Kurven in Parameter-Darstellung

im Mathematik-Unterricht

der Sekundarstufen 1 und 2

4. Berliner MNU-Kongress August 2005

Dr. Eberhard Lehmann, Berlin

mirza@snafu.de --- www.snafu.de/~mirza

Hinweise auf Fortbildungsangebote

1) Mathematik mit Powerpoint – 12.9.05, Rückert-Schule 15h
2) Mathematikunterricht mit Computern – 15.9.05, Rückert-Schule 15h
3) Zeitgemäßer Mathematik-Unterricht für den ganzen Fachbereich
   (nach Vereinbarung mirza@snafu.de)
4) Berliner CAS-Projekt 3 – 1.Workshop 30.8.05, Rückert-Schule 15h
5) DERIVE 6 (u.a. Hintergrundbilder, Schieberegler)
   Vortrag und Workshop Josef Böhm (Austria) beim Klett-Verlag
   29.9.05, 14-18 Uhr

Anmelden bei www.lisum.de und mirza@snafu.de (Dr.Lehmann)

Unterricht mit Parameterdarstellungen (x(t), y(t))

Die Vortrags-Ankündigung

- Beispiele aus beiden Sekundarstufen -

Dr. Eberhard Lehmann

In der Regel erfolgt die erste Begegnung mit Pameterdarstellungen (PD) recht spät in der vektoriellen Analytischen Geometrie (Geradengleichung). Neue Schulbücher führen jedoch schon in der Sekundarstufe 1 in PD ein und haben dadurch frühzeitig noch ein andersartiges Koordinatensystem zur Verfügung. Dieses kann z.B. auf einfache Weise zur Umkehrung von Grafen benutzt werden. Auch der Einheitskreis lässt sich besonders gut mit der Darstellung

x(t)=cos(t), y(t)=sin(t) zeichnen (Trigonometrie, Klasse 10).

Durch Aufgabenvariationen ergeben sich daraus neue Experimentierfelder, die den Einsatz von Computeralgebra-Systemen nahe legen, denn diese bieten zahlreiche Möglichkeiten, Grafen mit Parameterdarstellung zu bearbeiten. Damit erschließt sich in der Sekundarstufe 2 ein weites Feld von Parameterkurven (Zykloiden, ...).

Literatur: **www.snafu.de/~mirza** mit mehreren Beiträgen zu PD

Bausteine / Module mit Parametern

Vortrag 2004

Vorjahr

im Mathematik-Unterricht

der Sekundarstufen 1 und 2

3. Berliner MNU-Kongress 2.9.-3.9.2004

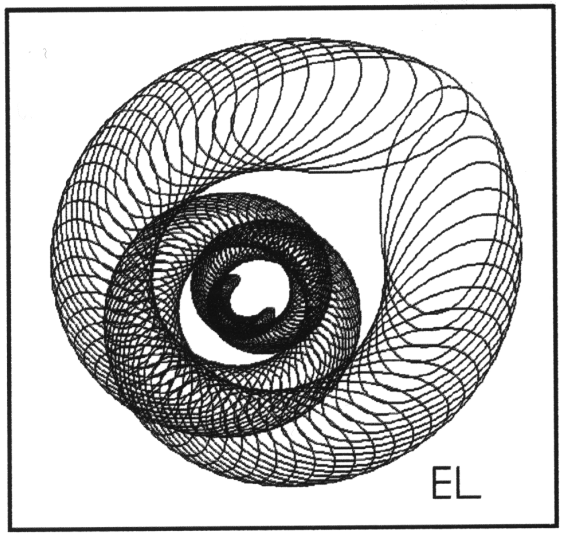
Damals z.B.

m*x+n→gerade(x,m,n)

Jetzt z.B.

x(t) = 2*cos(t)

y(t) = sin(t)+1



Dr. Eberhard Lehmann, Berlin

mirza@snafu.de --- www.snafu.de/~mirza

Demnächst:

Koordinaten-Transformationen, Koordinaten-Systeme

Insbesondere Polarkoordinaten

Koordinatensysteme

Kartesisches Kosy (x, y)

Warum immer nur dieses?

Beispiel $y = 2x+1$

Parameterdarstellung (x(t), y(t))

Beispiel :

$$x(t) = t^2$$
$$y(t) = 2t+1$$

Vortrag heute

Polarkoordinaten (Winkel t, Radius R)

$$x(\varphi, R) = R \cdot \cos(\varphi)$$
$$y(\varphi, R) = R \cdot \sin(\varphi)$$

Koordinatensysteme im Raum

Kartesisch, Parameter,

Polar (Erdkugel)

$$x(\varphi, \theta, R) = R \cdot \sin(\varphi) \cdot \cos(\theta)$$
$$y(\varphi, \theta, R) = R \cdot \sin(\varphi) \cdot \sin(\theta)$$
$$z(\varphi, R) = R \cdot \cos(\varphi)$$

1. Ein Blick in den neuen Lehrplan für die Sekundarstufe 2
2. Ein neues Schulbuch (Kl. 5-10), das viele der heutigen Forderungen an den Mathematik-Unterricht erfüllt
3. Aber schon in Klasse 7 kann es eine erste Begegnung mit Kardioiden geben!
4. Eine tragende Fortsetzung ergibt sich beim Thema „Umkehrfunktionen“
5. Eine Unterrichtsstunde in Klasse 10 oder 11 zur Einführung von Parameterdarstellungen
6. Eine Veranschaulichung der Entstehung von Parameterkurven (x(t), y(t)), z.B. einer Astroide aus den beiden Ausgangskurven x(t) und y(t).
7. Abituraufgabe - Zykloiden am Fahrrad
8. Das Sonderheft des Leistungskurses Mathematik (Lehmann, 2000) mit Schülerbeiträgen zu Parameterkurven und Polarkoordinaten
9. Mit Parameterkurven experimentieren
10. Kardioiden-Animation

Das heutige Vortrags-Programm

1. Im Lehrplan 2005 für die Sekundarstufe 2

Sek 2-Lehrplan, Fundamentum:

- Hinweise auf Nichtkartesische Koordinatensysteme auf S.16.

„ Es kann auch auf nichtkartesische Koordinatensysteme, auf Polarkoordinaten oder auf räumliche Koordinatensysteme eingegangen werden.“

Für das Fundamentum werden dabei als Objekte genannt:

Geraden, Parabeln, Kreise, trigonometrische Funktionen.

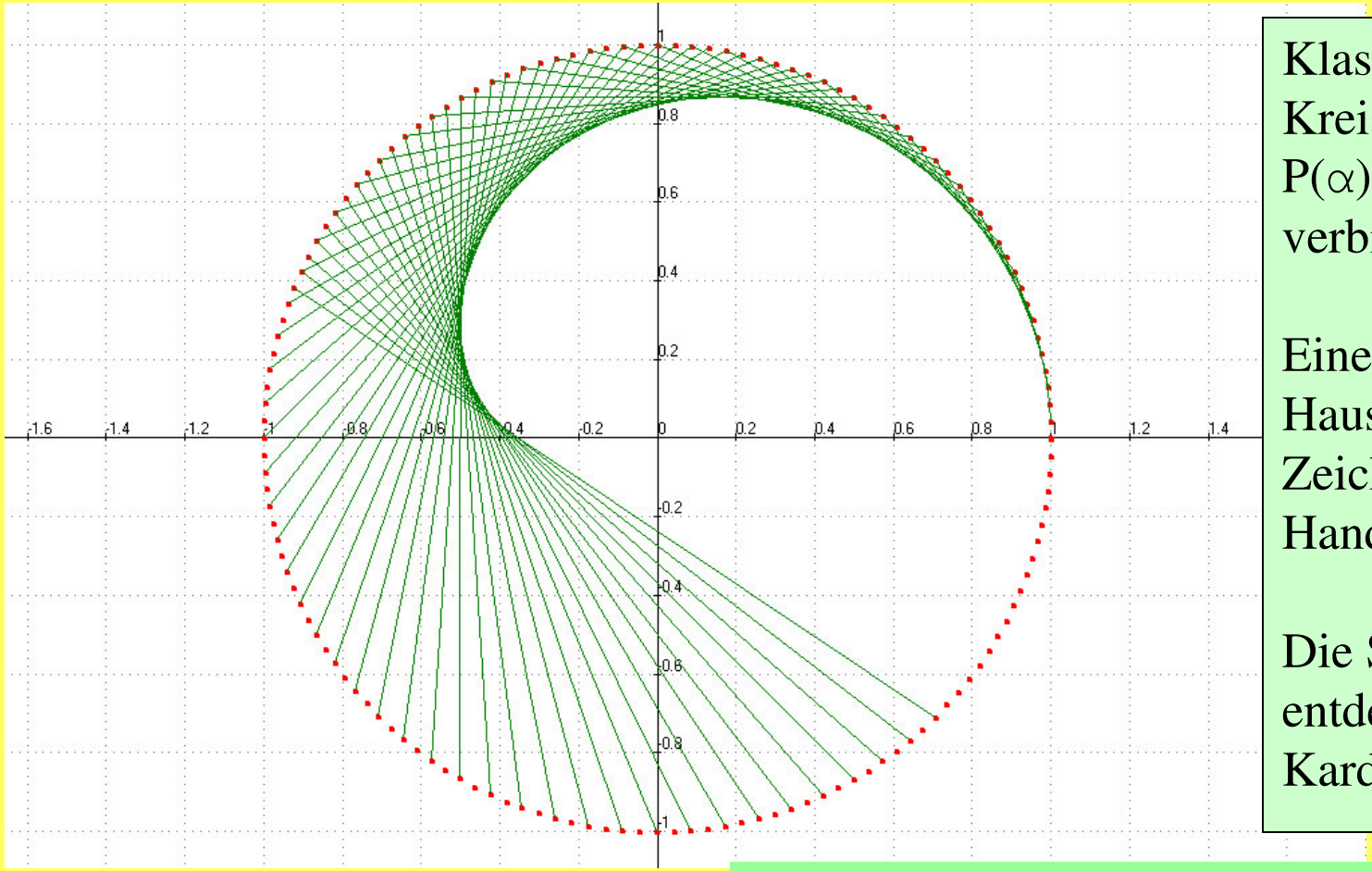
Diese Objekte kann man alle auch in Parameter-Darstellung betrachten!

2. Ein Blick in ein neues Schulbuch Klasse 5-10 (hier Klasse 8), das viele der heutigen Forderungen an den Mathematik-Unterricht erfüllt und auch Parameterdarstellungen berücksichtigt

Schroedel-Verlag, Neue Wege

Vortragsausarbeitung als Textdatei (.doc)

3. Schon in Klasse 7 kann es eine erste Begegnung mit Kardioiden geben!



Klasse 7:
Kreispunkte $P(\alpha)$ mit $P(2\alpha)$ verbinden.

Eine spannende Hausarbeit – Zeichnen von Hand!

Die Schüler entdecken eine Kardioide.

Später, z.B. in Klasse 10 oder höher:

$x(t) = 2a*\cos(t)-a*\cos(2t)$; $y(t) = 2a*\sin(t)-a*\sin(2t)$

Kardioide in Parameterdarstellung

Nachdem die Schüler (Klasse 7) von Hand gezeichnet haben, nun

eine Animation mit ANIMATO

Animationsschritt 1

Zeichnen des Einheitskreises, 144 Punkte in rot

Animationsschritt 2

Man sieht das Durchlaufen von P(r,t), während P(r,2t) vorauseilt.

Animationsschritt 3

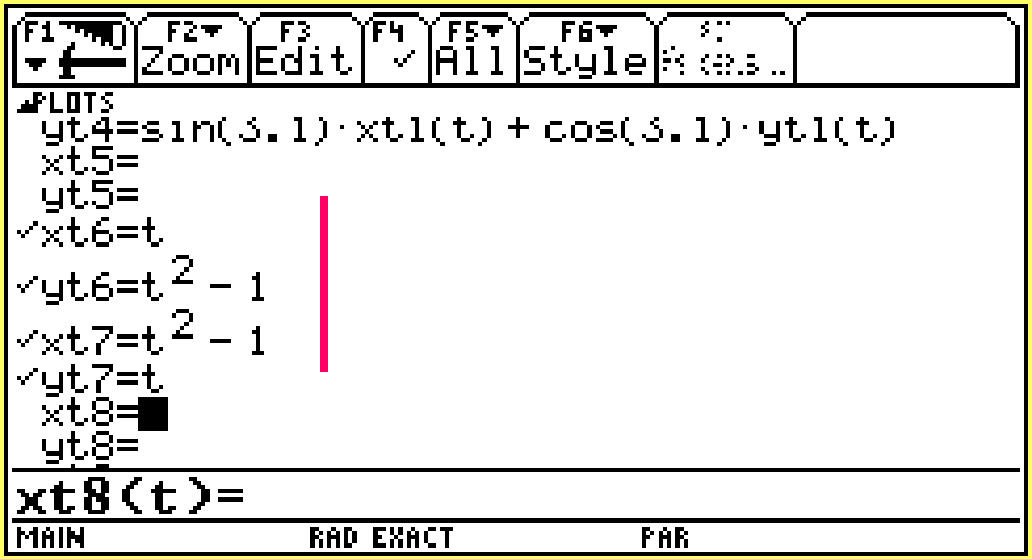
Die Kreispunkte werden durchlaufen P(r,t) und jeweils mit dem Punkte P(r,2t) mit doppeltem Winkel (2t) verbunden.

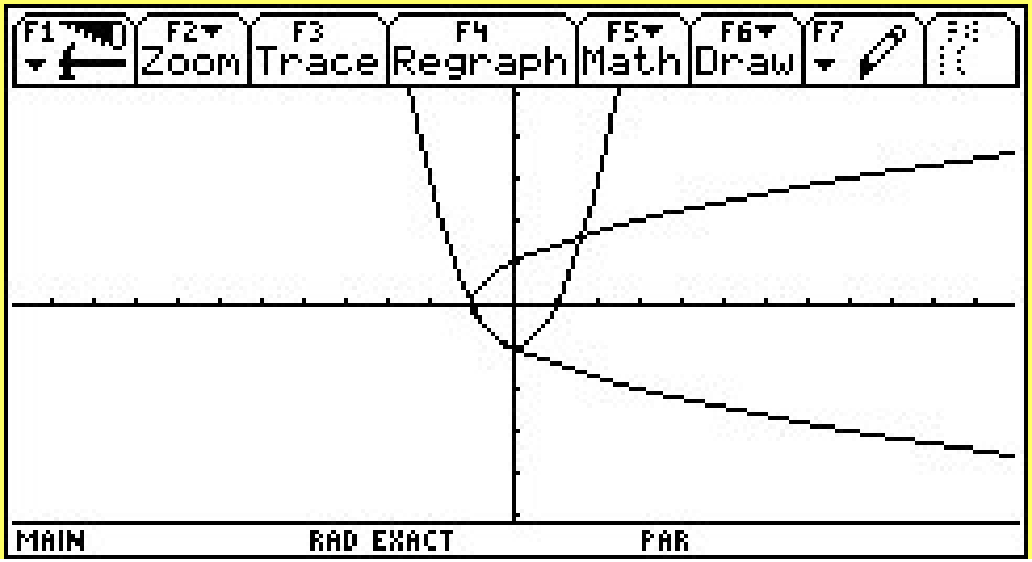
Analyse des Vorgangs, Festigung.

Die Datei: Kardioiden-Bild-0.pl2

4. Eine nachhaltige Fortsetzung ergibt sich beim Thema „Umkehrfunktionen“

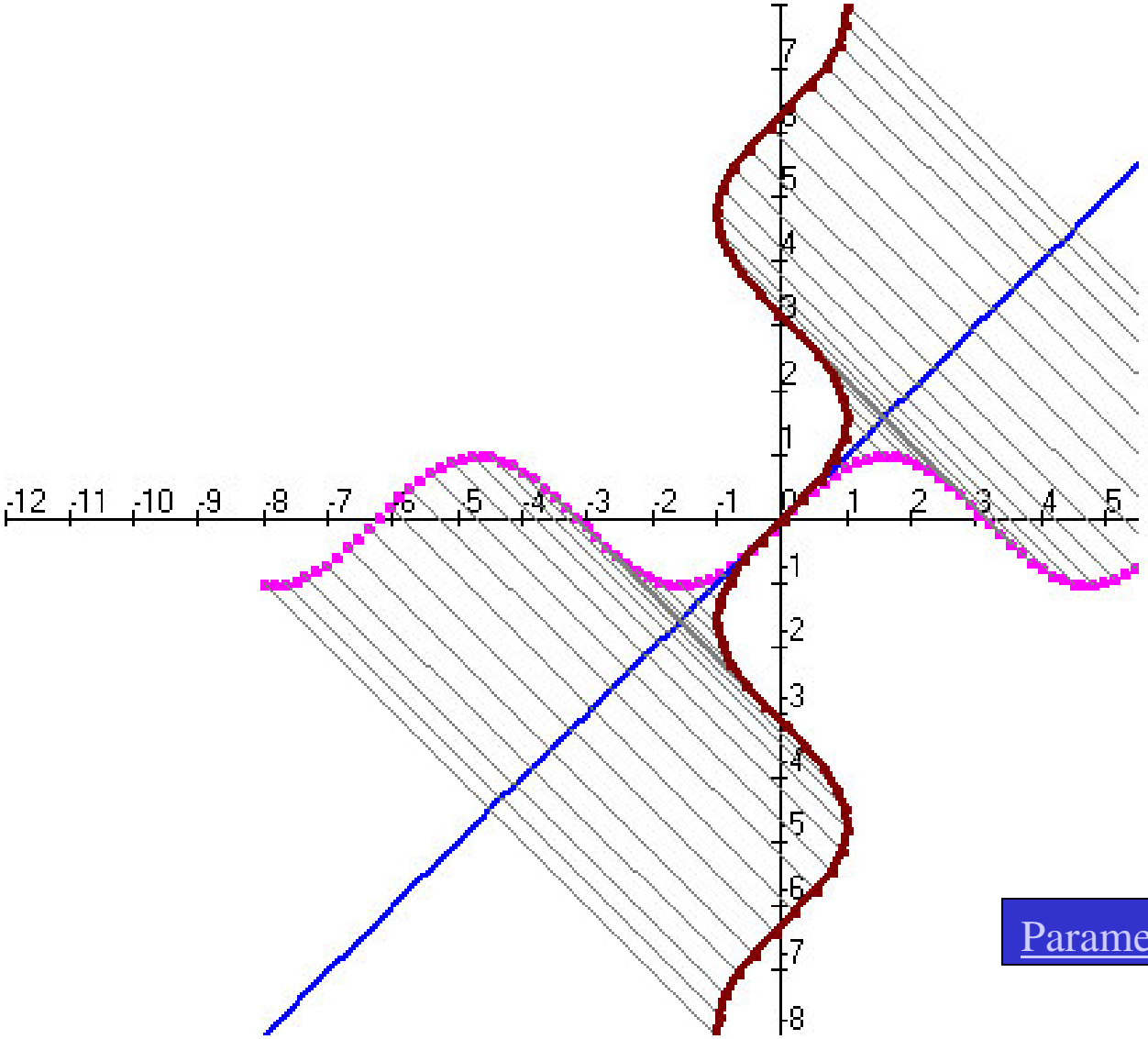
Voyage-Bild: Parameter-Editor mit Parabel (x(t)=t, y(t)=t^2-1) und Vertauschung.





Auf diese Weise kann zu jedem Grafen der Umkehrgraf gezeichnet werden, ohne dessen Gleichung zu kennen!

Umkehrung von Grafen mit Hilfe von Parameterdarstellungen



Parameter-Umkehrung.pl2

5. Eine Unterrichtsstunde

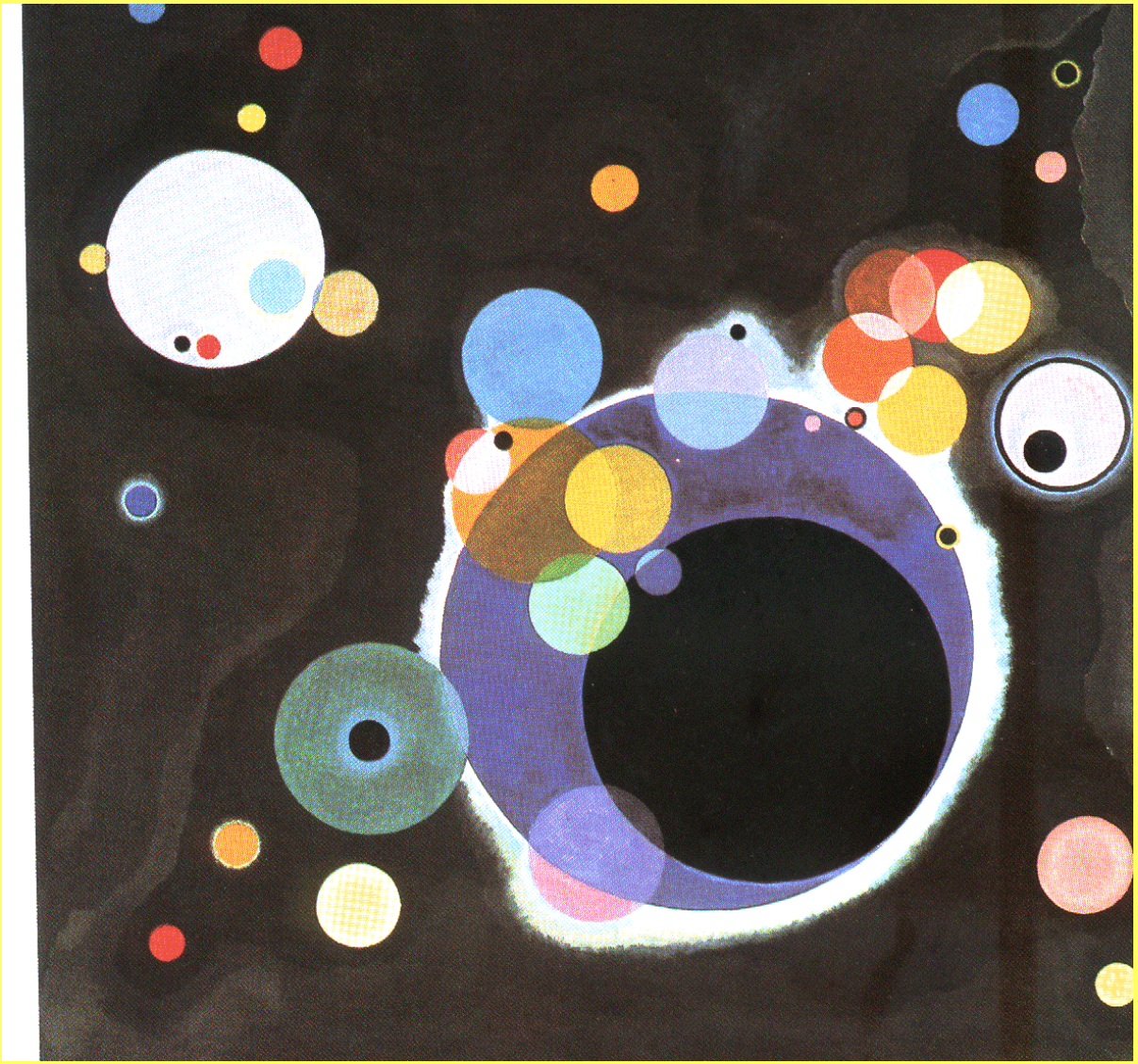
in Klasse 10 oder 11 oder im Grundkurs

zur Einführung von Parameterdarstellungen

Viele Kreise - eine Unterrichtsstunde im Grundkurs

1. Semester

(von Eberhard Lehmann, gehalten an der Fritz-Karsen-Schule im Rahmen des Berliner CAS-Projekts Sekundarstufe 2, 2003-2005)



Die Stunde wurde eingeleitet mit einem Bild von Kandinsky und dem Auftrag, das Bild zu beschreiben.

Vortragsausarbeitung als Textdatei (.doc), → S.6

Parameterdarstellungen verknüpfen

Analytische Geometrie und Analysis

KEGELSCHNITTE

Polargleichungen in bezug auf den Brennpunkt $r = \frac{p}{1 + \varepsilon \cos \varphi}$

Wurzeldarstellung der Ellipse $y = \pm b\sqrt{1 - \frac{x^2}{a^2}}$

Parameterdarstellung der Ellipse x(t)=a cos(t), y(t)=b sin(t)

Vortragsausarbeitung als Textdatei (.doc),

→S.9

Kardioiden-Gleichungen

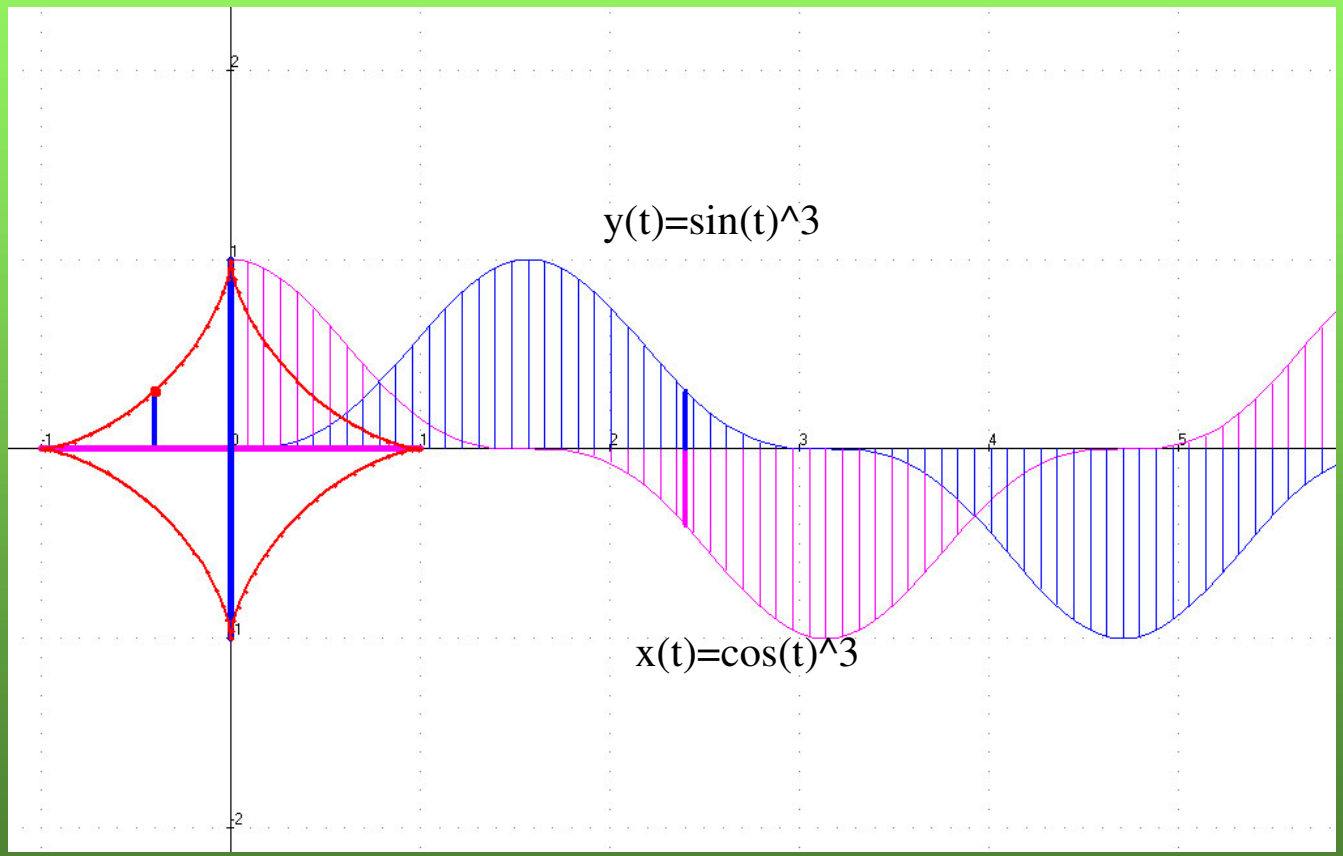
$(x^2+y^2+2rx)^2=4r^2(x^2+y^2)$ impliziteGleichung

$\rho=2r(1-\cos(\varphi))$ Polarkoordinaten

$x(t)=2r\cos(t)-r\cos(2t), y(t)=2r\sin(t)-r\sin(2t)$

Parametergleichungen

6. Eine Veranschaulichung der Entstehung von Parameterkurven (x(t), y(t)), z.B. einer Astroide aus den beiden Ausgangskurven x(t)=cos(t)^3 und y(t)= sin(t)^3.



Entstehung-Ellipse.pl2
Parameter-Astroide-Entstehung.pl2

Die Terme in ANIMATO

Unter f1 und f2 ggf. andere Ausgangskurven nehmen. Die Animation bleibt erhalten.

7. Abituraufgabe - Zykloiden am Fahrrad

Beispiel einer Differential- / Integralrechnungs-Aufgabe mit Computereinsatz - Rollkurve, Parameterdarstellung, Bausteinprinzip

Gegeben ist der Zykloiden-Baustein
at – bsin(t)→ zykx(t,a,b)
a – bcos(t)→ zyky(t,a,b)
Speichern Sie den Bausteinaufruf
zykx(t,1,2)
zyky(t,1,2)
im Grafik-Editor unter x1(t) und y1(t).

Aufgabe a) Skizzieren Sie den Graphen von x1(t), y1(t) für t Werte aus dem Intervall I = [0, 4π], maßstabsgetreu auf kariertes Papier. Benutzen Sie ZoomSqr. Beachten Sie dabei charakteristische Punkte.

Aufgabe b) Bestimmen Sie die t Werte des Punktes, der im Intervall I = [0, 4π], zweimal durchlaufen wird. Geben Sie auch den x- und y-Wert des Punktes an.

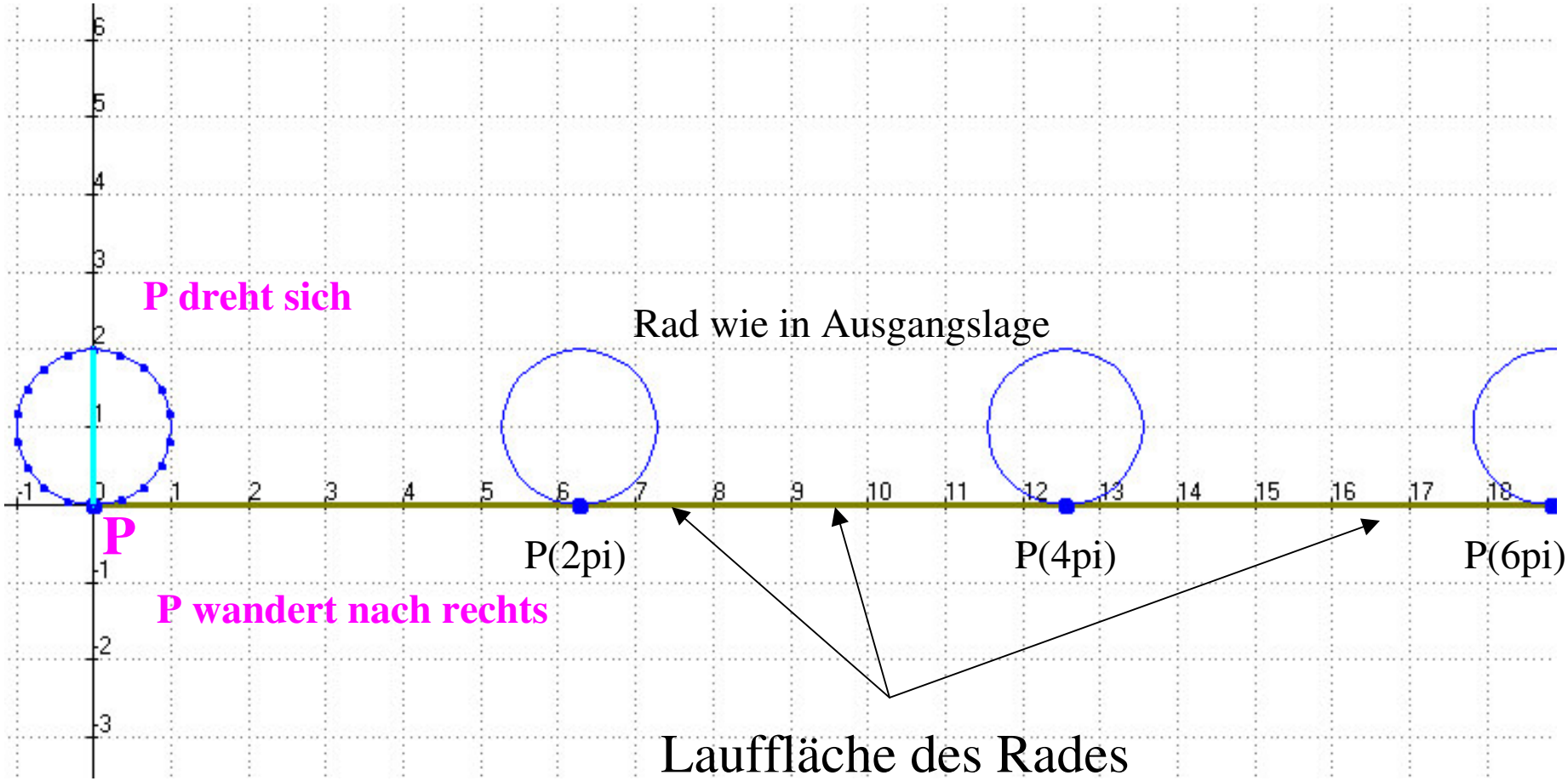
Aufgabe c) Erläutern Sie Zusammenhänge zwischen den Rollbewegungen des abgebildeten Fahrrad-Vorderrads für verschiedene Lagen von Punkten (nicht nur auf dem Reifen) und geeigneten Bausteinaufrufen. Fertigen Sie Skizzen an. Beachten Sie auch Sonderfälle. – **Vorgesehene Arbeitszeit etwa 30 Minuten.**

Aufgabe d) Bestimmen Sie die Ableitung dy / dx (allgemein) mit dem Taschencomputer TI-92 (Weg notieren) und danach ausführlich durch Handrechnung. Was ergibt sich für a = b?

Aufgabe e) Bekanntlich kann man mit (t, y1(t)) die Funktion y1(t) im gleichen Koordiantensystem darstellen wie die Parameterdarstellung (x1(t), y1(t)) ? Führen Sie die Darstellung durch, und skizzieren Sie den Graphen von y1(t) andersfarbig in das Koordinatensystem von Aufgabe a.

Aufgabe f) Berechnen Sie den Flächeninhalt der Fläche zwischen den Graphen von (x1(t), y1(t)) und y1(t) für t aus [0, pi] (fragliche Fläche schraffieren!).

Vortragsausarbeitung als Textdatei (.doc), S.13-18


P dreht sich
Rad wie in Ausgangslage
P
P(2pi)
P(4pi)
P(6pi)
P wandert nach rechts
Lauffläche des Rades

Die Bewegung des Punktes, Start ist in P(0,0), der Radius sei in der Visualisierung r=1

Das Rad fährt nach rechts, dabei:

1) P bewegt sich nach oben von y=0 bis maximal y(t)=2

2) P bewegt sich nach rechts: x(t) = r*t (Bogenlänge), y(t) = r

3) P rotiert dabei um M(0,0): x(t) = r*cos(t), y(t)=r*sin(t)

4) Bewegungen zusammengefasst: **x(t) = r*t+r*cos(t)** **y(t)=r+r*sin(t)**

Die Überlegungen zur Herleitung werden visualisiert Zykloiden-Herleitung.pl2

f7: cos(t), -sin(t)+1 // der Kreis, im Uhrzeigersinn, beginnend mit (1,0), t aus [0, 6.28]

f8: 0,0 // der Ausgangspunkt (0,0), dieser soll rollen

f9: sin(-t),-cos(-t) +1 // cos(t)*0-sin(t)*(-1), sin(t)*0+cos(t)*(-1),
Drehung des Punktes (0,0), Uhrzeiger-Sinn

f10: 1*t,0 // Verschiebung des Punkts nach rechts, in 2pi ist P wieder unten

f11: 0,0,0,2 // in diesem Bereich läuft der Punkt nach oben / unten

f12: t+sin(-t), -cos(-t)+1 // Zusammenfassung der Bewegungen aus f9, f10 mit r=1

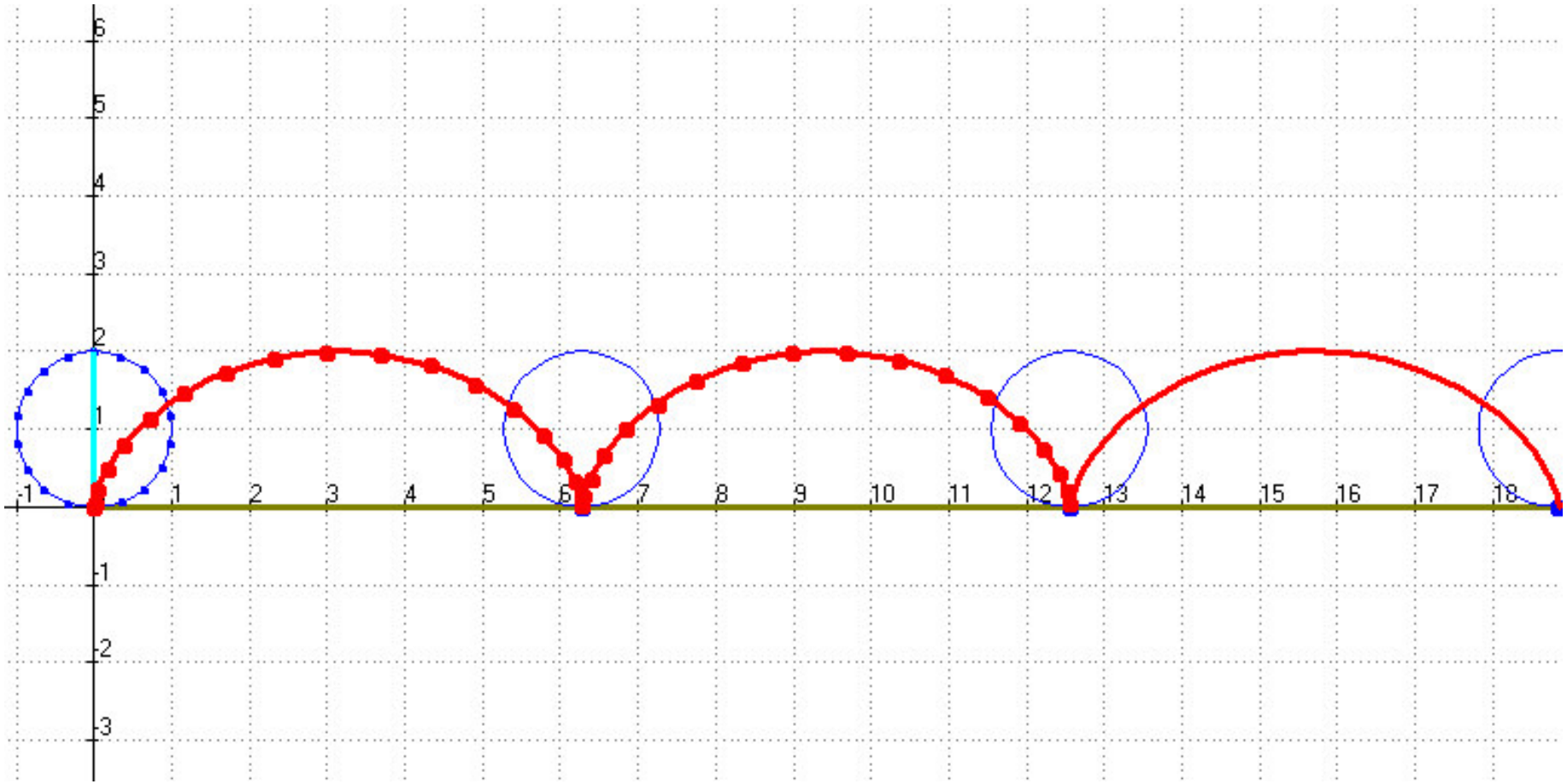
f13: t,0 // Lauffläche, auf der das Rad fährt

Die Lösung mit einem Zykloidenbaustein

f1: a*t-b*sin(t) // a ist der Radius r, b ist der Abstand des Punktes P vom Mittelpunkt, b = r = a für Fahrrad

f2: a-b*cos(t) // b = a Punkte auf Reifen gewöhnliche Zykloide, b<a gestreckte Zykloide, b>a verschlungene Zykloide

f3: f1(1,1),f2(1,1) // Aufruf des Bausteins: die Fahrrad-Zykloide


6
5
4
3
2
1
-1
-2
-3
-1
1
2
3
4
5
6
7
8
9
10
11
12
13
14
15
16
17
18

Herleitung der Zykloiden-Gleichung

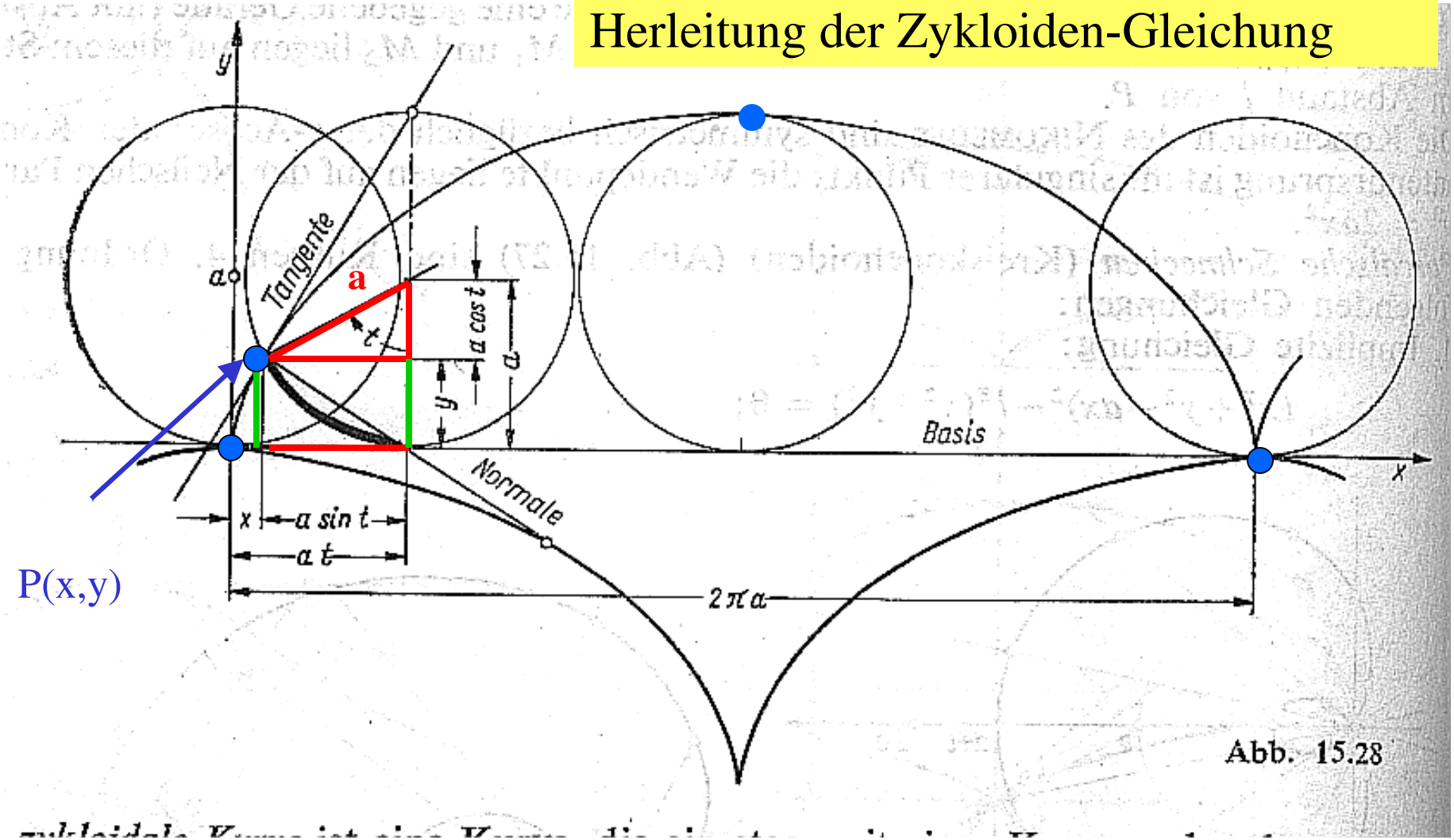


Abb. 15.28

$x(t) = a*(t-\sin(t))$ $y(t) = a*(1-\cos(t))$

Aus Dreszer: Mathematik-Handbuch, VEB Fachbuchverlag Leipzig, 1973

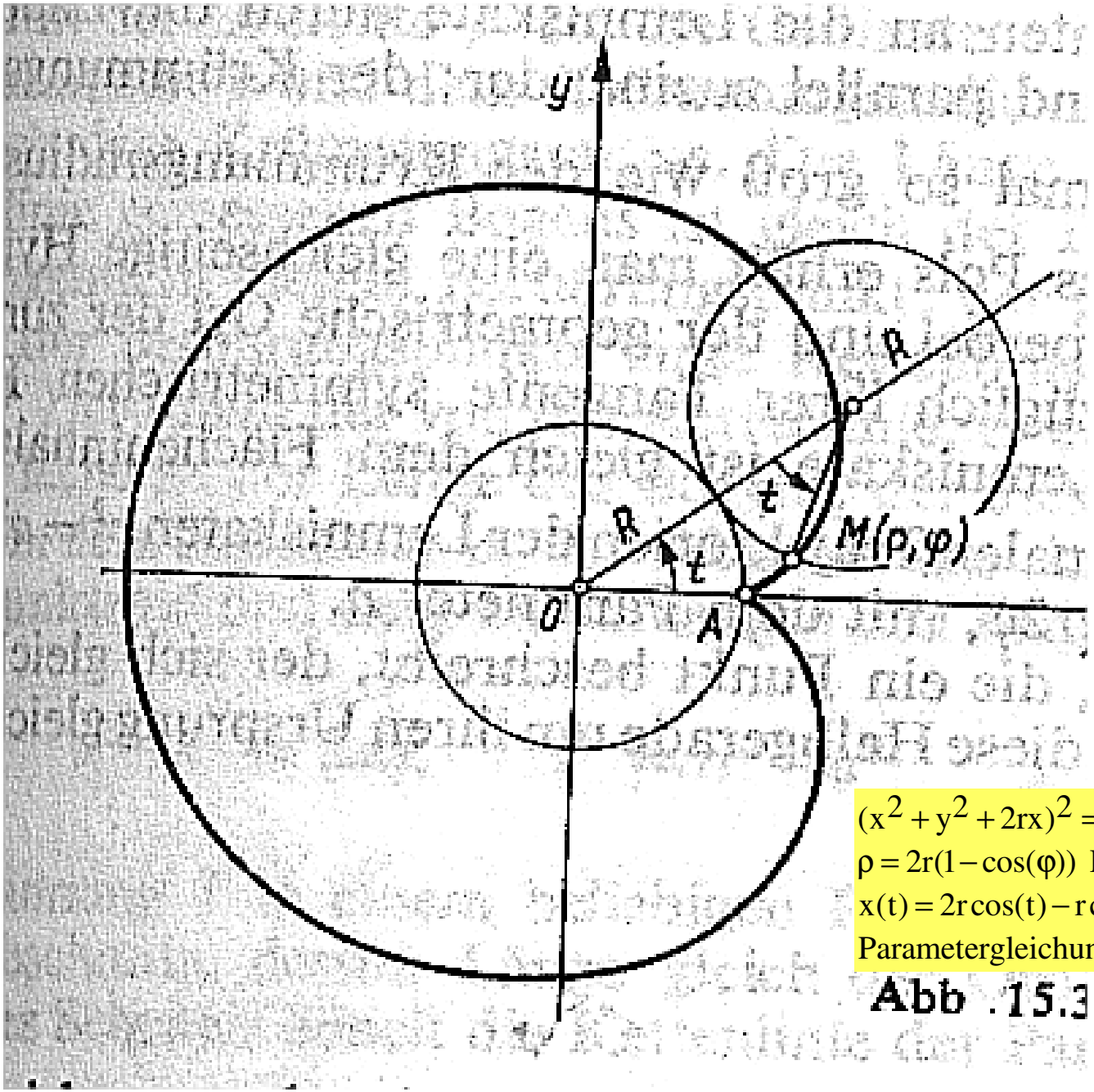


Abb .15.3

Herleitung der Kardioiden-Gleichung

Gleichungsformen:

$(x^2+y^2+2rx)^2=4r^2(x^2+y^2)$ impliziteGleichung

$\rho=2r(1-\cos(\varphi))$ Polarkoordinaten

$x(t)=2r\cos(t)-r\cos(2t), y(t)=2r\sin(t)-r\sin(2t)$

Parametergleichungen

8. Das Sonderheft des Leistungskurses Mathematik (Lehmann, 2000) mit Schülerbeiträgen zu Parameterkurven und Polarkoordinaten

„Expeditionen zu Parameterkurven und Kurven in Polarkoordinaten“

Siehe Homepage www.snafu.de/~mirza

→ Datei Sonderheft-Param-Polar.pdf →

9. Mit Parameterkurven experimentieren

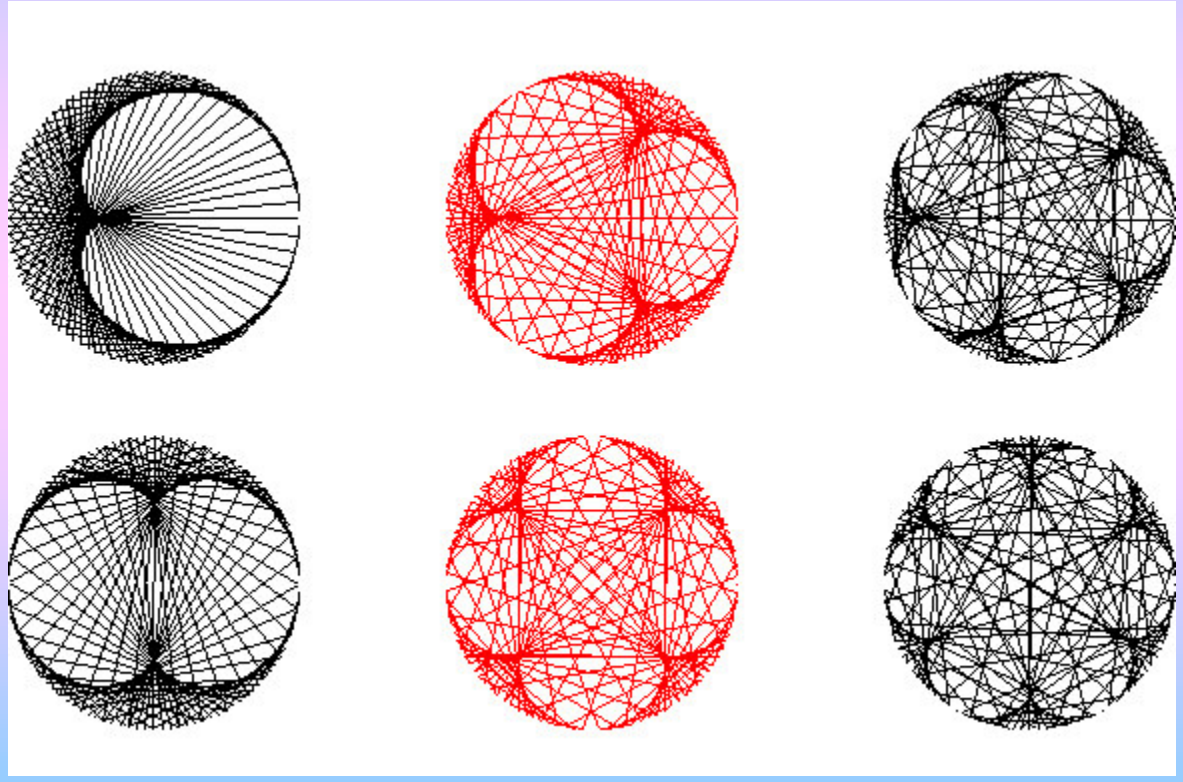
Aus der Zeitschrift „mathematiklehren“, Heft 130, Juni 2005 („Kurven“, Hrsg. Johanna Heitzer) - Beilage „Mathewelt“ (Beiträge von Wolfgang Löding, Hubert Weller),

S.21, „Mit Parameterkurven spielen“

Vortragsausarbeitung als Textdatei (.doc),

10 Kardioiden-Animation

Abschließend eine eindrucksvolle Kardioiden-Animation



Die Datei: Kardioiden-Animation.pl2

Kardioiden-Animation.pl2 mit dem Animationsprogramm ANIMATO(siehe www.snafu.de/~mirza)

f1: a+cos(b*t) das ist = **x(t)**

f2: a+sin(b*t) das ist = **y(t)**

f3: f1(-3,1),f2(3,1),f1(-3,2),f2(3,2)

f4: f1(-3,**1**),f2(0.5,**1**),f1(-3,**3**),f2(0.5,**3**)

f5: f1(0,1),f2(3,1),f1(0,4),f2(3,4)

f6: f1(0,1),f2(0.5,1),f1(0,5),f2(0.5,5)

f7: f1(3,1),f2(3,1),f1(3,6),f2(3,6)

f8: f1(3,1),f2(0.5,1),f1(3,7),f2(0.5,7)

f9: f1(0,1),f2(-2,1)

Bausteindefinition

Bausteinaufrufe

mit Positionierung der Kardioiden und Verbindung der Punkte P(t), P(n*t)

Mit KPD kann man traditionelle Analysis auf interessante Weise üben

Anknüpfung an den traditionellen Lehrplan

Zusammenhänge erkennen:

Kurven in verschiedenen Term-Darstellungen, damit Bezüge zu Analysis, Analytischer Geometrie

Kurven in Parameter-Darstellung

Analysis von KPD

Abbildungs-geometrie mit KPD

KPD sind besonders gut geeignet zum eigenständigen Experimentieren, Forschen, Entdecken, Beweisen

KPD haben viele Anwendungsbezüge

Parameterkurven in der Natur

Rosette-3.pl2

Parameter-Blüte.avi

Hinweis

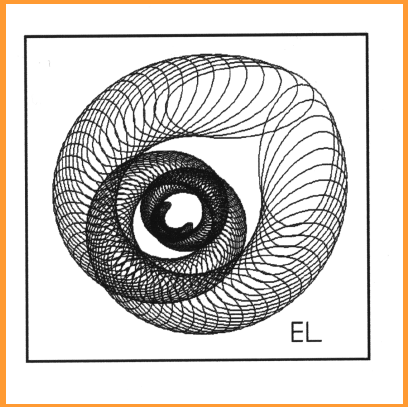
+ Vortrag und
+ Schüler-Sonderheft zur Parameter- und Polarkoordinatendarstellung (insgesamt ca. 60 Seiten)

nach dem Vortrag für 10 Euro

(beschränkter Vorrat!)

Parameterdarstellungen

Eberhard Lehmann



Entdeckungsreise zu Kurven in Polarkoordinaten und Parameterdarstellungen

Ein Sonderheft des Leistungskurses Mathematik
an der Rückert-Oberschule, Berlin 2000

Unterricht mit Parameterdarstellungen x(t), y(t)
Beispiele auf beiden Sekundarstufen

Vortrag auf dem MNU-Kongress Berlin 2005

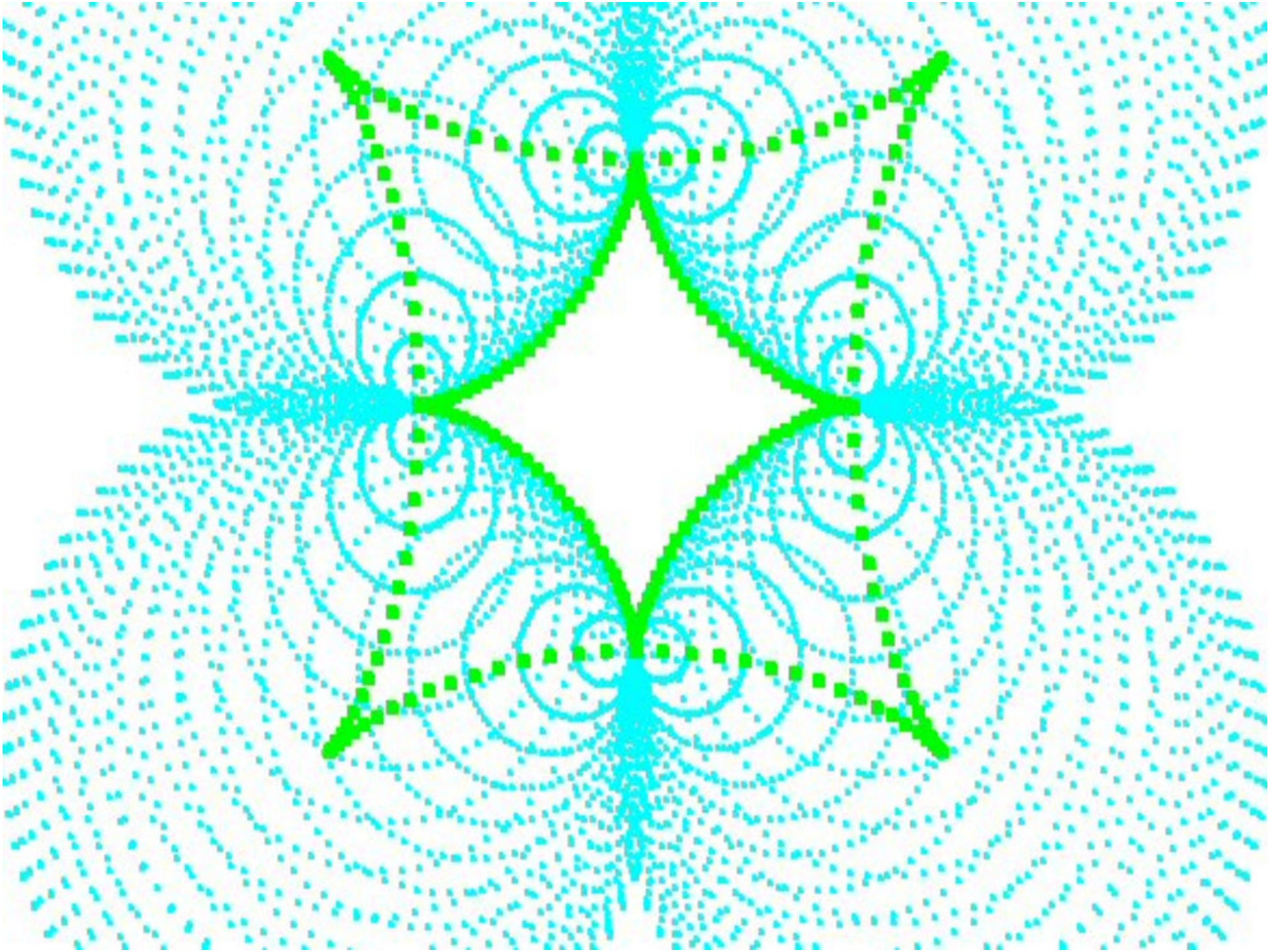
Danke!

Kurven in Parameter-Darstellung

im Mathematik-Unterricht

der Sekundarstufen 1 und 2

4. Berliner MNU-Kongress August 2005

Dr. Eberhard Lehmann, Berlin

mirza@snafu.de --- www.snafu.de/~mirza