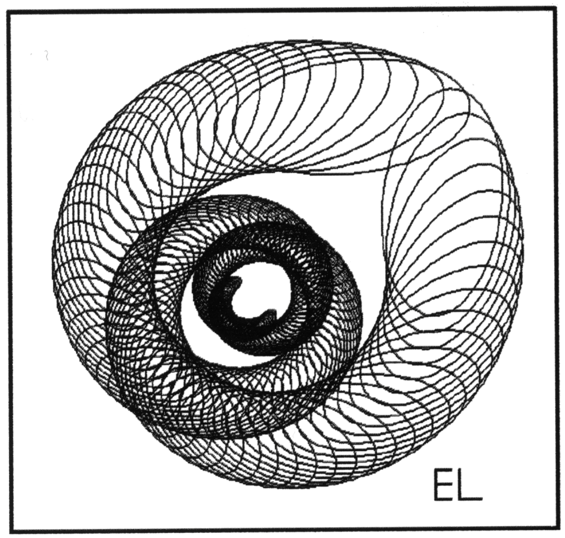
MNU Bremerhaven 2004

Lineare Algebra und Analytische Geometrie

in neuem Gewand



Dr. Eberhard Lehmann, Berlin

mirza@snafu.de --- www.snafu.de/~mirza

Dr. Eberhard Lehmann
mirza@snafu.de
www.snafu.de/~mirza

Grundlagen von Kursen zur AnaGeo und LinAlg

Matrizen als durchgehendes Prinzip,
Matrizenrechnung
Lineare Algebra

Integration von Anwendungen,
in denen Matrizenrechnung benutzt wird.

Lineare Gleichungssysteme

Lineare Algebra und Analytische Geometrie - Kurse

Analytische Geometrie

Integration von Anwendungen,
die auf LGS führen

Integration von Anwendungen aus der Abbildungsgeometrie und Computergrafik als Motivation für Analytische Geometrie

Ausnutzen der vielen Visualisierungsmöglichkeiten

Durchgehende Benutzung des Computers als Rechen- und Zeichenhilfsmittel und zum entdeckenden Lernen
(Visualisierungen und Rechnungen mit CAS und anderen Programmen)

Arbeit mit einem Ray-Tracing - Programm (POVRAY) als weitere Ergänzung der Analytischen Geometrie

Bezüge herstellen zu anderen Fächern, z.B. zur Informatik (LK)

unter Verwendung vielfältiger Unterrichtsformen und einer offenen Aufgabenkultur

Aus diesen

Themenbereichen lassen sich diverse interessante

Lineare Algebra / Analytische Geometrie- Kurse

konzipieren!

Streiflicher >>>

Plot2-oetz2.exe

Streiflichter aus der Linearen Algebra und Analytischen Geometrie

Abbildungsgeometrie:	Ein Bild verzerren (Kugeln)	GK, LK
	Ein Bild bewegen	GK, LK
	Rückgängigmachen einer Abbildung	LK
Ein Voyage-Bild zu einer Rechnung zur Analytischen Geometrie		GK, LK
Kreise (M und Kunst) (Abbildungsgeometrie)	Viele Kreise durch einen Punkt	GK, LK
LGS	Magisches Quadrat, Abituraufgabe	GK, LK
Matrizenmultiplikation	Materialverflechung (Matrizen, LGS)	GK, LK
	Kaufverhalten	LK
Matrizenpotenzen	CRAP-Spiel, Zustandsgraphen	LK
Simulation	Zustandsgraph	LK
Ray-Tracing	Kugeln	GK, LK
Analytische Geometrie (LGS, Ebenen)	LGS zufällig erzeugen, visualisieren	LK
Analytische Geometrie	Geradengleichung, Einsetzungen	GK, LK

Wege zum Lernen, Verstehen und Anwenden

Lernen und Verstehen an einfachen Beispielen,
(vorwiegend händisch) **White Box**

Einführung von **Black Boxes**
(vom System vorgegeben oder selbst definiert)

Black Boxes auf Problemstellungen anwenden

Noch besser verstehen / Vertiefung: **White Box**
-- Lernen und Verstehen an komplexeren Problemen (unter Computernutzung)
-- **Black Boxes** analysieren

Grundregeln für das Arbeiten mit Gleichungen

- Gleichungen werden in der Regel dort behandelt, wo sie gebraucht werden (und sind kein Selbstzweck)!

außermathetische Anwendungen

Gleichung erwachsen aus **Anwendungssituationen**

innermathematische Anwendungen

Die White-Box erarbeiten (meistens vor, manchmal auch nach der Black-Box)

Übungen per Hand erfolgen nur an einigen einfachen Beispielen, **keine Aufgabenkaskaden**

Algorithmen werden an einfachen Beispielen per Handrechnung oder mit dem Computer als methodisches Hilfsmittel ermittelt (Grey-Box), Äquivalenzumformungen

Die Erarbeitungen werden durch **grafische Darstellungen** unterstützt (Kosy, Struktogramm, ...)

Das Ziel heißt: ***Das Arbeiten mit Gleichungen verstehen***

Die Black-Box benutzen,
z. B.
Solve(a(x) = b(x), x)

Üben: Probleme lösen können
Ein (offenes) Problem, modellieren, Gleichung finden, Struktur erkennen, Gleichung lösen, Lösung auswerten, Problem gelöst?, Modell hinterfragen,

Es gibt **mehrere Wege**, um die Lösungsmenge zu bestimmen!

- **Zeichnung**
- Rechnung
- Näherung
- Wertetafel
- ...

Allgemeine Lösungen, Formeln, Bausteine analysieren, Fallunterscheidungen

Das Besondere des Gleichungstyps verdeutlichen (seine Struktur, Grundmenge, Lösungsmenge), Vergleich mit anderen Gleichungstypen

Das Arbeiten mit Gleichungen verstehen (auf einer höheren Stufe)

Als Beispiel dient die Behandlung von Gleichungen, insbesondere von LGS

Lineare Gleichungssysteme zufällig erzeugen -

Visualisierung: Ebenengleichungen

Ein Mathematik-Lehrer benötigt für jede seiner 5 Schülerinnen und jeden seiner 14 Schüler ein lineares Gleichungssystem mit 3 Gleichungen und 3 Variablen. Alle Gleichungssysteme sollen die Lösung {(1,2,3)} haben und die Koeffizienten sollen nur ganze Zahlen von –9 bis 9 sein.

Er möchte die mühsame Aufgabe der Erzeugung der 19 LGS möglichst umfassend dem CAS überlassen. Wie kann er das bewerkstelligen?

Lösung 1 mit dem TI-92

1) randmat(3,3) → rr

1	4	9
–1	–7	–2
7	4	4

2) augment(rr, rr * [1,2,3]^T)

1	4	9	36
–1	–7	–2	-21
7	4	4	27

Probe

3) rref(augment(rr, rr * [1,2,3]^T))

1	0	0	1
0	1	0	2
0	0	1	3

Der Algorithmus für den Lehrer

Für i:=1 bis 19
Eingabe von 1)
Ausgabe der Koeffizientenmatrix
Eingabe von 2)
Ausgabe eines LGS

Wie lässt sich die Aufgabenstellung des Lehrers in eine geometrische Fragestellung kleiden?
Lösung: Gesucht sind die Gleichungen vieler Ebenen durch den Punkt S(1,2,3). - *Wir benutzen das Programm ANALYGEO, Kaese-Software.*

Vektor:
Anfangspunkt:
x = 0,00
y = 0,00
z = 0,00
Endpunkt:
x = 1,00
y = 2,00
z = 3,00
Länge:
l = 3,74
Ebene in Normalenform:

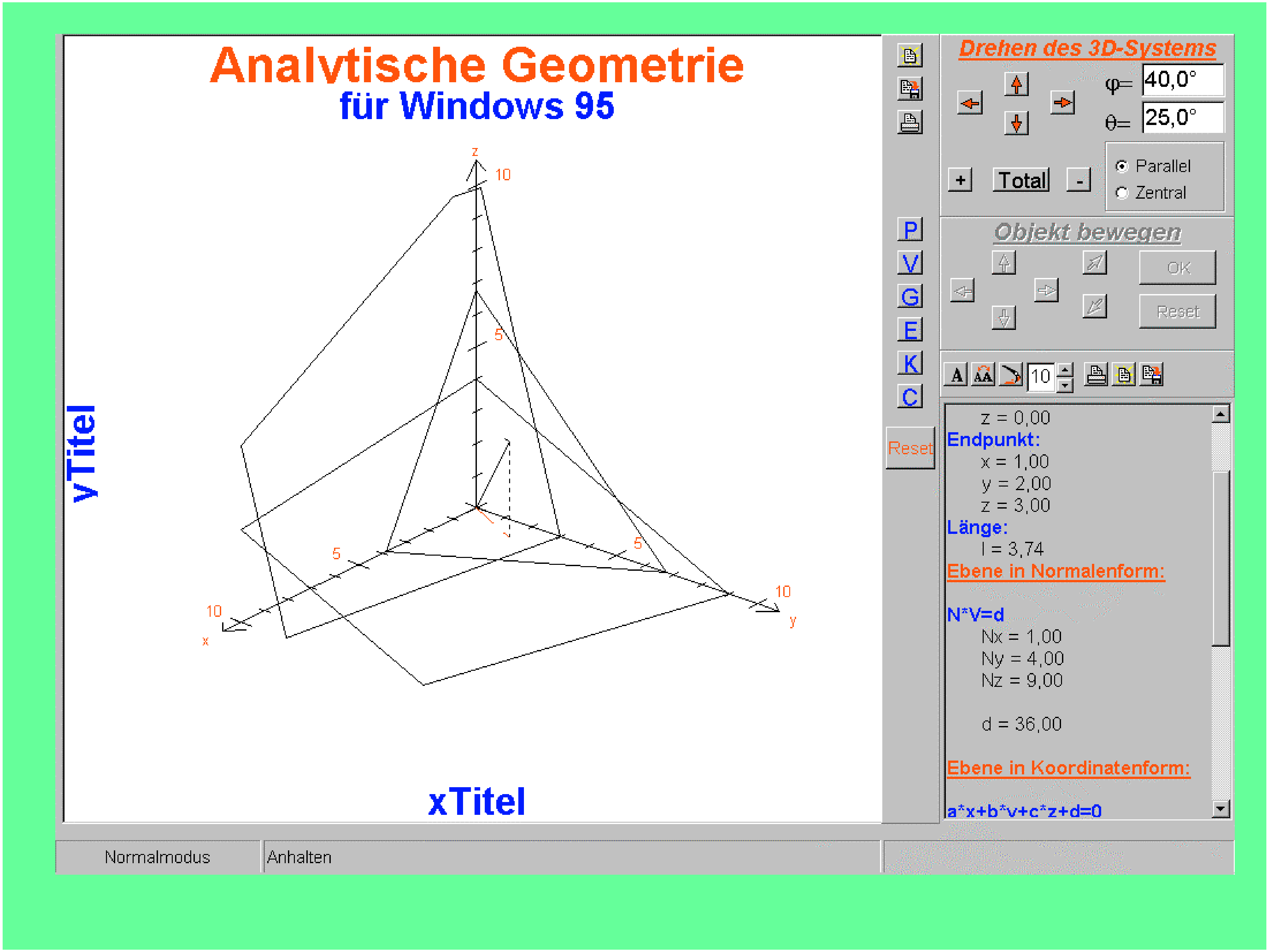
N*V=d
Nx = 1,00 d = 36,00
Ny = 4,00
Nz = 9,00

Ebene in Koordinatenform:

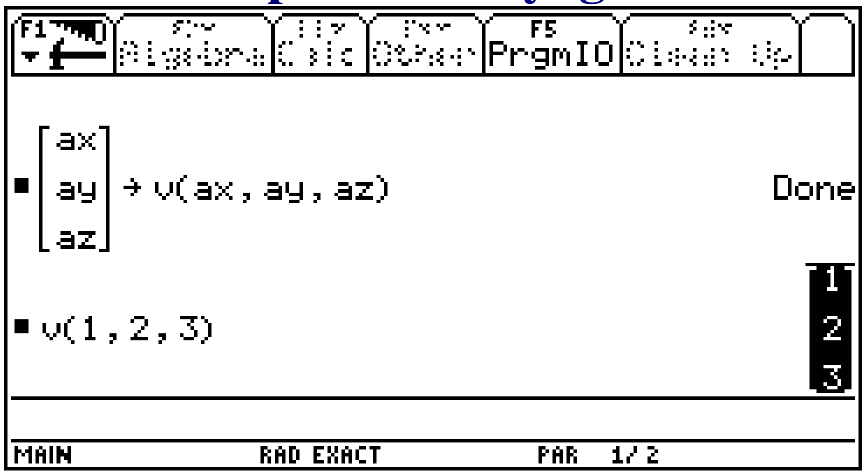
a*x+b*y+c*z+d=0
a = -1,00
b = -7,00
c = -2,00
d = 21,00

Ebene in Koordinatenform:

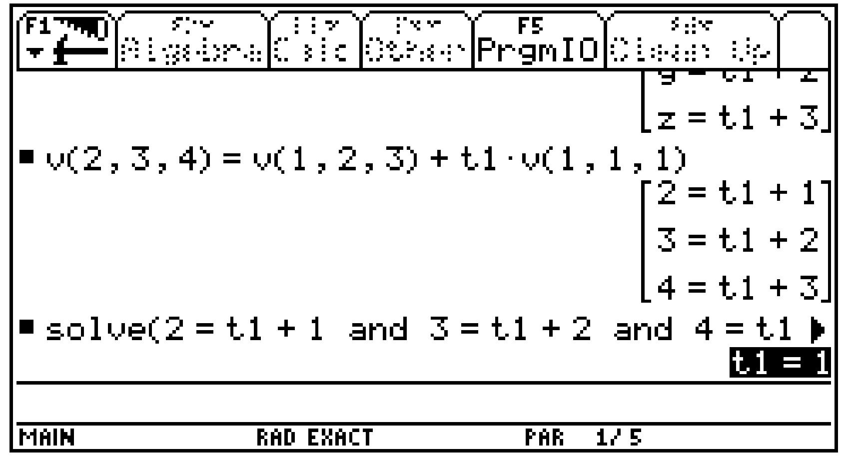
a*x+b*y+c*z+d=0
a = 7,00
b = 4,00
c = 4,00
d = -27,00


Analvtische Geometrie
für Windows 95
vTitel
xTitel
z
10
5
x
y
Drehen des 3D-Systems
φ= 40,0°
θ= 25,0°
Parallel
Zentral
+
Total
-
Objekt bewegen
OK
Reset
P
V
G
E
K
C
Reset
z = 0,00
Endpunkt:
x = 1,00
y = 2,00
z = 3,00
Länge:
l = 3,74
Ebene in Normalenform:
N*V=d
Nx = 1,00
Ny = 4,00
Nz = 9,00
d = 36,00
Ebene in Koordinatenform:
a*x+b*v+c*z+d=0
Normalmodus
Anhalten

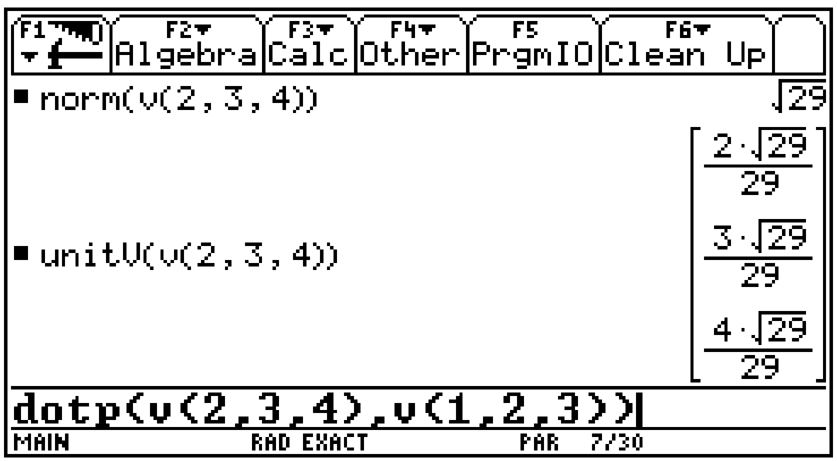
Arbeitsbeispiel mit Voyage 200:



A Vektorbaustein, Test



B Liegt (2,3,4) auf der Geraden?

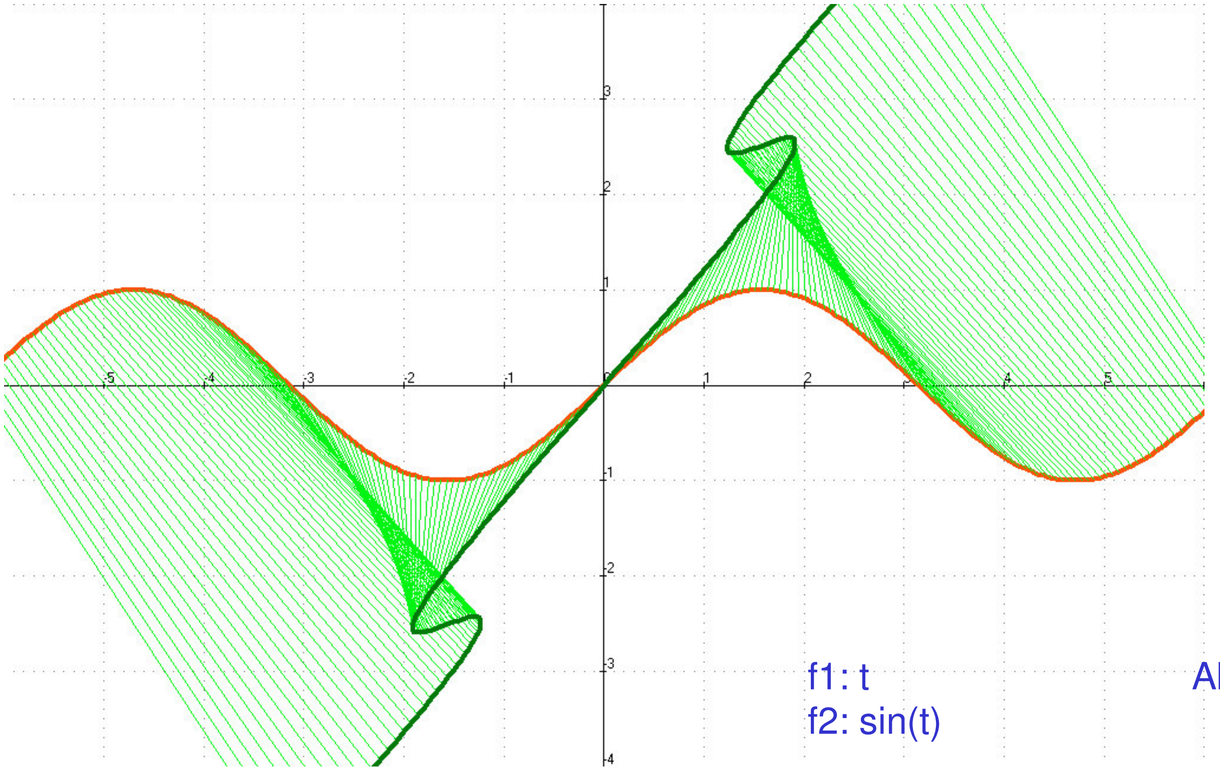


C Länge, Einheitsvektor

Analytische Geometrie mit dem Taschencomputer

Abbilden - verzerren

Analytische Geometrie, Kugeln



Abbildungsgeometrie

Abbildung der Sinuskurve

f1: t	Abbildungsmatrix	0.5	1
f2: sin(t)		0.8	1

f4: f1,f2 - Urbild
f3: f1,f2,0.5*f1+1*f2,0.8*f1+1*f2 - Abbildungsstrecken

f5: 0.5*f1+1*f2,0.8*f1+1*f2 - Bildkurve

Plot2-oetz2.exe

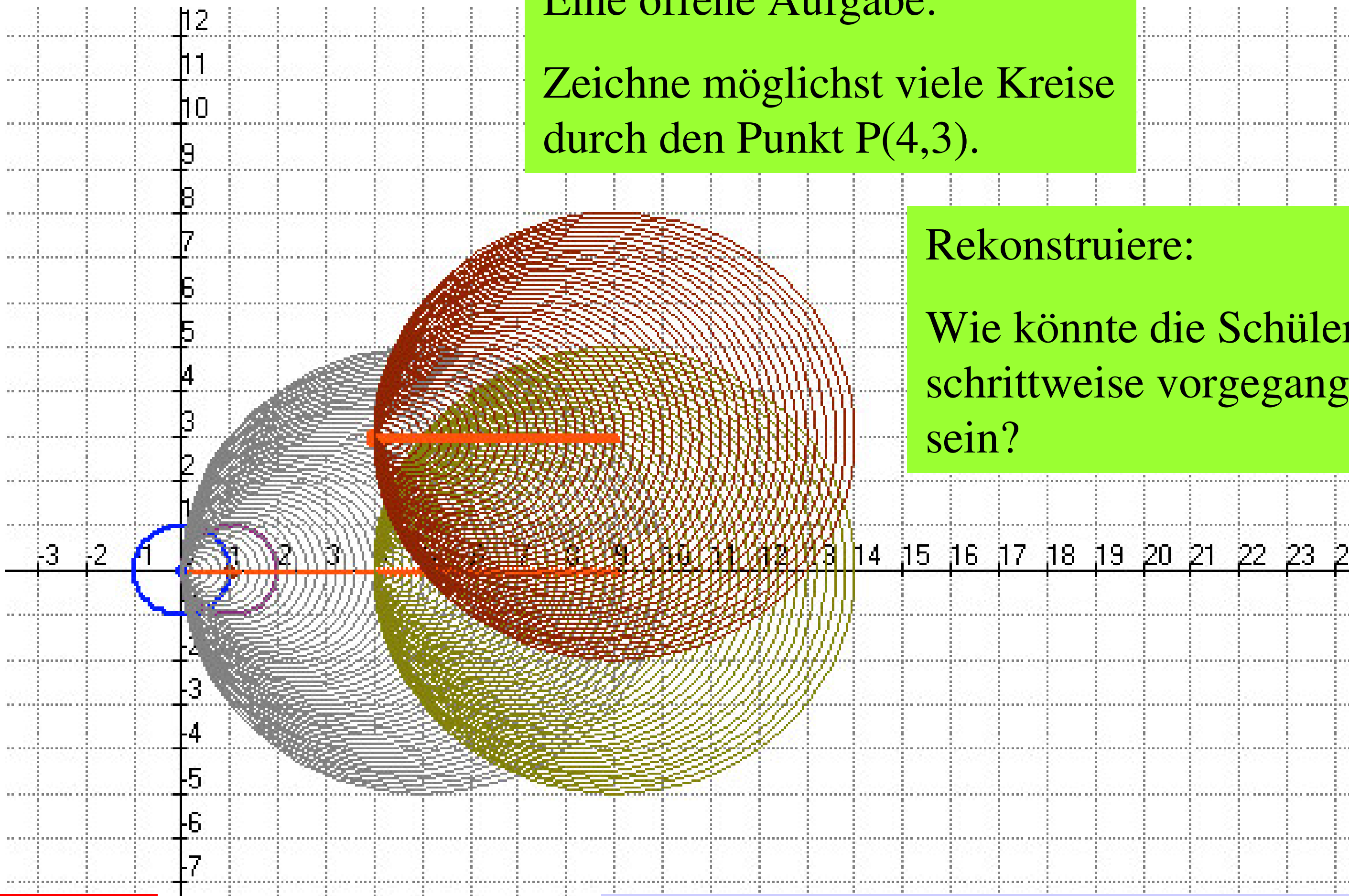
Abbildung-Sinus.pl2

Viele Kreise durch einen Punkt

(Analytische Geometrie / Analysis / Abbildungsgeometrie)

Eine offene Aufgabe:

Zeichne möglichst viele Kreise durch den Punkt P(4,3).



Rekonstruiere:

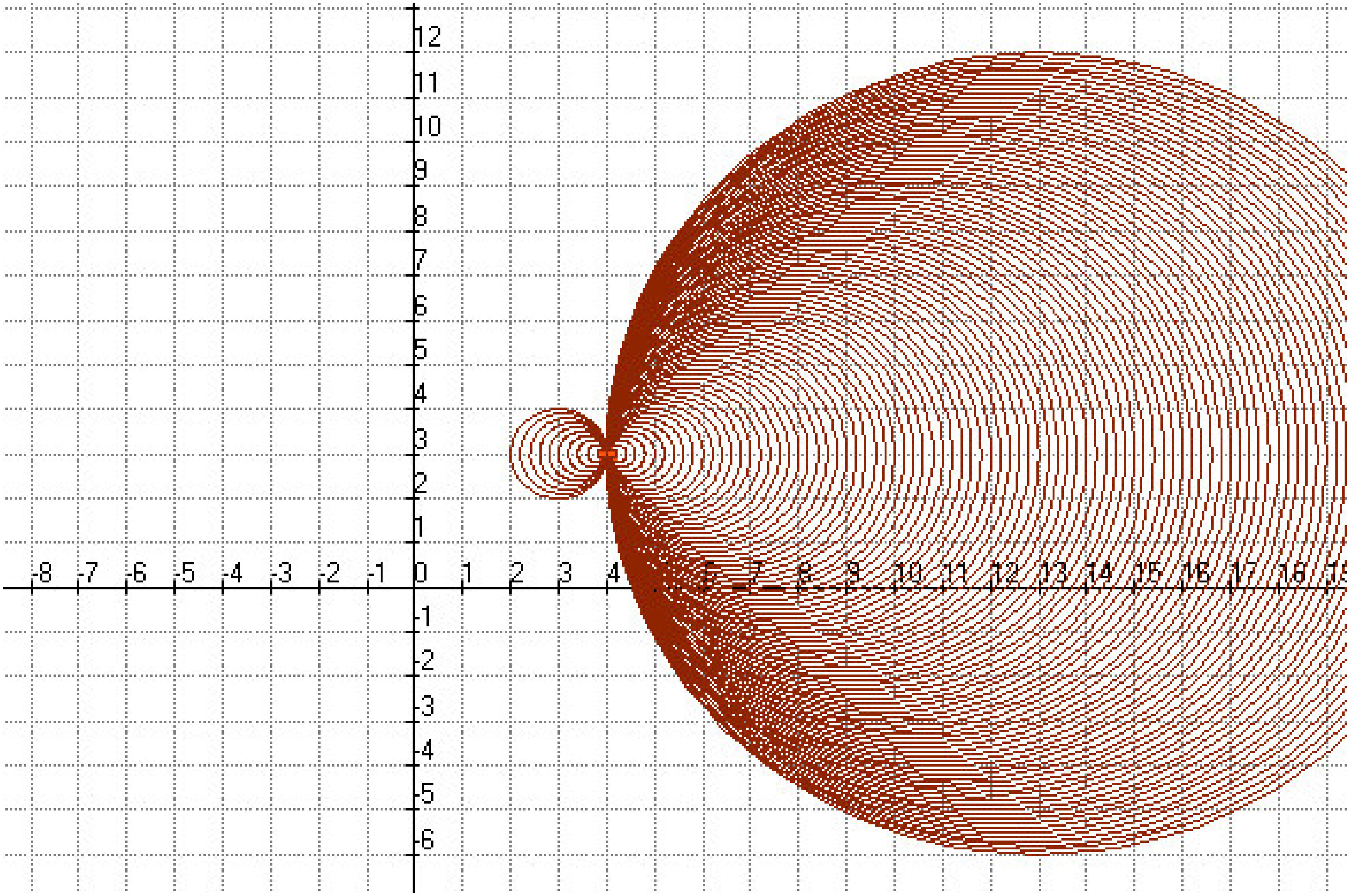
Wie könnte die Schülerin schrittweise vorgegangen sein?

Plot2-oetz2.exe

Animation der Abbildung mit *Kreisbüschel1-Entwurf.pl2*

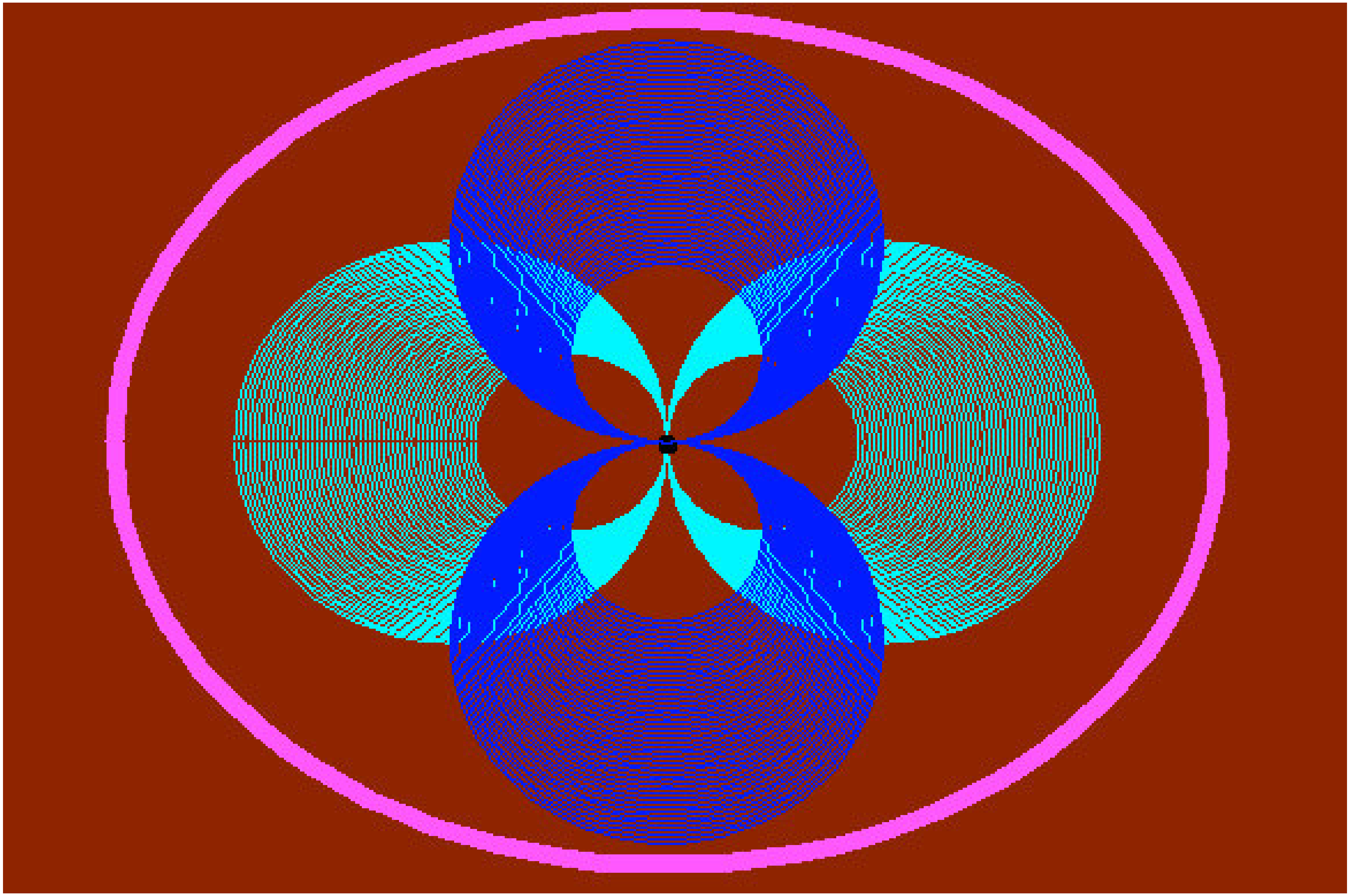
```
f1: a*cos(t)+b    // Kreisbaustein, a Radius, b Verschiebung
f2: a*sin(t)+b

f3: f1(1,0),f2(1,0)  // 1) Einheitskreis als Ausgangskreis

f4: f1(1,1),f2(1,0) //  2) Einheitskreis nach rechts um 1 verschieben
f5: f1(u,u),f2(u,0) //  3) Viele Kreise durch (0,0), Kreismittelpunkte
auf der x-Achse wandern lassen
f6: u,0  // Die Mittelpunkte wandern auf y=0
f7: f1(u,u+4),f2(u,0)  // 4) Viele Kreise durch (4,0)
f8: u+4,0 // Die Mittelpunkte wandern auf y=0, ab (8,0)
f9: 0,0   //Der erste Mittelpunkt
f10: 0,3  // 2.Lösung, Weg über (0,3)

f11: f1(u,u+4),f2(u,3) // 5) Viele Kreise durch (4,3)

f12: u+4,3 // Der Mittelpunkt wandert auf y=3
f13: 4,3  // Zielpunkt, hier sollen alle Kreise durchgehen
f14: 1,0 // der zweite Mittelpunkt
```

Programm zur Animation der Abbildung mit *Kreisbüschel1-Entwurf.pl2*



Animation der Abbildung mit *Kreisbüschel1-Kunst.pl2*

Mathematik und Kunst



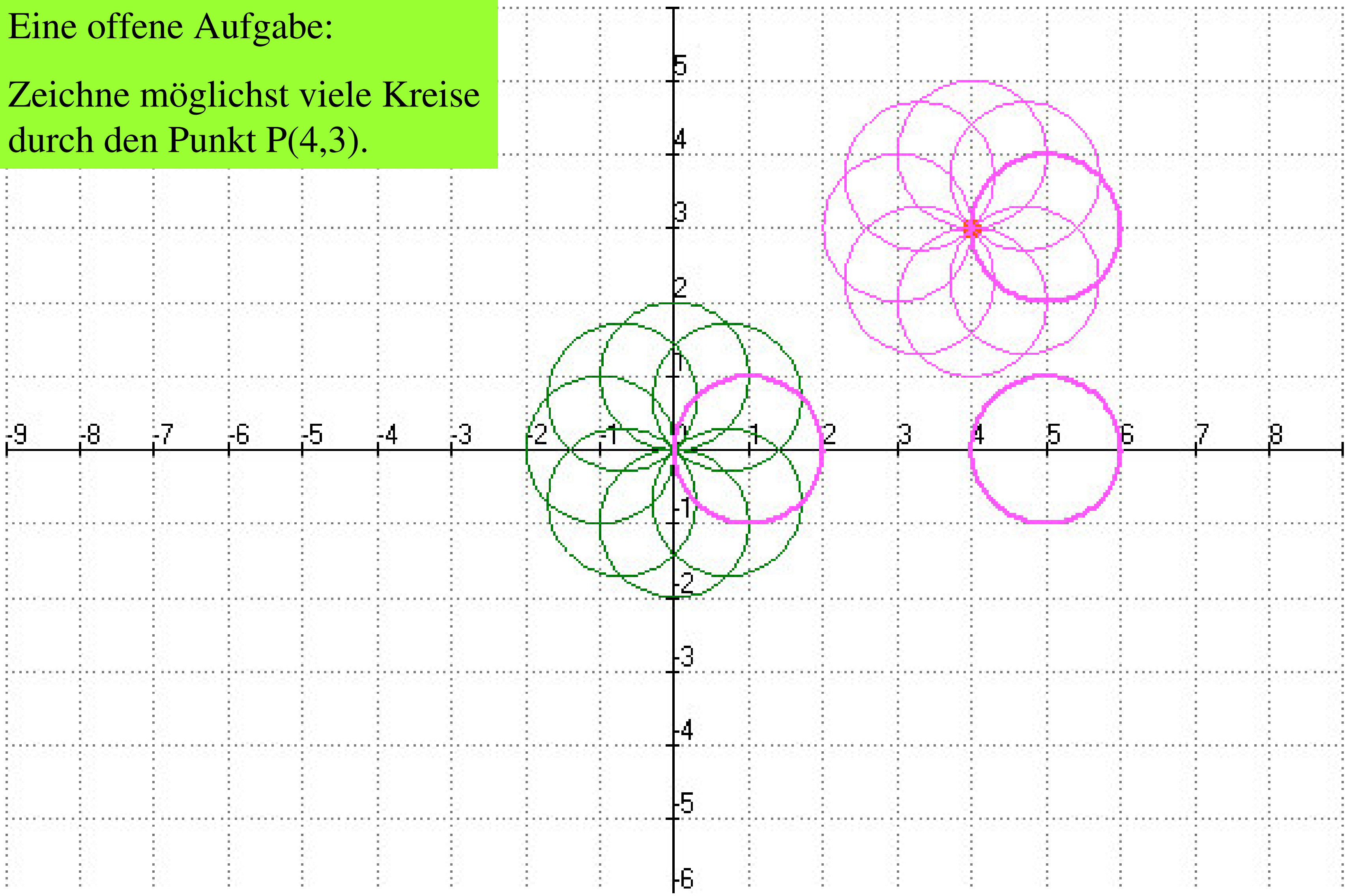
Plot2-oetz2.exe

Animation der Abbildung mit *Kreisbüschel2-Kunst.pl2*

Eine zweite Lösung: Einen Kreis drehen (Abbildungsgeometrie)

Eine offene Aufgabe:

Zeichne möglichst viele Kreise durch den Punkt P(4,3).



Drehung und Verschiebung
(Abbildungsgeometrie)

$$\begin{pmatrix} x^*(t) \\ y^*(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos(v) & -\sin(v) \\ \sin(v) & \cos(v) \end{pmatrix} * \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \end{pmatrix}$$

f1: a*cos(t)+b   // Kreisbaustein   x(t)
f2: a*sin(t)+b   y(t)

f3: f1(1,0),f2(1,0) // Einheitskreis als Ausgangskreis

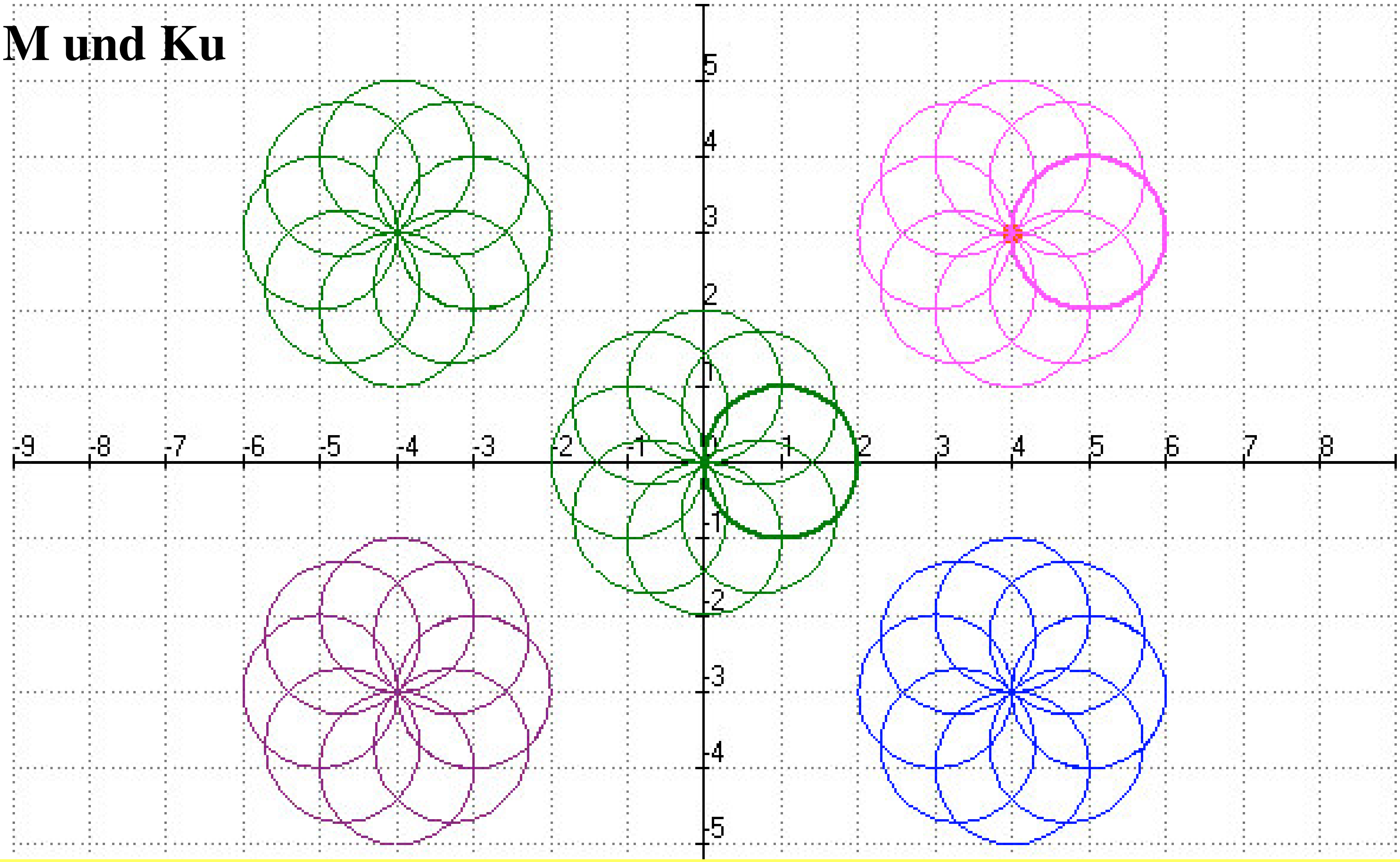
f4: f1(1,1),f2(1,0)
f5: f1(1,4+1),f2(1,3)
f6: f1(1,4+1),f2(1,0)
f13: 4,3 // Zielpunkt

Analysiere die Lösung und drehe auch noch um andere Punkte!

f14: cos(v)*f1(1,1)-sin(v)*f2(1,0),sin(v)*f1(1,1)+cos(v)*f2(1,0) // Drehung um (0,0)

f15:   cos(v)*f1(1,1) - sin(v)*f2(1,0) + 4,
sin(v)*f1(1,1) + cos(v)*f2(1,0) + 3
// Verschiebung um (4,3) und Drehung

M und Ku



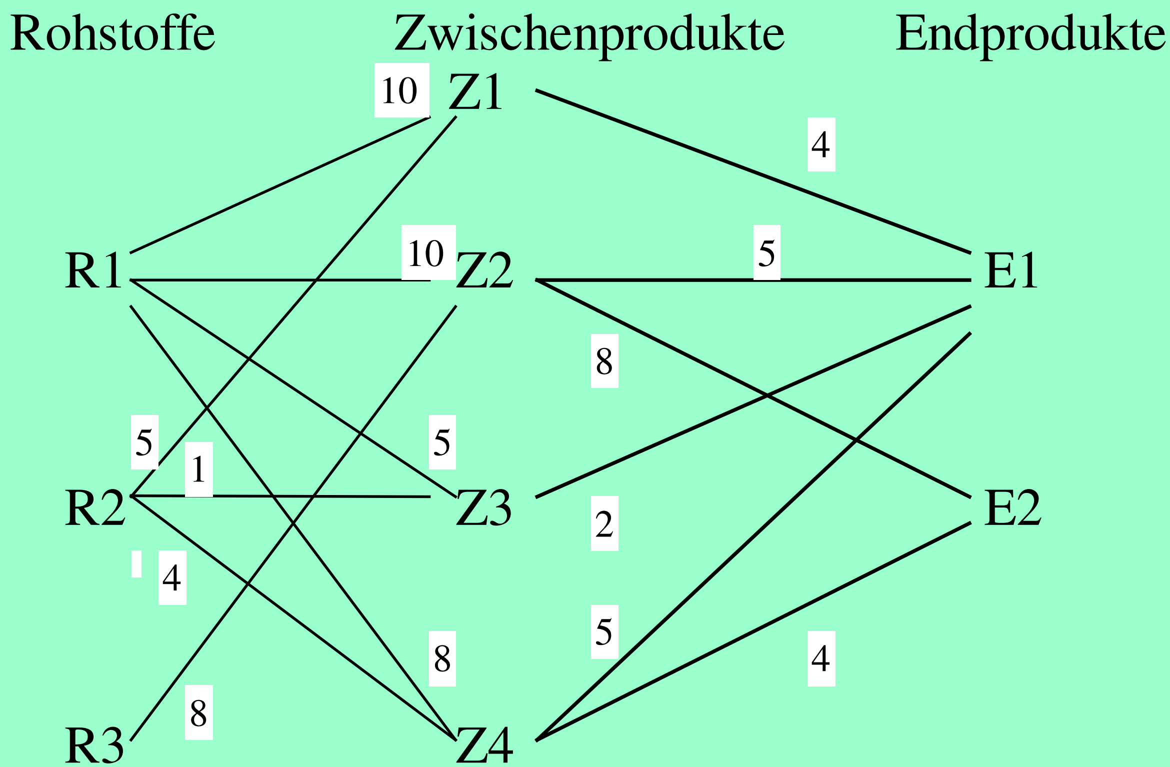
Was muss man wissen /lernen?

Parameterdarstellung des Einheitskreises - Drehen - Verschieben

Plot2-oetz2.exe

Animation der Abbildung mit *Kreisbüschel-drehen-verschieben.pl2 (MNU-Halle)*

Gegeben ist der durch die folgende Abbildung bekannte Bedarf an Material.



Materialverflechtung - eine Anwendung von Matrizenrechnung

Zum Beispiel werden zur Herstellung von Zwischenprodukt Z2 8 Einheiten von Rohstoff 3 benötigt.

Aufgabe: Wieviel Rohstoffeinheiten werden zur Herstellung *einer* Einheit E1 bzw. E2 benötigt? - Wie ändert sich die Anzahl der Rohstoffeinheiten, wenn *20* Einheiten von E1 und 30 Einheiten von E2 bestellt werden?

Aufgabe: Wieviel Rohstoffeinheiten werden zur Herstellung *einer* Einheit E1 bzw. E2 benötigt? - Wie ändert sich die Anzahl der Rohstoffeinheiten, wenn *20* Einheiten von E1 und 30 Einheiten von E2 bestellt werden?

Lösungsansatz über ein LGS (für die zweite Frage):

$$
\begin{array}{lllllllllll}
(G1) & r_1+ & & & -10z_1 & -10z_2 & -5z_3 & -8z_4 & & & = 0 \\
(G2) & & r_2+ & & -5z_1 & & -1z_3 & -4z_4 & & & = 0 \\
(G3) & & & r_3+ & & 8z_2 & & & & & = 0 \\
(G4) & & & & z_1 & & & & & -4e_1 & = 0 \\
(G5) & & & & & z_2 & & & -5e_1 & -8e_2 & = 0 \\
(G6) & & & & & & z_3 & & -2e_1 & & = 0 \\
(G7) & & & & & & & z_4 & -5e_1 & -4e_2 & = 0 \\
(G8) & & & & & & & & e_1 & & = 20 \\
(G9) & & & & & & & & & e_2 & = 30
\end{array}
$$

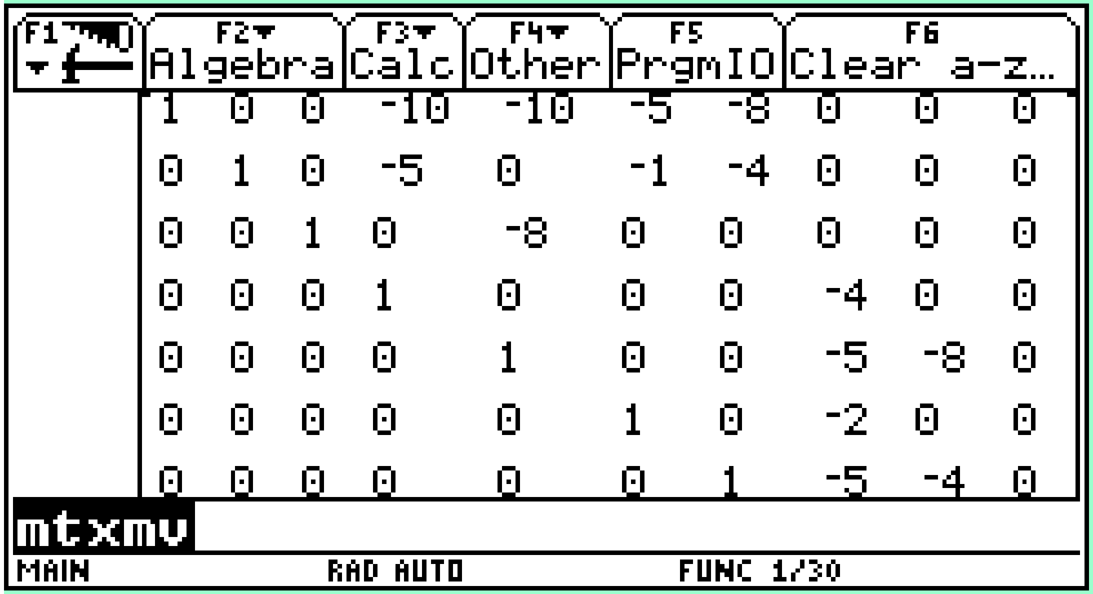
Begründung von Gleichung (1):
Rohstoff 1 (benötigte Menge r1) wird verbraucht durch die Zwischenproduktmengen $10z_1, 10z_2, 5z_3, 8z_4$. Die für die Zwischenprodukte bereitszustellende Menge r_1 ergibt sich also gerade aus der Summe $(10z_1+10z_2+5z_3+8z_4)$, also
$r_1 = (10z_1+10z_2+5z_3+8z_4)$ oder $r_1-(10z_1+10z_2+5z_3+8z_4) = 0$.

Wir haben ein LGS mit n=9 Variablen ($r_1,r_2,r_3,z_1,z_2,z_3,z_4,e_1,e_2$) und m=9 Gleichungen vor uns.
In Matrizen-Kurzschreibweise**:** $\mathbf{A_{(9,9)}x_{(9,1)} = b_{(9,1)}}$ und ausführlich:

$$\begin{array}{c} \begin{array}{ccccccccc} r_1 & r_2 & r_3 & z_1 & z_2 & z_3 & z_4 & e_1 & e_2 \end{array} \\ \left[\begin{array}{ccccccccc} 1 & 0 & 0 & \boldsymbol{-10} & \boldsymbol{-10} & \boldsymbol{-5} & \boldsymbol{-8} & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \boldsymbol{-5} & \boldsymbol{0} & \boldsymbol{-1} & \boldsymbol{-4} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \boldsymbol{0} & \boldsymbol{-8} & \boldsymbol{0} & \boldsymbol{0} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & \boldsymbol{-4} & \boldsymbol{0} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & \boldsymbol{-5} & \boldsymbol{-8} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & \boldsymbol{-2} & \boldsymbol{0} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & \boldsymbol{-5} & \boldsymbol{-4} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \end{array} * \left[\begin{array}{c} r_1 \\ r_2 \\ r_3 \\ z_1 \\ z_2 \\ z_3 \\ z_4 \\ e_1 \\ e_2 \end{array}\right] = \left[\begin{array}{c} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 20 \\ 30 \end{array}\right]$$

eine (9,9)-Matrix (9.1)-Matrix (9,1)-Matrix

Das ist ein sehr bemerkenswertes LGS, "Wunschtraum" des LGS-Lösers! Warum? Betrachten Sie Gleichung (9), dann Gleichung (8) usw..



Bearbeitung mit dem Taschencomputer Voyage 200

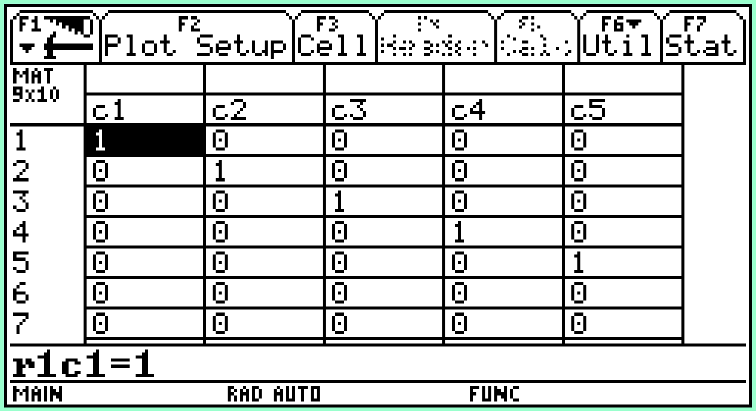
Die Eingabe der Matrix erfolgt im Tabelleneditor

Die ganze Matrix einschließlich der rechten Seiten des LGS wurde unter dem Namen „mtxmv“ gespeichert. Mit der Anweisung *rref(mtxmv)* wird der Gauß-Algorithmus auf die Matrix mtxmv angewendet. Das vollständige Ergebnis kann man sich dann in dem Matrix/Tabellen-Editor durch Hoch-/runter- bzw. Rechts/links-blättern ansehen.

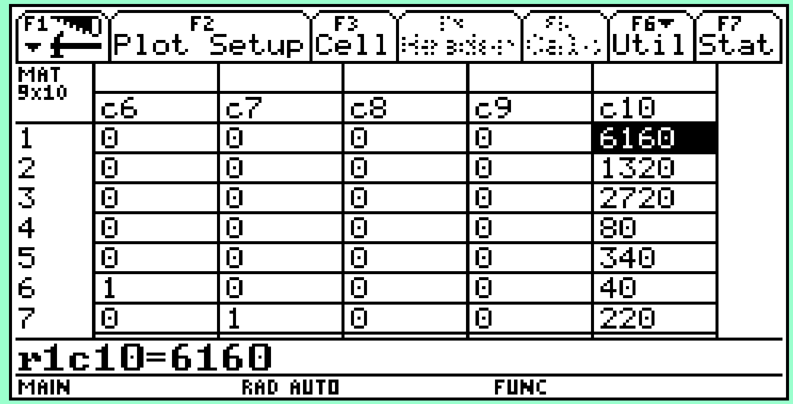
Die Lösung erfolgt mit rref(mtxmv), also hier mit einer Black Box, die man aber auch als Ausgangssituation für die Herleitung des Gauß-Algorithmus nehmen kann (Unterrichtssituation 1) **oder** der GA ist schon bekannt (Unterrichtssituation 2)

Die Spalte unter c10 zeigt uns die gesamte Lösungsmenge. Wir lesen ab:

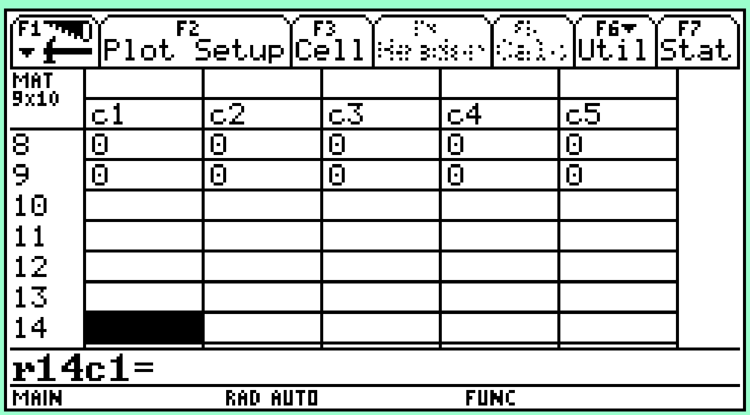
r1 = 6160 r2 = 1320 r3 = 2720 z1 = 80 z2 = 340 z3 = 40
z4 =220 e1 = 20 e2 = 30



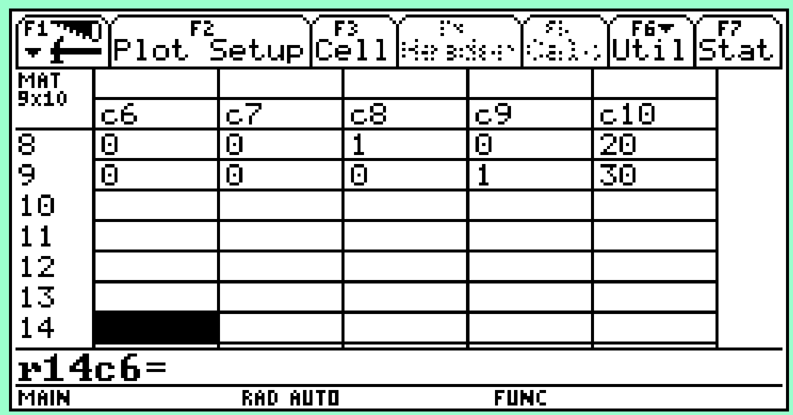
	c1	c2	c3	c4	c5
1	1	0	0	0	0
2	0	1	0	0	0
3	0	0	1	0	0
4	0	0	0	1	0
5	0	0	0	0	1
6	0	0	0	0	0
7	0	0	0	0	0



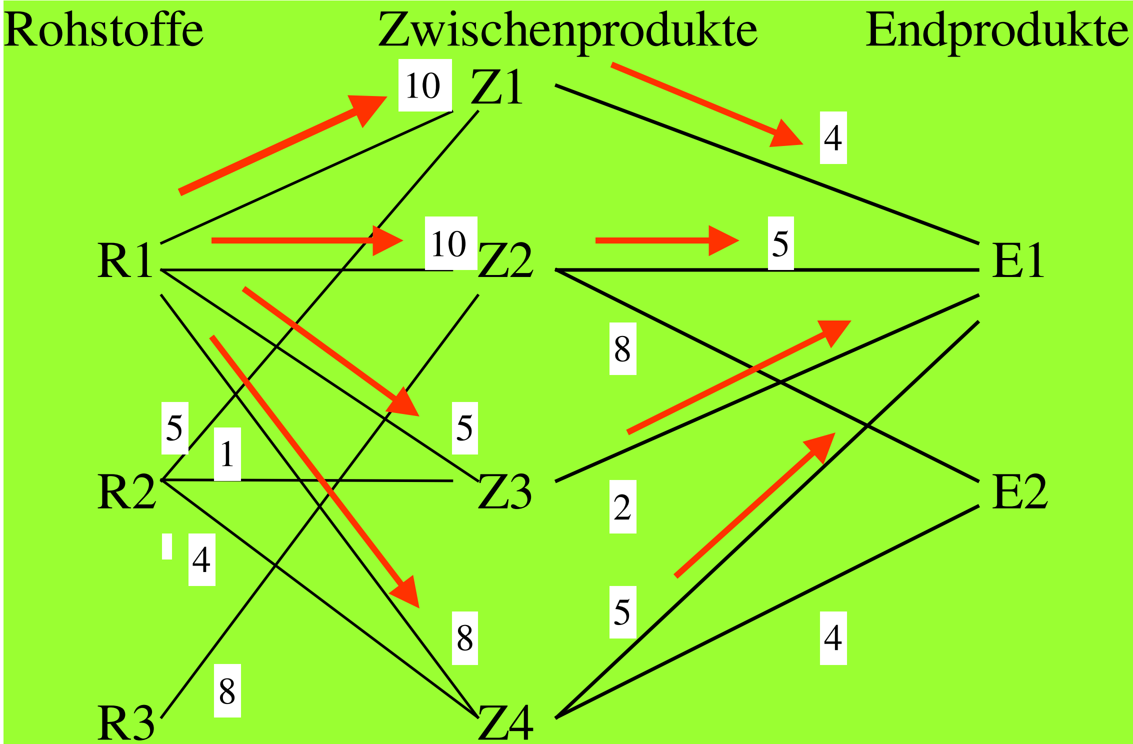
	c6	c7	c8	c9	c10
1	0	0	0	0	6160
2	0	0	0	0	1320
3	0	0	0	0	2720
4	0	0	0	0	80
5	0	0	0	0	340
6	1	0	0	0	40
7	0	1	0	0	220



	c1	c2	c3	c4	c5
8	0	0	0	0	0
9	0	0	0	0	0
10					
11					
12					
13					
14					



	c6	c7	c8	c9	c10
8	0	0	1	0	20
9	0	0	0	1	30
10					
11					
12					
13					
14					



Vom Graphen zur Rechnung

Einführung der Matrizenmultiplikation

Das Problem:

Wieviel Einheiten von Rohstoff R1 werden gebraucht zur Herstellung von einer Einheit des Endprodukts E1?

	E1	E2
Z1	**4**	0
Z2	**5**	8
Z3	**2**	0
Z4	**5**	4

Von R1 nach E1

	Z1	Z2	Z3	Z4
R1	**10**	**10**	**5**	**8**
R2	5	0	1	4
R3	0	8	0	0

140	**112**
c	d
e	f

Von R1 nach E1

a=10*4+10*5+5*2+8*5= 140

E1	20
E2	30

<<< Bestellung

	E1	E2
R1	**140**	112
R2	42	16
R3	40	64

6160
1320
2720

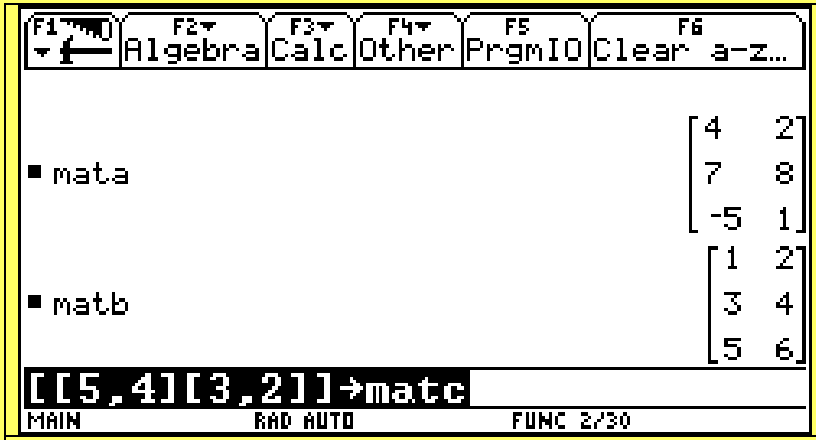
>>> Vergleich mit der LGS-Lösung!

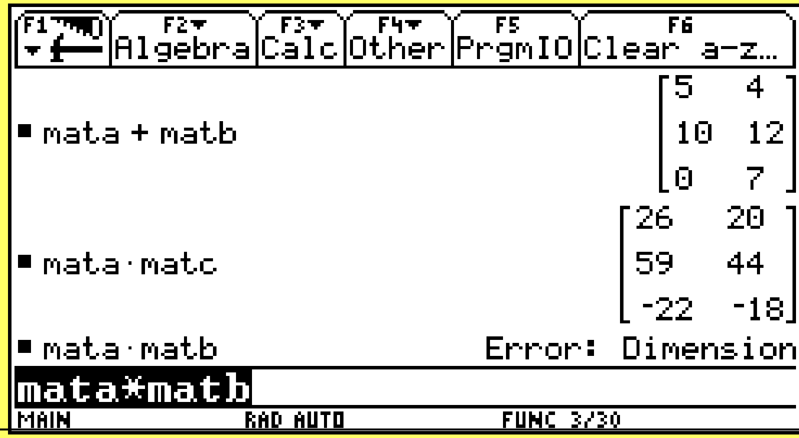
Das Materialverflechtungsproblem kann also mit einem LGS

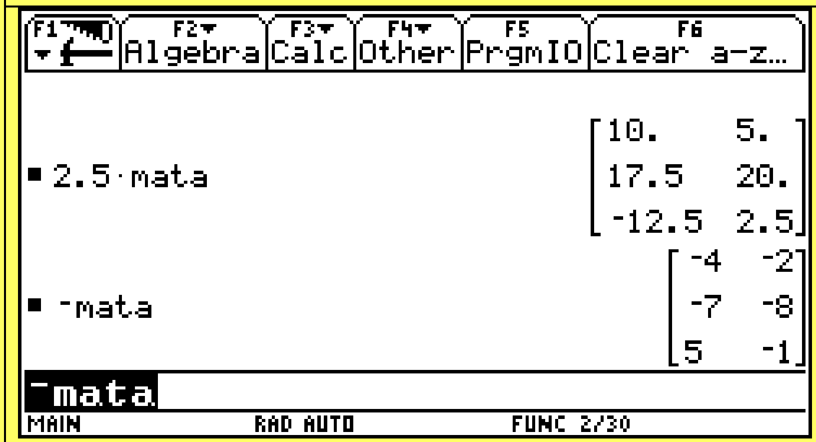
oder mit Matrizenmultiplikation gelöst werden.

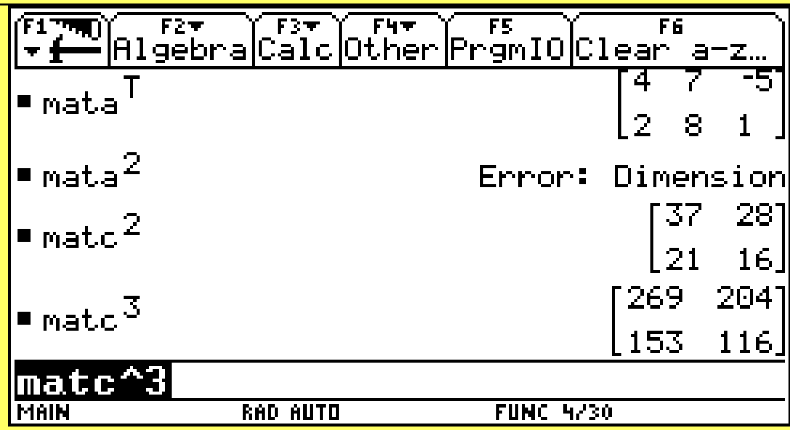
Matrizen-Verknüpfungen 1

- Die Eingabe von Matrizen beim TI-92
- Matrizenverknüpfungen
- **Der Zugriff auf einzelne Matrizenelemente**, etwa einer Matrix „matb“ kann beim TI-92 durch Angabe der Doppelindizes erfolgen, z.B. matb[3,4].

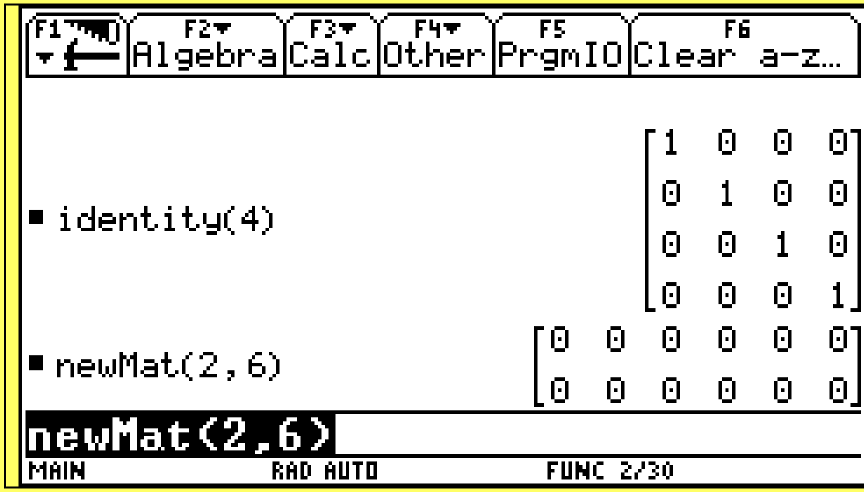


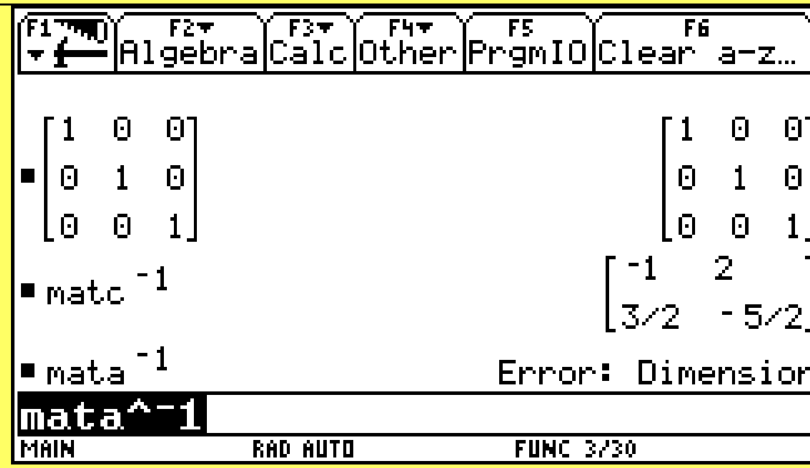


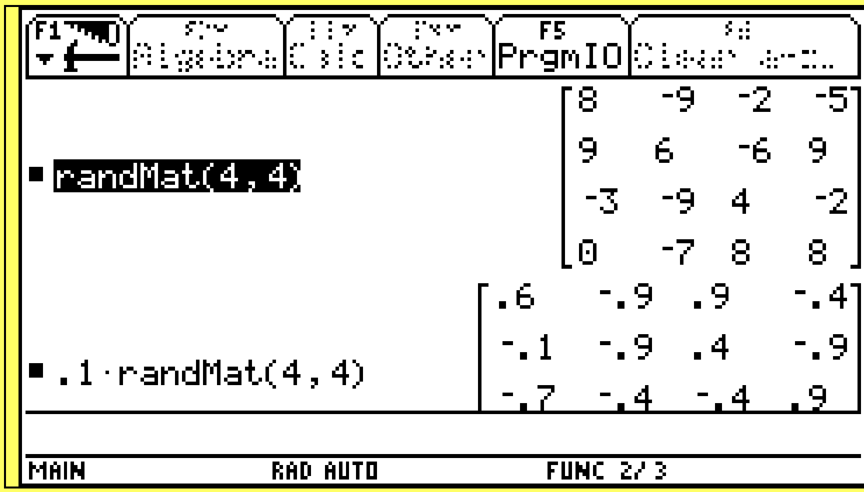




Matrizen-Verknüpfungen 2







In diesem Fall wurde eine (4,4)-Matrix erzeugt. Die zufällig erzeugten Elemente gehen bei randMat stets von -9 bis 9 (ganzzahlig). Will man andere Werte erzeugen, so muß man geeignete Manipulationen vornehmen, z.B. mit 0.1 multiplizieren oder 9 addieren.

Würfelzahlen-Matrix

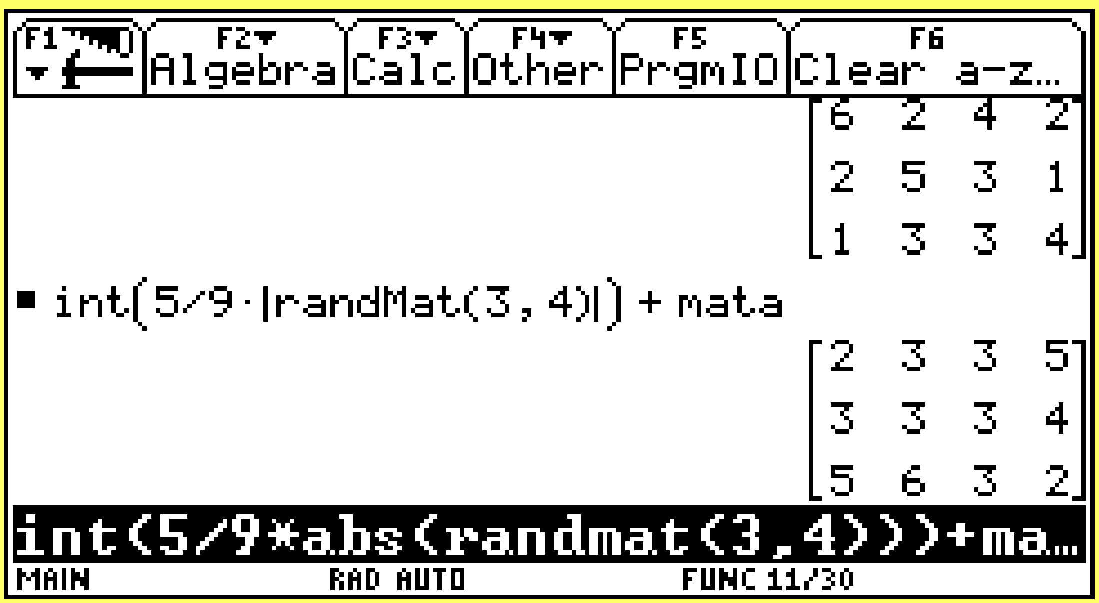
Matrizen-Verknüpfungen 3

Problem: Eine Matrix des Typs (3,4) soll mit den Würfelzahlen 1 bis 6 gefüllt werden.

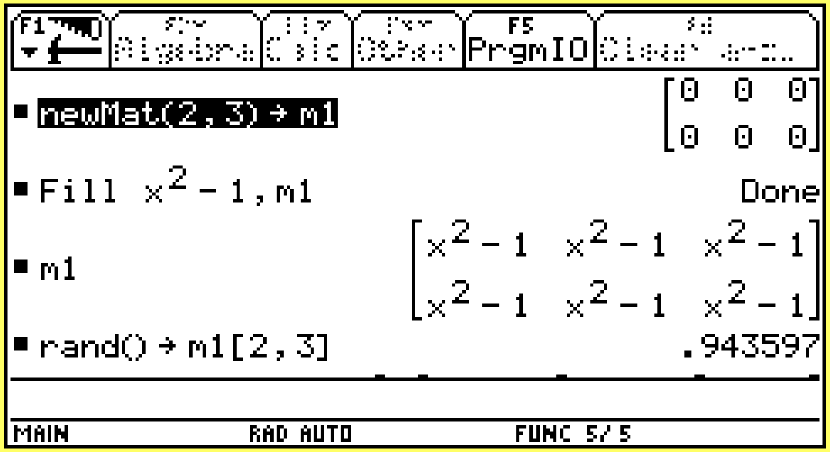
Probieren wir den Lösungsweg in einem Schritt:

int(5/9*abs(randMat(3,4))) + mata, wobei mata eine (3,4)-Matrix mit lauter 1-en sein muß. Zusammenfassung:

randMat(3,4)	Zufallsmatrix mit Elementen aus {-9,-8,...8,9}
abs(randMat(3,4))	Zufallsmatrix mit Elementen aus {0,1,...9}
5/9* abs(randMat(3,4))	Zufallsmatrix mit Elementen aus {0, 5/9, 10/9, ... , 45/9}
int(5/9* abs(randMat(3,4)))	Zufallsmatrix mit Elementen aus {0,1,2,3,4,5}
int(5/9* abs(randMat(3,4)))+mata	Zufallsmatrix mit Elementen aus {1,2,3,4,5,6}

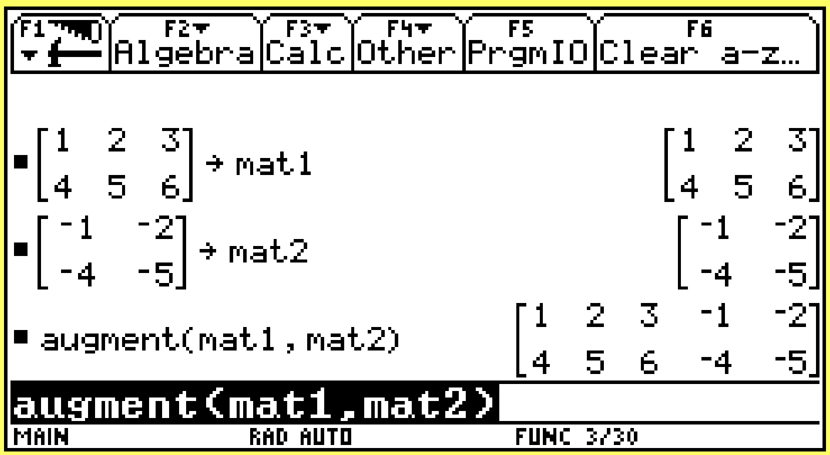


Matrizen-Verknüpfungen 4



Alle Elemente einer (2,3)-Matrix werden mit dem Term x^2-1 gefüllt.

Nun wird auf das Element an der Stelle (Zeile=2, Spalte=3) zugegriffen. In diesem Fall wird eine Zufallszahl an diese Stelle geschrieben.



1.3 Gesetze für das Rechnen mit Matrizen

Bei der folgenden Auflistung von Matrizengesetzen wird die Verknüpfbarkeit der jeweils beteiligten Matrizen vorausgesetzt.

Matrizen-Gesetze

Addition von Matrizen

$A+(B+C)=(A+B)+C=A+B+C$	Assoziativgesetz
$A + O = A$	neutrales Element 0 bzgl. der Addition,, Nullmatrix
$A + (-A) = O$	-A ist inverses Element zu A bzgl. der Addition
$A + B = B + A$	Kommutativgesetz
$A - B := A + (-B)$	Definition der Subtraktion

Multiplikation von Matrizen

Hinweis: Für A*B wird auch AB geschrieben.

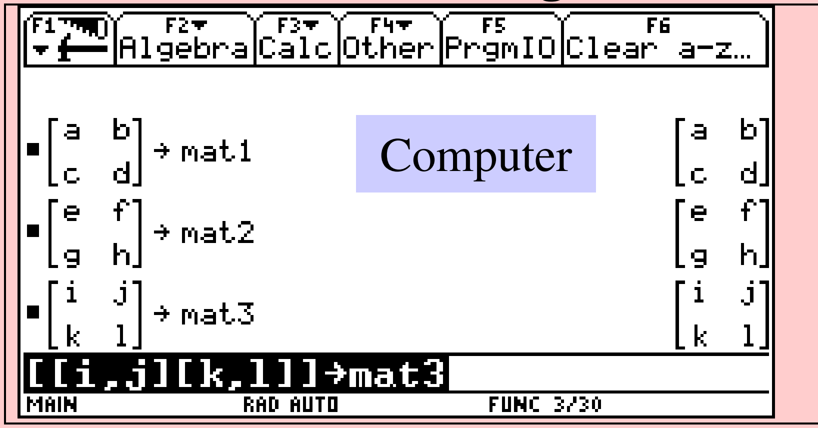
$A(BC) = (AB)C = ABC$	Assoziativgesetz
$AE = A$; A,E quadratisch	E Einheitsmatrix, neutrales Element der Multiplikation
$A A^{-1} = E$; quadratische Matrizen	A^{-1} ist inverse Matrix zu A, es gilt auch $A^{-1} A = E$, aber
	im allgemeinen gilt $AB <> BA$ (kein Kommutativgesetz)
$(AB)^T = B^T A^T$	Das Produkt AB transponieren
$(AB)^{-1} = B^{-1} A^{-1}$	Das Produkt AB invertieren
$A(B+C) = AB + AC$	distributive Gesetze
$(A+B)C = AC + BC$	

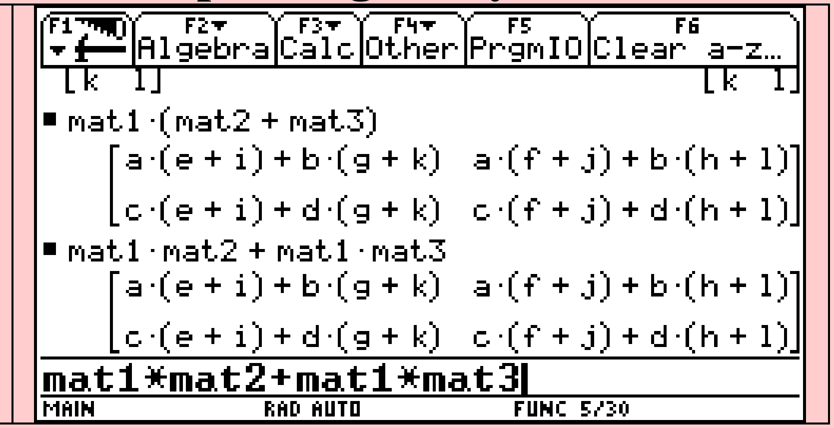
Multiplikation einer Matrix mit einem Skalar

$k(A + B) = kA+kB$	1.Distributivgesetz, $k \in R$
$(k + l)A = kA+lA$	2.Distributivgesetz, $k, l \in R$
$k(lA) = (kl)A$	Assoziativgesetz, $k, l \in R$
$1A = A$	neutrales Element; $1 \in R$

Matrizen-Gesetz nachweisen

Nachweis eines Matrizengesetzes mit dem Computeralgebrasystem





Beispiel für einen allgemeinen Beweis zur Matrizenrechnung

Assoziativgesetz der Matrizenaddition

(1) $A_{(m,n)}+[B_{(m,n)}+C_{(m,n)}] = [A_{(m,n)}+B_{(m,n)}]+C_{(m,n)}$, kurz $A+[B+C] = [A+B]+C$

Beweis: Alle betrachteten Matrizen seien (m,n)-Matrizen. Wir lassen daher den Typ bei der Beweisführung weg.

Handrechnung

Es sei $A=(a_{ij})$, $B=(b_{ij})$, $C=(c_{ij})$. Dann gilt

$A + [B + C]$	$= (a_{ij}) + [(b_{ij}) + (c_{ij})]$	
	$= (a_{ij}) + [(b_{ij} + c_{ij})]$	nach Def. der Matrizenaddition
	$= (a_{ij} + [b_{ij} + c_{ij}])$	nach Def. der Matrizenaddition
	$= ([a_{ij} + b_{ij}] + c_{ij})$	Assoziativgesetz in R
	$= [(a_{ij}) + (b_{ij})] + (c_{ij})$	nach Def. der Matrizenaddition
$A + [B + C]$	$= [A + B] + C$	wie behauptet.

Komplexe Zahlen und Matrizen

Aufgabe

C sei die Menge der komplexen Zahlen: C={a+bi mit a,b∈ R}, M die Menge der im folgenden genannten (2,2)-Matrizen:

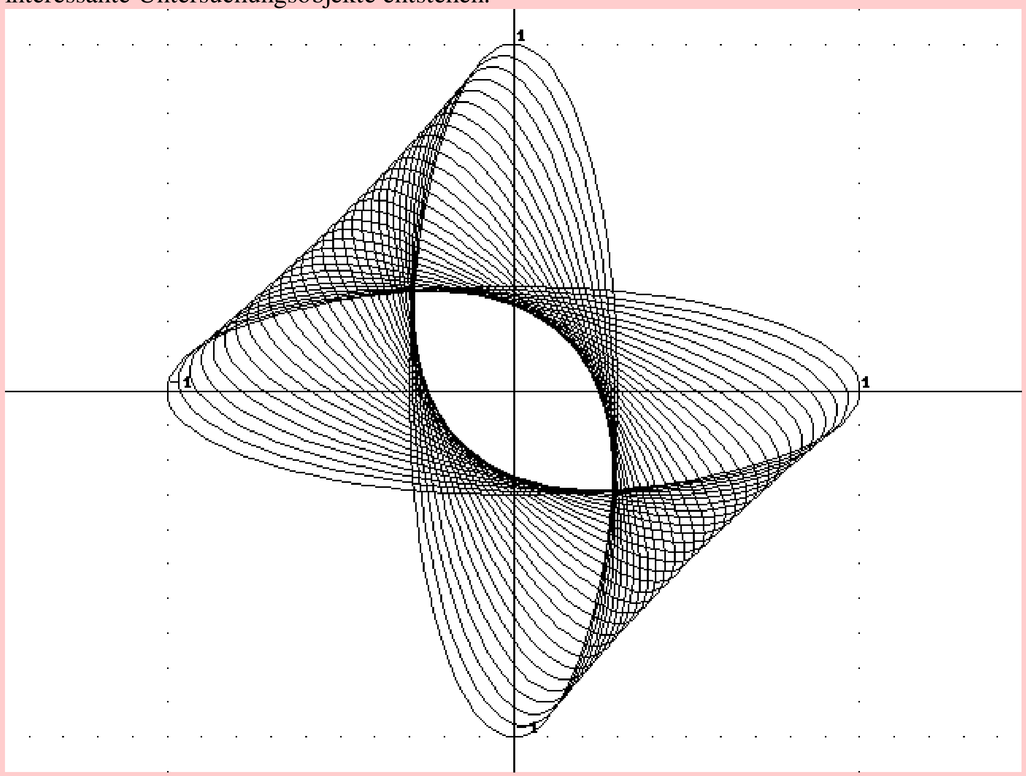
M = $\begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix}$ mit a,b∈ R};

Zeigen Sie, daß in den Verknüpfungsgebilden (M,+,*) und (C,+,*) die gleichen Rechengesetze gelten! Hinweis: Es gilt

$$\begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix} = a \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + b \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = a\,\mathbf{E} + b\,\mathbf{I}$$

Die Verknüpfungsgebilde (M,+,¨) und (C,+,¨) sind Körper, die zueinander isomorph sind.

Die Matrizen der Form $\begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix}$ sind besonders interessante Untersuchungsobjekte. Geometrisch vermitteln sie Drehstreckungen. Wendet man sie auf irgendwelche Figuren an, so können interessante Untersuchungsobjekte entstehen.



Hier wurde die Ellipse x = 0.3cos(t), y = sin(t) einer Drehstreckung mit Matrizen der Form $\begin{pmatrix} u & -(1-u) \\ (1-u) & u \end{pmatrix}$, u von 0 bis 1, 20 Werte, unterworfen. Zeichnung mit PLOT10.

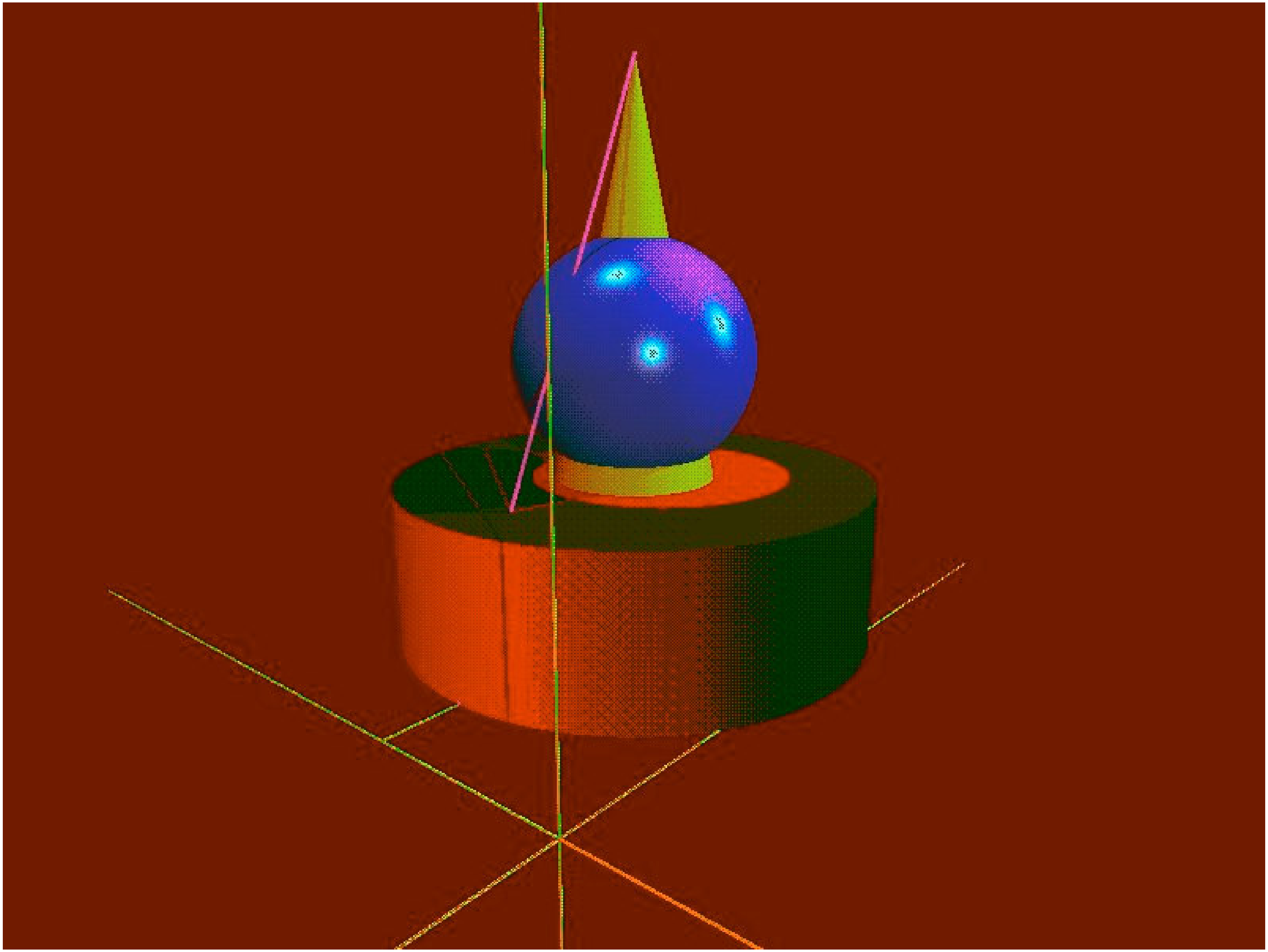
Analytische Geometrie im R^3

Fotorealistische Bilder

Raytracing mit dem Programm POVRAY

```
#include "colors.inc"
camera {
  location <-14,12,-10>
  look_at <8,4,5>      }
sphere {<-13,11,-9>,0.05
pigment {Blue}
finish {phong 1} }
light_source { <0, 50, 10> rgb 0.7 }
 light_source { <-30, 20, -50> rgb 0.7 }
 light_source { <30, 20, -20> rgb 0.7 }
cylinder{<8,0,5>,<8,4,5>,6
pigment {Red}}
 sphere {<14,0,0>,0.3
pigment {Blue}
finish {phong 1} }
sphere {<0,14,0>,0.3
pigment {Yellow}
finish {phong 1} }
sphere {<0,0,14>,0.3
pigment {Green}
finish {phong 1} }
sphere {<8,7,5>,3
pigment {Blue}
finish {phong 1} }
cone {<8,4,5>,2,<8,14,5>,0
pigment {Green}}
cylinder{<2,0,5>,<8,14,5>,0.05
pigment {Magenta}}
cylinder{<-18,0,0>,<18,0,0>,0.03
pigment {Yellow}}
cylinder{<0,-18,0>,<0,18,0>,0.03
pigment {Yellow}}
cylinder{<0,0,-18>,<0,0,18>,0.03
pigment {Yellow}}
cylinder{<2,0,5>,<0,0,5>,0.03
pigment {Yellow}}
```

povwin3.exe



2.1 Lehrgangsskizze

Eberhard Lehmann, MU-Heft 4, 1993

Matrizen als durchgehendes Hilfsmittel	**Lerninhalte mit besonderer Berücksichtigung anwendungs- und problemorientierter Ansätze, und der Möglichkeiten des Computereinsatzes**
MATRIZEN I	
A(m,n)	- Tabellen, Matrizen
AB, A(B+C)	- Materialverflechtungsprobleme
vo,voPn	- Kaufverhalten (Anfangsverteilung)
	- Übungen u.a. Entwicklung von Populationen
	- Skalarprodukt, Matrizenprodukt, Matrizensumme, Gesetze
Ax=B	Lineare Gleichungssysteme (LGS)
Rang(A),	- Probleme, die auf LGS führen
Rang(A,B)	- Gauß-Algorithmus
	- Endschema, Lösungskriterien, Matrixrang
	- Anwendungsaufgaben
	- Probleme bei der Lösung von LGS, schlecht-konditionierte LGS, Rechengenauigkeit
rA+sB	- Vektorraum (magische Quadrate, homogene LGS)
	- Lineare Abhängigkeit/Unabhängigkeit, Basis
Analytische Geometrie/ABBILDUNGSGEOMETRIE,	COMPUTERGRAFIK
ab	- Inzidenz & Metrik, LGS & Skalarprodukt (s.o.)
Ax=b	- Geraden, Ebenen, Figuren, Abstände, Winkel, Kreis,Kugel
	- Grundlagen der Computergrafik:
x'=Ax, AB	Abbilden mit Matrizen, homogene Koordinaten, (Drehung, Verschiebung, Streckung, Projektion)
MATRIZEN II	
AX=E	- Simultane Lösung mehrerer LGS
A^-1	- Inverse Matrizen
(AB)^-1=B^-1A^-1	- Rückgängigmachen von Abbildungen oder
(E-A)^-1y	- Input-Output-Analyse, Stücklisten
Komplexe Matrixterme,z.B. s(E+M)(M2-E)^-1	Komplexe Aufgabenstellungen mit Matrizenanwendung, z.B. aus der Populationsdynamik
	Matrizenpotenzen (Übergang zum Stochastik-Kurs)
vo,voPn	- stochastische Matrizen (Markow-Ketten), Verteilungen
	- langfristiges Verhalten
w=wP	stationäre Verteilung, Fixvektor,
lim P^n, lim vn	- Grenzmatrix, Grenzverteilung

Abb.1: Beispiel für den Aufbau eines Leistungskurses Lineare Algebra/Analytische Geometrie

Eberhard Lehmann

Lineare Algebra

mit Vektoren und Matrizen

J.B.Metzler

Stuttgart 1990

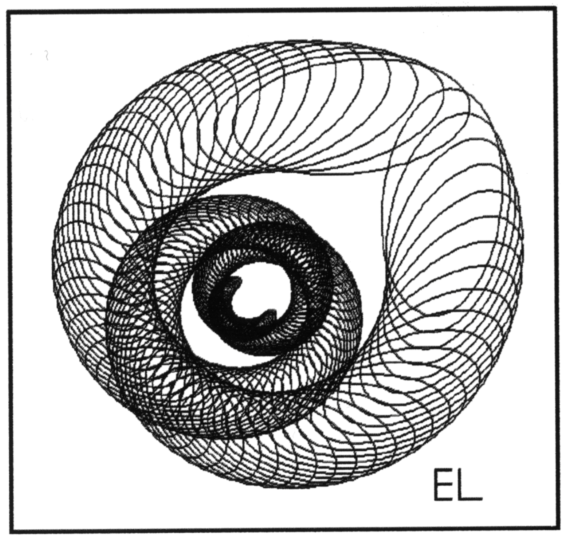
Jetzt als Kopie beim Autor,
mit Lösungsheft
Schülerbuch 15 Euro
Lösungsheft 10 Euro
Porto

MNU Bremerhaven 2004

Lineare Algebra und Analytische Geometrie

in neuem Gewand

Danke!



Dr. Eberhard Lehmann, Berlin

mirza@snafu.de --- www.snafu.de/~mirza

Vortragsende

Es folgt eine ausführliche Darstellung des Crapspiels