochen
zugunsten einer mehr gleichzeitigen Bearbeitung von Sachverhalten (siehe z. B. Kapitel 7.2), für die sich dann auch projektartige Organisationsformen anbieten.

Der Unterricht und die Unterrichtsinhalte werden insgesamt transparenter
Das Bausteinprinzip führt unabhängig vom gerade behandelten mathematischen Gebiet zu einer gemeinsamen Sichtweise und erweist sich damit als ein wesentliche Leitidee.

Die Konstruktion von Bausteinen bereitet funktionales Programmieren vor.
Insofern wird ein Beitrag zum Informatikunterricht geleistet.