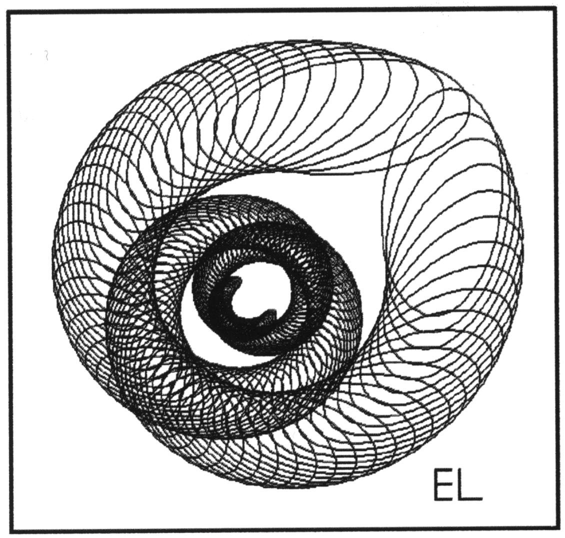
Bundes-MNU Kiel 2005

Das Crap-Spiel

Lineare Algebra - Stochastik -Analysis



Dr. Eberhard Lehmann, Berlin

mirza@snafu.de --- www.snafu.de/~mirza

CRAP ist ein Würfelspiel mit zwei Würfeln und der geworfenen Augensumme.

Man kann es alleine oder zu zweit (oder mit noch mehr Personen) spielen.

(1)
2 Würfel werden geworfen (oder auch ein Würfel zweimal). Dann wird die Augensumme gebildet. Wir nennen diese im 1.Wurf geworfene Summe S'.
a) Wenn man die Augensumme 7 oder 11 wirft, hat man sofort gewonnen!
b) Wenn man die Augensumme 2 oder 3 oder 12 wirft, hat man sofort verloren!
c) In allen anderen Fällen geht es weiter!
(2)
Wir würfeln erneut mit den beiden Würfeln und bilden wieder die Summe. Wir nennen sie S.
a) Wenn man die Summe S = 7 hat, hat man verloren.
b) Wenn man eine Summe S = S' hat (also wie im ersten Wurf), hat man gewonnen.
c) In allen anderen Fällen geht das Spiel weiter bei (2)

Hinweis: S' ist also immer die Summe des ersten Wurfes

Spielregeln

Fassung 1

Das CRAP-Spiel ist gut geeignet

Im Rahmen eines Lineare Algebra-Kurses

Begriffe: Zustandsgraph, Matrix, Matrizenverknüpfungen (Multiplikation, Potenzen),

• als problemorientierter Einstieg zur Matrizenmultiplikation

• als Anwendungsaufgabe

• als Matrizenprojekt

Sek.2

Im Rahmen eines Stochastik-Kurses

Begriffe: Zustandsgraph mit Wahrscheinlichkeiten, Baumregeln, Simulation, Häufigkeiten

• als problemorientierter Einstieg zur Entwicklung von Grundbegriffen der Stochastik

• als Anwendungsaufgabe

• als Stochastik-Projekt

Sek. 2,1

Als gebietsübergreifendes Projekt

Sek.2

Modellierung, Verknüpfung von Linearer Algebra, Stochastik, Analysis (Folgen, unendliche Reihen) – mit Bezügen zur Informatik (Programmieren von Simulationen, stochastischer Automat)

Zur Praktizierung diverser Unterrichtsmethoden, wie

Gruppenarbeitsformen, Projekten, Stationenlernen mit Förderung selbständiges Arbeiten,

Bearbeitung offene Aufgaben, Aufgabenvariationen, Formen von Visualisieren

Sek. 2,1

Siehe Beitrag

Stochastik-Klasse11- Einstieg-Crap.doc

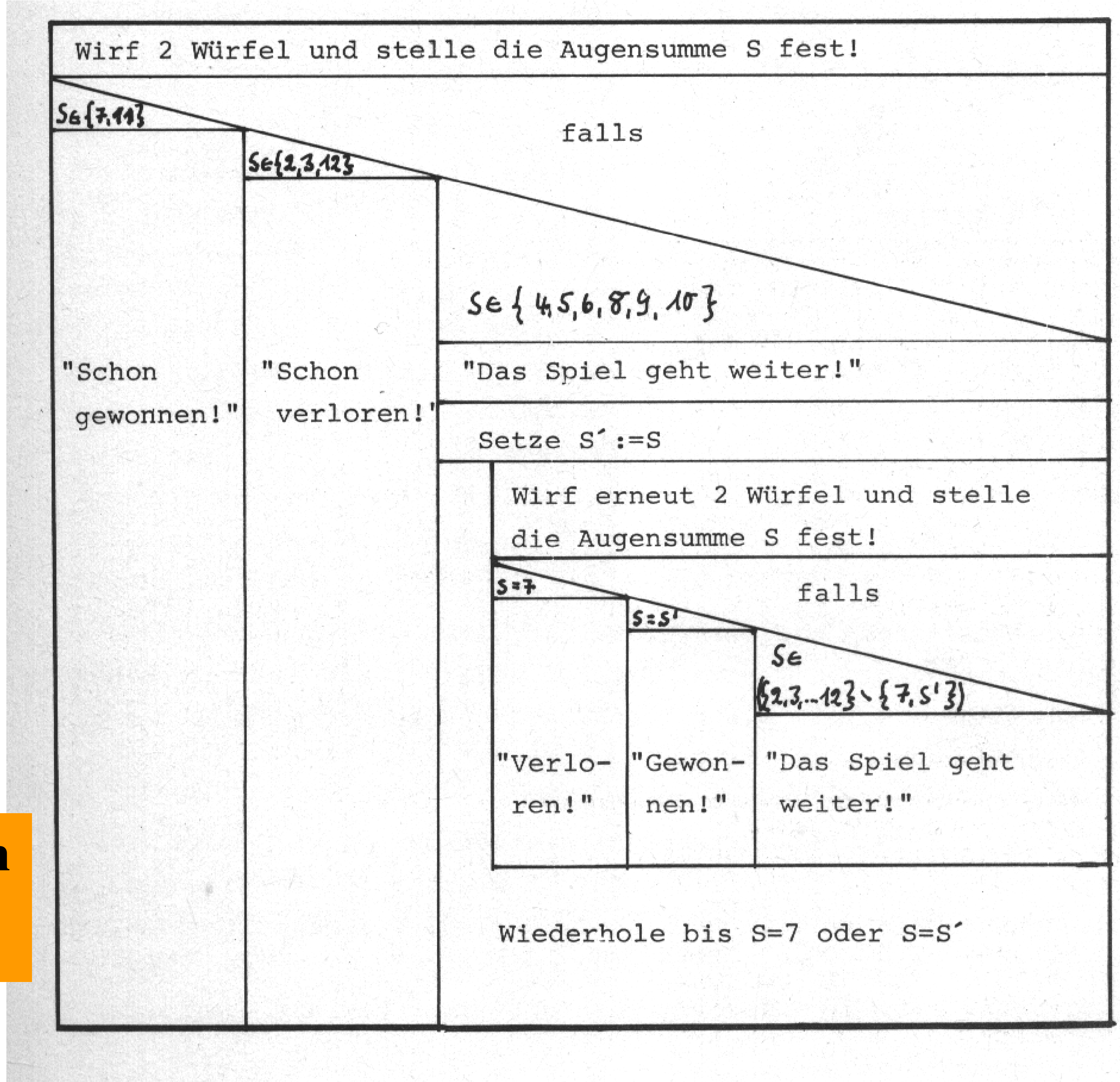
Im Verzeichnis tagung 2005, mnu-kiel

Einen
ausgearbeiteten
projektartigen
Unterrichtsvorschlag
finden Sie in ...

Unterrichtsausschnitte

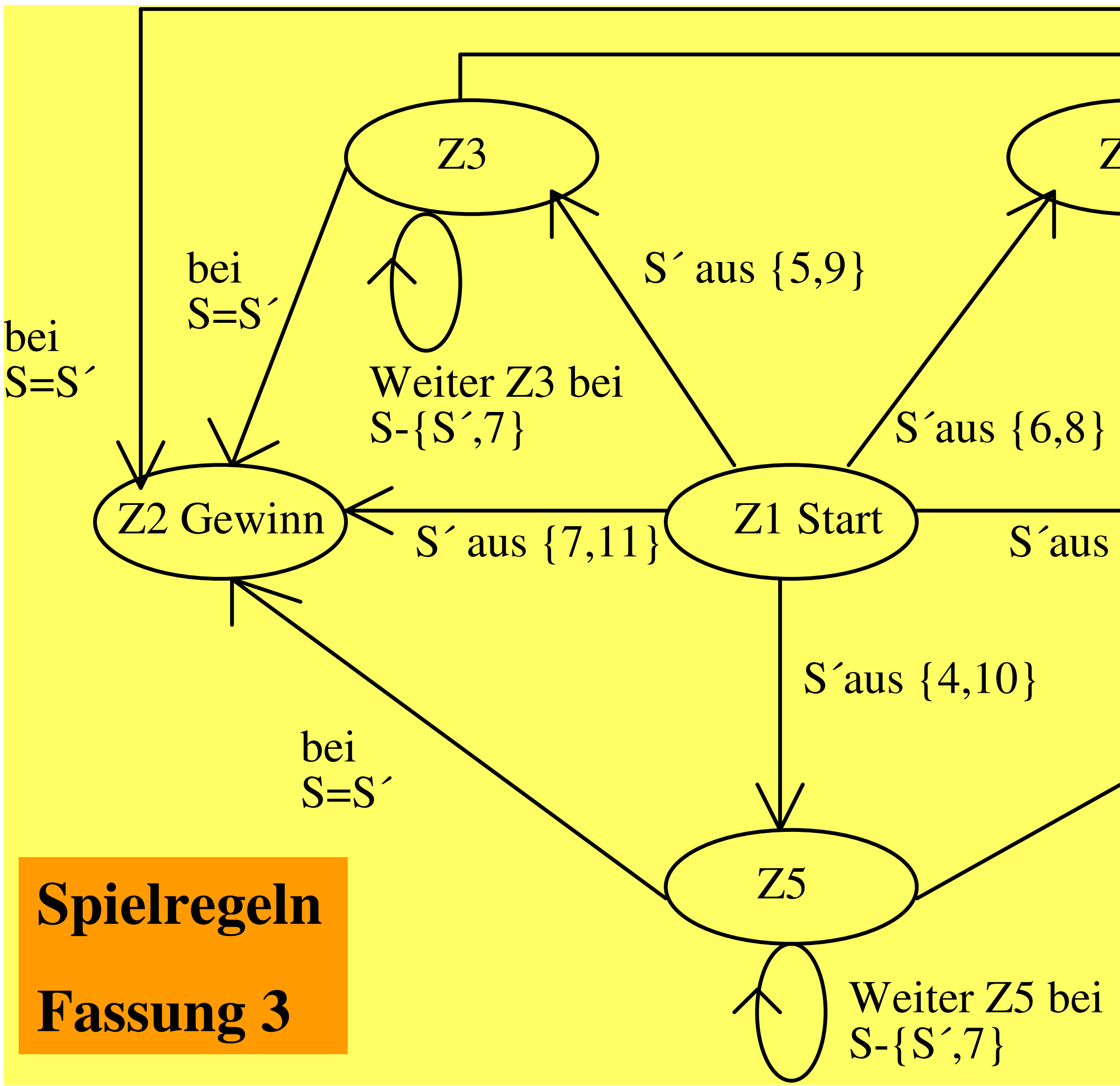
Spielregeln

Fassung 2



Crap-Spiel: Zustandsgraph

Du würfelst mit zwei Würfeln und bildest jeweils die Augensumme



Spielregeln

Fassung 3

S´ ist die im ersten Wurf erzielte Augensumme

S bezeichnet die jeweils nächste Augensumme.

Bei der Untersuchung des Spiels geht es insbesondere um das langfristige Verhalten dieses Systems! - Ist das Spiel fair?

Unterrichtsentwurf – hier Planung als Projekt *E. Lehmann, 19.3.01*

Gruppe 1: Man berechne die Gewinn- und Verlustwahrscheinlichkeit des Crap-Spiels.

Gruppe 2: Bearbeiten Sie die Ausführungen zum Crap-Spiel in Buch *
mit der Problemlösung durch **Simulation**

Gruppe 3: Bearbeiten Sie die Ausführungen zum Crap-Spiel in Buch *
mit der Problemlösung über **unendliche geometrische Reihen**

Gruppe 4: : Bearbeiten Sie die Ausführungen zum Crap-Spiel in Buch *
mit der Problemlösung über **Markow-Ketten**

Gruppe 5: Analysieren Sie die Arbeit des **Programms CRAPAUTO.EXE**

Gruppe 6: Schreiben Sie ein Simulationsprogramm für das **CRAP-Spiel in DELPHI**

Literatur: *Lehmann, E.: Wahrscheinlichkeitsrechnung, Volk und Wissen Verlag, 1997*

Modellbildung – Würfeln von Hand, Protokoll führen und auswerten

w Weiter würfeln, V Verloren, G Gewonnen

w V w G G w V w w w V G w w V G w w w G V w w w w G
w w V w G w w w w w w w w w w w w w w V V w w V G
w w G w V w V G w V V G w w V w w w w V w V G w w w
w w V G V w w w w G w w w G G w w w w w w G w w w w
V w w w w G w V w w w w V w w w V w G w w G w w w w
w w w V w w w w V w w G w w V w V G w V w V

Ergebnisse:

Spielanzahl	=	50		Weiter gespielt	=	101
Gewinne	=	22	44 %	Wurfanzahl insgesamt	=	151
Verluste	=	28	56 %			

Eine Prozedur zur Simulation des Crap-Spiels - etwas Informatik

```
PROCEDURE simulation;
BEGIN
   FOR i:=1 TO anzahl DO
   BEGIN
      s:=RANDOM(6)+1+RANDOM(6)+1;
      IF s IN [7,11]          THEN  gewonnen:=gewonnen+1;
      IF s IN [2,3,12]        THEN  verloren:=verloren+1;
      IF s IN [4,5,6,8,9,10]  THEN  weiter:=weiter+1;
      t:=s;
      REPEAT
         s:=RANDOM(6)+1+RANDOM(6)+1;
         IF s=7 THEN verloren:=verloren+1;
         IF s=t THEN gewonnen:=gewonnen+1;
         IF s IN [2..12]-[7,t] THEN weiter:=weiter+1;
      UNTIL ( (s=7) OR (s=t) );
   END;
END;
```

DAS CRAP-SPIEL ALS AUTOMAT - Simulationsprogramm

```
┌──────────────────────────────────────────────────────────────────────────────┐
│                                                                              │
│                                                                              │
│        ┌───<───────────────<─────────────────<────┐                          │
│        │          ┌─────>────────────────────>──────│──────────>──┐           │
│        │                                          │               │           │
│        │ ┌<─│ Zustand 3 │<───────┐  ┌──────>│ Zustand 4 │───>─┐   │           │
│        │ │  │           │S'ε{5,9}│  │S'ε{6,8}│           │     │   │           │
│        │ │                       │  │                           │   │           │
│        │ │  Weiter S-{S',7}      │  │       Weiter S-{S',7}     │   │           │
│    S=S'                          │  │                              S=7          │
│                                                                              │
│  │ Zustand 2 │<──────────│ Zustand 1 │────────────>│ Zustand 6 │           │
│  │ GEWINN    │ S'ε{7,11}│ START     │ S'ε{2,3,12}│ VERLUST   │           │
│                                                                              │
│    S=S'                            S'ε{4,10}              S=7                 │
│        │                                                   │                  │
│        └──────────────────────│ Zustand 5 │──────────────┘   Spielanzahl =  │
│  Aktuelle Wurfsumme   =                                      Gewinne     =  │
│  Noch ein Spiel (j,n)= ?   Weiter S-{S',7}                   Verluste    =  │
└──────────────────────────────────────────────────────────────────────────────┘
```

Crapauto.exe (Turbo-Pascal-Programm)

Project1.exe aus M-UE (Delphi-Programm)

Zweimal 10000 Spiele

STATISTIK			*Relative Häufigkeit*
Spielanzahl	=	*10000*	
	=	*10000*	
Gewinne	=	*4956*	*0.4956*
	=	*4913*	*0.4913*
Verluste	=	*5044*	*0.5044*
	=	*5087*	*0.5087*
Weiter gespielt	=	*23527*	
	=	*23893*	
Wurfanzahl insgesamt	=	*33527*	
	=	*33893*	

Wahrscheinlichkeitsverteilung ermitteln für die Augensumme beim Werfen mit zwei Würfeln

Augensumme S	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
Wahrscheinlichkeiten	1/36	2/36	3/36	4/36	5/36	6/36	5/36	4/36	3/36	2/36	1/36

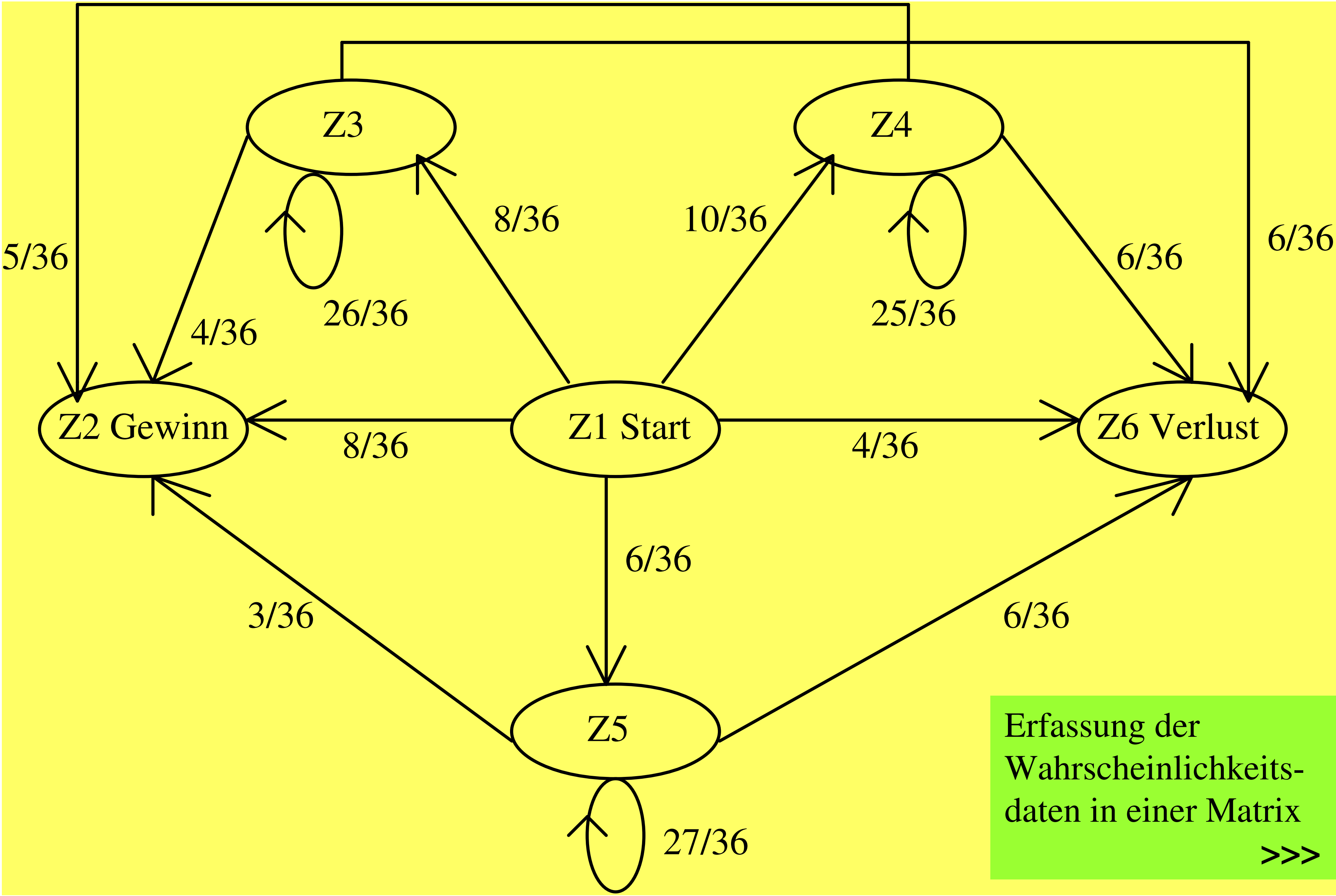
Begriffsbildung: Die Augensumme ist eine *Zufallsgröße* S; die Liste der Wahrscheinlichkeiten wird als *Wahrscheinlichkeitsverteilung* P(S=s) bezeichnet. P(S=s) ist die Wahrscheinlichkeit, dass die Zufallsgröße S gerade den Wert s annimmt.

Zustände definieren - gemäß der W-Verteilung

Augensumme S	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
Wahrscheinlichkeiten	1/36	2/36	3/36	4/36	5/36	6/36	5/36	4/36	3/36	2/36	1/36
Modellbildung sehen!											
	Z6	Z6	Z5	Z3	Z4	Z2	Z4	Z3	Z5	Z2	Z6

Endzustände: Z2 (Gewinn), Z6 (Verlust), Zwischenzustände Z3, Z4, Z5, Startzustand Z1

Crap-Spiel: Zustandsgraph mit Übergangswahrscheinlichkeiten



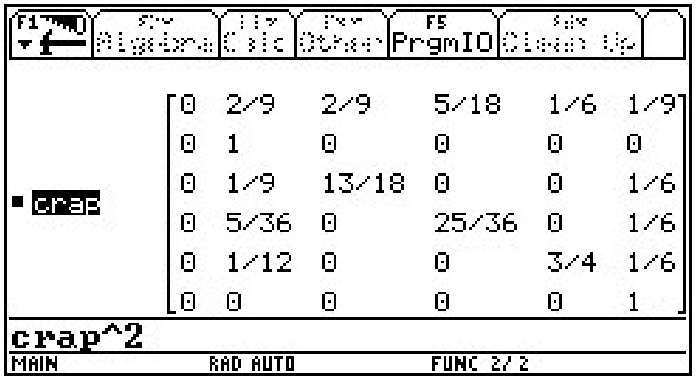
Erfassung der Wahrscheinlichkeits-daten in einer Matrix

>>>

Übergangs-Matrix A(1) = *einstufige Übergangsmatrix*

	Z1	Z2	Z3	Z4	Z5	Z6	
Z1	0	8/36	8/36	10/36	6/36	4/36	*Zeilensumme = 1*
Z2	0	1	0	0	0	0	*Z2 ist Endzustand*
Z3	0	4/36	26/36	0	0	6/36	
Z4	0	5/36	0	25/36	0	6/36	
Z5	0	3/36	0	0	27/26	6/36	
Z6	0	0	0	0	0	1	*Z6 ist Endzustand*

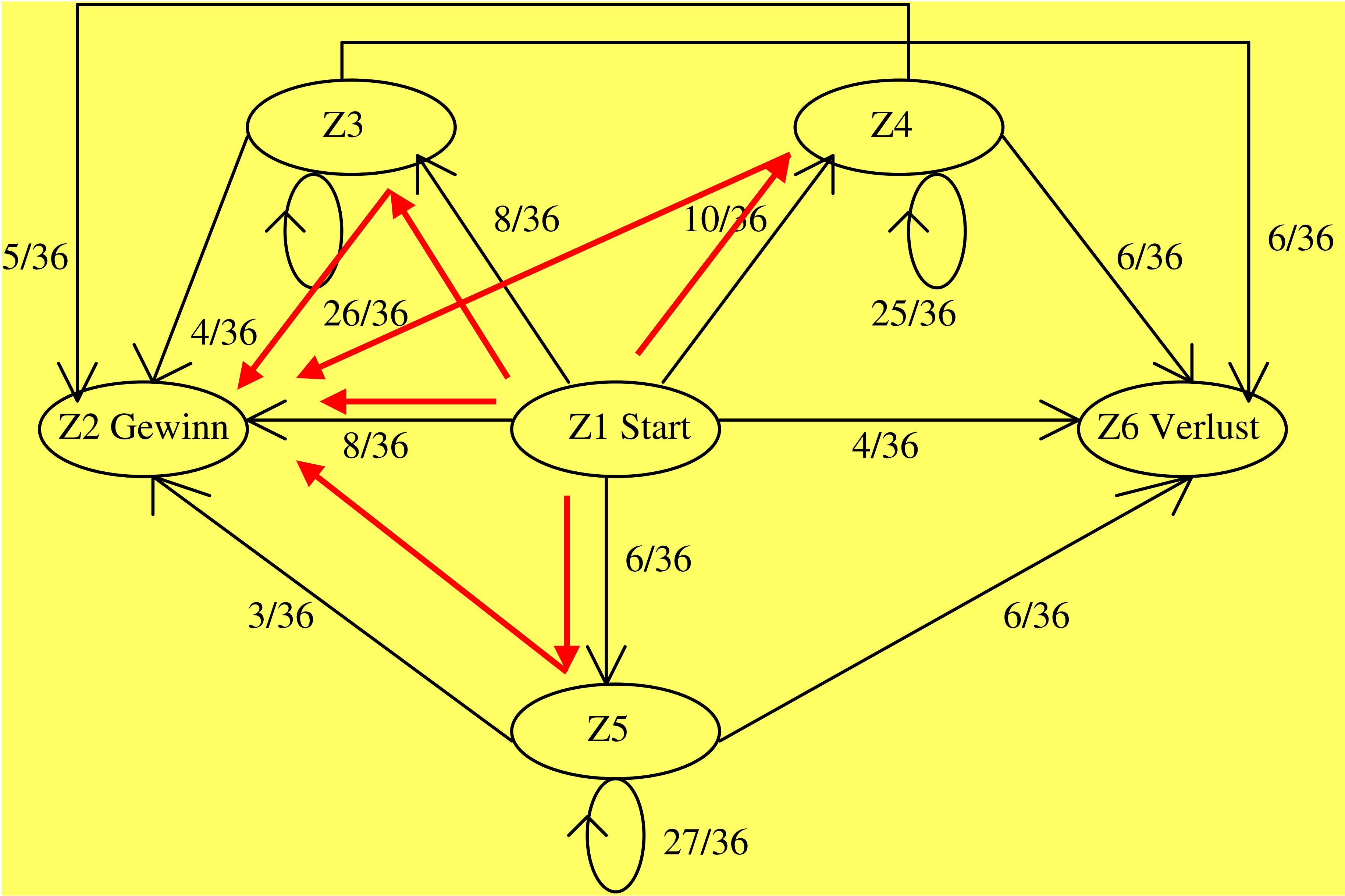
Anmerkungen: Übergänge nach Z1 sind nicht möglich, da Z1 Anfangszustand.



Aufgabe: Wir wollen zunächst zur zweistufigen Übergangsmatrix A(2). Warum muss man die Matrix A mit sich selbst multiplizieren, also $A*A=A^2$ bilden und wie geschieht das?

D2 Problembearbeitung mit Hilfe von Matrizenpotenzen

Überlegungen zur Berechnung der zweistufigen Übergangsmatrix



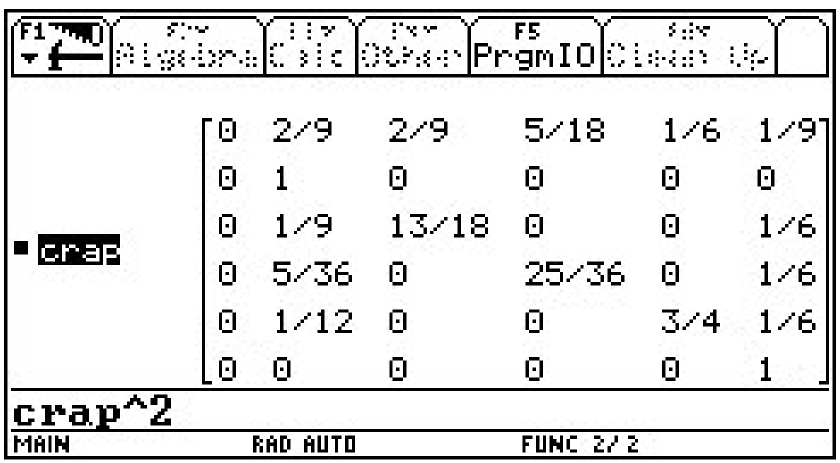
Berechnung der zweistufigen Übergangsmatrix

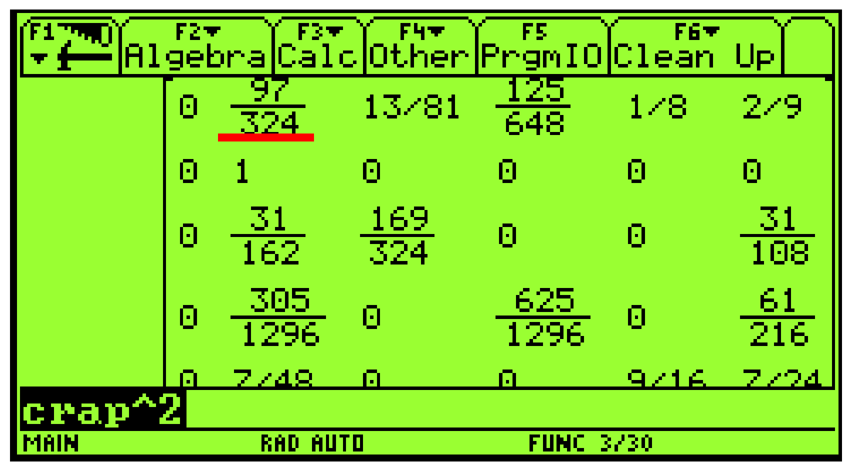
A(2) = A(1)•A(1)

$A^2 = A \bullet A$

Z1	Z2	Z3	Z4	Z5	Z6
0	*8/36*	8/36	10/36	6/36	4/36
0	*1*	0	0	0	0
0	*4/36*	26/36	0	0	6/36
0	*5/36*	0	25/36	0	6/36
0	*3/36*	0	0	27/26	6/36
0	*0*	0	0	0	1

Z1	*0*	*8/36*	*8/36*	*10/36*	*6/36*	*4/36*	?	**X**	?	?	?	?
Z2	0	1	0	0	0	0	?	?	?	?	?	?
Z3	0	4/36	26/36	0	0	6/36	?	?	?	?	?	?
Z4	0	5/36	0	25/36	0	6/36	?	?	?	?	?	?
Z5	0	3/36	0	0	27/26	6/36	?	?	?	?	?	?
Z6	0	0	0	0	0	1	?	?	?	?	?	?





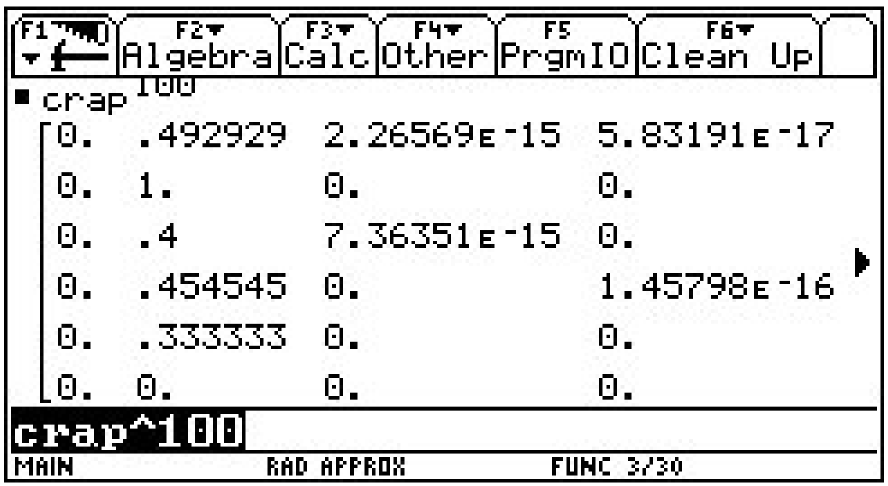
Matrizenpotenz: A(100) = A*A*....A = A^{100} bzw. A^100

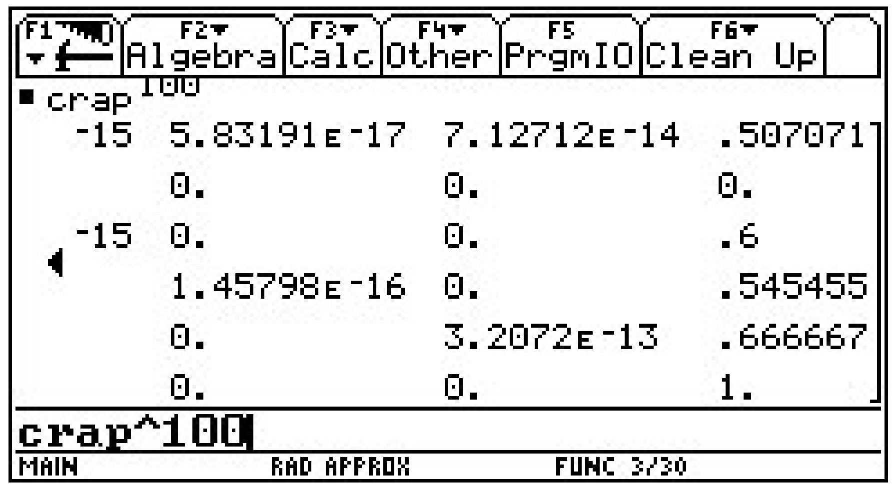
Lässt man nun z.B. A^{100} durch einen Computer berechnen, so erhält man (gerundet):

	Z1	Z2	Z3	Z4	Z5	Z6
Z1	0	0.4929	0	0	0	0.5071
Z2	0	1	0	0	0	0
Z3	0	0.4	0	0	0	0.6
Z4	0	0.4545	0	0	0	0.5455
Z5	0	0.3333	0	0	0	0.6667
Z6	0	0	0	0	0	1

Lösung ablesen

= Matrix A^{100}
(nach 100 Schritten)





D3 Problembearbeitung mit Hilfe von Folgen und unendlichen Reihen

Beispielrechnung für den Übergang von Z5 nach Z2

Anzahl der Schritte	1	2	3	4	n
Wahrscheinlichkeit	3/36	27/36 *3/36	$(27/36)^2$ *3/36	$(27/36)^3$ *3/36	**$(27/36)^{n-1}$ *3/36**

Übergang von Z5 nach Z2 (Summe einer unendlichen geometrischen Reihe)

s = a / (1-q) = (3/36) / (1 - 27/36) = (3/36) / (9/36) = 1/3

Ausgehend von Z1 können wir nach Z2 auf verschiedenen Wegen gelangen:

Weg	Wahrscheinlichkeit	
Von Z1 direkt nach Z2	8/36	
Von Z1 über Z3 nach Z2	8/36 * 2/5	(Multiplikationsregel)
Von Z1 über Z4 nach Z2	10/36 * 45/99	
Von Z1 über Z5 nach Z2	**6/36 * 1/3**	

Das Spiel ist nicht fair!

Verlustwahrscheinlichkeit > Gewinnwahrscheinlichkeit.

Diese Wahrscheinlichkeiten müssen nun noch aufsummiert werden (Additionsregel):

g(Z1 --> Z2) = 244/495 = 0.49292929...
Gewinnwahrscheinlicheit des Crap-Spiels

g(Z1 --> Z6) = 1 - 244/495 = 251 /495 = 0.50717171...
Verlustwahrscheinlicheit des Crap-Spiels

Das Spiel ist nicht fair!

D4 Problemlösung mit einem linearen Gleichungssystem ???

Wenn es eine stationäre Verteilung w (Fixvektor) für das Spiel gibt, muss gelten

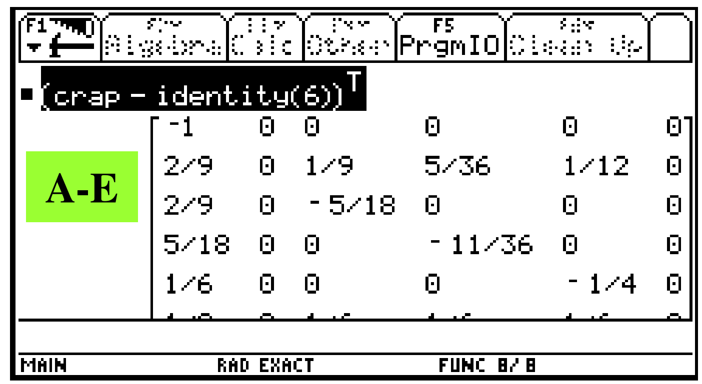
$w_{(1,6)} * A_{(6,6)} = w_{(1,6)}$, kurz $w*A = w$, wobei $w_1 + w_2 + w_3 + w_4 + w_5 + w_6 = 1$. Der Fixvektor w kann ggf. so berechnet werden:

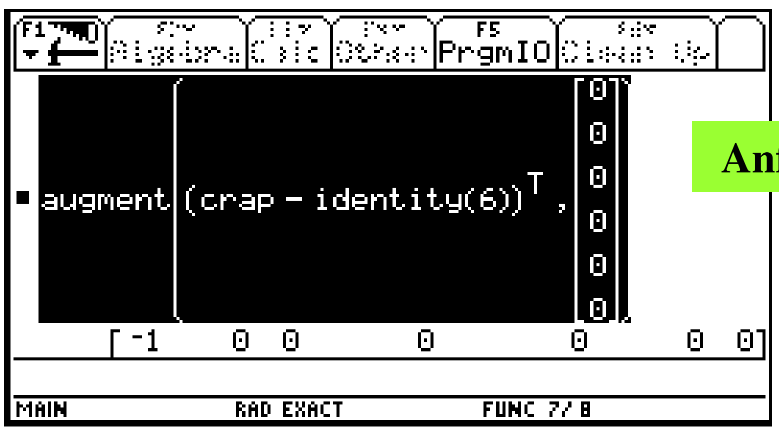
$w_{(1,6)} * A_{(6,6)} = w_{(1,6}$

$w_{(1,6)} * (A_{(6,6)} - E_{(6,6))}) = O_{(1,6)}$

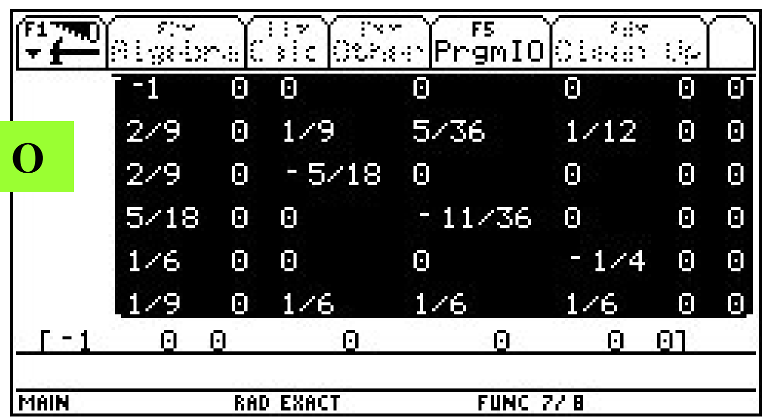
Das ist ein lineares homogenes Gleichungssystem

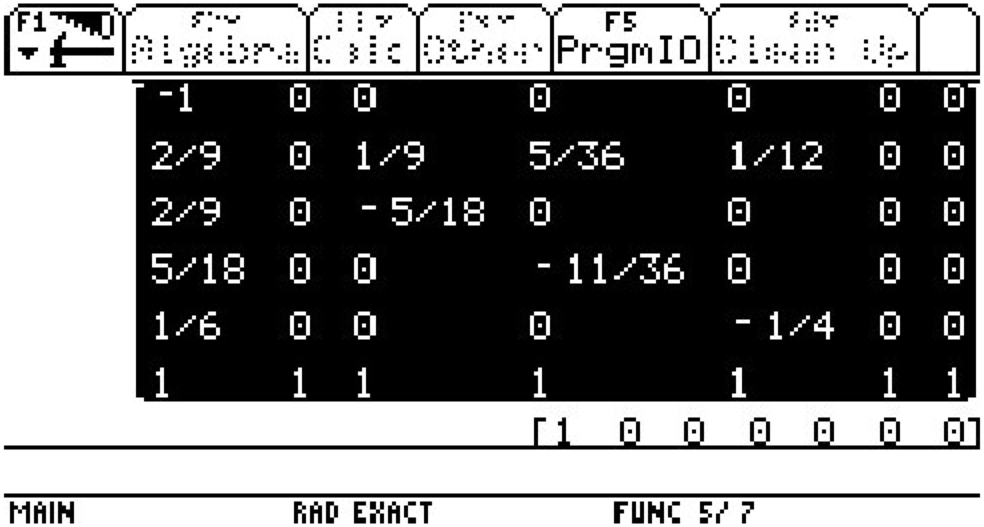
wobei zusätzlich $w_1 + w_2 + w_3 + w_4 + w_5 + w_6 = 1$ gilt





Anfügen von O

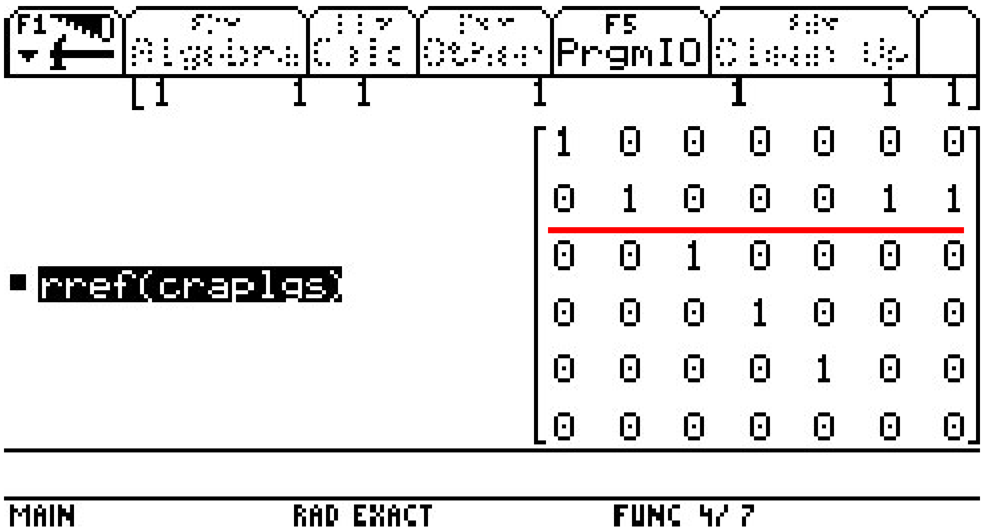




Die bisherige 6.Zeile wird durch lauter 1-en ersetzt. Das ist die Gleichung

$w_1 + w_2 + w_3 + w_4 + w_5 + w_6 = 1$

Diese Matrix wird mit ***craplgs*** abgekürzt.



Auf diese Matrix wird der Gauß-Algorithmus angesetzt (***rref(matrix)).***

Nun kann die Lösungsmenge abgelesen werden. Es gilt:

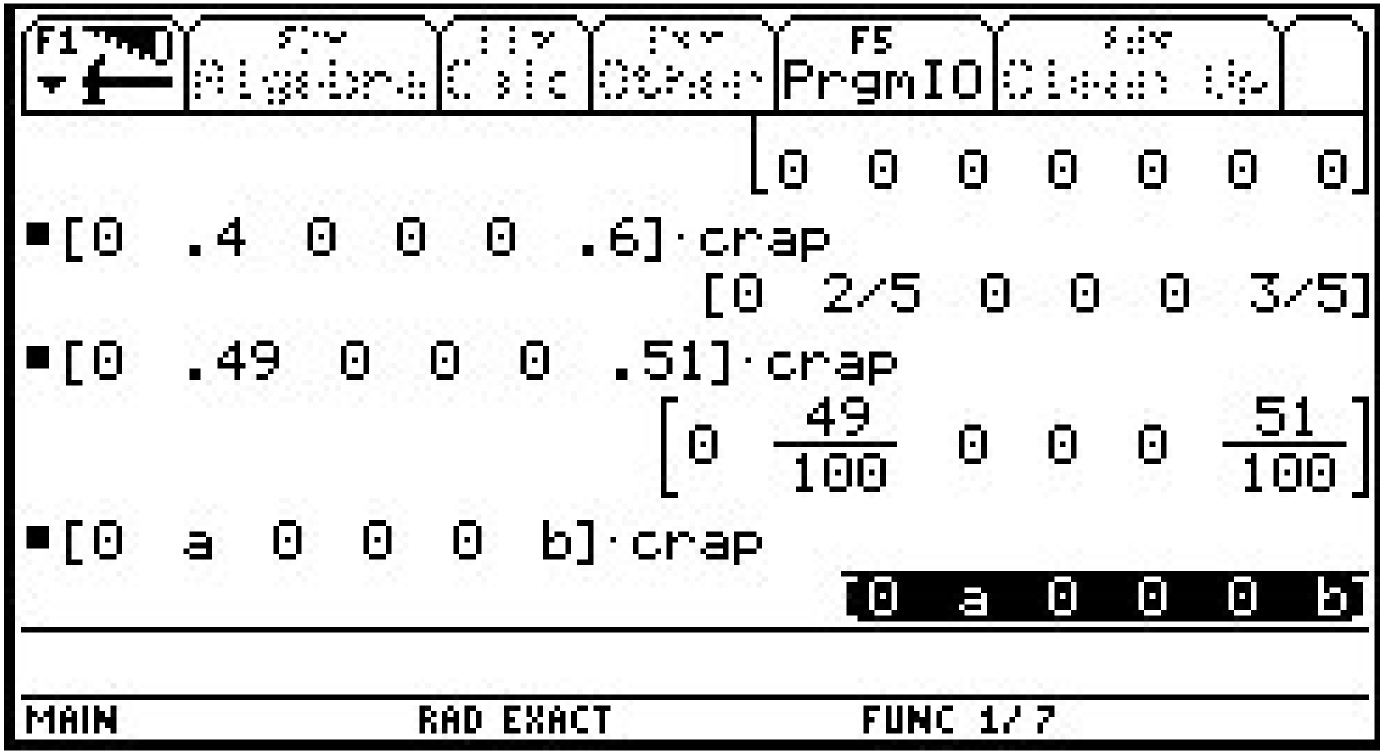
$w_1 = 0$

$w_2 + w_6 = 1$

$w_3 = w_4 = w_5 = 0$

Es gibt also wegen $w_2 + w_6 = 1$ unendlich viele Lösungen. Z2 (Gewinn) und Z6 (Verlust) sind die Endzustände. Das LGS gibt also keine Antwort auf die Frage nach einer Grenzverteilung.

Einige der unendlich vielen Lösungen werden durch Nachrechnen w*A=w erprobt.



Das Crap-Spiel Arbeitswege

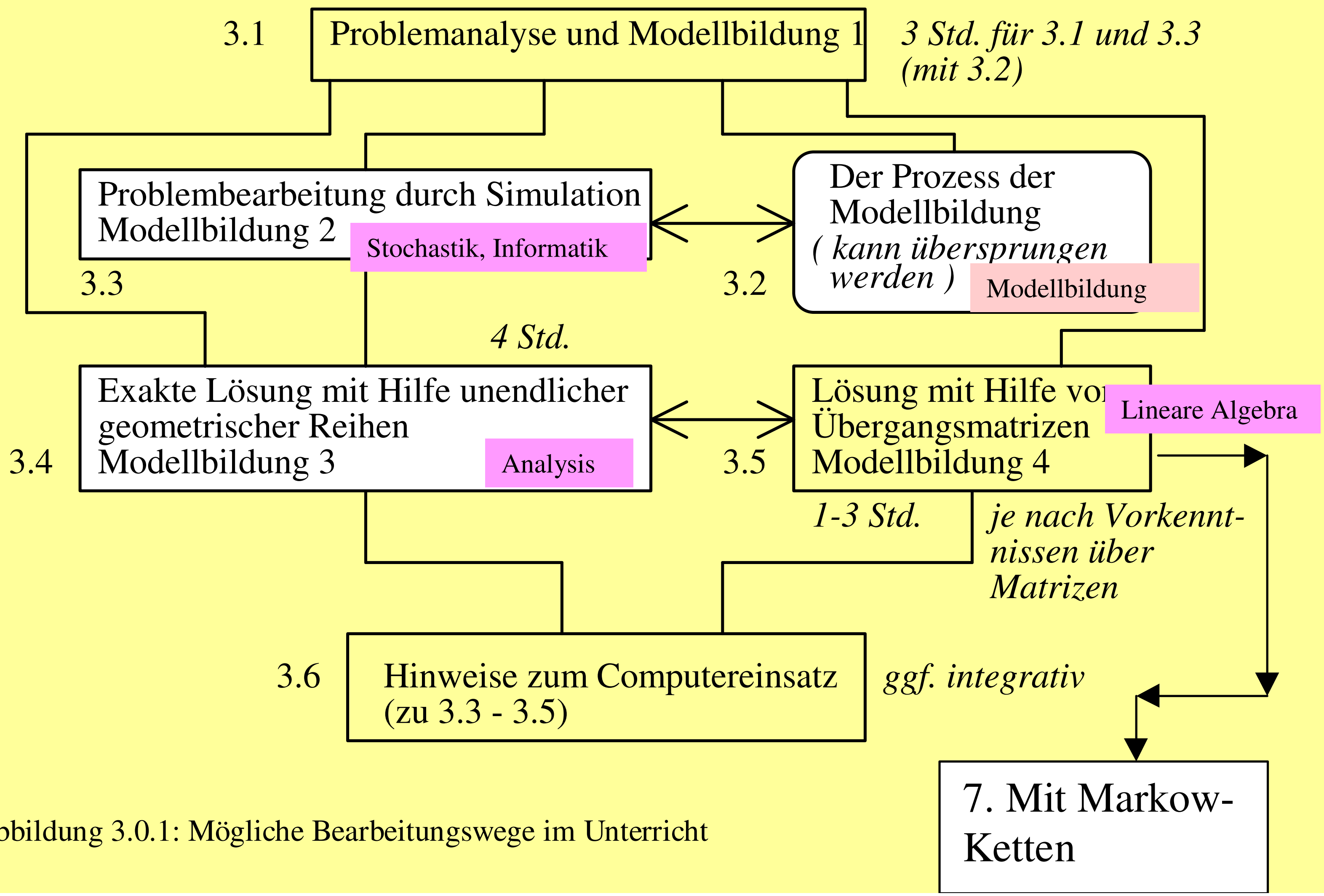


Abbildung 3.0.1: Mögliche Bearbeitungswege im Unterricht

Dr. Eberhard Lehmann
mirza@snafu.de
www.snafu.de/~mirza

Grundlagen von Kursen zur AnaGeo und LinAlg

Matrizen als durchgehendes Prinzip,
Matrizenrechnung
Lineare Algebra

Integration von Anwendungen, in denen Matrizenrechnung benutzt wird.

Lineare Gleichungssysteme

Lineare Algebra und Analytische Geometrie - Kurse

Analytische Geometrie

Integration von Anwendungen, die auf LGS führen

Integration von Anwendungen aus der Abbildungsgeometrie und Computergrafik als Motivation für Analytische Geometrie

Ausnutzen der vielen Visualisierungsmöglichkeiten

Durchgehende Benutzung des Computers als Rechen- und Zeichenhilfsmittel und zum entdeckenden Lernen
(Visualisierungen und Rechnungen mit CAS und anderen Programmen)

Arbeit mit einem Ray-Tracing - Programm (POVRAY) als weitere Ergänzung der Analytischen Geometrie

Bezüge herstellen zu anderen Fächern, z.B. zur Informatik (LK)

unter Verwendung vielfältiger Unterrichtsformen und einer offenen Aufgabenkultur

Eigenwerte

(s.a. Programm Crapmaus.exe)

Berechnung des charakteristischen Polynoms mit DERIVE. Die Funktion kann nun einem Funktionsplotter übergeben werden.

CHARPOLY(crap, v)

$$0.0003858024691 \cdot v \cdot (v - 1)^2 \cdot (4 \cdot v - 3) \cdot (18 \cdot v - 13) \cdot (36 \cdot v - 25)$$

EIGENVALUES(crap, v)

[v = 0, v = 1, v = 1, v = 0.75, v = 0.7222222222, v = 0.6944444444]

Eigenwerte, Eigenvektoren

x*M = r*x (Eigenvektor*quadrat.Matrix = Eigenwert * Eigenvektor)

Eberhard Lehmann, MU-Heft 4, 1993

2.1 Lehrgangsskizze

Matrizen als durchgehendes Hilfsmittel	Lerninhalte mit besonderer Berücksichtigung anwendungs- und problemorientierter Ansätze, und der Möglichkeiten des Computereinsatzes
MATRIZEN I	
A(m,n)	- Tabellen, Matrizen
AB, A(B+C)	- Materialverflechtungsprobleme
vo,voPn	- Kaufverhalten (Anfangsverteilung)
	- Übungen u.a. Entwicklung von Populationen
	- Skalarprodukt, Matrizenprodukt, Matrizensumme, Gesetze
Ax=B	Lineare Gleichungssysteme (LGS)
Rang(A),	- Probleme, die auf LGS führen
Rang(A,B)	- Gauß-Algorithmus
	- Endschema, Lösungskriterien, Matrixrang
	- Anwendungsaufgaben
	- Probleme bei der Lösung von LGS, schlecht- konditionierte LGS, Rechengenauigkeit
rA+sB	- Vektorraum (magische Quadrate, homogene LGS)
	- Lineare Abhängigkeit/Unabhängigkeit, Basis
Analytische Geometrie/ABBILDUNGSGEOMETRIE,	**COMPUTERGRAFIK**
ab	- Inzidenz & Metrik, LGS & Skalarprodukt (s.o.)
Ax=b	- Geraden, Ebenen, Figuren, Abstände, Winkel, Kreis,Kugel
	- Grundlagen der Computergrafik:
x'=Ax, AB	Abbilden mit Matrizen, homogene Koordinaten, (Drehung, Verschiebung, Streckung, Projektion)
MATRIZEN II	
AX=E	- Simultane Lösung mehrerer LGS
A^-1	- Inverse Matrizen
(AB)^-1=B^-1A^-1	- Rückgängigmachen von Abbildungen oder
(E-A)^-1y	- Input-Output-Analyse, Stücklisten
Komplexe Matrixterme,z.B. s(E+M)(M2-E)^-1	Komplexe Aufgabenstellungen mit Matrizenanwendung, z.B. aus der Populationsdynamik
	Matrizenpotenzen (Übergang zum Stochastik-Kurs)
vo,voPn	- stochastische Matrizen (Markow-Ketten), Verteilungen
	- langfristiges Verhalten
w=wP	stationäre Verteilung, Fixvektor,
lim P^n, lim vn	- Grenzmatrix, Grenzverteilung

Abb.1: Beispiel für den Aufbau eines Leistungskurses Lineare Algebra/Analytische Geometrie

Eberhard Lehmann

Lineare Algebra

mit Vektoren und Matrizen

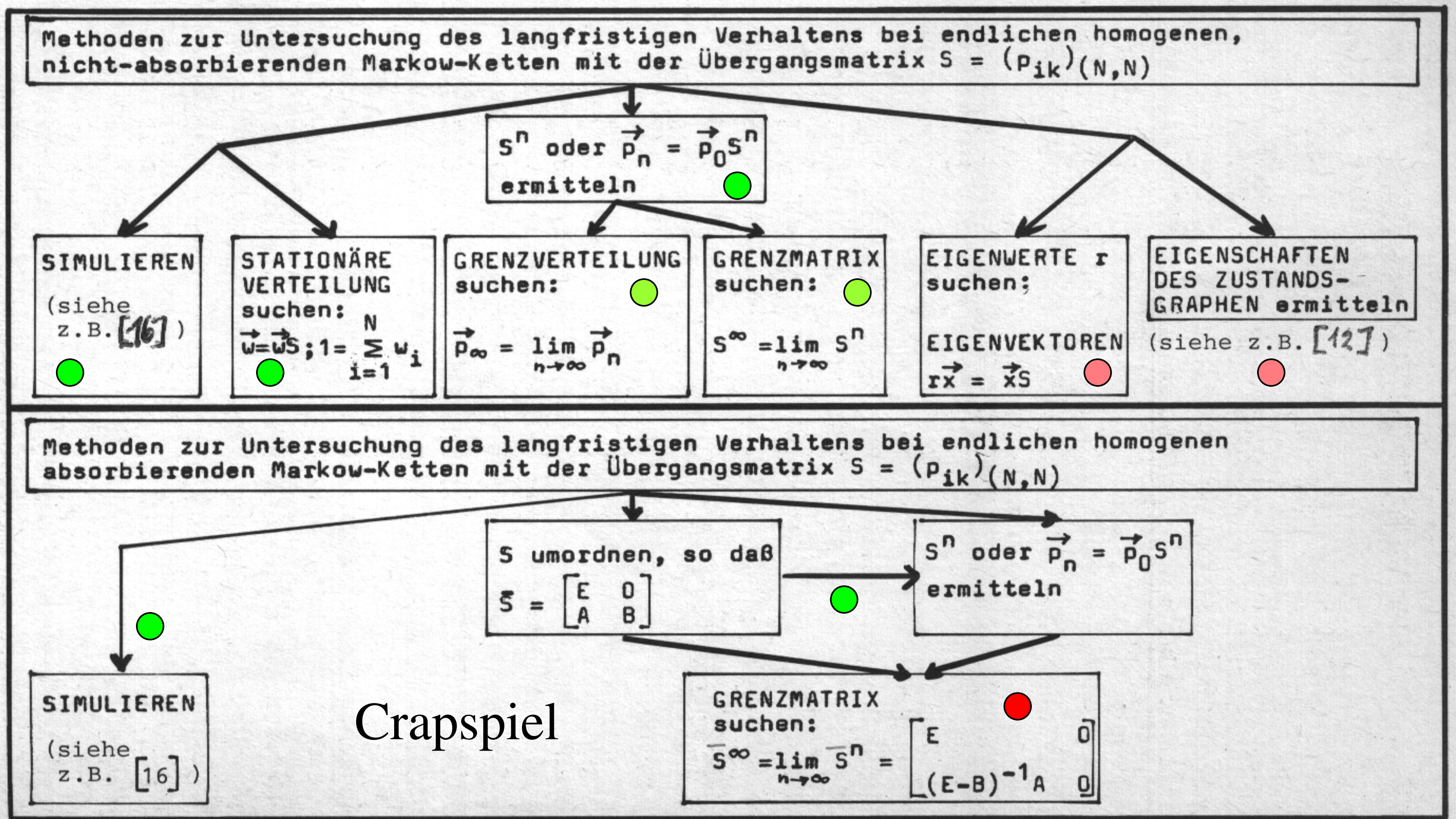
J.B.Metzler

Stuttgart 1990

Zustandsgraphen	Eigenwerte r_i	Übergangsmatrizen S^n, Verteilungen $\vec{p}_n$	Grenzmatrix S^∞	Grenzverteilung $\vec{p}_\infty$	stationäre Verteilung $\vec{w}$
Markow-Kette z.B. irreduzibel und periodisch oder reduzibel siehe z.B. [ ]	$r_i=1$ mehrfach, alle anderen $r_k \neq -1$	Näherungswerte für S^∞ bzw. $\vec{p}_\infty$ bilden	alle Grenzwahrscheinlichkeiten $\lim\limits_{n\to\infty} p_{ij}^{(n)}$ existieren und damit auch $S^\infty = \lim\limits_{n\to\infty} S^n$. Die Zeilenvektoren von S^∞ sind i.a. verschieden voneinander.	$\vec{p}_\infty = \lim\limits_{n\to\infty} \vec{p}_n$ existiert, ist jedoch abhängig von der Anfangsverteilung	Das LGS $\vec{w}=\vec{w}S$ mit $\sum_{i=1}^{n} w_i = 1$ hat unendlich viele Lösungen oder genau eine Lösung.
Markow-Kette irreduzibel und aperiodisch siehe z.B. [ ]	$r_1=1$ ist einfacher Eigenwert, alle anderen $r_k \neq -1$	Mindestens eine Spalte irgendeiner Potenz S^n hat nur positive Elemente	Alle Grenzwahrscheinlichkeiten $\lim p_{ij}^{(n)}$ existieren und damit auch $S^\infty = \lim\limits_{n\to\infty} S^n$. Die Zeilenvektoren von S^∞ sind alle gleich.	$\vec{p}_\infty = \lim\limits_{n\to\infty} \vec{p}_n$ existiert und ist unabhängig von der Anfangsverteilung, also eindeutig. --- e r g o d i s c h e V e r t e i l u n g	Das LGS $\vec{w}=\vec{w}S$ mit $\sum_{i=1}^{n} w_i = 1$ hat genau eine Lösung. nur für nicht-absorb. Ketten

Tabelle 14.2: Übersicht über einige Klassifikationsmerkmale bei endlichen homogenen Markow-Ketten

Eberhard Lehmann, Lineare Algebra mit dem Computer, Teubner-Verlag, Stuttgart 1983, S.276



Figur 14.11: Langfristiges Verhalten bei Markow-Ketten

Eberhard Lehmann, Lineare Algebra mit dem Computer, Teubner-Verlag, Stuttgart 1983, S.277

Dr. Eberhard Lehmann, mirza@snafu.de, www.snafu.de/~mirza

Eigene Literatur zu Markow-Ketten (Auswahl)

Markoff-Ketten, Bayerischer Schulbuch-Verlag, München 1973

Lineare Algebra mit dem Computer, Teubner-Verlag, Stuttgart 1983, 285 Seiten

Fallstudien mit dem Computer - Markow-Ketten und andere Beispiele aus der linearen Algebra und Stochastik, Teubner-Verlag, Stuttgart 1986, 256 Seiten

Markow-Ketten
im Heft
Gebietsübergreifende Ansätze im Mathematikunterricht,
MU (Klett-Verlag) , 1986, Heft 5

Wahrscheinlichkeitsrechnung - problemorientierte Unterrichtseinheiten, Volk und Wissen-Verlag, Berlin 1997

Mein neuester Beitrag zu "Markow-Ketten":
Maschinenüberwachung - Versandabteilung - Warteschlange (Markow-Ketten mit mehr als zwei Zuständen),
in Praxis der Mathematik in der Schule, PM, Aulis Verlag, Juni 2003, Heft 3

Danke für das Zuhören und nun viel Spaß beim Crap-Spielen mit Ihrer Familie oder Ihren Freunden oder in Ihrem Unterricht!

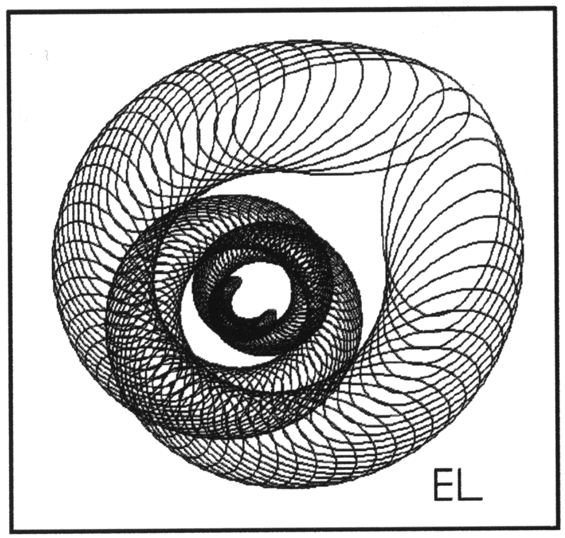
Halt

Bundes-MNU Kiel 2005

Das Crap-Spiel

Lineare Algebra - Stochastik -Analysis

Danke!



Dr. Eberhard Lehmann, Berlin

mirza@snafu.de --- www.snafu.de/~mirza

Siehe Beitrag

Stochastik-Klasse11- Einstieg-Crap.doc

Im Verzeichnis tagung 2005, mnu-kiel