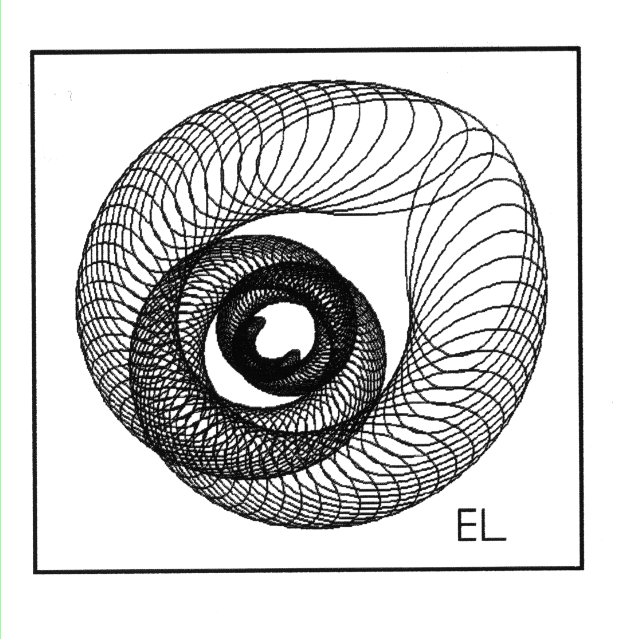
Bausteine / Module mit Parametern

im Mathematik-Unterricht

der Sekundarstufen 1 und 2

3. Berliner MNU-Kongress 2.9.-3.9.2004



Dr. Eberhard Lehmann, Berlin

mirza@snafu.de --- www.snafu.de/~mirza

Ein Parabelbaustein

f1: a*(x-b)^2+c *Beim TI-Voyage a*(x-b)^2+c --> parabel(a,b,c)*

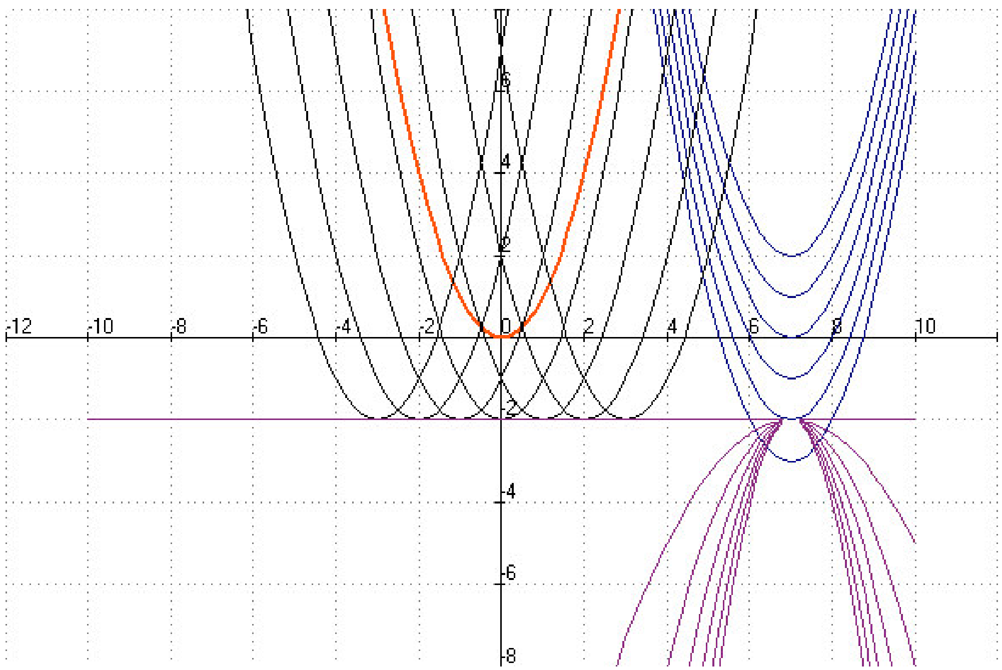
f2: f1(1,0,0)

f3: f1(1,7,u)

f4: f1(1,v,-2)

f5: {f1(v,7,-2)<-2:f1(v,7,-2):undef}

Parabel-a-b-c.pl2



Formeln der Sek.1

Bino(a,b,n)= (a+b)^2 = a^2+2ab+b^2

(a -b)^3 = a^3+3a^2b+3ab^2+b^3

Der Blick wird auf die Parameter gelenkt:

f(x,m,n)= f(x) = m*x+n

g(x,a,b,c)= g(x) = a*x^2+b*x+c

Pytha(a,b,c)= a^2+b^2=c^2

V(r,h)= V = 2πr*(r+h) Zylindervolumen

Abst(ax,ay,bx,by) |AB| = sqrt((ax-bx)^2+(ay-by)^2)

usw.

Das Benutzen von Modulen / Bausteinen ist also nicht grundsätzlich neu für unseren Mathematik-Unterricht.

Neu ist die Fokussierung der Formeln auf die auftretenden Parameter und die Ausnutzung der speziellen Möglichkeiten von Computerprogrammen zur Arbeit mit Bausteinen - in der Algebra und der Geometrie.

Warum sind Bausteine (Module) mit Parametern für den Mathematik-Unterricht so wichtig?

Komprimierung von Wissen: Bausteine (Module) können als kompakte Einheiten aufgefasst werden, in denen das Wissen verdichtet ist und in denen die Operationen als Paket abgerufen werden können.

Modellbildung: Bausteine können von den Schülern selbst definiert werden und tragen damit zur eigenständigen Modellierung von Problemen durch die Schüler bei.

Experimentelles Arbeiten: Bausteine ermuntern die Schüler, Einsetzungen für die vorhandenen Parameter zu erproben und leisten damit einen wesentlichen Beitrag zum experimentellen Arbeiten.

Anwendungsfeld: Die Überlegungen zur Einsetzung von Parameterwerten verbreitern das mathematische Anwendungsfeld eines Bausteins.

Allgemeine Lösungen: Die Suche nach passenden Bausteinen ist gleichzeitig eine Suche nach allgemeinen Lösungen von Problemen.

Wiederverwendbarkeit: Bausteine sind wiederverwendbar.

Vernetzung: Bausteine können miteinander verknüpft werden und damit auch mathematische Gebiete miteinander vernetzen.

(Beispiel: Abstand zweier Punkte, Differenzieren, Gleichung lösen)

Weitere Aspekte

- Abkürzung / Komprimierung langer Terme
- Anwendung des Window-Shuttle-Prinzips

Das Vortragsprogramm

1) Ein Baustein für Parabeln mit drei Parametern

2) Abstandsberechnungen - ein Baustein mit vier Parametern

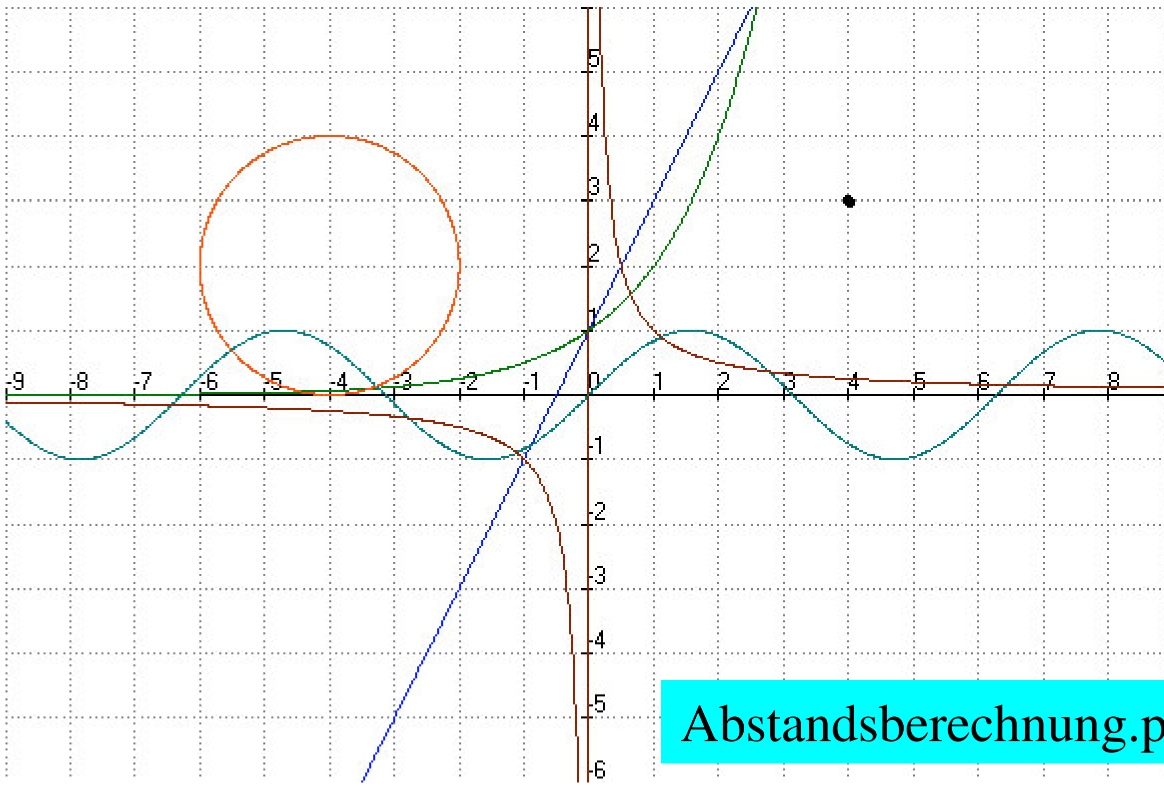
- in Klasse 9
- im Leistungskurs

3) Weitere Bausteine mit Parametern

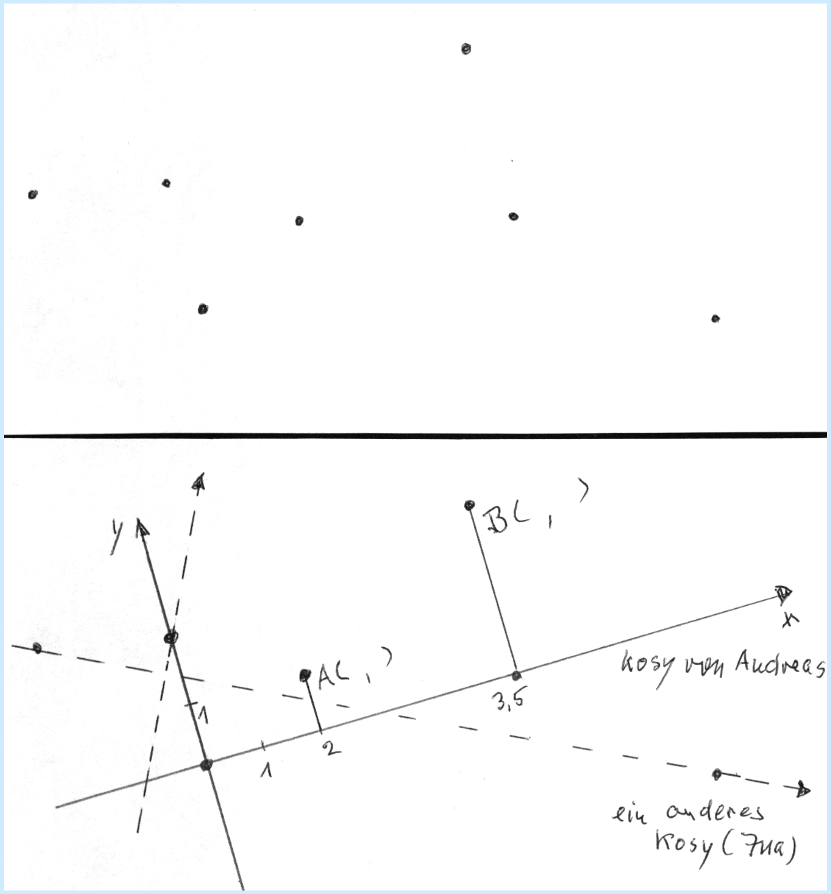
4) Das Bausteindreieck

Abstandsberechnungen

Wie weit ist der Punkt P(4,3) von dem Graphen entfernt?



Abstandsberechnung.pl2



Eine Unterrichtsstunde an der Paul-Natorp-Oberschule in Klasse 9 zur erstmaligen Einführung eines CAS-Bausteins

Planung / Durchführung

(1) Einstieg:

Schüler zeichnen mehrere **Punkte an die Tafel** (in beliebiger Position). – Lehrer fragt: Wie weit ist es von A nach B?

(2) Tafel: Andere Abstandsberechnungen, Skizzen

Diese Phase soll dazu dienen, das Thema "Abstandsberechnungen" für die S auf eine breitere Basis zu stellen, also nicht gleich auf den Abstand zweier Punkte mit Pythagorasberechnung zu reduzieren. Lehrer diktiert einen Text, der auf die Bedeutung von Abstandsberechnungen hinweist.

(3) An der Tafel wird der (kürzeste) Abstand von A nach B berechnet.

(3a) Da ja der Pythagoras bekannt war, wurde nach Einzeichnen des Steigungsdreiecks bei AB angesetzt: $|AB|^2 = (3.5–2)^2 + (3–1)^2$ und $|AB| =$ 2.5 LE ermittelt.

(3b) Allgemein, Formel herleiten

abst(AB) = $\sqrt{(x_b - x_a)^2 + (y_b - y_a)^2}$

Danach folgte schnell die Formel

$$\mathbf{| AB |^2 = (x_a - x_b)^2 + (y_a - y_b)^2.}$$

Anschließend konnte der Baustein abst(xa,xb,ya,yb) eingeführt werden (Lehrervortrag).

(4) Lehrerdemonstration mit dem TI-92 auf dem View-Screen

Lehrer: **Bausteindefinition!** Weil so oft benötigt!

Sqrt((xa-xb)^2+(ya-yb)^2) → abst(xa, xb, ya, yb),

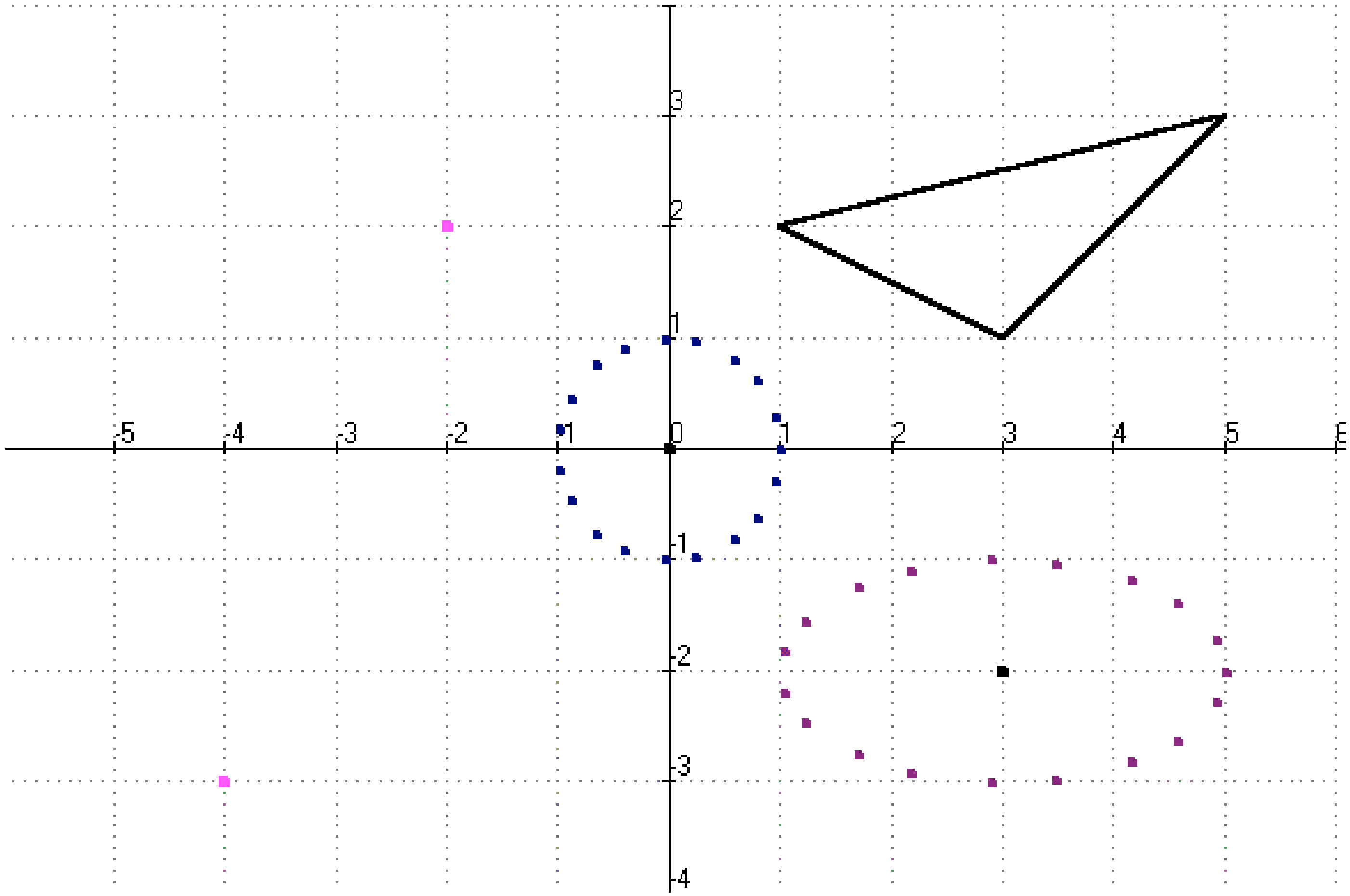
ein von uns definierter TI-92-Baustein.

Es werden **Bausteinaufrufe**, z.B. : abst(3.5, 2, 3, 1) durchgeführt. Damit erfolgt eine Bestätigung der Handrechnung an der Tafel.
Weitere Aufrufe mit den anderen Punkten zeigen, wie effektiv der Baustein ist.

Lehrer diktiert einen Text. Unterscheide zwischen Bausteindefinition und Bausteinaufrufen.

(5) Hausarbeit aus dem Arbeitsbogen

Ende der Stunde



Der Arbeitsbogen: Abstandsberechnungen

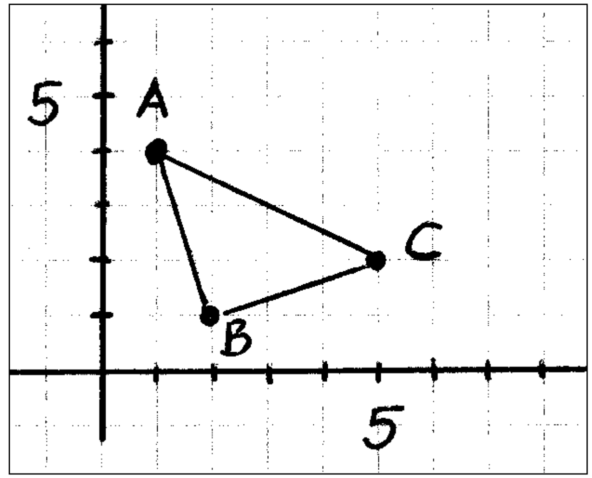
Matthias Schimmelpfennig, Rückert-Oberschule, Klasse 9

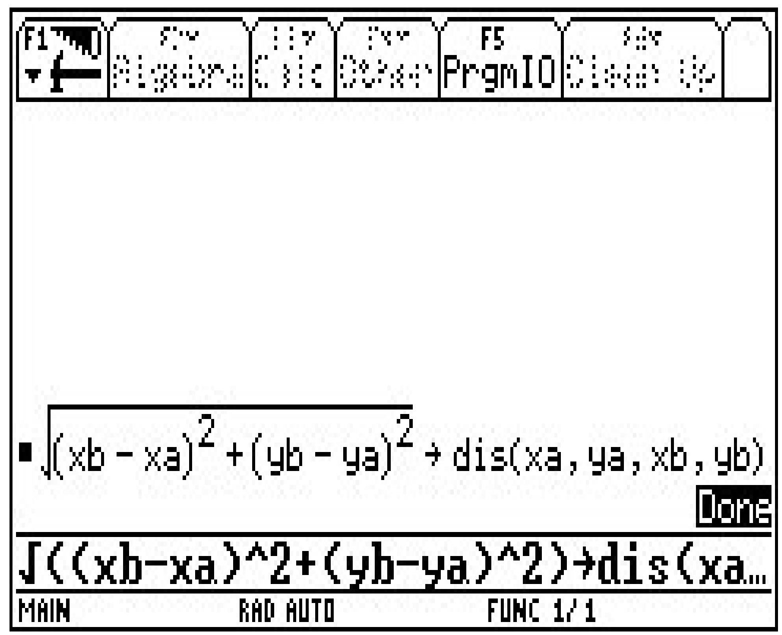
Klassenarbeit P-2

Aufgabe 1: Im Kosy rechts findest du einen Dreiecksparkur, der durch die drei Bojen A, B und C abgesteckt wurde und von Segelbooten einmal umrundet wird. Eine Längeneinheit im Kosy entspricht einem Kilometer in der Natur. Gesucht ist die Länge der Segelstrecke.

<ins>a) Der TI-Baustein rechts im Bild hilft beim Lösen des Problems. Erkläre den Baustein (Skizze !)</ins>

b) Berechne nun die Länge des Dreieckparkurs.

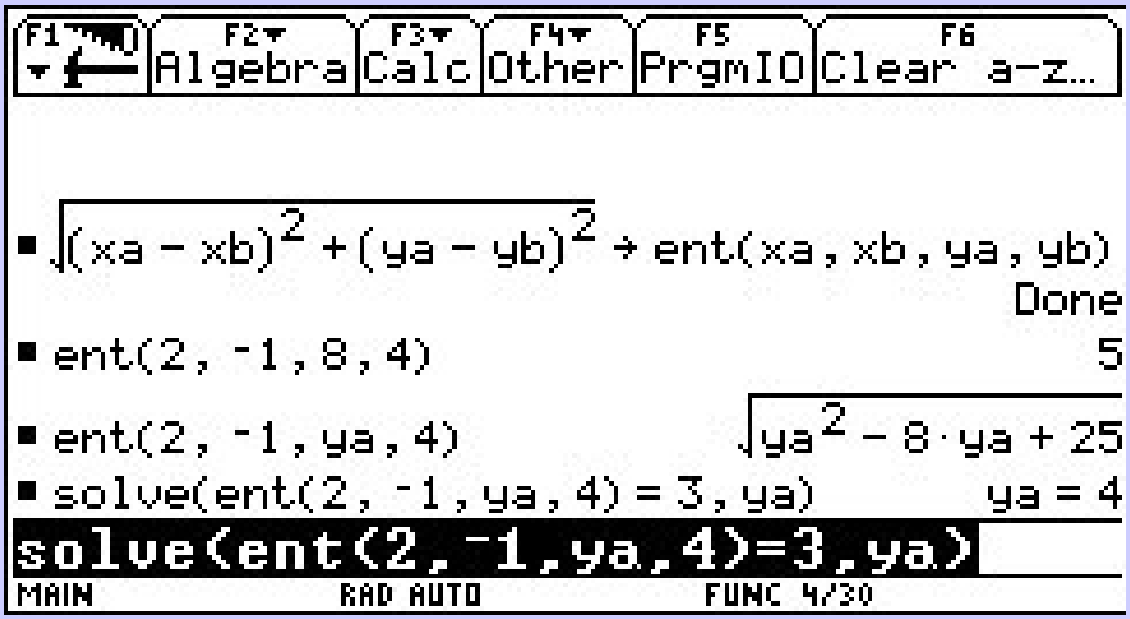




Angelika Reiß - aus einer Klassenarbeit Klasse 9

Aufgabe 4:

ca. 15 Minuten

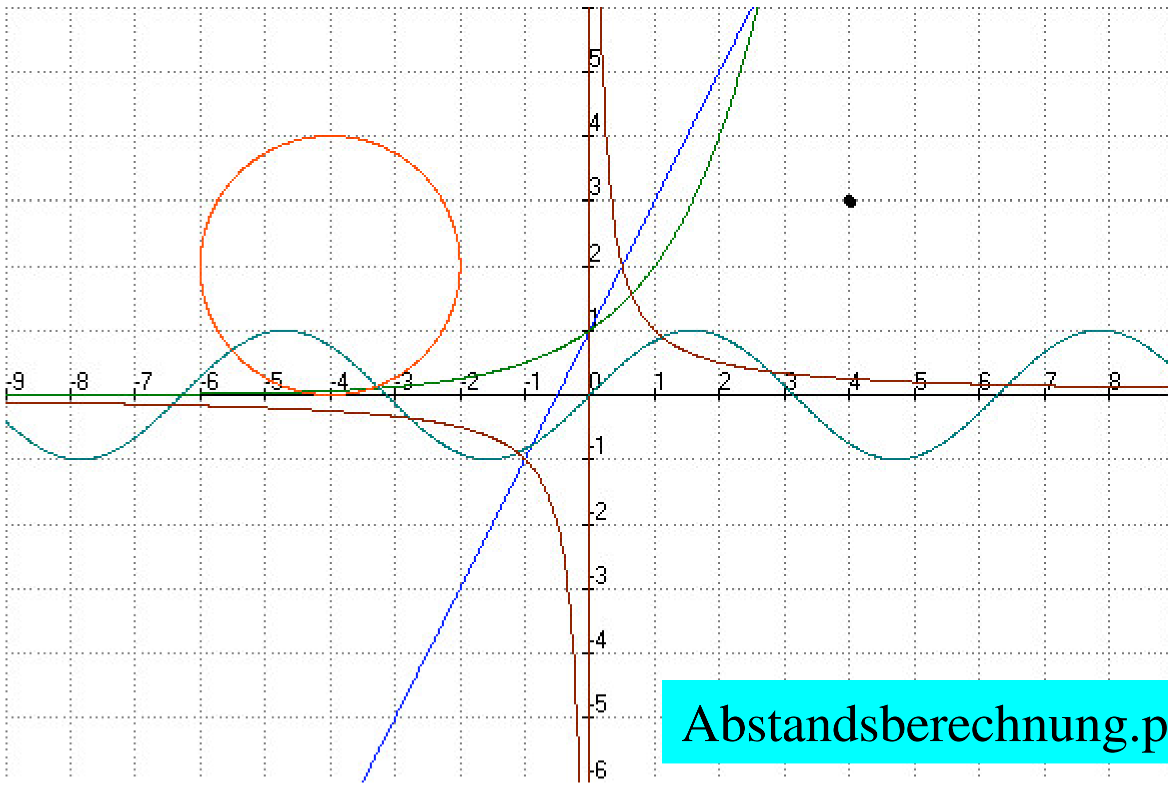


Erkläre den Bildschirmausdruck.

Hinweis: Es ist günstig, eine Zeile nach der anderen genau zu erklären

Abstandsberechnungen im Leistungskurs

Wie weit ist der Punkt P(4,3) von dem Graphen entfernt?



Abstandsberechnung.pl2

Aufgabenstellung:

Gegeben sind die Funktionen bzw. Relationen

$f1(x) = sin(x)$,

$f2(x) = 2^x$,

$f3(x) = (x + 1)/(x + 4)$,

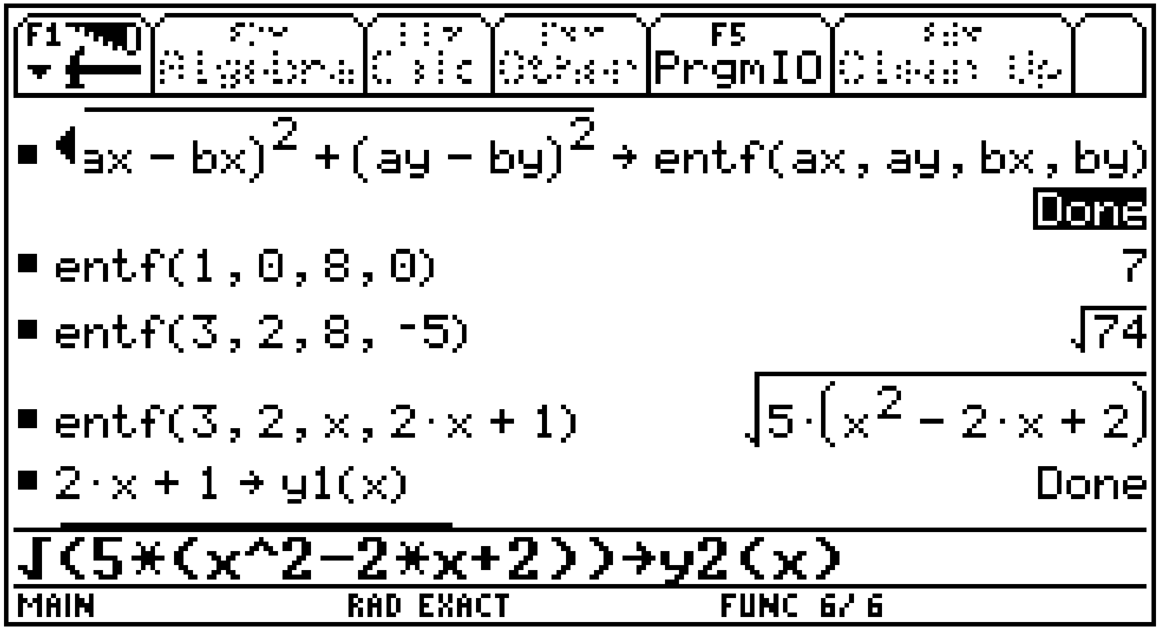
$f4$: $x(t) = 2*cos(t) + 9$,

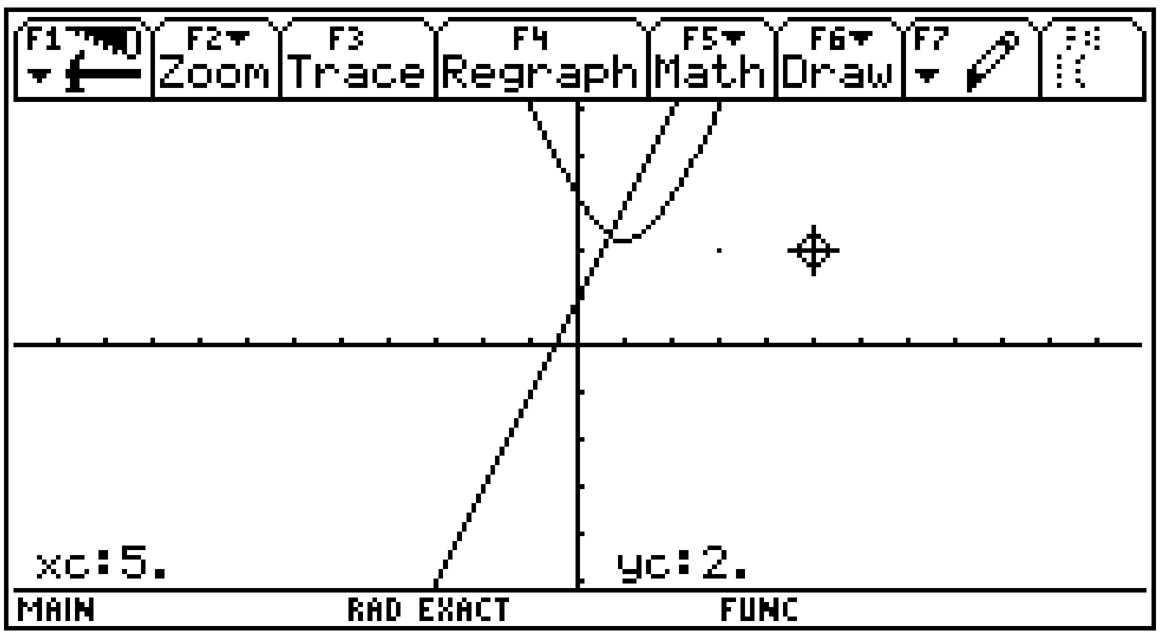
$y(t) = 2*sin(t) + 6$,

ihre Graphen sowie der Punkt $P(4, 3)$.

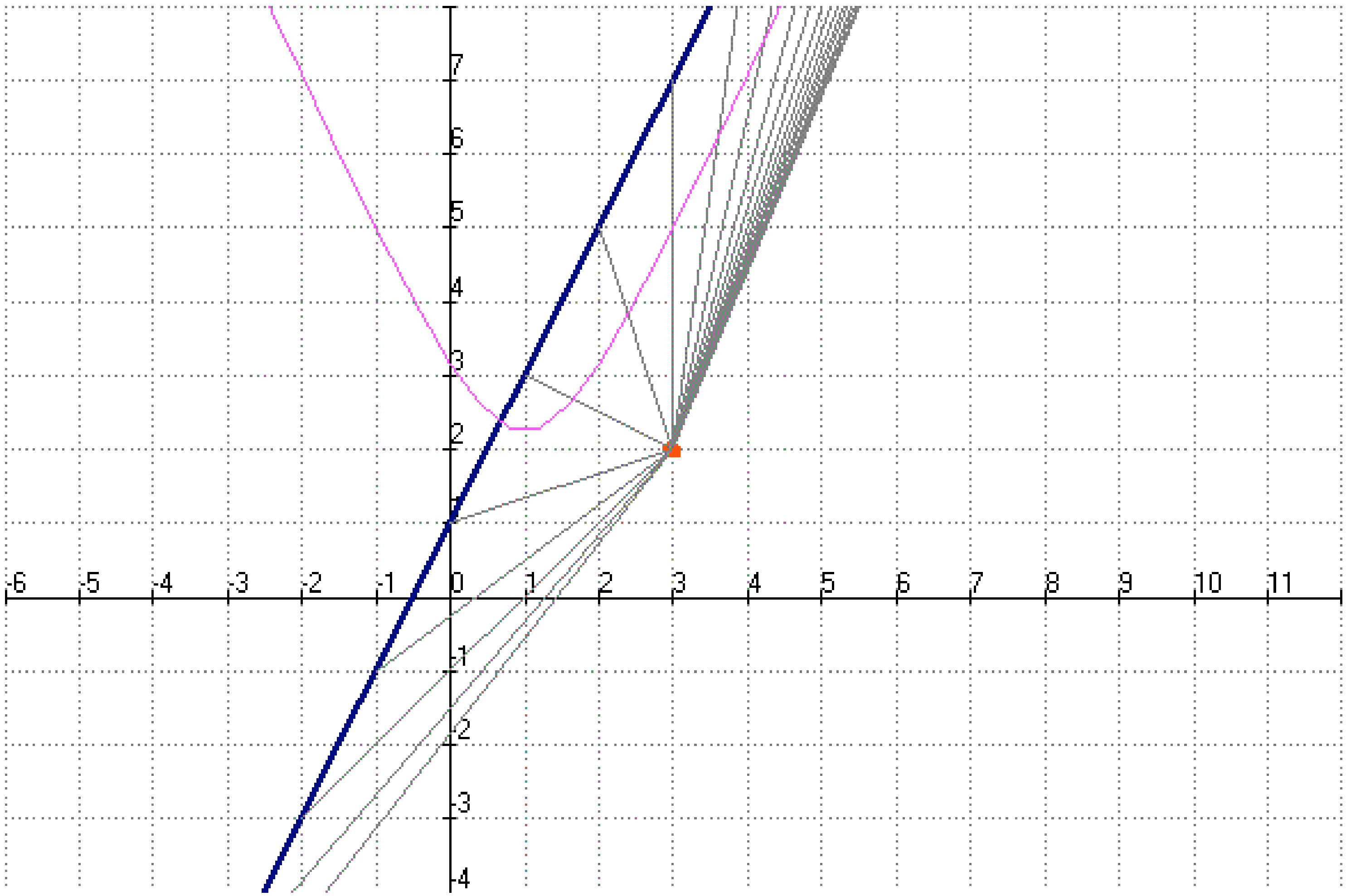
Bestimmen Sie jeweils den Punkt auf den Graphen, der von P den kleinsten Abstand hat.

`(Arbeit in 5 Gruppen mit 4 Schüler/innen)`

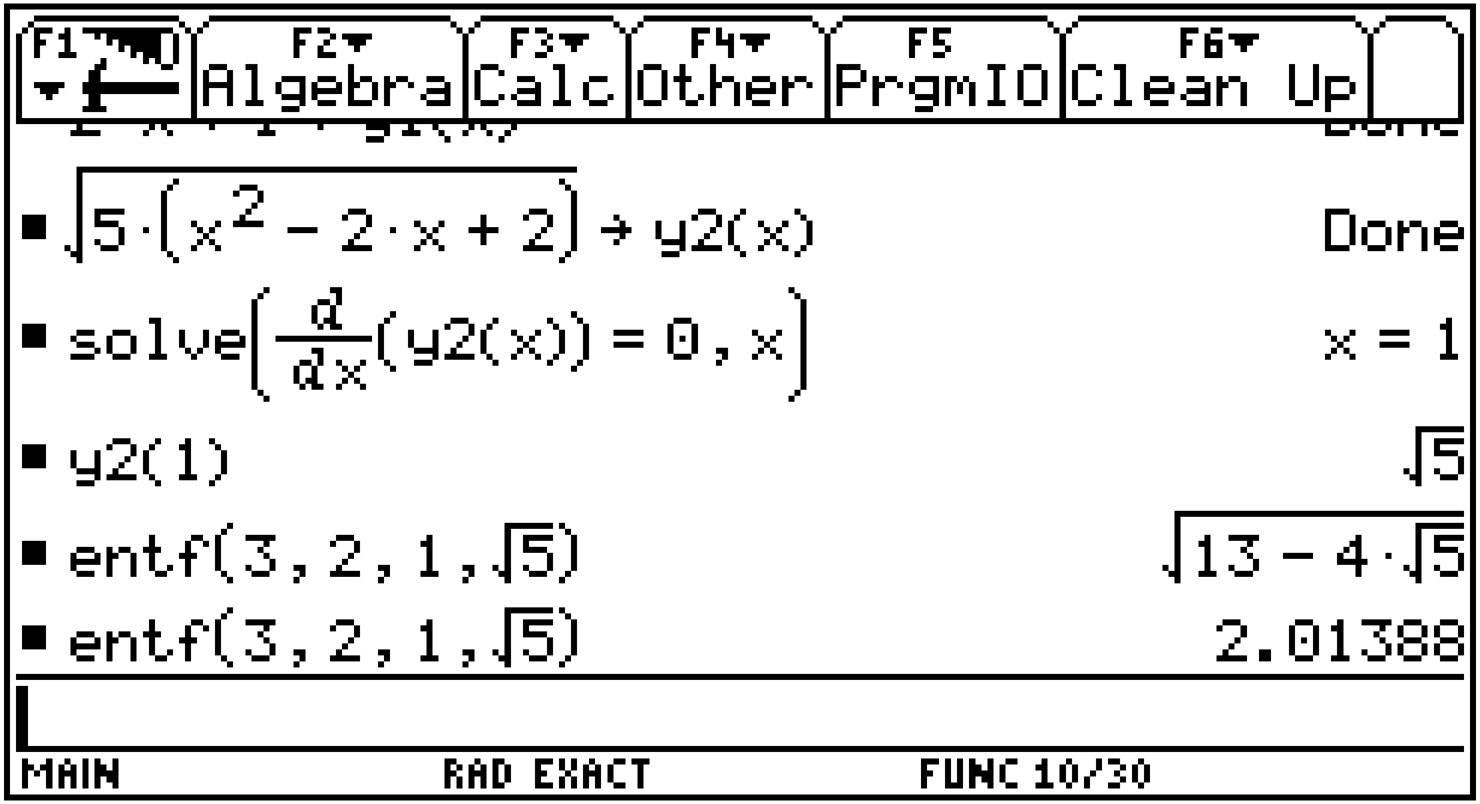




Anknüpfung an Klasse 9 bzw. den Grundkurs



-6
-5
-4
-3
-2
-1
0
1
2
3
4
5
6
7
8
9
10
11
7
6
5
4
3
2
-1
-2
-3
-4

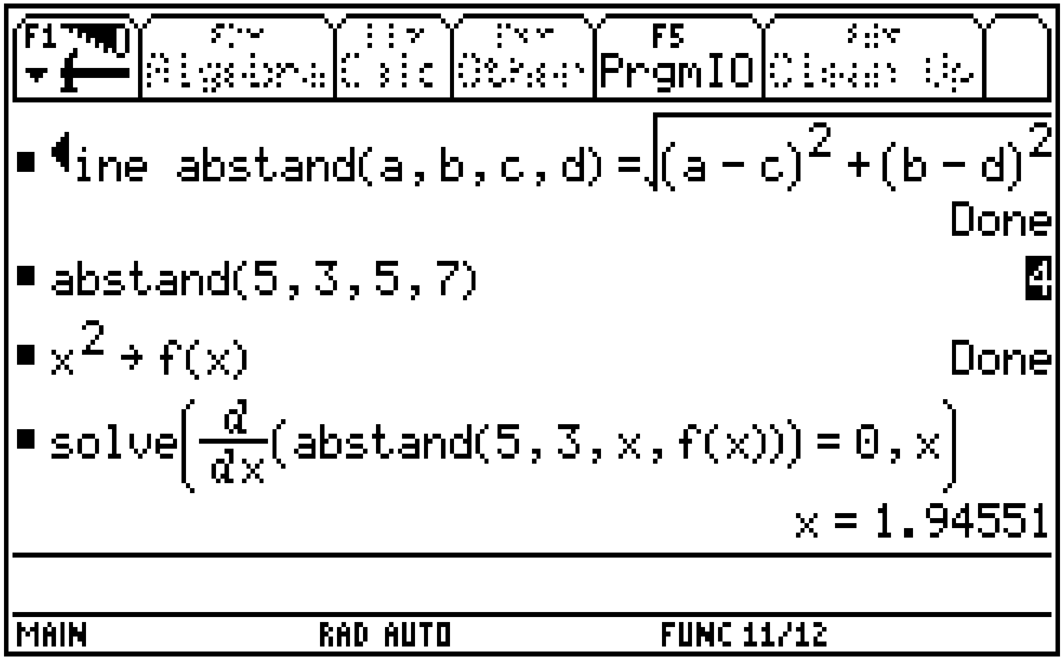


F1
F2 Algebra
F3 Calc
F4 Other
F5 PrgmIO
F6 Clean Up
√(5·(x^2 − 2·x + 2)) → y2(x)
Done
solve(d/dx(y2(x)) = 0, x)
x = 1
y2(1)
√5
entf(3, 2, 1, √5)
√(13 − 4·√5)
entf(3, 2, 1, √5)
2.01388
MAIN
RAD EXACT
FUNC 10/30

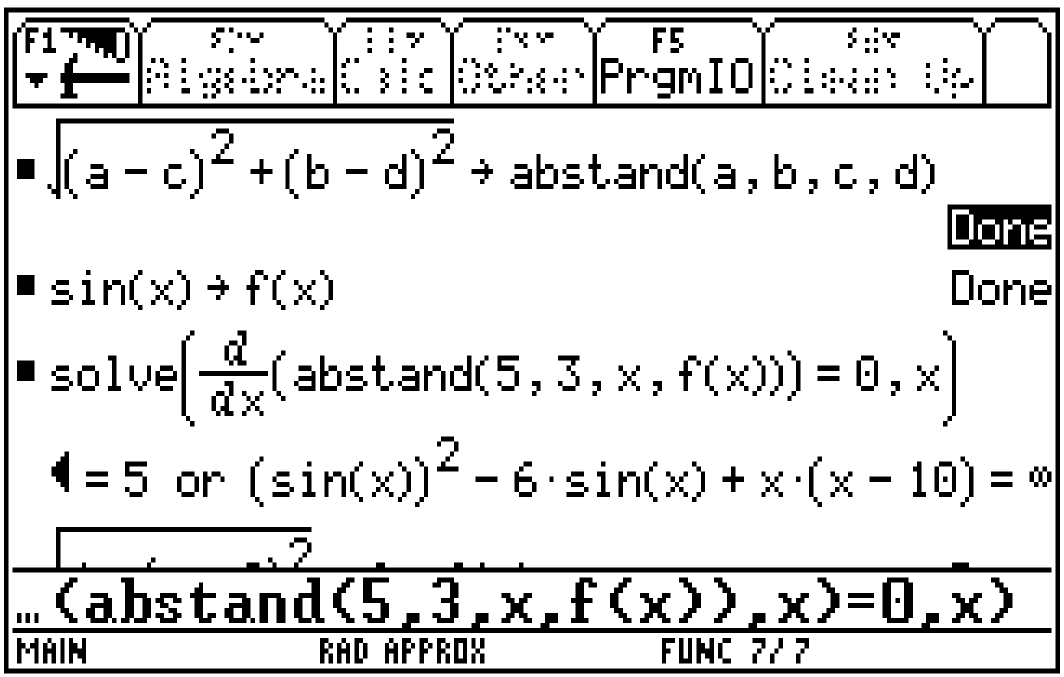
Lösungen

Schon die Aufgabenstellung, der ja bei allen Gruppen die selbe Abbildung zugrunde lag, ließ vermuten, dass hier gleiche oder ähnliche Bausteine helfen könnten. Beim Vortragen der Lösungen wurde das noch deutlicher. Die Lösungen wurden teilweise als reine Zahlenlösungen vorgestellt, andere Gruppen arbeiteten möglichst lange allgemein. Hier wird die Situation nach der Bausteindefinition näher geschildert.

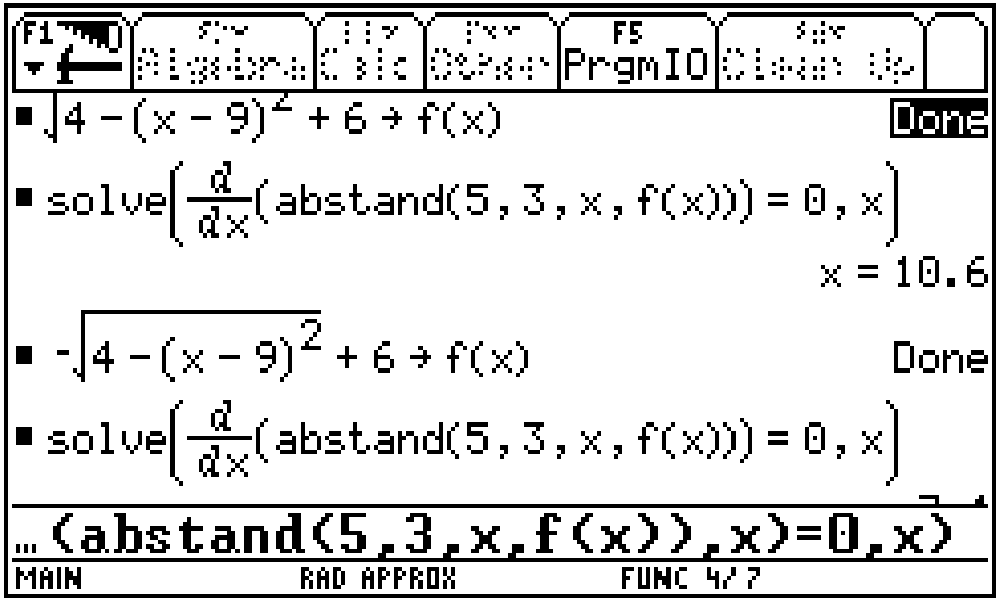
Zunächst ging es für alle Gruppen um einen Abstandsbaustein für zwei Punkte P(a, b) und Q(c, d).

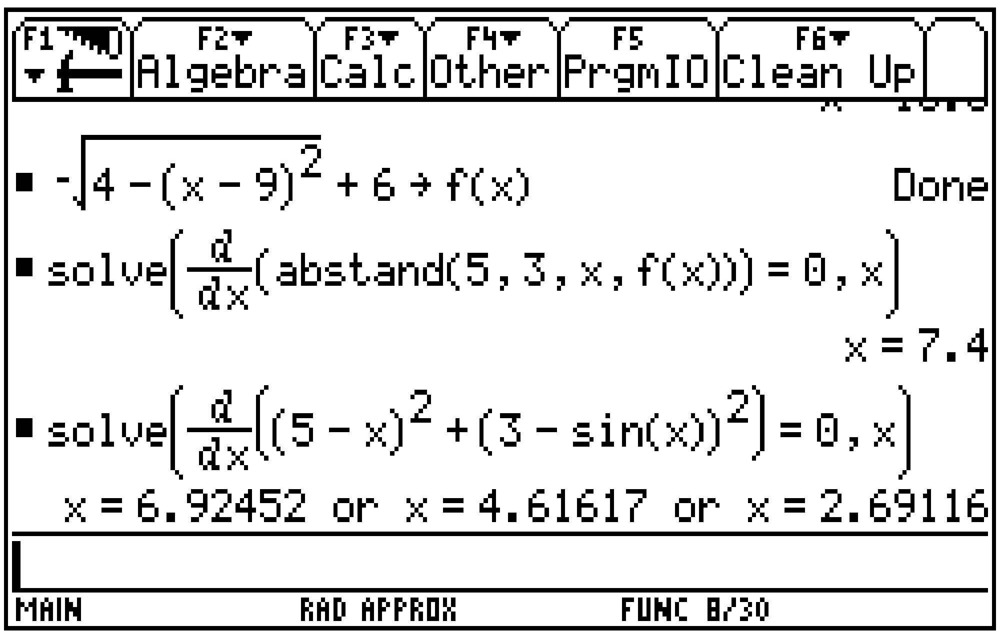


Lösung der x^2-Gruppe



Lösungsversuch der sin(x)-Gruppe

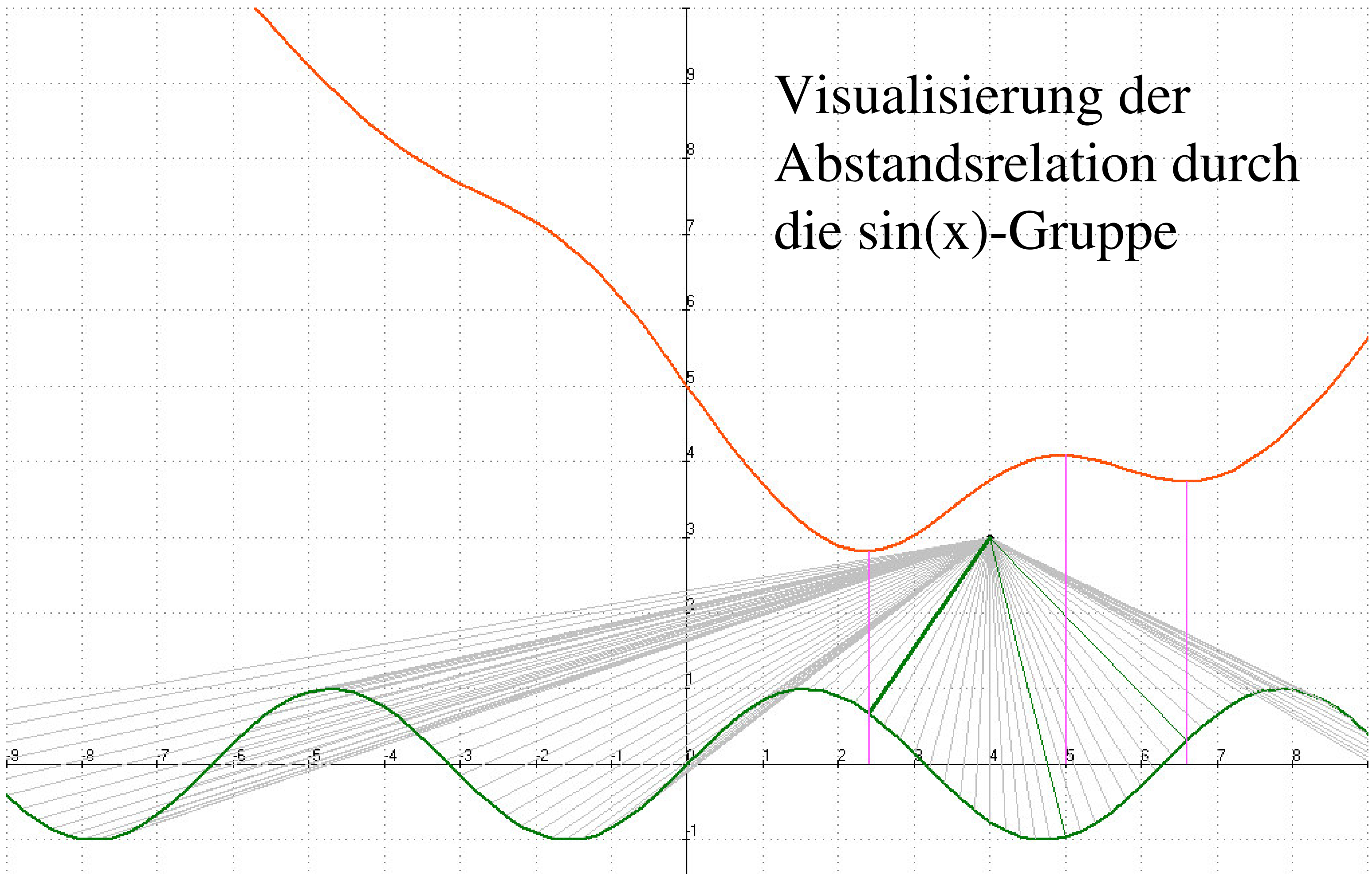




Lösung der Kreis-Gruppe

Hinweis: Die Kreisgruppe hatte sofort erkannt, dass sie ihre Aufgabe ohne Differentialrechnung auf elementare Weise lösen konnte. Eine solche Lösung wurde von der Gruppe auch vorgetragen. Die erhaltenen Ergebnisse wurden erst später durch die hier dokumentierte Bausteinlösung bestätigt.

Visualisierung der Abstandsrelation durch die sin(x)-Gruppe



Abstandsberechnung-sin-mit-Baustein.pl2

Notizen:

f1: 4,3 hier ggf. Punkt ändern

f4: sin(a) hier ggf. Funktion ändern

f6: 4,3,x,f4(x)

f7: f15(4,3,x,f4(x)), Aufruf des Abstandsbausteins

ausführlich: sqrt((4-x)^2+(3-f4(x))^2)

f11: 2.4,f4(2.4),4,3, vermutete kürzeste Abstände

f12: 5,f4(5),4,3

f14: 6.6,f4(6.6),4,3

f15: sqrt((a-c)^2+(b-d)^2), Abstandsbaustein

f17: 6.6,f15(4,3,6.6,f4(6.6)),6.6,f4(6.6) Lotstrecken

f18: 2.4,f15(4,3,2.4,f4(2.4)),2.4,f4(2.4)

f19: 5,f15(4,3,5,f4(5)),5,f4(5)

---> Berechnungen mit CAS

Funktion	D(min) minimaler Abstand	x(min)	y(min)
Sin(x) Trigonometrische Funktion	3.077	6.92452 (4.61617), (2.69116) diese Werte kommen nicht in Frage	0.598
2^x Exponentialfunktion	3.161	2.02	4.059
$x = 2cos(x) + 9$ $y = 2sin(x) + 6$ Kreis	3	7.4 (10.6)	4.8
(x+1) / (x+4) Gebrochen-rationale Funktion	2.332	5.0847, rechter Ast, (–4.76662), *x*-Wert für den kürzesten Abstand zum linken Ast	0.6698

Das Problem wurde in Gruppenarbeit angegangen - jede Gruppe befasste sich mit einem Graphen. Insgesamt ergab sich der folgende Ablauf:

- Problemstellung
- Gruppeneinteilung, Themenwahl
- Gruppenarbeit, alle Hilfsmittel erlaubt, insbesondere Benutzung das CAS des TI-92.
- Für “schnelle” Gruppen: Entwurf einer Simulation des Problems mit dem Funktionen-plotter PLOT11
- Vortragen der Ergebnisse, Diskussion
- Herausarbeiten der Gemeinsamkeiten und der Unterschiede
- Konstruktion eines Bausteins für alle Teilprobleme
- Erprobung des Bausteins

Prinzipiell können alle Abstandaufgaben der Art “kürzester Abstand Punkt *P(a,b)* zum Graphen von $y = f(x)$” mit den folgenden Bausteinen bearbeitet werden:

(1) SQRT((a-c)^2 + (b-d)^2) → abstand(ab,c,d)

(2) Funktionsterm → f(x)

(3) SOLVE(d/dx(abstand(a,b,x,f(x)), x) = 0, x)

Dabei müssen Sonderfälle beachtet werden.

Diese Sonderfälle betreffen z. B. die Lage des Punktes *P(a,b)* und die Art der Funktionen bzw. Relationen. Auch lässt sich die Lösung manchmal auch elementarer finden.

Das Besondere an der geschilderten Unterrichtsreihe:

- Die Schülergruppen erhalten sehr ähnliche Aufgaben, die sich prinzipiell alle mit dem gleichen Ansatz bearbeiten lassen. So versteht später jede Gruppe den Vortrag der anderen Gruppen.
- Abgesehen von Sonderfällen, erweist sich eine für alle Gruppen gemeinsame Bausteinlösung als verbindendes Element
- Der Baustein „abstand“ und der Term für *f(x)* können rationell für weitere anfallende Berechnungen (Abstände, Funktionswerte) benutzt werden.

Aber:

- Die unterschiedlichen Funktionsterme führen zu unterschiedlichen Gleichungstypen, die sich dann leicht oder auch weniger leicht mit dem CAS lösen lassen.

- Teilweise ergeben die Gleichungen mehrere Lösungswerte, so dass weitere Überlegungen über den richtigen x-Wert nötig sind.

Ende der Abstandsberechnungen

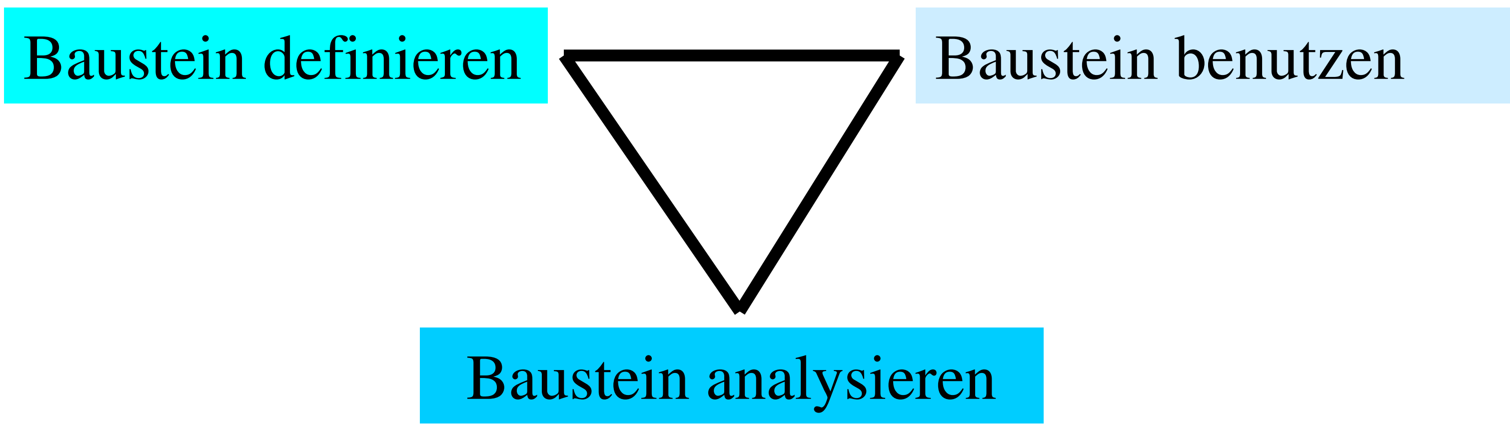
Weitere Beispiele für das Arbeiten mit Parametern (Voyage 200)

Geradenbaustein	define gerade(x,a,b,m) = b+m*(x-a)
	Animato: Geraden-durch-3-1.pl2
	Animato: Geraden-durch-a-b.pl2
Differenzenquotient	define diffqt(x,h)= ((f(x+h)-f(x)) / h
	Animato: DifferQuot-Animation.pl2
Summe, Folge	sum(seq(i^3-i^2,i,1,5)) 170
(vordefiniert)	expand(seq((a+b)^n,n,1,3)
	{a+b, a^2+2ab+b^2,a^3+3a^2b+3ab^2+b^3}
Binomische Formel	define binomi(a,b,n) = (a+b)^n

Das Bausteindreieck >>>

Das Bausteindreieck

und seine Verwendung im Unterricht



Das Bausteindreieck

grundlegende Informationen über das Bausteinprinzip

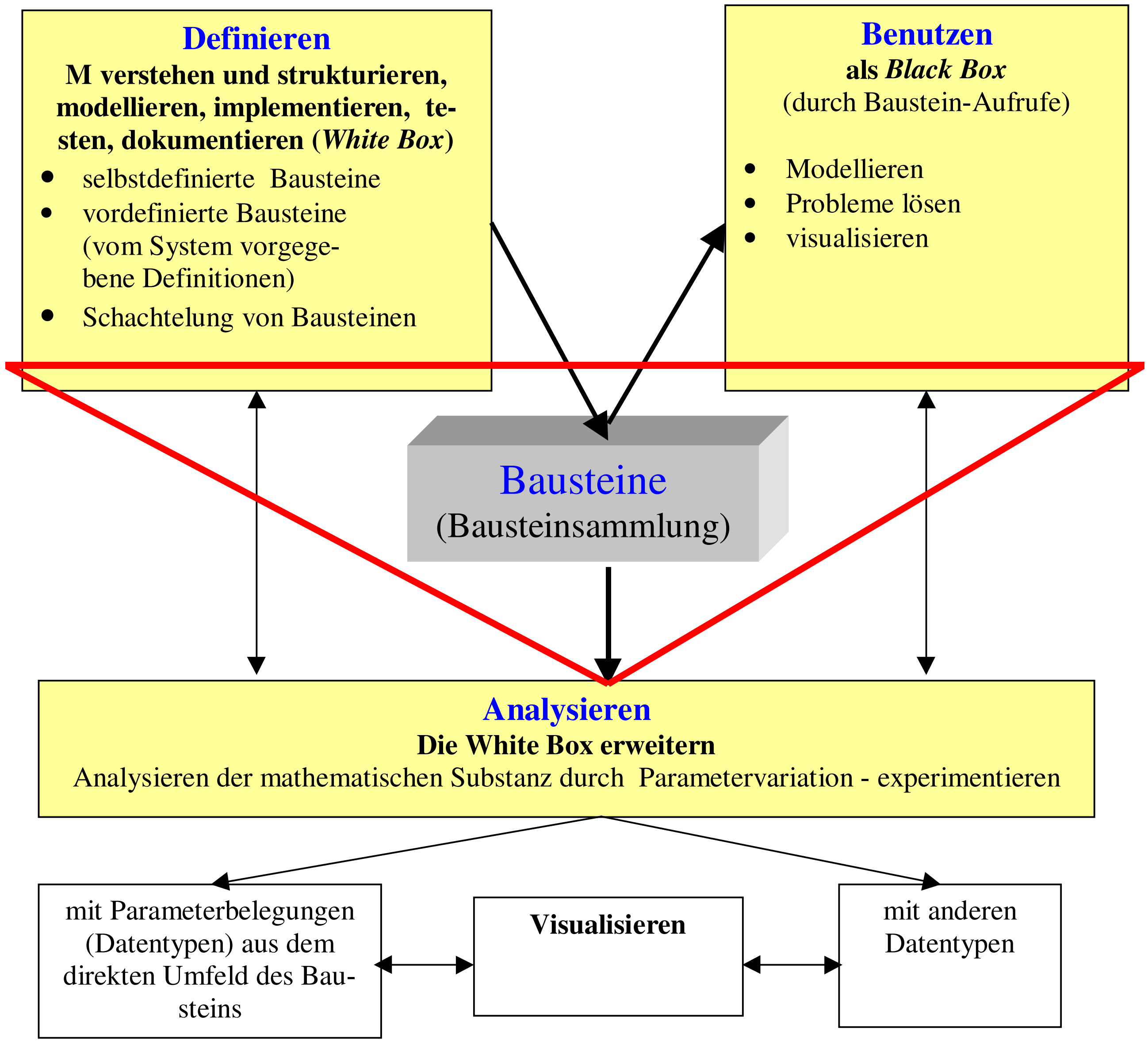
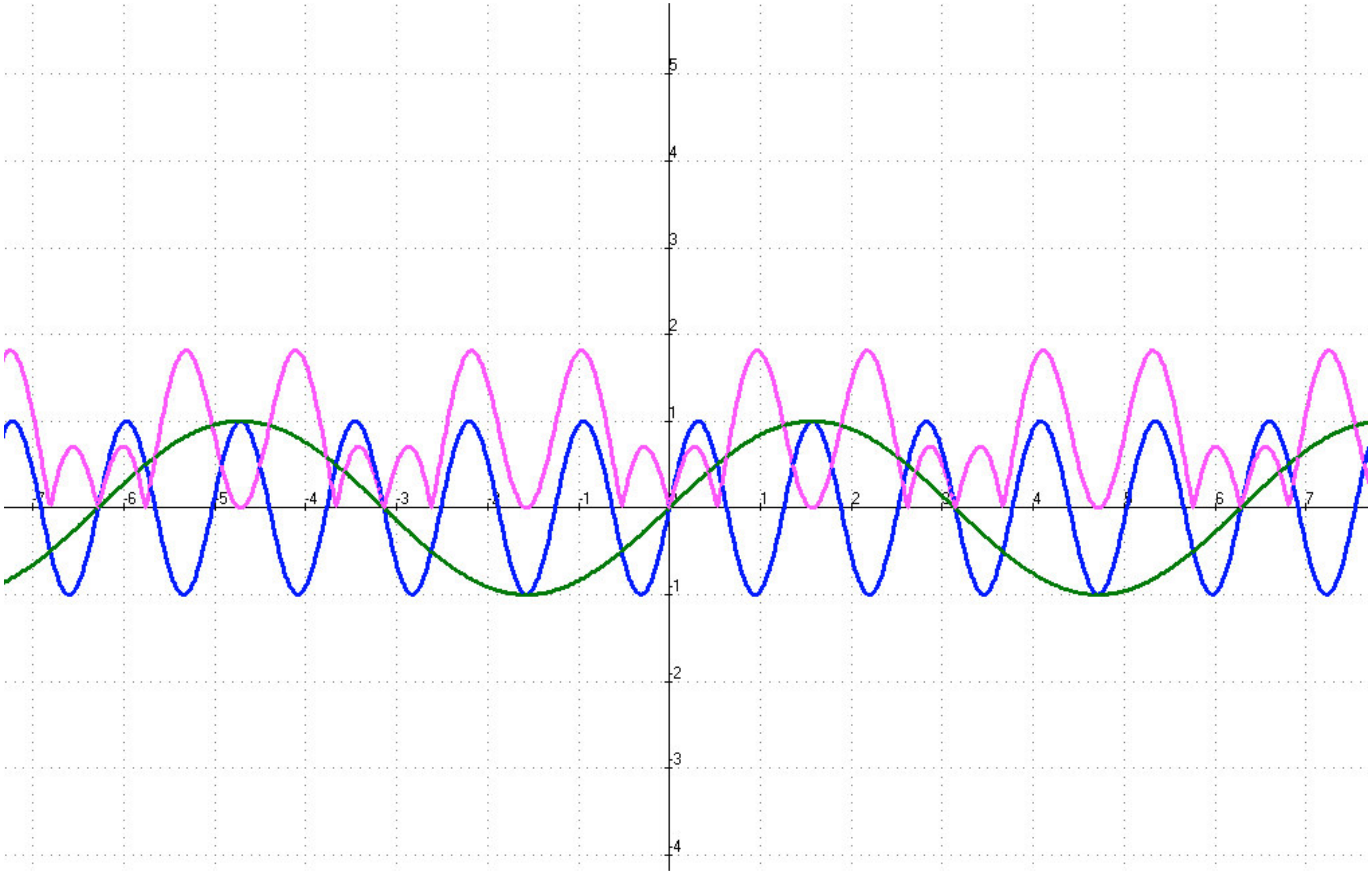


Abb. Das Bausteindreieck: Definieren, Benutzen, Analysieren sqrt((xa-xb)^2+(ya-yb)^2) → abst(xa, xb, ya, yb)

Eine Strategie zur Analyse dieses Bausteins

(xa, ya)	**Parameter**	**(xb,yb)**
Punkt		Punkt
Punkt		Lineare Funktion
Punkt		Sinusfunktion
Lineare Funktion		Sinusfunktion
Funktion		Funktion



f1: sqrt((a-c)^2+(b-d)^2) //Abstandsbaustein

f2: x

f3: sin(5x)

f4: x

f5: sin(x)

f6: f1(f2,f3,f4,f5)

Abstand-2-Funktionen.pl2

Warum sind Bausteine (Module) mit Parametern für den Mathematik-Unterricht so wichtig?

Wissenseinheiten: Bausteine (Module) können als kompakte Einheiten aufgefasst werden, in denen das Wissen verdichtet ist und in denen die Operationen als Paket abgerufen werden können.

Modellbildung: Bausteine können von den Schülern selbst definiert werden und tragen damit zur eigenständigen Modellierung von Problemen durch die Schüler bei.

Experimentelles Arbeiten: Bausteine ermuntern die Schüler, Einsetzungen für die vorhandenen Parameter zu erproben und leisten damit einen wesentlichen Beitrag zum experimentellen Arbeiten.

Anwendungsfeld: Die Überlegungen zur Einsetzung von Parameterwerten verbreitern das mathematische Anwendungsfeld eines Bausteins.

Allgemeine Lösungen: Die Suche nach passenden Bausteinen ist gleichzeitig eine Suche nach allgemeinen Lösungen von Problemen.

Wiederverwendbarkeit: Bausteine sind wiederverwendbar.

Vernetzung: Bausteine können miteinander verknüpft werden und damit auch mathematische Gebiete miteinander vernetzen.

(Beispiel: Abstand zweier Punkte, Differenzieren, Gleichung lösen)

Weitere Aspekte

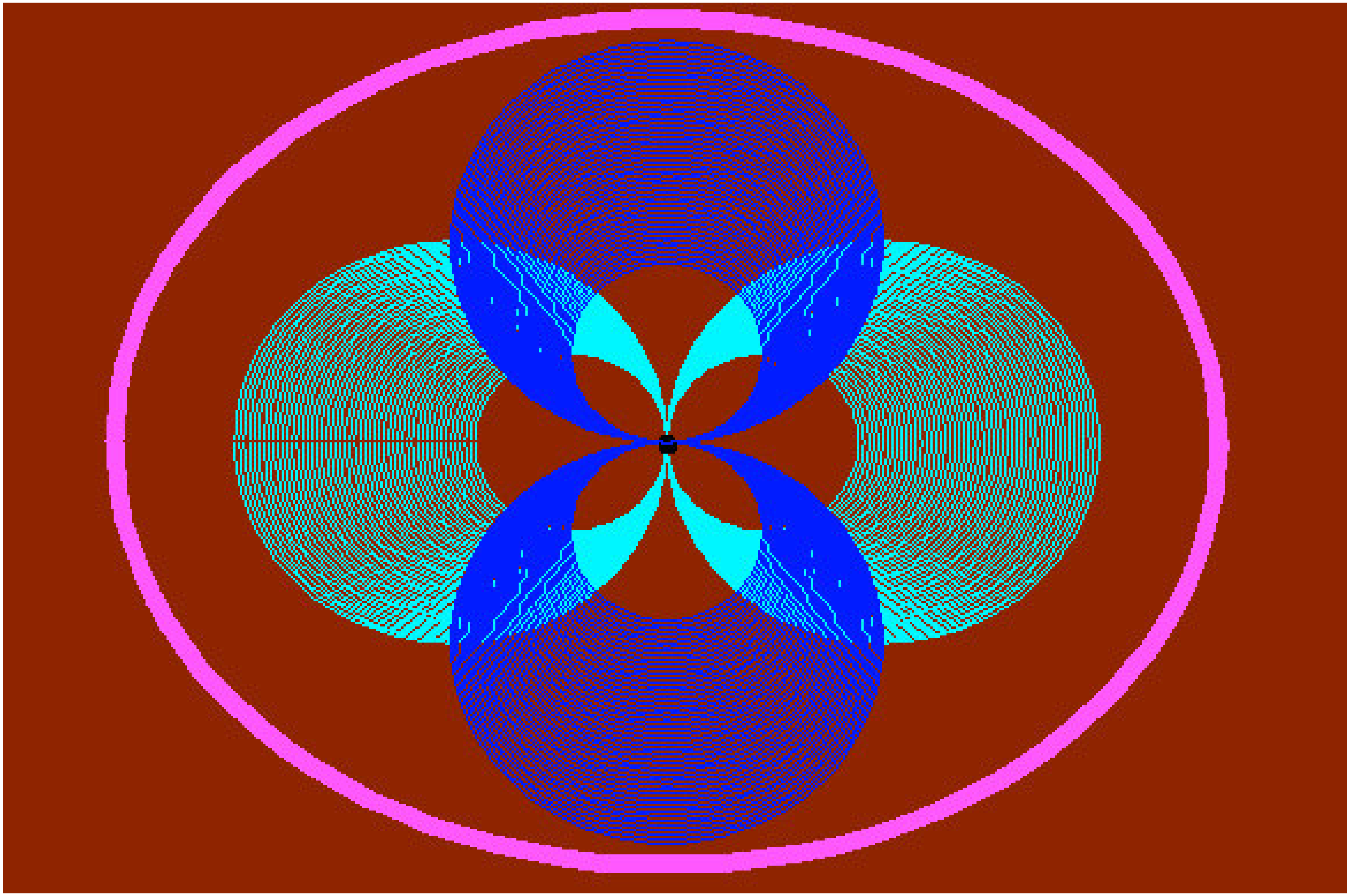
- Abkürzung / Komprimierung langer Terme
- Anwendung des Window-Shuttle-Prinzips

Zum Abschluss:

Viele Kreise durch einen Punkt

Kreisbüschel2-Kunst.pl2

/Mathematik und Kunst-MNU-Vortrag-Halle-2004.pl2



Danke für das Zuhören!

Ich hoffe, Sie haben einige Anregungen für Ihren Mathematikunterricht erhalten!

Dr. Eberhard Lehmann, Berlin

mirza@snafu.de / www.snafu.de/~mirza