Kapitel 3 Lineare Gleichungssysteme

3.1 Lagerhaltung

3.2 Baumschule

3.1 Lineare Gleichungssysteme 1: Lagerhaltung

Es gibt viele Problemstellungen, die auf lineare Gleichungssysteme und deren Lösung führen, so dass diese mit Recht einen hohen Stellenwert in den Sekundarstufen 1 und 2 haben. Ob jedoch alle in der Sekundarstufe 1 bisher üblichen Lösungsverfahren (Additionsverfahren, Gleichsetzverfahren, Einsetzverfahren) bei dem Vorhandensein von Computeralgebra-Systemen dort noch nötig sind, muss bezweifelt werden. CAS eröffnen auch hier völlig neue Wege.
Hier wird mit dem Einstieg über ein Materialverflechtungsproblem sogleich auf das Matrizenverfahren (Gauß-Algorithmus) abgezielt, das eine Systematisierung des Additionsverfahrens ist und später für die umfangreicheren Gleichungssysteme in der Sekundarstufe 2 das bedeutungsvollste ist.

Lagerbestand und Bestellungen

Ein Textilbetrieb fertigt zwei verschiedene Kinderröcke R1 und R2, die jeweils aus zwei Stoffen S1 und S2 bestehen. Die für einen Rock benötigten Stoffmengen (in passenden Einheiten) sowie der derzeitige Lagerbestand (in der gleichen Einheit können der folgenden Tabelle entnommen werden.

	Rock R1	Rock R2	derzeitiger Lagerbestand an Materialien
Benötigte Stoffmenge S1	6	2	456
Benötigte Stoffmenge S2	4	5	348

Von Stoff 1 werden also 6 Einheiten für Rock 1 und 2 Einheiten für Rock 2 benötigt.

Materialverbrauch

a) Wieviel Material wird für eine Bestellung von 5 Röcken R1 und 8 Röcken R2 benötigt? Wie lautet der neue Lagerbestand?

Aufbrauchen des Lagers

b) Untersuche, ob sich der in der Tabelle angegebene Lagerbe stand (456; 348) durch eine passende Bestellung vollständig aufbrauchen läßt.

Lösungen

Lösung zu a)
Materialbedarf von S1: 5*6 + 8*2 = 46 Einheiten
Materialbedarf von S2: 5*4 + 8*5 = 70 Einheiten
Lagerbestand ist jetzt: Von S1 410 Einheiten, von S2 278 Einheiten. Wieso?

Lösung zu b)
x sei die Stückzahl von S1, y die Stückzahl von S2. Dann muss gelten:

Lineares Gleichungssystem

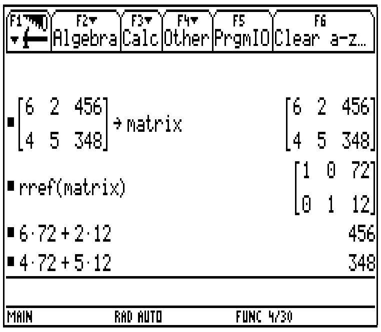
Gleichung G1: $6x + 2y = 456$
Gleichung G2: $4x + 5y = 348$

Der Lösungsansatz erfolgt mit Hilfe eines "linearen Gleichungssystems", kurz LGS. Es besteht hier aus zwei Gleichungen G1 und G2 mit je zwei Variablen x und y.

Probe: Du musst die Richtigkeit für *beide* Gleichungen überprüfen!

Als Lösung ergibt sich x=72, y=12, also die Lösungsmenge {(72, 12)}. Mit dieser Bestellung von 72 Röcken R1 und 12 Röcken R2 lässt sich der Lagerbestand vollständig aufbrauchen.
Bestätige das durch eine Probe!

Lösung mit einem CAS



Mit dem TI-92 kann man das LGS so eingeben: [[6,2,456][4,5,348]]. Daraus macht der Rechner die im Bild sichtbare Matrix. Mit dem Befehl rref(matrix) erzeugt der Rechner eine neue Matrix und damit ein neues, einfacheres LGS. Auf dem Computerbild ist außer der Umformung auch noch die Probe zu sehen.

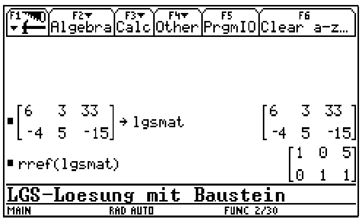
Das ideale Gleichungssystem!

Wir notieren das neue Gleichungssystem:
G1-neu $\quad 1x + 0y = 72$
G2 neu $\quad 0x + 1y = 12.$
Das neue System ist geradezu ideal zum Ablesen der Lösung: Man sieht sofort, dass x = 72 und y = 12.

Merke: Bei linearen Gleichungssystemen mit 2 Variablen ergeben sich als Lösungen immer Zahlenpaare!

Nun ist wohl die Hauptfrage:
Wie schafft es das CAS, aus dem schwierigen LGS ein so leichtes LGS zu machen, aus dem man die Lösung sofort ablesen kann?

Sehen wir uns dazu noch einen zweiten Bildschirmabdruck an:



Welches Gleichungssystem wurde hier bearbeitet? Zu welchem System hat der Rechner umgeformt? Wie heißt die Lösungsmenge?

Schrittweise Vereinfachung des LGS durch Handrechnung

Die Grundidee: Das zweite LGS ist deshalb so einfach, weil als Koeffizienten von x und y jeweils nur Einsen und Nullen auftreten. Das also gilt es zu erreichen!
Bei dem vorliegenden LGS teilen wir die erste Gleichung durch 6. Damit wird schon die erste "1" erzeugt:
G1: $\quad 6x + 3y = 33 \quad // : 6$
G2: $\quad -4x + 5y = -15$ Gleichung 2 erst einmal unverändert lassen

Solange neue Gleichungen erzeugen, bis sie ganz einfach zu lösen sind!

G1: $1x + 0.5y = 5.5$ das ist die neue Gleichung 1
G2: $-4x + 5y = -15$ // G2:=G1 + G2 / 4,

> Hinweis: G2:=G1 + G2 / 4 bedeutet: Die neue Gleichung G2 ergibt sich durch die Rechnung: Gleichung G1 + 1/4 der alten Gleichung G2.

G1: $1x + 0.5y = 5.5$ Gleichung bleibt unverändert
G2: $0x + 1.75y = 1.75$ // G2:= G2 / 1.75

G1: $1x + 0.5y = 5.5$ // G1:= G1 - G2 / 2
G2: $0x + 1y = 1$ Gleichung fertig

G1: $1x + 0 = 5$ Also ist x=5, y=1, so wie
G2: $0x + 1y = 1$ es auch der Bildschirm zeigt.

So könnte es das CAS gemacht haben!

Mischungsaufgabe 1

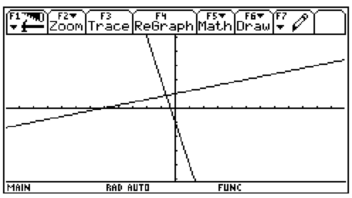
Auch die folgende Aufgabe führt auf ein lineares Gleichungssystem:
Zwei Sorten Tee zu 25 Euro und 35 Euro je Kilogramm, sollen so gemischt werden, dass ein Preis von 28 Euro entsteht. Berechne das Mischungsverhältnis.

- Erläutere zuerst den folgenden Ansatz:
  $25a + 35\,b = 28$
  $a + b = 1$
- Löse das LGS mit dem CAS-Befehl "rref" und dann von Hand nach der obigen Methode.
- Deute das Ergebnis $a = 0.7$, $b = 0.3$

Mischungsaufgabe 2
Wo steckt der Fehler?

Eine ähnliche Tee-Mischungsaufgabe wie oben hat das Gleichungssystem
$25a + 35\,b = 40$
$a + b = 1$
ergeben.
Löse das LGS. Wo steckt der Fehler?

Schnittpunkt zweier Geraden

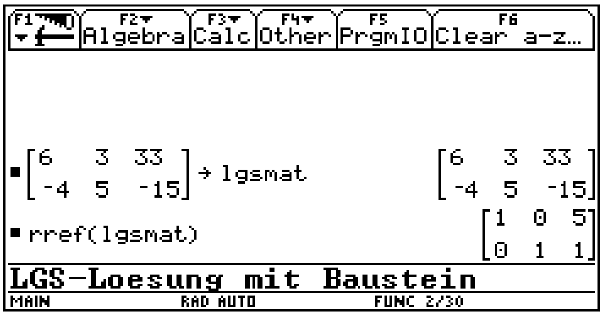


Gegeben sind zwei Geraden mit den Gleichungen $y = 0.2x + 1$ und $y = -3x - 1$. In welchem Punkt schneiden sich die Geraden?
Hinweise:

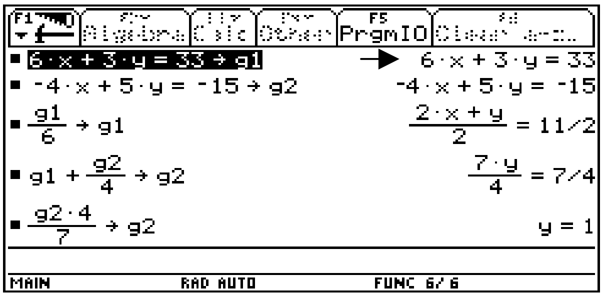
1) Du kannst die Gleichungen so umformen, dass sich ein LGS der von oben bekannten Form ergibt.
2) Es gibt aber auch die so genannte "Gleichsetzmethode", die hier weiterhilft. Informiere dich über diese Methode, falls sie dir noch unbekannt ist.
3) Eine weitere Methode besteht darin, die Geraden in ein Koordinatensystem einzuzeichnen und ihren Schnittpunkt abzulesen. Auch das geht mit dem CAS.

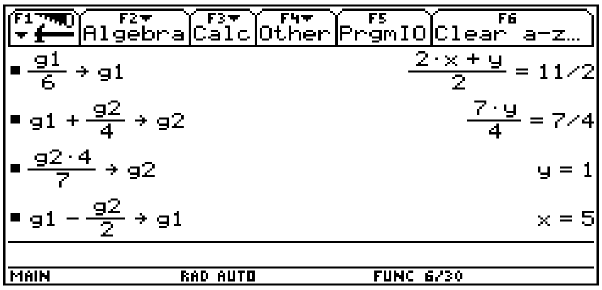
Schrittweise Lösung eines LGS mit dem CAS Arbeitsblatt 3.1.1

Aufgabe 1: Kommentiere die folgenden Bildschirmabdrucke!



lgs99-3.tif





Aufgabe 2:
Welches Rechnerprotokoll würde sich für das Gleichungssystem
G1 2a - 6b = 10
G2 8a +5b = 11
ergeben?

Das kommentierte Rechnerprotokoll - ergänze!

g1:=g1 // 6, die alte Gleichung →
wird durch 6 dividiert, um als Koeffizient vor x eine 1 zu haben.
Beachte: Die CAS-Ausgabe ist gleichbedeutend mit
x + y/2 = 11/2.

g2:=g1+g2 / 4
g2:=g2*4/7

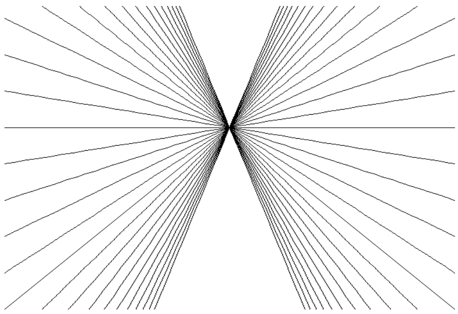
Projektarbeit - Geradenbüschel Arbeitsblatt 3.1.2

- Die folgende Problemstellung sollt ihr in mehreren Gruppen bearbeiten.
- Irgendwie hängen alle Teilproblemstellungen miteinander zusammen. So empfiehlt es sich, auch mal zum Nachbarn zu sehen und Informationen auszutauschen.
- Auch ein Blick ins Schulbuch kann nicht schaden.
- Am Ende von Problem 1 soll jede Gruppe ihre Ergebnisse vorstellen. Überlegt euch also, wie ihr das Referat unter euch aufteilt.
- Danach wird Problem 2 bearbeitet und auch hier werden die Lösungen vorgetragen.
- Die Dokumentation eurer Arbeit könnte mit den Dokumentationen der anderen Gruppen zu einer Gesamtdokumentation zusammengefasst werden.
- Eure Lehrerin bzw. euer Lehrer wird am Ende auch die tieferen mathematischen Hintergründe und Zusammenhänge eurer Arbeit mit euch besprechen.
- So entsteht schließlich ein Heft mit interessanter Mathematik, das ihr vorzeigen könnt und das eine gute Grundlage eurer weiteren Arbeit ist.
- Vielleicht habt ihr auch die Möglichkeit, eure Arbeit im Internet zu veröffentlichen.
- Einschließlich der Dokumentation und der Referate werden ihr etwa vier Stunden benötigen (vielleicht auch eine weniger oder mehr).

Und nun das Problem! Es handelt sich um ein Beispiel aus der Computergrafik:

Problem 1:
Zeichne mit dem Rechner möglichst viele Geraden durch einen Punkt. Es entsteht ein Geradenbüschel.

Gruppe A	durch den Punkt A(2,3),
Gruppe B	durch den Punkt B(-2,3),
Gruppe C	durch den Punkt C(-2,-3),
Gruppe D	durch den Punkt D(2,-3).



Problem 2:
Anschließend lösen die Gruppen A und B gemeinsam die folgende Aufgabe:
Leite eine Formel her (ggf. unter Verwendung des CAS), die für jede Gerade durch A und jede Gerade durch B sofort den jeweiligen Schnittpunkt errechnet! Die Gruppen C und D lösen die entsprechende Aufgabe für ihre Punkte C und D.

Weitere Schnittpunktberechnungen:
Formuliere für die folgenden Aufgaben jeweils das zum Problem gehörige Gleichungssystem.
- Berechne alle Schnittpunkte der Geraden mit den Gleichungen y = 5 bzw. x = 5 mit den Geraden eures Geradenbüschels.
- Berechne die Schnittpunkte aller Büschelgeraden mit der Winkelhalbierenden y = x.

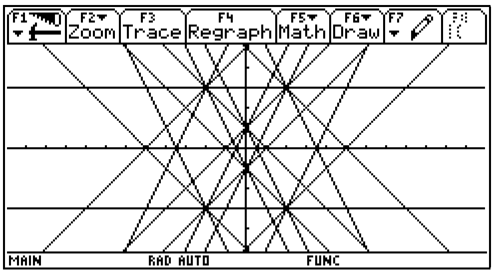
Lösungen zur Projektarbeit:

Zu Problem 1

Die Schülerinnen und Schüler werden vermutlich erst einzelne Geraden über die Form y = m*x+n bestimmen, die durch die gewünschten Punkte gehen. Sie wählen z. B. für A(2,3) eine Gerade mit der Steigung m=1, also 3 = 1*2 + n und n=1. Damit ergibt sich die erste Geradengleichung y = x + 1, die über x+1→ y1(x) eingezeichnet wird.

Irgendwann werden Sie auf die Idee kommen, m variabel zu lassen, so dass n = 3-2*m und damit y = m*x + (3-2*m). Nun können sie das Geradenbüschel erzeugen; beim CAS des TI-92 kann das so geschehen:
m*x + (3-2*m) | m = {-3,-2,-1,-0.5,0, 0.5,1,2,3} → y2(x) , ein Geradenbüschel durch A(2,3). Die anderen Geradenbüschel können dem Bildschirmabdruck des y-Editors entnommen werden.

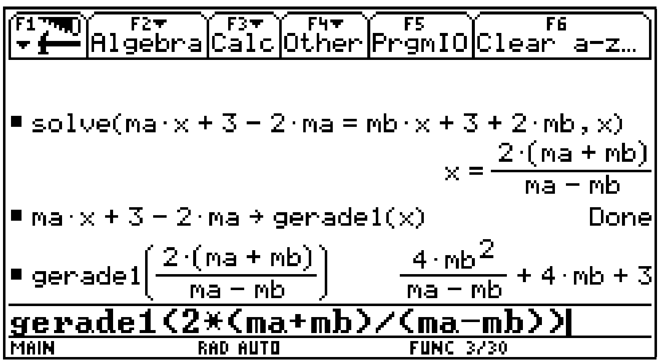
Bringt man nun alle Büschel auf den Bildschirm, so ergibt sich ein eindrucksvolles Panorama, das man allerdings schneller und besser mit einem Funktionenplotter erzeugt, siehe Abbildung.



Die Schüler haben vermutlich schon längst bemerkt, dass ihre Lösungen alle so ähnlich sind. Man kann diskutieren, wie man von einem Geradenbüschel zu einem anderen kommen kann (Spiegelung, Drehung) und ob man vielleicht sogar alle Lösungen zusammenfassen kann und eine allgemeine "Büschelformel" entwerfen kann. Für einen Punkt (a,b) ergibt sich ein "Büschelbaustein"
y-b = m(x-a), also y=mx+(b-am). Eingabe:
mx+(b-am) → busch(x,m,a,b)
Einge Beispielaufrufe diese Bausteins sind:
Busch(x,m,2,3)| m = {-3,-2,-1,-0.5,0, 0.5,1,2,3}
Busch(x,m,-5,1)| m = {-3,-2,-1,-0.5,0, 0.5,1,2,3}

Zu Problem 2

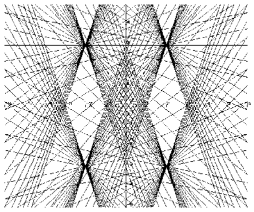
Diese Aufgabe ist nun um Einiges anspruchsvoller und übt Schnittpunktberechnungen an einem komplexen Beispiel. Da alle Schüler die Geradenbüschel entworfen haben, sind die Grundlagen gleich. Eine elegante Bearbeitungsmöglichkeit wird hier am CAS-Bildschirm gezeigt.



$y = m_A{*}x+3-2\ m_A$
$y = m_B{*}x+3+2\ m_B$
Für den Schnittpunkt $S(x_S, y_S)$ ergibt sich:

$x_S = 2(m_A + m_B) / (m_A - m_B)$ und

$y_S = 4\ m_B^2 / (m_A - m_B) + 4\ m_B + 3$



Animation mit einem Funktionenplotter (PLOT 11)