Von den Graphen der Mathematik zu Kunstbildern und zurück

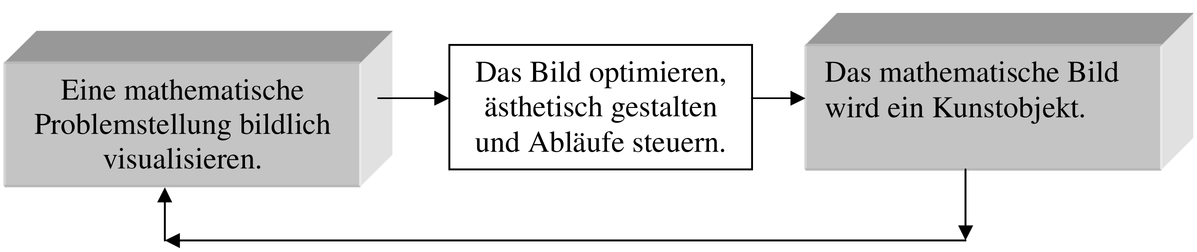
Eberhard Lehmann

Veröffentlichung in MNU 2006, Heft 4: Visualisieren und Animieren mit dem Computer, Friedrich-Verlag, Seelze

Die fachlichen Bemühungen um einen veränderten, zeitgemäßen Mathematik-Unterricht erfolgen auf verschiedenen Ebenen:

- Offene Unterrichtsformen, offenere Aufgabenstellungen, Problemorientierung, Anwendungsbezug, Beachtung fächerübergreifender Ansätze sind häufig genannte Aspekte. Hierfür gibt es inzwischen zahlreiche Beispiele.
- Dabei wird die Berücksichtigung von Anwendungsbezügen oft durch Schwierigkeiten beim Bereitstellen der Anwendungsgrundlagen behindert und
- fächerübergreifende Ansätze werden noch viel zu selten berücksichtigt.

Diese beiden Aspekte und eigene gute Erfahrungen haben mich für die MNU-Hauptversammlung 2004 in Halle zu dem Vortragsthema *Von den Graphen der Mathematik zu Kunstbildern und zurück* geführt. Beobachtet man nämlich die Aktivitäten der Schüler beim Umgang mit Computergrafik, etwa bei der Darstellung von funktionalen Zusammenhängen (Kurvenscharen, Parameterdarstellungen, Abbildungsgeometrie usw.), so stellt man fest, dass es nach der eigentlichen (interaktiven) Entwurfs- und Lösungsphase zu Aktionen kommt, in denen die Schüler das erzeugte komplexe Bild "optimieren": Auf der Suche nach einer ästhetisch ansprechenden Darstellung steuern sie Abläufe der Bilderzeugung, suchen passende Farben, wählen geeignete Darstellungsbereiche usw. Schließlich entstehen häufig Darstellungen, die an "Kunstbilder" erinnern. und damit geraten auch künstlerische Aspekte in das mathematische Blickfeld. Diese werden dann nicht selten zurück zur Mathematik führen und neue Fragestellungen erzeugen.



Als Hilfsmittel für diesen Transformationsvorgang reichen schon die grafischen Möglichkeiten in einem Computeralgebrasystems oder ein geeigneter Funktionenplotter.

Ein besonderer Vorteil dieses fächerübergreifenden Ansatzes *Mathematik und Kunst* liegt also in der leichten Zugänglichkeit zu dem Thema. Man kann die künstlerischen Aspekte quasi voraussetzungsfrei in den Mathematik-Unterricht integrieren. Es gibt andere Beispiele für diese Fächerverbindung, die jedoch wesentlich mehr Organisationsaufwand erfordern und in der Regel auch weniger Eigenarbeit der Schüler ermöglichen [andere Autoren]

Die folgende Vortragsplanung für die MNU-Tagung gibt einen Eindruck von den vielfältigen Möglichkeiten für den Mathematikunterricht; sie kann aber hier nur teilweise genauer dargestellt werden.

Die Vortragsplanung

1. Zeigen einiger Kunstbilder mit mathematischen Objekten

• Plakat zur Bauhausausstellung 1923 • *Kandinsky*: Kreise – Bild mit weiteren Objekten	• *F. Morellet*: Kugeln / Leuchtröhren • *Klee:* Harmonie *("*Flickenteppich")
Kunst in anderen Bereichen • Architektur: Dubrovnik-Stadtansicht • Dekoration: Hängende Kugeln in Den Arkaden (Berlin)	• Kunstschmiede: Ein Türgitter in Kalabrien • Design: Ein kunstvoll gestalteter Teller

2. Von der Mathematik zur Kunst

• Zeichne möglichst viele Geraden durch einen Punkt • Variation: Zeichne möglichst viele Kreise durch einen Punkt	• Krümmungskreise der Astroide • Von konzentrischen Kreisen zum Design eines Tellers • Lehmann´s LOGO (Drehstreckung)

3. Von der Kunst zur Mathematik

• Schmiedekunst: Türgitter • Zufallsquadrate, Kollision von Punkten • *Klee*: Harmonie (Flickenteppich) • Kirchenfenster (eine Abitur-Aufgabe) • Eigene Kunst (Lehmann, nach Miro)	• Random in verschiedenen Situationen Zufallsstrecken, Zufallslandschaft • *Jasper Johns:* Flagge • Arkaden-Kugeln-Anlass für ein Kugelprojekt

4. Was erreicht man damit? - Unterrichtsziele

1. Einige Kunstbilder mit mathematischen Objekten

Aus urheberrechtlichen Gründen werden hier die oben genannten Werte von Kandinsky, Klee und Morellet nicht gezeigt. Ich beschränke mich daher auf eigene Fotos und selbst erstellte Abbildungen.

Abb 1:Altstand von Dubrovnik (Kroatien) - Architektur mit viel Mathematik

Abb.2 : In den Arkaden am Potsdamer Platz in Berlin, Weihnachten 2001 - Dekoration mit Kugeln

Abb.3 : Türgitter in einem Palazzo in Cosenza (Kalabrien) - Kreismuster

Die Abbildungen 1-3 haben in verschiedenen Fortbildungsveranstaltungen eine wichtige Rolle gespielt. Sie dienten dort als Ausgangsobjekte zum Entdecken von Mathematik, zum Nachkonstruieren und zum Variieren von Aufgabenstellungen. Sie sind damit auch gut geeignet für die Initialisierung von mathematischen Projekten.

2. Von der Mathematik zur Kunst

Als erstes Beispiel wird eine leicht verständliche, aber sehr wirkungsvolle offene Aufgabestellung gewählt, die sich vielerorts (z. B. in Klasse 9) bestens bewährt hat:
Zeichne (an einem Computer) möglichst viele Geraden durch den Punkt P(3, 1)!

Lösung: Die Schüler zeichnen in der Regel zunächst einige sich sofort anbietende Geraden, etwa mit den Gleichungen y = 1, y = x–2 (Parallele zu y = x). Es dauert nicht lange bis weitere Geraden eingetragen werden und die Frage nach einer Formel entsteht. Diese wird dann als Baustein definiert:

Gerade durch P(3,1)	Allgemein: Gerade durch Q(a,b)
Punkt (3,1), Steigung m y–3 = m*(x–1) y = 3+m*(x–1) Als Baustein im Voyage-Taschencomputer: **3+m*(x–1)→ger(m,3,1)**	Mit der Punkt-Steigungsform **b+m*(x–a)→ger1(x,m,a,b)** (TI-Voyage 200) oder auch bei Vorgabe der Steigung und des y-Abschnitts: y = m*x+n: **m*x+n →ger2(x,m,n)** (TI-Voyage 200)

Abbildung 4 zeigt viele Geraden durch P(3,1) abhängig vom Parameterwert für die Steigung m. Zum Zeichnen wird beim TI-Voyage 200-Taschencomputer ger1(x,m,3,1)→y1(x) eingegeben. Hinweis: Die Abbildungen 4-7 wurden mit dem Programm ANIMATO erstellt [1].

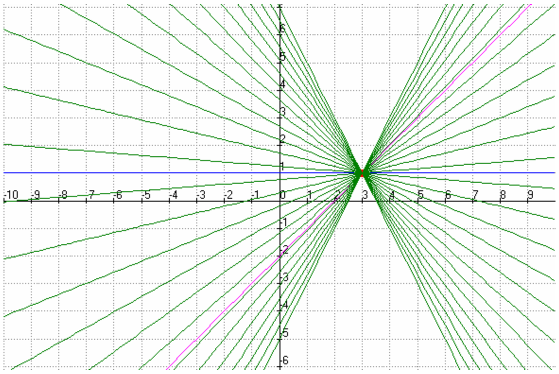


Abb. 4: Geraden durch P(3,1)

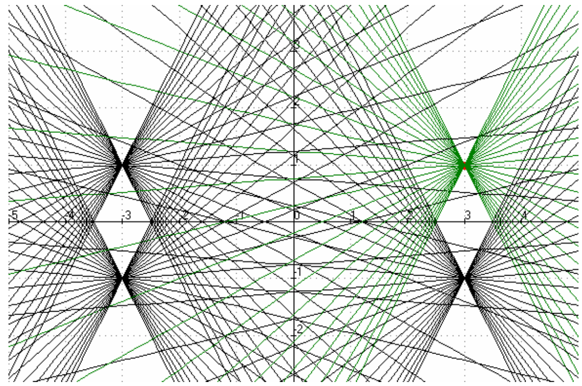


Abb. 5: Weitere Geradenbüschel

Diese Abbildung wirft sofort einige Fragen auf. Zum Beispiel unterscheiden sich die Zeichnungen der Schüler je nach den gewählten n-Werten - und warum ist da in der Mitte so ein leerer Winkel? Es wird aber auch der Wunsch geweckt, solche Geradenbüschel durch andere Punkte zeichnen zu können, eben allgemein durch Q(a,b); siehe Abbildung 5.
Die Ästhetik der Abbildung wird offensichtlich gestört durch das Koordinatensystem. Also wird dieses beseitigt, Abbildung 6.

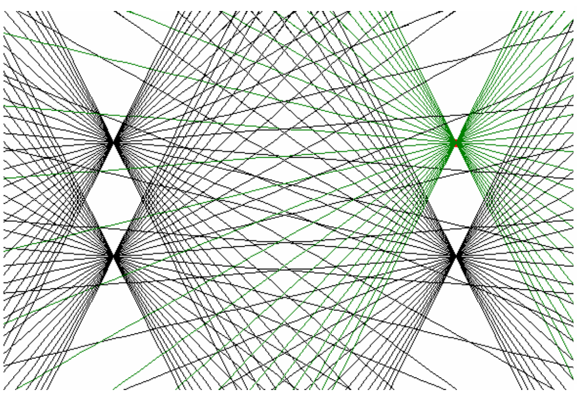


Abb. 6: Auf dem Weg zu einem schönen Bild

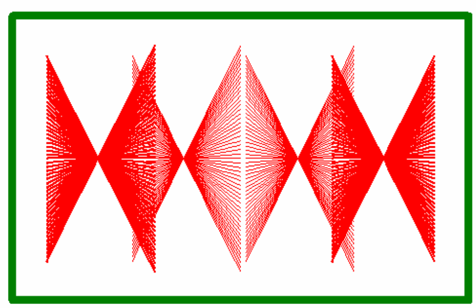


Abb. 7: Ein Bild zum Aufhängen

Weitere Variationen können folgen; das Bild könnte außerdem einen Rahmen vertragen.
Der Fantasie der Schüler sind jetzt keine Grenzen mehr gesetzt. Sie können die Geraden auch durch Strecken ersetzen, Farben verwenden, den Entstehungsprozess steuern. Doch jede Abbildung entsteht unter Verwendung eines geeigneten Bausteins.

Abbildung 6 in der Syntax von ANIMATO	Abbildung 6 in der Syntax des TI-Voyage 200
f1: b+c*(x-a)	**b+m*(x–a)→ger1(x,m,a,b)**
f2: f1(3,1,u)	ger1(x,m,3,1) →y1(x)
f3: f1(–3,1,u)	ger1(x,m,–3,1) →y2(x)
f4: f1(–3,–1,u)	ger1(x,m,–3,–1)→y3(x)
f5: f1(3,–1,u)	ger1(x,m,3,–1) →y4(x)
Für x und die Steigung u kann man an anderer Stelle geeignete Laufbereiche wählen.	etwa mit m={–3,–2,–1, 0, 1,2,3}

Entsprechende Aufgabenstellung wie oben für *Geraden durch den Punkt P(3,1)* kann man auch für andere Objekte stellen. Für einen Kreis können dabei z. B. die Abbildungen 8 und 9 entstehen.

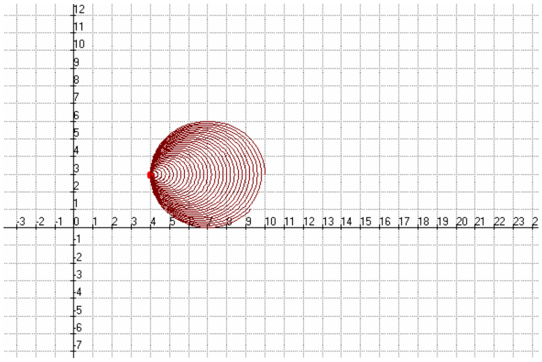


Abb. 8: Viele Kreise durch P(4,3)

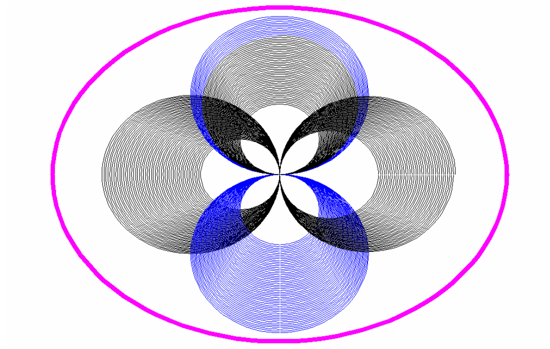


Abb. 9: Von der Anfangsidee zur Kunst

3. Von der Kunst zur Mathematik

Es ist eine naheliegende Idee Bilder aus der Kunst, die mathematische Objekte enthalten, mit Hilfe mathematischer Relationen nach zu konstruieren. Die folgenden Beispiele zeigen jeweils Kunstbild und Rekonstruktion.

Abb. 10: Ein künstlerisch gestalteter Teller

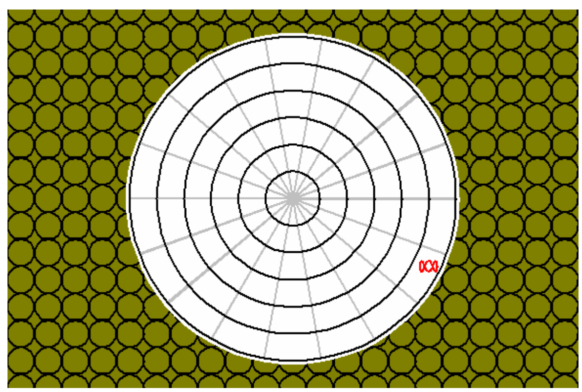


Abb. 11: Nachkonstruktion auf dem Bildschirm

Entwurfsüberlegungen:
1) Zeichnen konzentrischer Kreise
2) Muster erzeugen durch Einzeichnen von Durchmessern
3) "entmathematisieren" durch Wegnahme des Kosys
4) Verändern z.B. durch weniger Durchmesser, Farben usw.

Das ANIMATO-Programm:
f1: u*cos(t),u*sin(t)
f2: 6cos(t),6sin(t),-6cos(t),-6sin(t)
f3: 0.5cos(t)+u,0.5sin(t)+v
f4: 0.3*cos(t)+5,0.2*sin(3t)-2.5 // Einfügen eines "Markenzeichens"

Zufallsbilder - Ideen aus der Informatik und von Francois Morellet

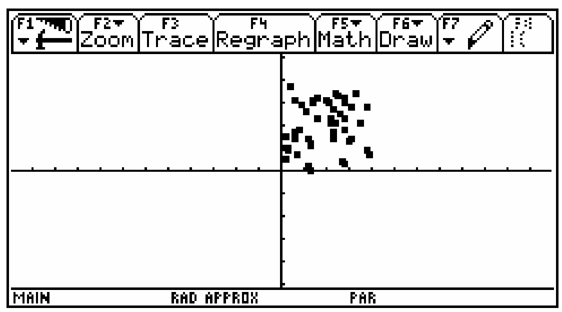
Im April 2002 konnte ich im Rahmen einer Tagung des CAS-Arbeitskreises (Leitung Prof. e. Koepf, Kassel) an einer Führung im Museum Würth in Künzelsau teilnehmen. Hier sahen wir eine Ausstellung mit Werken des französischen Künstlers Francois Morellet (geb. 1926 in Cholet), die mich wegen ihres Bezuges zur Mathematik besonders ansprachen, Erinnerungen über eigene Simulationsprogramme mit Hilfe von Zufallszahlen weckten und schnell zu einigen eigenen Versuchen mit Hilfe meines Animationsprogramms ANIMATO führten. Zunächst jedoch ein kurzer Auszug aus dem Ausstellungsprojekt des Museums:

Francois Morellets Werk gehört in den Bereich der konkreten Kunst. Über selbst entworfene Formgebungssysteme wie Überlagerung, Fragmentierung, Reihung oder Interferenz entwickelt er seine Serien mit Linien, Quadraten, Dreiecken, Rastern, Rasterkugeln, Klebebändern und Neonsegmenten. ...Zu Ordnung und mathematischer Präzision sucht Morellet jedoch sehr bald einen Gegenpol und bezieht als Störfaktor den Zufall mit ein. In der Serie "Zufällige Verteilung von 40000 Quadraten, den geraden und ungeraden Ziffern eines Telefonbuches folgend" ordnet er daher die geraden und ungeraden Zzahlen jeweils einer Farbe zu. So entsteht ein schachbrettartiges Muster, dessen Ästhetik allein über System und Zufall bestimmt wird...

Diese Beschreibung erinnert den Informatiklehrer sofort an die früher mit Schülern programmierten Simulationen nach der Monte-Carlo-Methode zur angenäherten Flächenberechnung. Heute lassen sich Bilder aus Zufallszahlen leicht mit einem Taschencomputer erzeugen, siehe etwa Abb.12. - Man kann hierzu den Parametermodus des Voyage 200-Rechners benutzen und z. B. die folgenden Eingaben machen:

Abb. 12

xt1 = rand()
yt1 = rand()
Wählt man dann zum Zeichnen `Style,3 (Square)`, so werden Zufallspunkte ins Einheitsquadrat gezeichnet. Das ist dann die Grundlage für weitere Bilder aus Zufallszahlen an anderen Stellen.



Wirkungsvoller ist die Benutzung eines PC. Hierzu nun einige Bilder und Erläuterungen.

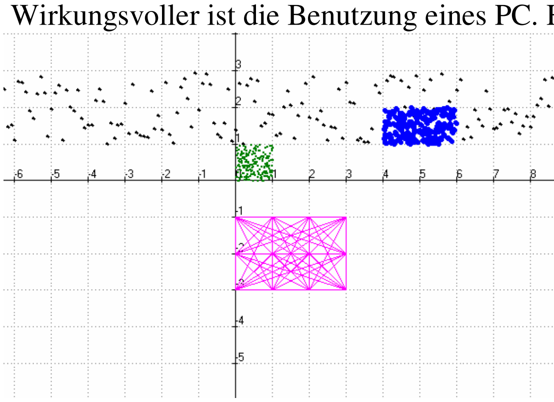


Abb. 13: Zufallszahlen-Transformationen

f1: a*random+b+0*t, ein Baustein für den Zufall
f2: f1(2,1), das entspricht 2*random+1, Werte zwischen 1 und 3
f3: f1(-2,6),f1(1,1), Zufallspunkte im Rechteck x-Bereich zwischen 4 und 6, y-Bereich zwischen 1 und 2
f4: f1(1,0), f1(0,random), das sind Zufallspunkte im Einheitsquadrat
f6: int(4*random),int(-3*random)-1, int(4*random),int(-3*random)-1 Strecken im 4.Quadranten zwischen ausgewählten Punkten mit ganzzahligen Koordinaten

Mit der Kenntnis dieser Zufallszahlen-Transformationen gelingen nun leicht eindrucksvolle Bilder und Animationen (auf Papier hier leider nicht sichtbar).

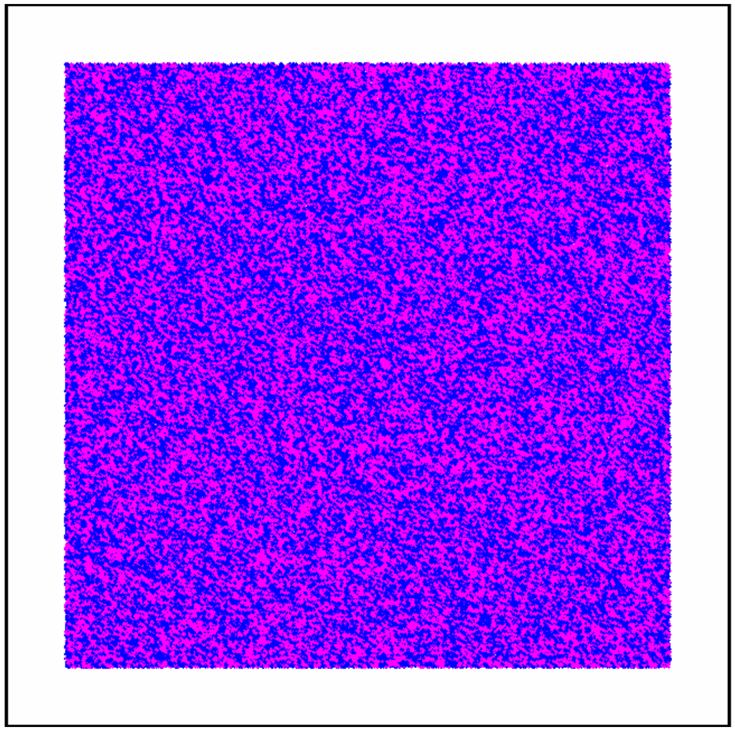
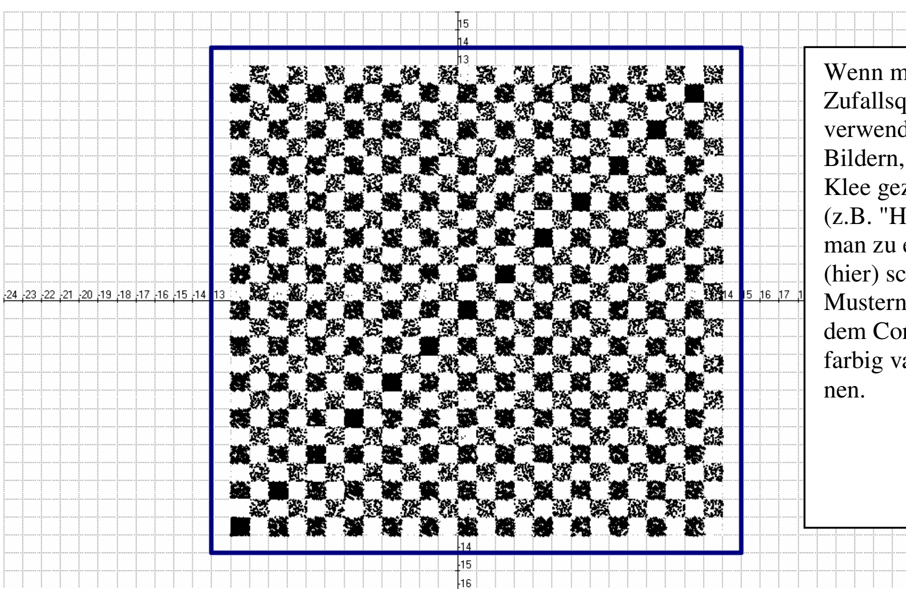


Abb. 14

Zufällige Verteilung von 40000 Quadraten, 50% Magenta, 50% Blau. - Serigrafie auf Holz, 80x80 cm (1961), Sammlung Wirth im Katalog zur Ausstellung im Museum Wirth, Künzelsau, 2002 in "Morellet", Swindoff Verlag, S.141

Morellet entnahm die Zufallszahlen einem Telefonbuch und trug sie per Hand sorgfältig als Quadrate ein.

Abb. 14: Die Abbildung wurde hier mit dem Programm ANIMATO nachgestellt.



Wenn man die Idee des Zufallsquadrats weiter verwendet - etwa nach Bildern, wie sie von Paul Klee gezeichnet wurden (z.B. "Harmonie"), so kann man zu eindrucksvollen (hier) schwarz-weißen Mustern kommen, die mit dem Computer schnell farbig variiert werden können.

Abb. 15: Ein "Flickenteppich" mit vielen Quadraten, in die Zufallspunkte eingetragen sind

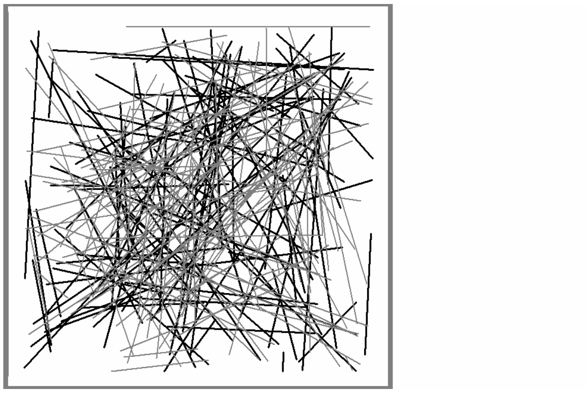


Abb. 16: Zufallsstrecken

Auf einfache Weise kann ein Quadrat auch mit anderen Objekten zufällig gefüllt werden. In Abbildung 16 sind es Strecken.

f3: random,random,random,random
(mit Farbe 1)
f4: random,random,random,random
(mit Farbe 2)
f6: -0.05,-0.05,1.05,-0.05,1.05,1.05,
-0.05,1.05,-0.05,-0.05
(der Bildrahmen)

Landschaften konstruieren

Die oben ausgeführte Idee der Konstruktion von Objekten mit Hilfe von Computergrafik kann weiter ausgedehnt werden: Firmenlogos, Tapetenmuster, Kachelmuster, Dekorationen usw., ja sogar auf "Landschaften mit mathematischen Objekten. Hierzu liegen ebenfalls Unterrichtserfahrungen durch, die nun durch einige Bilder belegt werden.

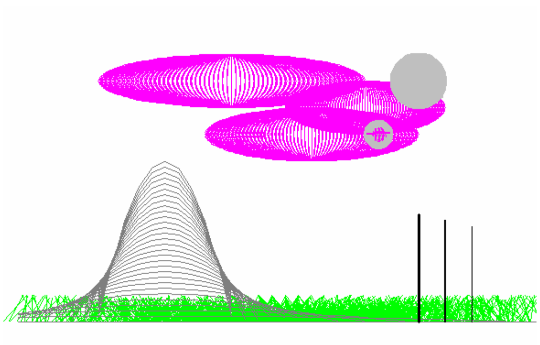


Abb. 17: Landschaft

Die Schülerin schreibt zu ihrem Bild:
Das Bild LAND1 stellt eine Landschaft bei Nacht dar, welches durch den relativ dunklen Hintergrunds bewirkt werden soll. Zusätzlich werden zwei Monde dargestellt, auch die pinken Wolken sollen darauf hinweisen, daß wir uns auf einem Planeten befinden, der unserem von der Atmosphäre ähnlich ist, jedoch zwei Monde als Trabanten besitzt.

Die Schülerin hat mit folgenden Termen gearbeitet:

f1: rand*x,rand,rand*x+u,0	Wiese
f2: u*cos(t)+5,u*sin(t)+9	großer Mond
f3: {-(x*u+4.5*u)^2+6*u<0:undef:-(x*u+4.5*u)^2+6*u}	Berg
f4: u*3*cos(t)+3,sin(t)+8	Wolken
f5: u*4*cos(t)+1,sin(t)+7	Wolken
f6: u*5*cos(t)-2,sin(t)+9	Wolken
f7: 0.5*u*cos(t)+3.5,0.5*u*sin(t)+7	kleiner Mond
f8: 5,0,5,4	Mast
f9: 6,0,6,3.8	Mast
f10: 7,0,7,3.6	Mast

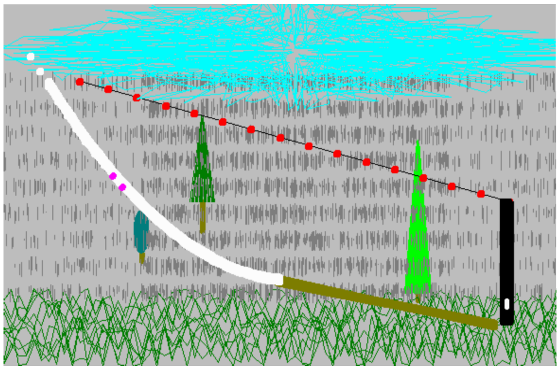


Abb. 18: Winter in den Bergen - Skilaufen

Die Konstruktion der Landschaft von Abb.18 erfordert mehr Terme als für Abb. 17. Die Animation läuft in mehrerer Schritten ab, so dass die einzelnen Objekte (Regen, Bäume, Wolken, Skipiste usw.) nacheinander entstehen. Die beiden Skiläufer bewegen sich auf der Skipiste. Verwendet werden u.a. Zufallszahlen, Winkelfunktionen, Parabeln.

Abschließend werden die Hintergründe a

Zusammenfassung

- Mathematische Sachverhalte / Objekte durch Bilder visualisieren / animieren
- verallgemeinern

Ein Weg zur Kunst:

- Vervielfältigen
- „entmathematisieren“

(Weglassen des Kosy, Zuordnen neuer Eigenschaften, anders ordnen, ...)

Mathematik

- Visualisierungen und
- Anordnungen
- „Versammlungen“ (Zusammenstellungen)

mathematischer Objekte

Kunst

animieren

Nachmachen:

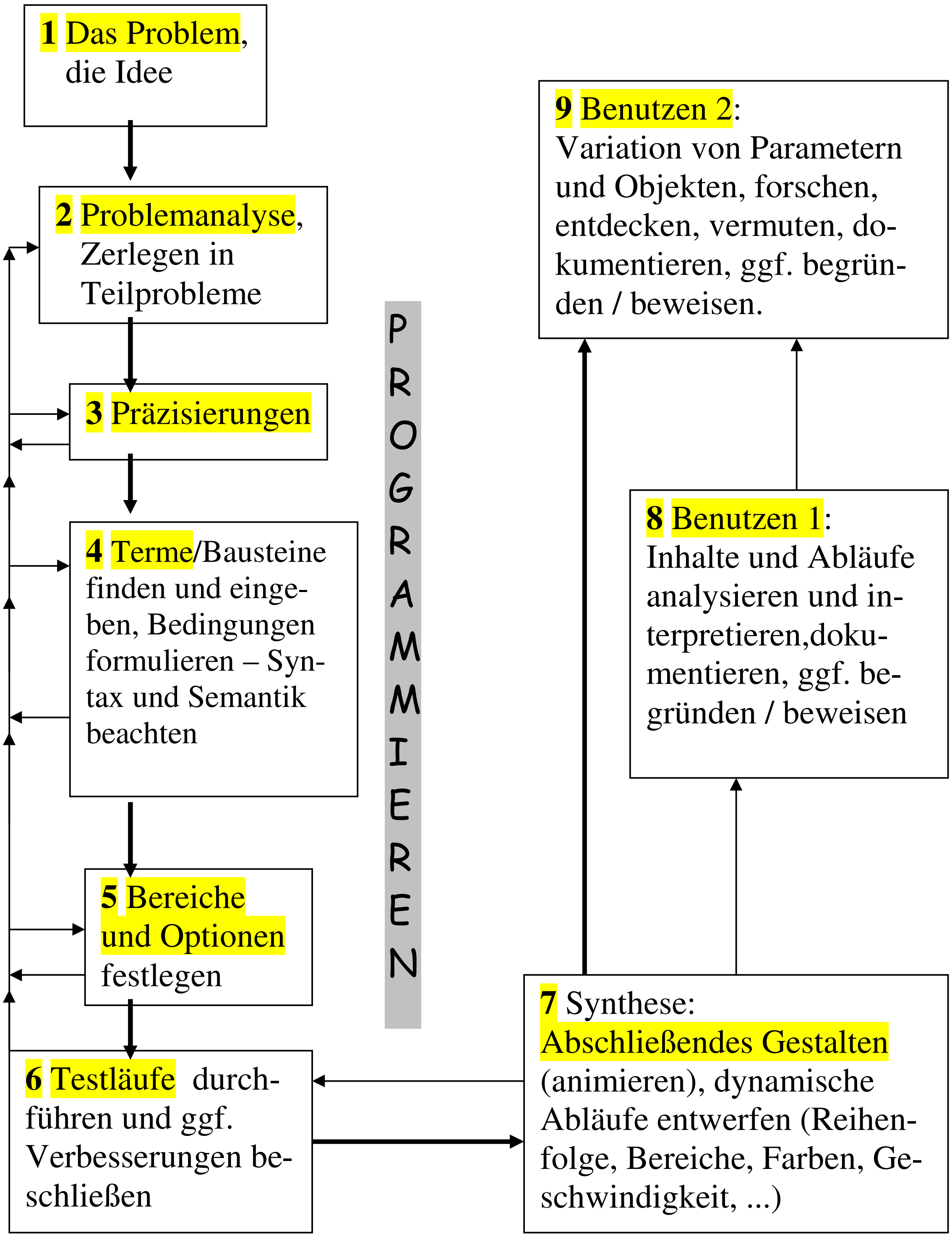
- Von Hand
- Durch Computer: Zeichenprogramme Geometrieprogramme Funktionenplotter

Ein Weg zur Mathematik

- Objekte identifizieren,
- Bilderfassung durch Koordinaten(gitter)

A Erstellen einer Animation als "Programmierprojekt"

Funktionales Programmieren mit Funktionen/Relationen (ANIMATO)



B Bemerkung: Der Informatikunterricht würde sich auch für die Analyse des Programmsystems ANIMATO (Parser, syntaktische Analyse, die Mathematikmaschine, ...) interessieren.

Abb. 2.1.7.3-g: Animationen als Programmierprojekt

Die Bedeutung des eigenen Handelns bei der Benutzung oder eigenen Gestaltung einer Animation wird durch Abbildung 2.1.7.3-h deutlich.

Das (mathematische) Bild

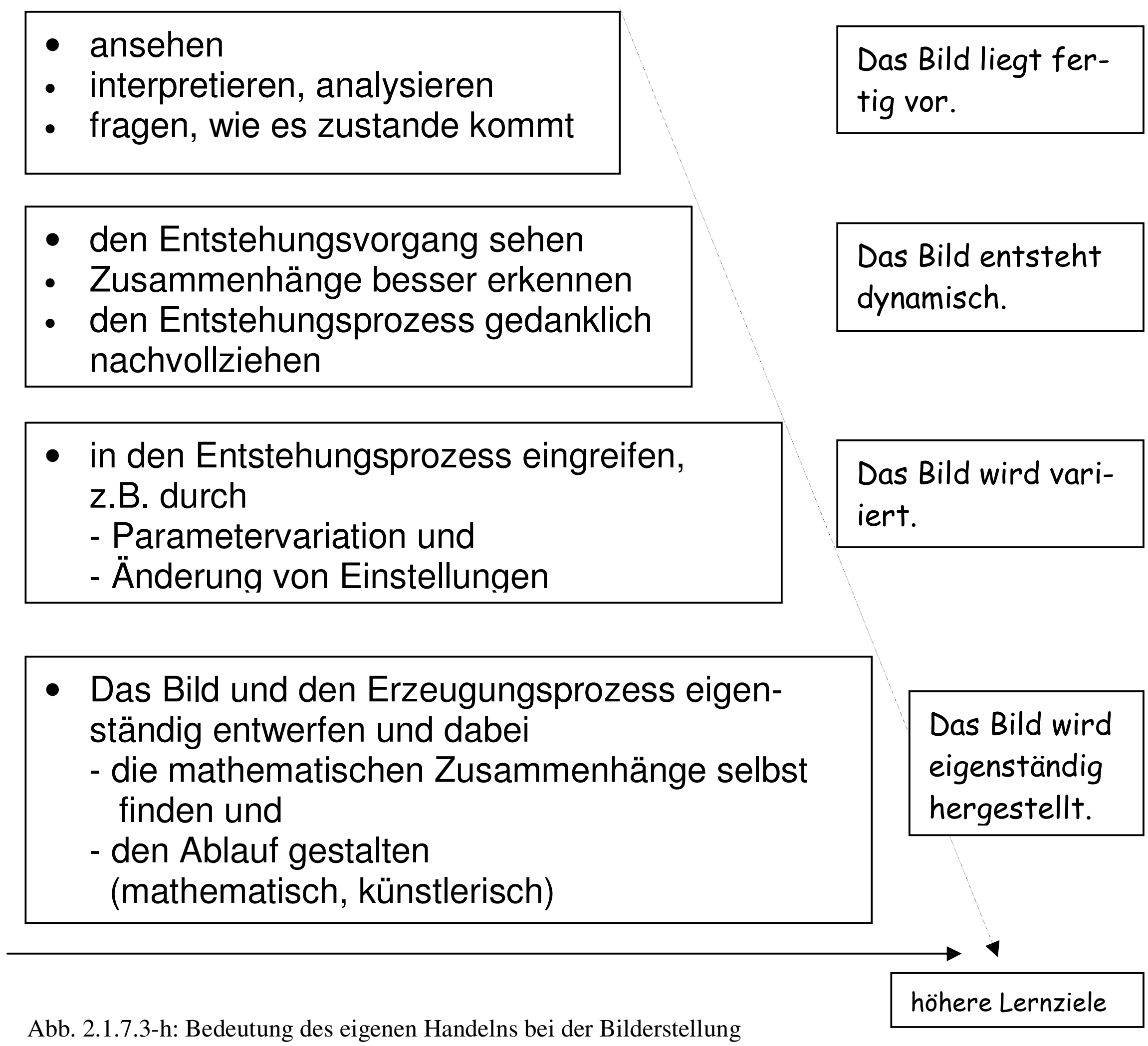


Abb. 2.1.7.3-h: Bedeutung des eigenen Handelns bei der Bilderstellung

Der Anspruch an den Schüler steigt, je mehr er selbst tätig wird. Gleichzeitig werden damit höhere Lernziele erreicht. Die Motivation für eine derartige Arbeitsweise ist hoch.

Welche allgemeinen und mathematischen Ziele werden erreicht?

- Die Schüler arbeiten fachübergreifend.

- **Bei der Analyse** eines mathematischen oder künstlerischen Bildes oder beim Entwurf eines Bildes üben sich die Schüler in der selbständigen Durchdringung eines komplexen (mathematischen / künstlerischen) Sachverhalts,

Bei der schrittweisen Konstruktion eines Bildes (der Animation / des "Films")

- üben die Schüler das Wechselspiel (die gegenseitigen Abhängigkeiten) zwischen verschiedenen Darstellungsebenen
  a) Funktions (Relations-)- Term mit Definitions-/ Wertebereich,
  b) graphische Darstellung der Terme und ihre Gestaltung
  c) künstlerische Darstellung
- Die Arbeit der Schüler erhält neben der mathematischen auch eine künstlerische (ästhetische) Dimension.
- Bei mathematischen Animationen erstellen die Schüler ein Produkt, das anderen Schülern beim Verständnis der mathematischen Sachverhalte helfen kann. - Ihre Arbeit erhält damit auch eine pädagogische (didaktisch-methodische) Dimension.

Mit geeigneten Funktionenplottern lassen sich also Effekte erzielen, die man anfangs nicht so ohne weiteres vermutet und bedenkt. Erst bei intensiverer Benutzung und damit einiger Erfahrung zeigen sich weitere didaktisch-methodische Möglichkeiten:
Der Benutzer kann nicht nur Graphen zeichnen, er kann die Darstellung auf dem Bildschirm auch gestalten.

Zeichnen → gestalten

Unter solchen Aspekten ist es möglich, unseren primär mathematischen Darstellungen über den Anspruch an ihre Ästhetik auch eine künstlerische Dimension zuzusprechen. Dabei erfüllt die Forderung nach einer ästhetischen Darstellung nicht nur einen künstlerischen Anspruch, sondern auch den, ein **geeignetes Hilfsmittel für das Verständnis des mathematischen Inhalts** zu sein.

DYNAMISCHE MATHEMATISCHE FIGUREN MIT DEM COMPUTER

Eberhard Lehmann, Berlin

Veröffentlichung:
Dynamisierung mathematischer Schulbuchfiguren *(*Computer und Unterricht, Februar 1994)

EINLEITUNG

- Dynamisierung statischer (Schulbuch-) Figuren
- Herstellung von Demo-"Filmen" durch Lehrer und Schüler
- der ästhetische Wert von mit Funktionszeichnern erstellten Figuren
- "Kunstwerke" mit dem Funktionsplotter
- Experimentieren, vermuten
- Einbettung der hergestellten Produkte in konkrete Unterrichtseinheiten der Sekundarstufen I und II.

1. ÄSTHETISCHES DENKEN IM MATHEMATIK-UNTERRICHT

Beobachtet man die Tätigkeiten der Schüler beim Umgang mit Computergrafik, etwa bei der Darstellung von funktionalen Zusammenhängen (Kurvenschaften, Parameterdarstellungen usw.), so stellt man fest, daß es nach der eigentlichen (interaktiven) Lösungsphase zu Aktionen kommt, in der die Schüler das erzeugte Bild "optimieren". **Ihre (freiwilligen!) Bemühungen richten sich darauf, ein ästhetisch ansprechendes Bild zu erzeugen**, etwa durch geeignete

- Festlegung eines geeigneten Zeichenbereichs
- Reihenfolge des Zeichnens der Graphen
- Festlegung der Zeichengeschwindigkeit
- Schrittweitenfestlegung
- optisch ansprechende Farbwahl
- Hervorheben charakteristischer Merkmale

Was bringt die Schüler zu dieser Verhaltensweise?
Möglicherweise ist es der Wunsch, Schönes zu sehen, der Wunsch, anderen sehen zu geben, Effekte zu produzieren, die (eigene und fremde) Wahrnehmung herauszufordern.

Diese Beobachtungen des Lehrers führten zu Überlegungen, wie man dieses Phänomen nutzbringend für den Mathematikunterricht verwenden kann. Die ersten Versuche konzentrierten sich auf das Herstellen von "Filmen". So wurde den Schülern einer 10.Klasse die folgende Aufgabe gestellt:

Erstelle mit dem dir bekannten Funktionsplotter HL-PLOT10 einen "Film", der die Konstruktion des Graphen der Sinusfunktion aus den Sinus-Werten im Einheitskreis demonstriert.

Diese Aufgabenstellung wird weiter unten aufgegriffen und ausführlich behandelt.

Wir kennen die **Bedeutung der Visualisierung** für den Mathematikunterricht. Der Schüler findet im Mathematikbuch Figuren, z.B. Bilder von Funktionsgraphen, von denen man mit Recht behauptet, "ein Bild sagt mehr als 1000 Worte".

Und dennoch kann ein Bild noch mehr ausdrücken! Das ist dann der Fall, wenn man das statische Schulbuchbild dynamisiert, es im Unterricht entstehen läßt, und zwar beliebig oft wiederholbar, unterbrechbar und variierbar.

Hierfür ist der Computer das richtige Medium! Wenn der Schüler die Figur dann auch noch selbst in interaktiver Arbeit konstruiert, wird der Gewinn besonders groß sein. In diesem Sinn kann man dann von einem **"Film"** sprechen, der nicht nur den Anspruch erhebt, schöne Bilder zu er-zeugen und einen mathematischen Zusammenhang graphisch darzu-stellen, sondern auch Erkenntnisse vermittelt und weiterreichende Fragen aus dem Entstehungsprozeß und der eigenen Beschäftigung mit der Filmkonstruktion provoziert.

Nach den bisherigen Erfahrungen sind die Schüler durch diese Idee in besonderem Maße motiviert. Aus Lehrersicht gewinnen die Schüler dabei im besten Sinn handlungsorientiert mathematische Erkenntnisse.

Komplexe Schulbuchfigur	Vom Computer erstellte komplexe Figur
statisch	dynamisch
vorgegeben	selbst erstellt in einem interaktiven Prozeß - farbig gestaltbar - leicht veränderbar - Möglichkeit der Betrachtung verschiedener Zeichenausschnitte - beliebig oft wiederholbar - Berücksichtigung eigener Intentionen - Je nach Schüler unterschiedliche Entstehungsweise - demonstrierbar
eingeschränkt interpretierbar	vielseitig interpretierbar

2. MEDIEN UND KUNSTUNTERRICHT

Wir wissen, daß die Persönlichkeitsentwicklung heute wesentlich durch die uns umgebenden Medien beeinflußt wird. Unsere Schüler werden in ihrem späteren Berufsleben zu einem größeren Teil medialen Beschäftigungen nachgehen. Angesichts dieses Sachverhalts ist es nötig, bei den Schülern eine **"Technik des Blickens"** - ästhetische Techniken - herauszubilden. Dieses wäre eine Aufgabe für alle Schulfächer, insbesondere auch des Kunstunterrichts, der seine Position gegenüber den neuen Medien finden muß.

Nach dem Registrieren des sinnlich faßbaren Bestandes erfolgt der Schritt hin zum Entdecken, zum Symbolisierten. Die Aufgabe der Wahrnehmung besteht heute nach einem verbreiteten Verständnis in der Entwicklung eines Weltbildes, auf Grund dessen es dem Individuum möglich ist, sich in seiner Umwelt erfolgreich zu verhalten.

In welcher Weise kann der Schüler an dieser Aufgabe beteiligt werden?

"Daß es indes überhaupt zur Thematisierung des ästhetischen Handelns in der modernen Kunst kommt, hängt wesentlich mit ihrer Konzeptionalisierung zusammen. Das bedeutet, daß "the concept", der Begriff, die Idee von Kunst und die eigentliche Hervorbringung des Werkes sich im 20.Jahrhundert immer stärker voneinander separieren. In der konzeptionellen Kunst der 60er Jahre geht diese Trennung schließlich so weit, daß das Konzept nicht mehr vom Künstler ausgeführt werden muß, oder sogar ausdrücklich vom Laien realisiert werden soll. Aus der Autorisierung des Laien zur mentalen oder materialen Hervorbringung des eigentlichen Werkes folgt, daß er zum produktiv Handelnden werden muß. ***Allein der tatsächliche Vollzug eines entsprechenden Handlungsprozesses ermöglicht nun ästhetische Erfahrung***... " [2, S.13].

Was bedeuten diese Überlegungen für den Mathematikunterricht?
Wir wissen von der Bedeutung der Visualisierung für das Verständnis von Mathematik. Damit ist der Mathematikunterricht geradezu auf eine Technik der Blickens angewiesen! Es ist der Blick für ei-ne Umformungsmöglichkeit, der Blick für die Interpretation einer Tabelle (einer Statistik aus Zahlen oder in einem Bild), für den Inhalt und die Interpretation einer graphischen Darstellung. **Wenn wir den Schüler an den Entstehungsprozessen beteiligen, können wir gleichzeitig mit mathematischen Zielen auch das erreichen, was oben unter der Ästhetischen Erziehung verstanden wurde.**

Schließlich sei noch auf einen weiteren Berührungspunkt zwischen Kunst- und Mathematikunterricht hingewiesen: Bei Bildbetrachtungen im Kunstunterricht kommt man ohne mathematische Begriffe (waage-recht, senkrecht, diagonal, rechteckig, kreisrund,...) kaum aus. Im Kubismus oder in den expressionistischen Bildern von Klee oder Kandinski findet sich eine Fülle geometrischer Formen, deren Erkennen zu eigenen kreativen Aktivitäten der Schüler mit mathematischem Material führen kann.

3. MATHEMATISCHE FIGUREN DYNAMISIEREN - KONSTRUKTION VON "FILMEN"

Beispiel 1: Die Sinus-Kurve

Als Beispiel betrachten wir den Entwurf eines Demo-Films zur Konstruktion der Sinus-Kurve aus den Werten am Einheitskreis, erprobt in einer 10.Klasse. Eine Figur zu diesem Sachverhalte findet sich in vielen Mathematik-Lehrbüchern.
Für den unterrichtlichen Ansatz gibt es verschiedene Möglichkeiten von einem sehr offenen Auftrag bis hin zu recht detaillierten Anweisungen. Zum Beispiel kann man so verfahren:

- Den Schülern wird eine Buchabbildung vorgelegt (einschließlich erläuterndem Text). Die Schüler arbeiten weitgehend selbständig.
- Die Konstruktionssachverhalte werden (an der Tafel) gemeinsam besprochen.
- Die Schüler konstruieren die Sinuskurve auf diese Weise im Heft.

Für die interaktive Arbeit mit dem Computer haben die Schüler vorab die Eigenschaften des ihnen schon bekannten Programms, die derartige Filmvorhaben unterstützen, zusammengestellt:

Eigenschaften des Funktionenplotters zur Unterstützung dynamischer Vorgänge

(1) Wahl der Reihenfolge des Zeichnens der Graphen
(2) Auch simultanes Zeichnen von Graphen
(3) Ziehen von Strecken auch zwischen Punkten auf Graphen
(4) Farbwahl für die Graphen
(5) Einstellen der Zeichengeschwindigkeit
(6) Graphen punktweise zeichnen oder Punkte verbinden
(7) Mitlaufen eines Fahrstrahls von (0,0) zu (x,y)
(8) Verwenden von Parametern
(9) Schnelle Variierbarkeit in der Darstellungsart
(10) Wahl geeigneter Zeichenbereiche

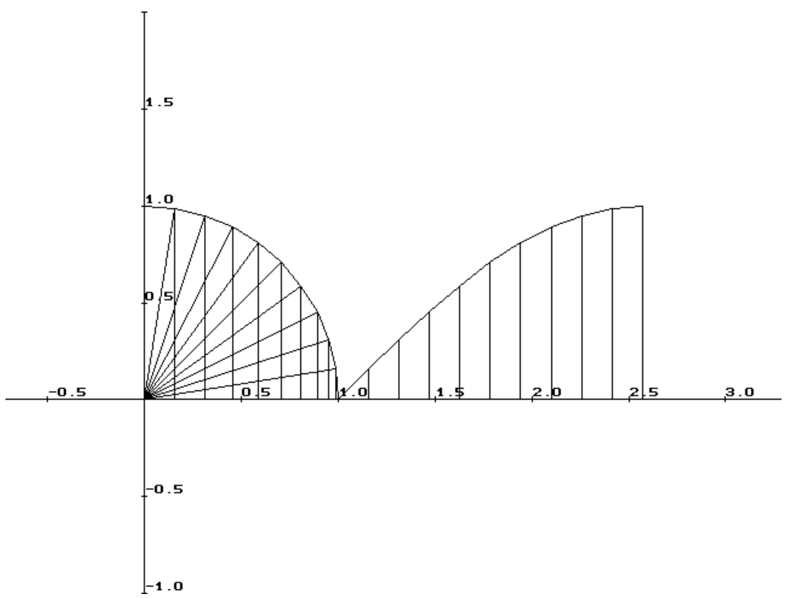


Abbildung 3: "Film" zur Herstellung der Sinus-Kurve aus dem Einheitskreis

Die F1-Maske des Funktionenplotters wird wie folgt ausgefüllt:

f1: cos(t),sin(t)	Einheitskreis
f2: 0,0,cos(t),sin(t)	Strecken von (0,0) zum Kreis
f3: cos(t),0,cos(t),sin(t)	Strecken von (cos(t),0) zum Kreis
f4: t+1,0,t+1,sin(t)	Senkrechte zur Sinus-Kurve
f5: t+1,sin(t)	Sinuskurve

Das Bogenmaß t muß in der F2-Maske passend gewählt werden.

Bei geeignete Farbwahl und Zeichengeschwindigkeit ergibt sich ein eindrucksvoller Demonstrationsfilm zur Entstehung der Sinus-Kurve.

Das Herstellen derartiger "Filme" hat sich als außerordentlich motivierend für die Schülerinnen und Schüler erwiesen.

Welche allgemeinen und mathematischen Ziele wurden erreicht?
Bei der schrittweisen Konstruktion des Bildes (der Animation, des "Films")

- über sich die Schüler in der weitgehend selbständigen Durchdringung eines komplexen (mathematischen / künstlerischen) Sachverhalts,
- üben die Schüler das Wechselspiel (die gegenseitigen Abhängigkeiten) zwischen den Darstellungsebenen
  a) Funktions (Relations-)- Term mit Definitionsbereich/Wertebereich,
  d) graphische Darstellung und ihre Gestaltung
- lernen die Schüler die Vorteile der interaktiven Arbeit Mensch/Medium Computer mit ihren vielen Gestaltungsmöglichkeiten ausnutzen,

- Ihre Arbeit erhält damit auch eine künstlerische (ästhetische) Dimension

- Erstellen die Schüler ein Produkt, das anderen Schülern beim Verständnis der mathematischen Sachverhalte helfen soll.
  Ihre Arbeit erhält damit auch eine
- pädagogische (didaktisch-methodische) Dimension

Beispiel 2: Parabel als Hüllkurve
Die Erzeugung von Hüllkurven verspricht immer auch einen ästhetischen Reiz. Wir betrachten hier die Entstehung einer Parabel.

Gegeben: Ein fester Punkt F(0,3), eine feste Gerade L mit y=-2.

Konstruktionsvorschrift:

° Verbinde F mit (vielen) Punkten P_i der Leitgeraden
° Halbiere die Strecken FP_i, die Mittelpunkte seien M_i
° Ziehe Geraden g_i durch M_i senktrecht zu den Strecken FP_i
° Die Geraden g_i hüllen eine Kurve ein
° (es ist eine Parabel, welche Gleichung?)

F1-Maske des Plotters wird programmiert:

f1: x,-2	- die feste Gerade L, P_i_L
f2: 0,3,x,-2	- die Strecken FP_i
f3: x/2,0.5	- eine Hilfsgerade durch die M_i
f4: 0.5+u/5*(x-u/2)	- die einhüllenden Geraden
f5: x/2,0.5	- zeichnet f3 noch einmal nach
f6: 0.5+x/5*(x-x/2)	- die Parabel

Begründung: Die Mitten berechnen sich aus
$x_{Mi} = 0.5(x_F + x_{Pi}) = 0.5(0+x_{Pi}) = 0.5x_{Pi}$
$y_{Mi} = 0.5(y_F + y_{Pi}) = 0.5(3+(-2)) = 0.5$

Die Lotgeraden benötigen wir neben den Mittelpunkten M_i noch die Steigungen. Es gilt

$m(FP_i) = (y_{Pi}-y_F)/(x_{Pi}-x_F) = (-2-3)/(x_{Pi}-0) = -5/x_{Pi}$, also

$m(g_i) = x_{Pi}/5$ und damit g_i: $y-0.5 = x_{Pi}/5(x-0.5x_{Pi})$ oder
g_i: $y = 0.5+x_{Pi}/5(x-0.5x_{Pi})$.

Wir benötigen also zwei Laufvariable x_{pi} (durchläuft die Mittelpunkte) und x (normale Laufvariable). Für den Plotter wird gewählt $u:=x_{Pi}$. So entsteht der Term f4: 0.5+u/5*(x-u/2).

Für die x- und u-Werte wurde in der vorliegenden Abbildung gewählt:
X aus [-8,8], u aus [-20,20].

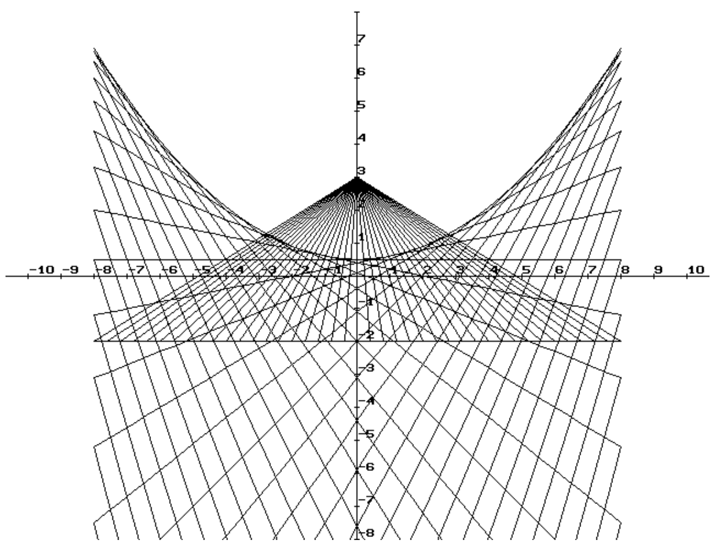
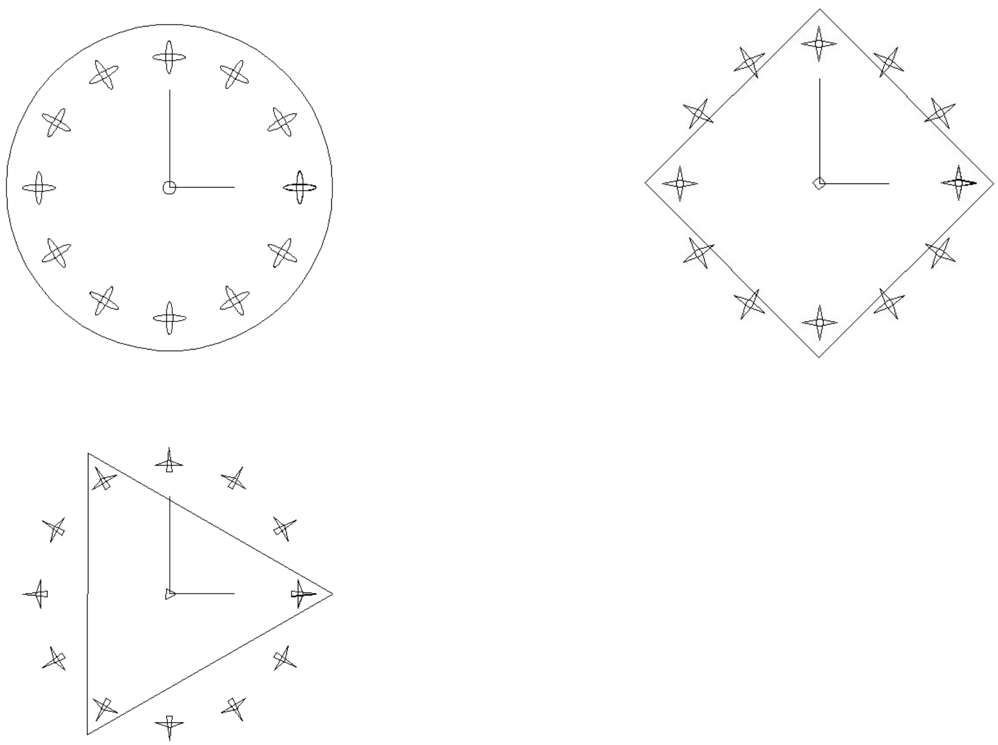


Abbildung 4: Parabel als Hüllkurve

4. DESIGN-ENTSCHEIDUNGEN

In den obigen Ausführungen, insbesondere an den beiden Beispielen, dürfte bereits deutlich geworden sein, daß der Schüler an verschiedenen Stellen Entscheidungen über das endgültige Aussehen seiner Zeichnung, aber auch über das Erscheinungsbild der Zwischenzustände treffen muß. Er trifft damit "Designentscheidungen" für sein Programm.

Angeregt durch eine Ausstellung von im Kunstunterricht meiner Kollegin Manuela Dittmar von Schülern erstellten, originell konstruierter Uhren, entstand die Idee, auch am Computer "Uhren" zu entwerfen (allerdings nicht funktionierende - es kam auf den Entwurf an).
Ein Leistungskurs zur Linearen Algebra/Analytischen Geometrie bot die Gelegenheit zur Erprobung dieser Idee. Die Schüler konnten mit dem Funktionenplotter recht souverän umgehen. Weitere Vorkenntnisse hatten sie in der Abbildungsgeometrie erworben (Abbildungsmatrizen).
Die Abbildungen 5a-c zeigen drei der entstandenen Uhren. Die verschiedenen Formen wurden mit dem gleichen Programm erzeugt, nur wurde die Anzahl der Punkte für den umgebenden Kreis variiert, so daß z. B. bei Anzahl=3 ein Dreieck entstand.



Abbildungen 5a-c: Drei Uhren

5. KUNSTWERKE MIT EINEM FUNKTIONSPLOTTER ?

Passende Beispiele zeigen, daß man mit einem geeigneten Funktionsplotter Darstellungen erzeugen kann, die nicht nur vom Mathematischen her interessant sind, sondern angesichts ihrer Ästhetik die Frage herausfordern, ob es sich hierbei nicht auch um "Kunstwerke" handelt.

Driever schreibt in [3,S.17]: "Der Genieästhetik als Theorie künstlerischer Vermögen korrespondiert ein Begriff von Kunst, der diese von lebensweltlichen

Kontexten isoliert und aus dem Bereich alltäglicher Erfahrungen auslagert, gleich ob dies unter klassizistischen, modernistischen oder sonstigen Prämissen geschieht. Um nun aber überhaupt eine plausible Theorie der Genese ästhetisch-expressiver Kompetenz zu entwickeln, die wiederum Voraussetzung ist für eine belegbare Theorie ästhetischer Erziehung, ist **für die Ästhetik eine Perspektive nötig, die der heroisierenden und genialisierenden Betrachtung von Kunst und Künstler rigoros einen Riegel vorschiebt**" .
Driever erinnert später an den Philosophen und Pädagogen John Dewey, "dem es in seiner Konzeption darum ging, diejenigen Faktoren und Kräfte aufzuzeigen, die den normalen Entwicklungsgang von gewöhnlich menschlichen Betätigungen zu künstlerisch gestaltetem Material begünstigen." Er selbst spricht von einer Art "Ästhetik der Arbeit und Übung".

Unter solchen Aspekten ist es möglich, unseren primär mathematischen Darstellungen über den Anspruch an ihre Ästhetik auch eine künstlerische Dimension zuzusprechen. Dabei erfüllt die Forderung nach einer ästhetischen Darstellung nicht nur einen künstlerischen Anspruch, sondern auch den, ein geeignetes Hilfsmittel für das Verständnis des mathematischen Inhalts zu sein.

Oben wurde bereits auf die Eigenschaften des Funktionenplotters hingewiesen, die besonders zu filmartigen Darstellungen geeignet sind. Für die künstlerische Dimension seien drei Eigenschaften noch besonders hervorgehoben:

- Markieren von Flächen (die Streckenoption)
- Steuerung des Bewegungsablaufs (simultanes Zeichnen, Regulierung der Zeichengeschwindigkeit)
- Wiederholbarkeit, z.B. auch nach anderer Farbwahl
- Möglichkeit der Unterbrechung bei der Entstehung der Zeichnung

Interessant ist dabei auch der Sachverhalt, daß je nach Wahl der Option "Simultan zeichnen (j/n)" unterschiedliche Bilder entstehen können.

Mit diesen und anderen Optionen entwickeln sich vor unserem Auge dynamische Darstellungen, die man bei geeigneter Komposition der Relationen und Optionen ohne Übertreibung als ästhetisch (schön, geschmackvoll, ansprechend - und darüber hinaus nützlich!) bezeichnen kann.

Wir betrachten zwei Beispiele

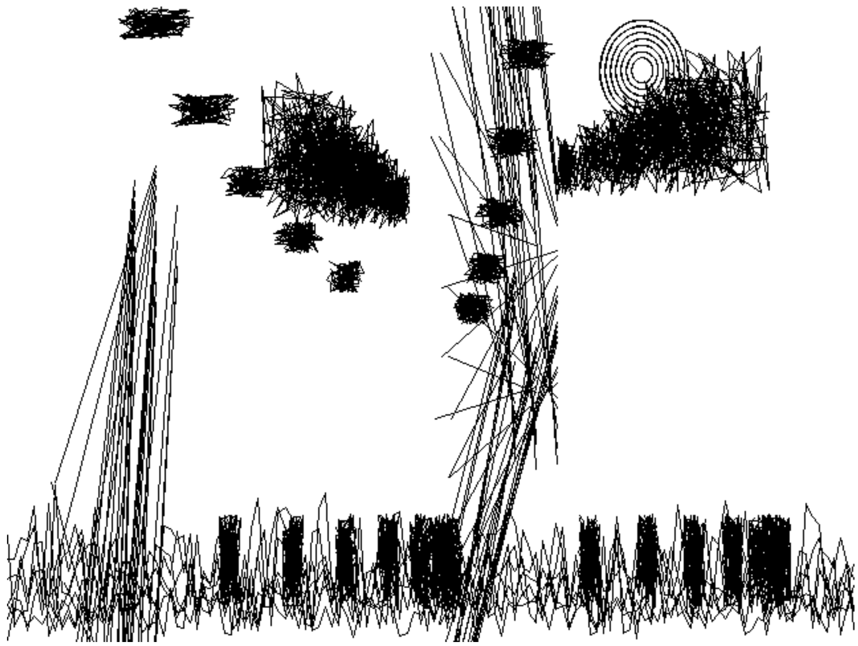
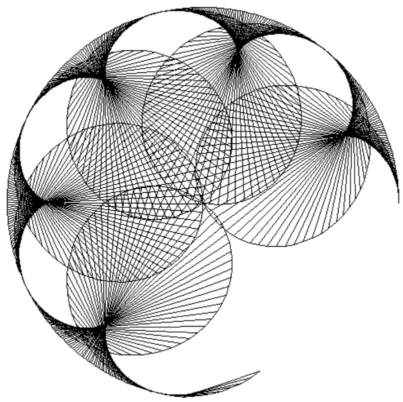


Abb. 6a: Zufallslandschaft

Abbildung 6a - hier statisch und in schwarz-weiß - verdeutlicht uns die dynamische Entstehung einer Landschaft (Gras, Zaun, Bäume, Wolken, Sonne). Farben und Zeichengeschwindigkeit kann der Benutzer der Datei leicht variieren.
Wie wurde der Funktionenplotter programmiert?

Die Abbildungen 6b,c bringen die beiden ausgefüllten Masken. Wir sehen, daß der Zufall eine wesentliche Rolle bei der Bilderzeugung spielt (Benutzung der random-Funktion).

f1: 2*x,random+u*random-10	Gras
f2: random-u*u+8*u,-int(random*2.5)-random-6	Zaun rechts
f3: random-u*u+1.5*u,-int(random*2.5)-random-6	Zaun links
f4: int(random*3+4)-18,x-5,random-18,x*x-105	Baum links
f5: int(random*3+4),x,random,3*x*x-15	Baum rechts
f6: 1.5*random+u/2*random+u ,random+u*u-1	Baumblüten
f7: 0.5*u*cos(x)+10,0.4*u*sin(x)+8	Sonne
f8: u*random-2*u,random+u*random+3	Wolke links
f9: random+u*random-5*u,random+u*u	Kleine Wolken
f10: u*random+2*u+4,random+u*random+4	Wolke rechts



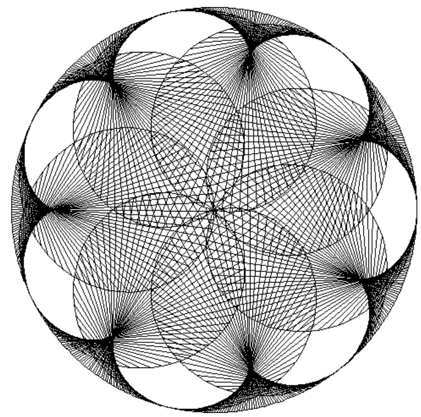


Abb. 7a, 7b

Das zweite Beispiel (Abbildungen 7a,b) zeigt uns eine ästhetische mathematische Figur mit einem beeindruckenden Entstehungsprozeß. Hier wird vorwiegend auf wandernde Strecken in einem Kreis, die Kardioiden einhüllen, zurückgegriffen. Die Beschreibung einer Unterrichtsreihe "Einführung in Parameterdarstellungen in der Sekundarstufe 1" findet sich in "Praxis der Mathematik", 1992, Heft 4. Die Ideen von Figur 7 können noch weiter ausgebaut werden, indem man noch Verschiebungen ansetzt.

6. ZUSAMMENFASSUNG

Mit geeigneten Funktionenplottern lassen sich Effekte erzielen, die man anfangs nicht so ohne weiteres vermutet und bedenkt. Erst bei intensiverer Benutzung und damit einiger Erfahrung zeigen sich weitere didaktisch-methodische Möglichkeiten: Der Benutzer kann nicht nur Graphen **zeichnen**, er kann die Darstellung auf dem Bildschirm auch **gestalten**.

Zeichnen → gestalten

- bessere Durchdringung von Zusammenhängen
- zusätzliche Erkenntnisgewinnung
- größere Sicherheit im Umgang mit Relationen
- Entstehung von Demonstrationsbildern
- Berücksichtigung ästhetischer Gesichtspunkte
- mehr Motivation

Von der einfachen Zeichnung der Sinuskurve bis hin zur Erstellung eines Demonstrationsfilms zur Entstehung der Sinuskurve aus dem Einheitskreis ist es ein weiter Weg. Aber solche Wege lohnen sich, denn sie realisieren in besonderem Maße problem- und handlungsorientierten Unterricht, der vielen Schülern Freude an der Mathematik vermittelt und sie damit auch anderen Bereichen der Mathematik zugänglicher macht.

LITERATUR

[1] P.Maset: Aufgaben der Ästhetischen Erziehung, in
Kunst+Unterricht, Heft 160, 1992, Friedrich-Verlag

[2] M.Lingner: Chronografische Meditationen - Strategien
ästhetischen Handelns, in Kunst+Unterricht, Heft 160, 1992,
Friedrich-Verlag

[3] R.Driever: Ästhetische Erziehung zwischen Therapie und Kunst,
in Kunst+Unterricht, Heft 158, 1991, Friedrich-Verlag

[4] E.Lehmann: Mathematik-Unterricht mit Computereinsatz,
Band 1: Didaktische und methodische Hinweise für die Sekundarstufen 1 und 2
Band 2: Unterrichtsbeispiele, Dümmlers-Verlag, 1988

[5] Artmann, B.: Rezension zu "Mathematik in der Kunst der letzten dreißig Jahre" (D.Guderian, Bannstein-Verlag 1990) in ZDM 92/3

[6] Mathematik und Kunst, in mathematiklehren, Friedrich-Verlag, Heft 23, 1987.

SOFTWARE

[1] H.Lehmann: Funktionenplotter HL-PLOT9, Berlin 1992
Anfragen bei Lehmann,Eberhard, Geitnerweg 20c, 1000 Berlin 45,
Telefon: 030-7110811, 030-7112420

2004
Diese Software ist inzwischen ersetzt durch das Programmsystem ANIMATO, siehe meine Homepage www.snafu.de/~mirza.