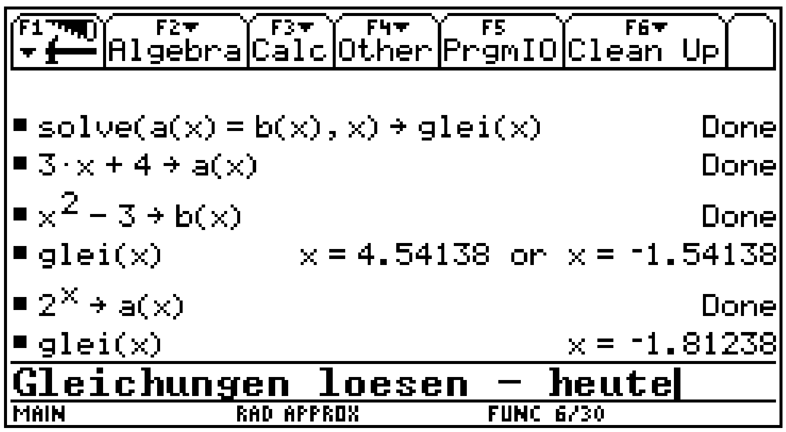
Unterrichtsmaterialien

Gleichungen in der Sekundarstufe 1 mit dem TI-92

Eberhard Lehmann



Herausgegeben von
Wilfried Herget und
Eberhard Lehmann

Schroedel

Eberhard Lehmann: Gleichungen, Neue Materialien für den Mathematikunterricht mit dem TI-83, -89 / -92 in der Sekundarstufe 1, Schroedel-Verlag 2001, Hrsg. Wilfried Herget, Eberhard Lehmann

Inhaltsverzeichnis

Vorwort

Das vorliegende Heft gehört zu der vom Schroedel Schulbuchverlag und von Texas Instruments herausgegebenen Reihe „Mathematikunterricht mit Taschenrechner TI“. Diese Reihe umfasst zurzeit die folgenden Hefttitel:

1. Lineare und quadratische Funktionen
2. Exponential-, Potenz- und Winkel-Funktionen
3. Gleichungen
4. Stochastik

Adressaten

Die Hefte wenden sich zunächst an Lehrerinnen und Lehrer, insbesondere in den didaktisch-methodischen Teilen. Sie können aber auch an Schülerinnen und Schüler ausgegeben werden, da der Text in weiten Teilen für diese formuliert ist und viele **Arbeitsblätter** beigefügt sind.

Es wird in der Regel davon ausgegangen, dass die **grundlegende Bedienung** des verwendeten Taschenrechners vertraut ist. Alle darüber hinaus gehenden Kenntnisse werden jeweils vermittelt, wenn es das Sachgebiet erfordert. Mit jedem der Unterrichtsbeispiele können eigene Unterrichtserfahrungen mit grafikfähigen Taschenrechnern (GTR) – hier TI-83 – und Rechnern mit einem Computeralgebrasystem (CAS) – hier TI-92 und TI-89 – gesammelt werden.

Zum Aufbau der Hefte

Die Hefte enthalten **konkreten Unterricht** in Form von nachvollziehbaren Unterrichtsbeispielen mit unmittelbar verwendbaren **Arbeitsblättern für Schülerinnen und Schüler**.

Die Hefte und die einzelnen Unterrichtsbeispiele sind weitgehend voneinander unabhängig. Kleinere inhaltliche Überschneidungen tragen zu einer Vernetzung von Inhalten bei, so dass gegebenenfalls auch Einheiten aus verschiedenen Heften aneinandergefügt werden können.

Die Unterrichtsbeispiele betreffen ausschließlich **Standardthemen der Sekundarstufe I**, und zwar **unter neuen Aspekten**. Diese Aspekte beziehen sich in erster Linie auf Ansätze zu einer neuen Unterrichts- und Aufgabenkultur sowie auf den Einsatz von grafikfähigen Taschenrechnern und Taschenrechnern mit einem Computeralgebrasystem. Die direkte Programmierung von Rechnern spielt in der Regel keine Rolle und wird nur an wenigen Stellen in Form von sehr kurzen Programmen gezeigt.

Es geht in den Heften um ausgewählte Beispiele für solche Teilthemen, in denen der Einsatz leistungsfähiger Taschenrechner im Unterricht Vorteile bringt. Die vollständige Abarbeitung eines Themenkreises im Sinn eines Lehrplans ist dagegen hier nicht vorgesehen.

Grundlegende **didaktisch-methodische Hinweise** zu dem jeweils behandelten Thema stehen in der Regel am Anfang oder am Ende einer Einheit. Sie sind durch Fettdruck hervorgehoben.

Zum dargestellten Unterricht

Die vorgestellten Beispiele nutzen die Möglichkeiten eines lebendigen Mathematikunterrichts, der u. a. die aus den Ergebnissen der internationalen Vergleichsstudie TIMSS (Third International

Mathematics and Science Study) erwachsenen Forderungen berücksichtigt, zusätzlich aber auch den Einsatz leistungsfähiger Taschenrechner verwirklicht.

In der Regel ist der hier dargestellte Unterricht **thematisch am Schulbuch orientiert.** Es handelt sich dabei um Einführungen, Vertiefungen, Fortsetzungen, besondere Übungsaspekte, Variationsaufgaben, Arbeit mit Parametern usw.

Die **zeitliche Spanne** reicht von ein, zwei Unterrichtsstunden bis hin zu längeren Unterrichtseinheiten von zwei bis drei Wochen.

Der Unterricht ist **problemorientiert** angelegt – mit Anwendungssituationen von außen, aber auch mit innermathematischen Problemstellungen.

Unmittelbar für den Unterricht verwendbar sind die **Arbeitsblätter** als **Kopiervorlagen** für die Schülerinnen und Schüler. Erklärtes Ziel ist es dabei, auch eine **neue Aufgabenkultur** anzusprechen: Offene Aufgabenstellungen, Aufgabenvariation, Aufgaben mit mehreren Lösungswegen, Aufgaben für Partner- und Gruppenarbeit, ...

Veranschaulichungsmöglichkeiten werden in vielfältiger Weise genutzt. Sofern möglich, werden algebraische Lösungen verknüpft mit graphischen Lösungen bzw. Veranschaulichungen und ggf. Tabellen.

Der **Text** ist möglichst schülernah formuliert und berücksichtigt folgende Aspekte in besonderem Maße: Modellbildung, Schilderung von Lösungswegen, Argumentieren, Begründen, Kommentieren, Lösungsvielfalt, Bewerten von Ergebnissen, Bewerten von Modellen.

Die Beiträge streben insgesamt auch eine **neue Unterrichtskultur** an: Mehr Selbsttätigkeit der Schülerinnen und Schüler, Phasen mit Partner- und Gruppenarbeit, Offenheit, Diskussion und vergleichende Bewertung der Lösungswege usw. Verschiedentlich werden auch kleine mathematische **Projekte** angeboten.

Wilfried Herget und Eberhard Lehmann, im Oktober 2000

Vorwort zum Heft „Gleichungen in der Sekundarstufe 1 mit dem TI-92"

Gleichungen spielen bekanntlich im gesamten Mathematikunterricht eine bedeutende Rolle. Die Grundlagen werden in der Sekundarstufe 1 gelegt. Die Auswirkungen des Computereinsatzes auf dieses Gebiet sind besonders groß, weil nun die vielen notwendigen, aber stumpfsinnigen Rechnungen vermieden werden können. Handrechnungen sind nur noch für einfach gestaltete Gleichungen zum Verstehen der grundlegenden Algorithmen sinnvoll. Darüber hinaus ist es insbesondere die Anweisung solve, die die Arbeitsweisen im Gebiet der Gleichungslehre drastisch verändert.
Angesichts der Vielzahl von Gleichungsformen beschränke ich mich hier auf lineare Gleichungen, quadratische Gleichungen und lineare Gleichungssysteme. Expontialgleichungen kommen in dem gebietsübergreifenden Projekt „Marktforschung" zur Geltung (Kapitel 4). Der Anhang ist nicht als Unterrichtseinheit konzipiert: Er beschreibt einige weitere Ideen zur Neugestaltung von Unterricht über Gleichungen und bietet damit Diskussionsstoff.

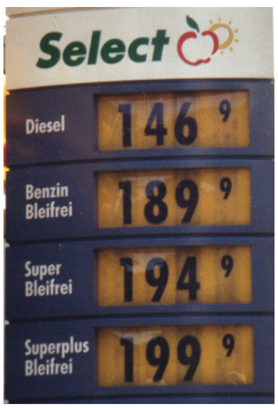
Eine Kurzbeschreibung der sieben Unterrichtseinheiten findet man im Inhaltsverzeichnis.

Eberhard Lehmann, Oktober 2000

1.1 Lineare Gleichungen 1: Benzinkosten

Diese Unterrichtseinheit kann dazu dienen, erstmals in die Benutzung eines Taschencomputers einzuführen. Die fachlichen Inhalte dürften in den Lehrplänen meistens in Klasse 7 angesiedelt sein. Die Idee besteht darin, den Schülerinnen und Schülern an einem Beispiel, das sie vorher von Hand bearbeitet haben, mehrere Bearbeitungsmöglichkeiten mit einem CAS zu zeigen. Dieses Vorgehen hat sich auch in Lehrerfortbildungskursen bewährt, weil es elementar in schon recht breiter Weise in Möglichkeiten des Gleichungslösens mit einem CAS einführt. Damit wird auch der Forderung Rechnung getragen, bei Problemlösungen mehrere Lösungswege zu berücksichtigen.
Wir gehen hier also davon aus, dass die Schülerinnen und Schüler das Einstiegsbeispiel in ihrem Heft ohne Computereinsatz bearbeitet haben – in ähnlicher Weise wie unten angedeutet.

Tanken



Aufgabe:
Herr Lampe macht vor seiner Reise noch eine Inspektion seines Autos an der Tankstelle. Er hat zwar noch viel Benzin im Tank, möchte aber seine preiswerte Tankstelle ausnutzen und den Reservetank volltanken. Heute kostet das Liter Diesel 0.82 Euro. Herr Lampe füllt den Behälter und zahlt einschließlich der für 1.10 Euro erworbenen Tageszeitung 4.79 Euro. Als er zu Hause ankommt, hat er leider die Literanzahl, die er immer in seinen Taschenkalender einträgt, vergessen. – Kannst du helfen?

Lineare Gleichung
$0.82 \cdot x + 1.10 = 4.79$

Lösung: Möglicherweise hast du folgenden Rechenansatz mit einer Gleichung gemacht: $0.82 \cdot x + 1.10 = 4.79$ und dann so gerechnet:

$$\begin{aligned} 0.82 \cdot x + 1.10 &= 4.79 \qquad \mid -1.10 \\ 0.82 \cdot x &= 3.69 \qquad \mid : 0.82 \\ x &= 4.50 \end{aligned}$$

Herr Lampe hat also 4.5 Liter getankt.

Für die Probe musst du 4.5 in die Ausgangsgleichung einsetzen, und es ergibt sich tatsächlich: $0.82 \cdot 4.5 + 1.10 = 4.79$.

Probe: Den gefundenen Wert in die Gleichung einsetzen

Der Computer hilft beim Lösen von Gleichungen

Gleichungen der Form, wie sie oben verwendet wurde, treten häufiger auf. **Gleichungen – auch anderer Form – können meistens mit mehreren Methoden gelöst werden.**
Man kann dazu auch das Computeralgebrasystem und die Grafik eines Taschencomputers benutzen. Die Methoden, die du jetzt kennenlernst, solltest du danach an weiteren Aufgaben üben. Dann wird es immer darauf ankommen,

1) für das Problem einen Ansatz zu finden – hier in Form einer Gleichung,
2) die Gleichung mit dem CAS zu lösen (Rechnung, Grafik),
3) das Ergebnis auszuwerten und zu überprüfen.

Wir werden nun verschiedene Lösungswege für lineare Gleichungen kennenlernen. Damit wir nicht immer mit den gleichen Zahlen arbeiten, werden wir auch andere Probleme, die auf Gleichungen führen, bearbeiten.

Weg 1

Lösen durch Probieren

Eine Gleichung wird durch Probieren gelöst

Aufgabe: Löse das Zahlenrätsel!
Wenn man zu dem 5-Fachen einer Zahl z die Zahl 13 addiert, ergibt sich genauso viel, als wenn man zu dem 4-Fachen dieser Zahl z die Zahl 22 addiert.
Begründe den Ansatz: $5 \cdot z + 13 = 4 \cdot z + 22$. Versuche die Zahl z durch Probieren zu finden.

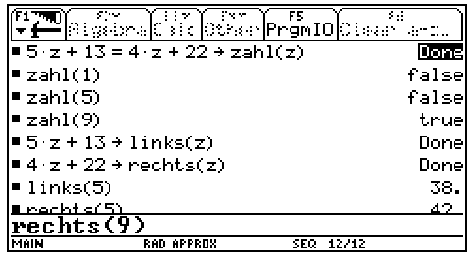


Bild 1

Kommentar: Wir geben die Gleichung $5 \cdot z + 13 = 4 \cdot z + 22$ ein und nennen sie zahl(z). Schließlich suchen wir ja einen passenden Wert für z, der – in die Gleichung eingesetzt – diese zu einer wahren Aussage macht.
Nun geht es los mit dem Probieren: Wir geben z. B. ein

zahl(1), false, offenbar ist 1 keine Lösung.
zahl(5), auch nicht richtig.
zahl(9), Treffer! Setzen wir diesen Wert ein, so ergibt sich auf der linken Seite $5 \cdot 9 + 13 = 58$ und rechts $4 \cdot 9 + 22 = 58$.

Inwiefern können wir nun das Probieren noch verbessern, wenn wir so wie in Bild 2 vorgehen?

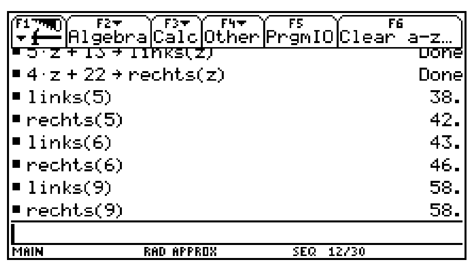


Bild 2

Aufgabe: $3 \cdot x - 0.55 = -4.4 \cdot x + 11$.
Welche Nachteile hat das Probieren?

Weg 2

Lösen durch ausführliches Rechnen

Gleichung lösen durch ausführliche Rechnung

Aufgabe: Löse die Gleichung $3 \cdot x - 0.55 = -4.4 \cdot x + 11$. Die Grundmenge, aus der das x stammen darf, sei die Menge Q der rationalen Zahlen.

Lösung: Du weißt, wie das von Hand geht! Kommentiere nun die Lösung auf dem Bildschirm, Bild 3.

Die Handrechnung wird am Computer nachgemacht!

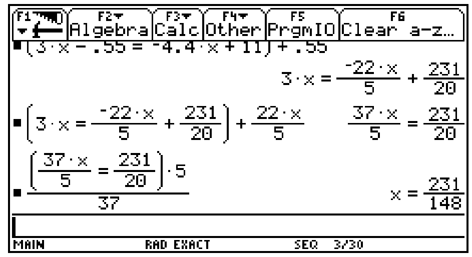


Bild 3

Kommentar: Wir geben wieder die Gleichung ein, setzen jedoch jetzt Klammern darum, um sie als ein Objekt zu kennzeichnen. Nun wird auf beiden Seiten 0.55 addiert. Die Einstellung des CAS ist hierbei so gewählt, dass mit Brüchen, also genau gerechnet wird. Das geht mit MODE, F2, Exact/Approx, Exact.

Aufgabe: Probiere mit diesem Verfahren, ob 231/148 tatsächlich eine Lösung ist.

Weg 3

Schnell Rechnen

Mit dem CAS ganz schnell rechnen

Das CAS hat einen Befehl, mit dem man Gleichungen lösen kann, ohne sich Gedanken über den Lösungsweg machen zu müssen. Wir sollten diesen Befehl aber erst dann einsetzen, nachdem wir den Lösungsweg an einfachen Beispielen selbst durchgeführt und durchschaut haben.

Aufgabe: Ein Lottogewinn
Petra und Paul haben 3600 DM im Lotto gewonnen. 300 DM wollen sie an Greenpeace spenden. Da Petra beim Tippen doppelt so viel eingezahlt hat wie Paul, teilen sie den nach der Spende verbleibenden Rest entsprechend unter sich auf.

Lösung: Den Ansatz für diese Aufgabe erkennst du in Bild 4 und dort ist auch der Weg für die Lösung durch das CAS notiert.

SOLVE

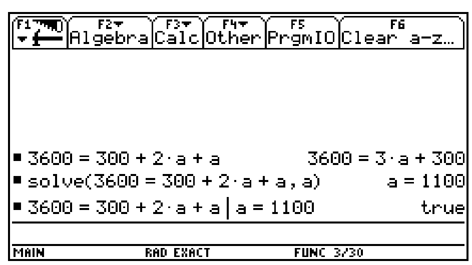


Bild 4

1) Welche Überlegungen haben zur Aufstellung der Gleichung geführt?
2) Wieso hat das CAS aus der Eingabe die neue Gleichung 3600 = 3·a + 300 gemacht?
3) Was muss bei SOLVE eingegeben werden?
4) Die letzte Zeile ist eine andere Form der Probe – erkläre!
5) Wie viel erhalten Petra und Paul?

Weg 4

Graphische Lösung

Näherungsweise Lösung

Eine Gleichung graphisch lösen

Aufgabe: Zum Erlernen dieses Verfahrens ist die Gleichung des Beispiels "Tanken" gut geeignet: 0.82 * x + 1.10 = 4.79.

Die linke Seite 0.82x + 1.10 wird unter dem Namen y1(x) gespeichert, entsprechend wird mit der rechten Seite verfahren. Wir benutzen dazu den "y-Editor" des TI-92.

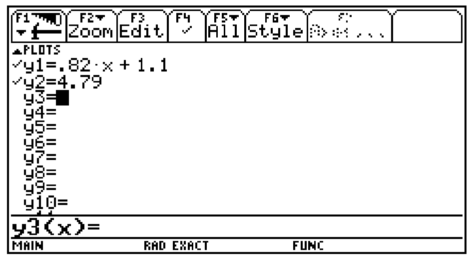


Bild 5

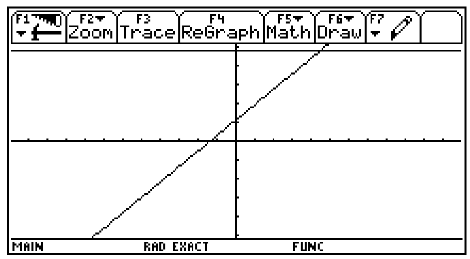


Bild 6

Wir erhalten für y1(x) eine schräge Gerade, für y2(x) ist die Gerade parallel zur x-Achse. Drückt man in der Situation von Bild 6 auf die Cursortaste des Rechners, so erscheint der Cursor auf dem Bildschirm, und wir können mit Hilfe der Cursortaste zum Schnittpunkt der beiden Geraden wandern. Dort lesen wir ab:
x = 4.5 (und y = 4.79).

Aufgabe: Warum geht es um den Schnittpunkt der beiden Geraden?
Das Ablesen des Schnittpunktes kann hier nur näherungsweise erfolgen. Das CAS kennt aber ein noch besseres Verfahren! Der Lösungsweg wird hier für das CAS des TI-92 beschrieben. Vollziehe ihn nach!

Mit "Intersection"

Intersection (Schnittpunkt)

Nachdem Bild 6 erstellt ist, geht man so vor

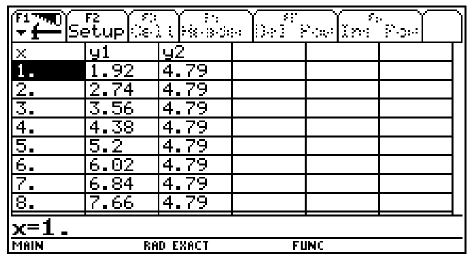
1) Drücke auf die Cursortaste – der Cursor erscheint
2) Drücke F5 und danach 5: Intersection (Schnittpunkt)
3) Du liest: 1stCurve; gehe mit dem Cursor auf die 1. Gerade, Enter
4) Du liest: 2ndCurve; gehe mit dem Cursor auf die 2. Gerade, Enter
5) Du liest: Lower Bound; gehe mit dem Cursor auf eine Stelle links vom Schnittpunkt, Enter
6) Du liest: Upper Bound; gehe mit dem Cursor auf eine Stelle links vom Schnittpunkt, Enter
7) Nun kannst du den Schnittpunkt ablesen!

Weg 5

Ablesen aus der Wertetabelle

Lösungen aus der Wertetabelle ablesen

Wenn der Taschenrechner eine Zeichnung erstellt, muss er genauso eine Wertetabelle erstellen, wie du es im Heft tun würdest. Diese Wertetabelle kann man sich beim TI-92 mit den Befehlen ◊ TABLE (über dem "y") ansehen
Für das obige Beispiel $0.82 \cdot x + 1.10 = 4.79$, also
$y1(x) = 0.82 \cdot x + 1.10$ und $y2(x) = 4.79$,
sieht die Tabelle so aus:



x	y1	y2
1.	1.92	4.79
2.	2.74	4.79
3.	3.56	4.79
4.	4.38	4.79
5.	5.2	4.79
6.	6.02	4.79
7.	6.84	4.79
8.	7.66	4.79

Bild 7

Vergleicht man die Werte unter y1 und y2, so erkennt man, dass sie vielleicht gleich sind zwischen x=4 und x=5. Also verfeinern wir die Wertetabelle für dieses Intervall. Wähle dazu ◊ Tblset.

Wertetabellen werden in der Mathematik für viele Aufgabenarten benötigt.

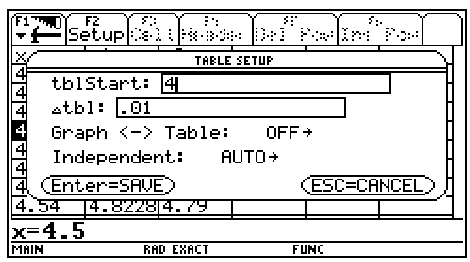
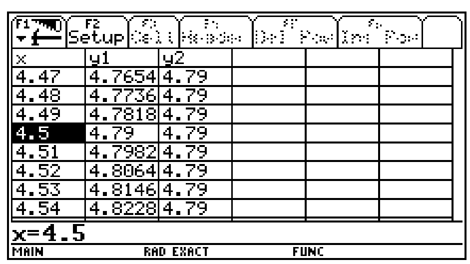


Bild 8

Wir rufen wieder die Wertetabelle auf und tasten uns langsam an den x-Wert heran, für den y1 = y2. Das ist bei x=4.5 der Fall.



x	y1	y2
4.47	4.7654	4.79
4.48	4.7736	4.79
4.49	4.7818	4.79
4.5	4.79	4.79
4.51	4.7982	4.79
4.52	4.8064	4.79
4.53	4.8146	4.79
4.54	4.8228	4.79

Bild 9

Zur Lösung von Gleichungen können viele Verfahren verwendet werden!

Du hast jetzt viele Verfahren zur Lösung linearer Gleichungen mit einem CAS kennengelernt. Einige davon sind auch für grafische Taschenrechner wie den TI-83 geeignet.
Merke: Bei anderen Gleichungsformen kann man stets so ähnlich vorgehen!

Für das folgende Arbeitsblatt kannst du die verschiedenen Verfahren anwenden.

Lineare Gleichungen – verschiedene Anwendungen Arbeitsblatt 1.1.1

Dieses Arbeitsblatt kann verwendet werden, um verschiedene CAS-Methoden zur Lösung linearer Gleichungen miteinander zu kombinieren. Auch kann z. B. eine Aufgabe von verschiedenen Gruppen mit je einer Lösungsmethode bearbeitet und dann vorgetragen werden. Unten sind alle Lösungen mit dem SOLVE-Befehl ermittelt worden.

Anweisung für die folgenden Aufgaben:
Bevor du das CAS einsetzt, musst du erst die Gleichung finden. Das kannst du mit den folgenden Aufgaben üben. – Benutze dann verschiedene Wege zur Aufgabenlösung. Achte darauf, dass sich die Ergebnisse gegenseitig bestätigen.
Weg 1: Lösen durch Probieren
Weg 2: Ausführlich rechnen mit Zwischenschritten
Weg 3: Schnell rechnen mit SOLVE
Weg 4: Graphische Lösung
Weg 5: Ablesen aus der Wertetabelle

Aufgabe 1 – Drei aufeinander folgende Zahlen
Suche drei aufeinanderfolgende natürliche Zahlen, die die Summe 336 (337) haben.

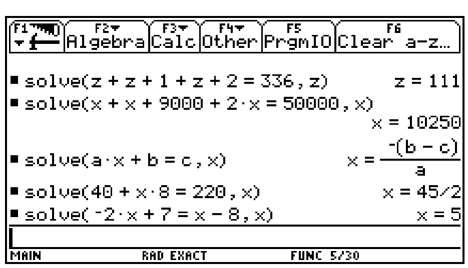
Aufgabe 2 – Erbschaft
Eine Erbschaft von 50000 Euro muss so aufgeteilt werden, dass Person A 9000 Euro weniger erhält als Person B. Person C muss doppelt so viel erhalten wie Person A. – Berechne die Anteile mit Hilfe einer Gleichung. Benutze eine geeignete Gleichungsvariable x.

Aufgabe 3 – die Gleichung a·x + b = c
Löse die allgemeine Gleichung $a \cdot x + b = c$ mit dem SOLVE-Befehl des CAS nach x auf. Dabei seien a, b, c und x rationale Zahlen. Überlege, ob die vom CAS angegebene Lösung tatsächlich für alle Werte der Variablen gilt.

Aufgabe 4 – Swimming-Pool
Das Schwimmbecken einer Badeanstalt soll auf 2.20 m Wassertiefe aufgefüllt werden. Die gegenwärtige Wassertiefe beträgt 40 cm. Pro Stunde kann durch die Leitung soviel zugeleitet werden, dass sich der Wasserspiegel um 8 cm anhebt. – Wie lange dauert das Auffüllen des Beckens?
Lösung: Erläutere den CAS-Befehl solve(40+x*8 = 220,x)

Aufgabe 5 – Gleichungen mit vorgegebener Lösung
Notiere einige lineare Gleichungen der Form $a \cdot x + b = c \cdot x + d$, die alle die Lösung x=5 haben. Löse dann die Aufgaben grafisch. Hinweis: Wähle die Aufgaben so, dass man die Terme im Koordinatensystem leicht darstellen kann. – Beispiel: $-2 \cdot x + 7 = x - 8$.

Lösungen
mit solve



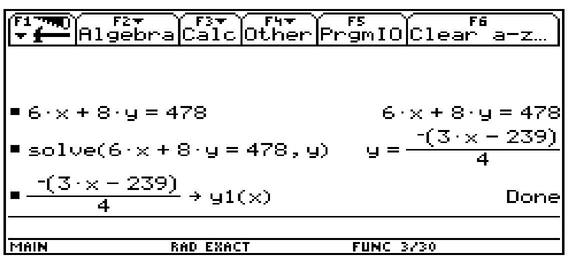
Lineare Gleichungen – Im Jazz-Club Arbeitsblatt 1.1.2

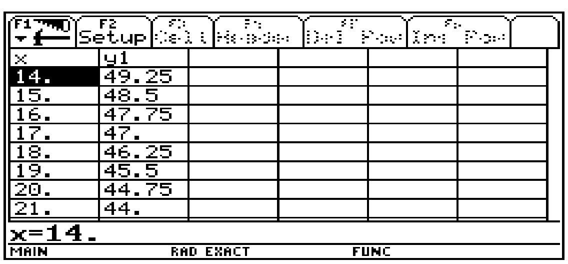
Dieses Arbeitsblatt bringt eine schwierigere Aufgabe, da die oben genannten Methoden zur Lösung linearer Gleichungen aufgrund der Benutzung zweier Variablen übertragen werden müssen.

Aufgabe

Der Eintritt zu einem Jazzkonzert im J-Flat Club kostet für Studierende 6 Euro, sonst 8 Euro. Bei der Abrechnung zeigt sich, dass insgesamt 478 Euro eingenommen wurden. Wie viel Karten wurden verkauft?

Lösung mit dem CAS





Ausblick: Wie ändert sich die Problematik, wenn bekannt ist, dass

a) 21 Karten für Studierende,
b) insgesamt 65 Karten

verkauft wurden?

Ergänze die Lösungskommentare!

Probieren

Begründe den Ansatz! Was bedeuten x und y? Warum werden hier zwei Variable benötigt?

Was bedeutet die Eingabe karten(17,47)?

Etwas systematischer arbeiten

y1 entspricht dem obigen y und musste nur für die folgende Tabelle so bezeichnet werden.

Wir haben also eine (x,y)-Tabelle vor uns. Was sagt z. B. das Paar x = 21, y = 44 aus?

Blättere weiter in dieser Tabelle – nach oben und nach unten. Was fällt alles auf?

Zusammenfassung:

Offenbar hat die Aufgabe mehrere Lösungen. Wie viele sind es?

1.2 Lineare Gleichungen 2: Magische Quadrate

Magische Quadrate können in verschiedenen Klassenstufen eingesetzt werden, um mathematische Kenntnisse zu erwerben oder zu vertiefen. Für die Schüler/innen haben sie sich immer wieder als sehr motivierend erwiesen. Die reichhaltigen Probleme eignen sich gut für den Einsatz des Computers, besonders wenn es um das Entdecken, Vermuten und Erforschen geht. Auch kompliziertere Rechnungen können nun mit CAS leicht durchgeführt werden, was das Eindringen in die Welt der magischen Quadrate stark erleichtert.
Gleichungen und Gleichungssysteme können bei verschiedenen Situationen eingesetzt werden und treten in manchmal ungewohntem Gewand auf. Dieser Aspekt wird hier im Vordergrund stehen. Die Unterrichtseinheit wird sich auf Fragestellungen für die Sekundarstufe 1 beschränken.

6	1	8
7	5	3
2	9	4

Was ist an diesem Zahlenquadrat magisch?

Es ist sehr spannend, sich im Internet über "magic squares" zu zu informieren. Versuche es!

Magische Quadrate haben die Eigenschaft, für die Summen der Zahlen jeder Zeile, jeder Spalte und jeder Diagonalen den gleichen Wert ergeben. Bei dem nebenstehenden Quadrat ist es die Summe 15.

Viele Fragen ergeben sich:

- Gibt es weitere magische Quadrate mit der magischen Summe s = 15?
- Wie findet man magische Quadrate mit anderen Summen?
- Gibt es auch magische Quadrate der Ordnung 4, d. h mit 4 x 4 Elementen?

Hinweis: Man kann auch magische Quadrate bilden, in denen eine Zahl mehrfach vorkommt oder in denen sogar negative Zahlen auftreten.

Aufgabe 1
Im Internet findet sich unter der URL
http://www.pse.che.tohoku.ac.jp/~msuzuki/magicsquare.algebraform.html
(1999) u. a. der folgende Text:
3 x 3 square

a	*b*	*c*
d	*e*	*f*
g	*h*	*i*

"Let h and i be the independent variables, then the algebraic for the magic square becomes

10–i	*10–h*	*–5+h+i*
–10+h+2i	*5*	*20–h–2i*
15–h–i	*h*	*i*

Damit wird eine Formel angeboten, mit der man magische Quadrate erzeugen kann.

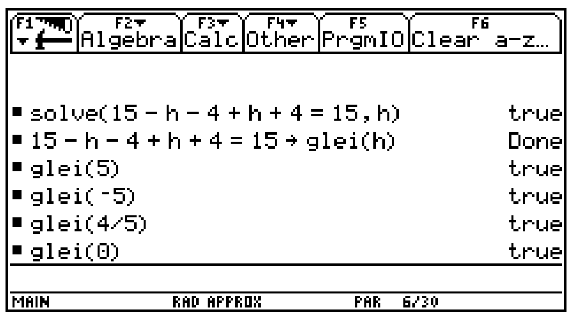
- Welche magische Summe haben diese Quadrate? Überprüfe alle Wege.
- Setze h = 9 und i = 4 ein. Das magische Quadrat kennst du schon!
- Kann man für i = 4 noch andere magische Quadrate gewinnen?

Eine Gleichung mit unendlich vielen Lösungen

Lösung zur letzten Frage:
Aus der letzten Zeile lesen wir für i = 4 die folgende Gleichung ab:
(15 – h – 4) + h + 4 = 15, also 15 – h + h = 15, also 15 = 15.
Wir können also für h einsetzen, was wir wollen. Für i = 4 liefert jedes h ein magisches Quadrat. Auch bei den anderen Gleichungen ist das so.

Aufgabe 2
Erläutere das folgende CAS-Bild!

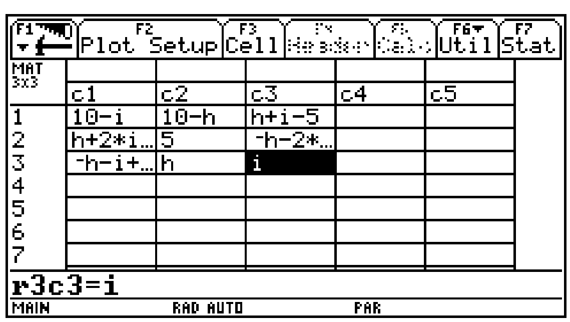
Was sagt uns das CAS bei solchen Gleichungen?

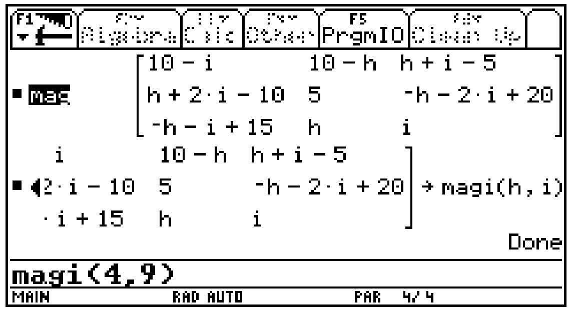


Die folgende Aufgabe 3 berechnet das magische Quadrat für einige Werte von h und i. Gleichzeitig lernen wir, wie man eine Matrix (das ist ein rechteckiges Zahlenschema) in das CAS eingibt und wie man mit ihr arbeiten kann.

Aufgabe 3
Kommentiere die folgenden TI-92-Bilder ausführlicher:
Wir geben zunächst ein: APPS, Dat/Matrix Editor, New, dann bei Type Matrix, Variable Mag, Row dimension 3, Col dimension 3, danach werden die Werte in die Tabelle eingetragen.

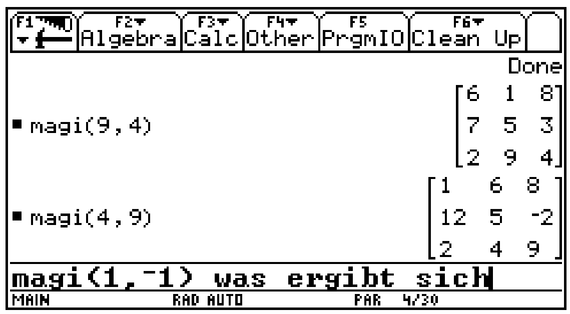
Eingabe einer Matrix im Matrix-Editor des TI-92





Der Baustein magi(h,i) erzeugt magische Quadrate!

Die Matrix wird zur Kontrolle ausgegeben und dann unter dem Namen magi(h, i) gespeichert. Der Baustein magi(h, i) enthält die beiden Parameter h und i. Ruft man nun diesen Baustein auf, indem man für h und i Werte einsetzt, so erhält man die zugehörigen magischen Quadrate.



Wir kennen uns nun schon etwas mit der Formel von Aufgabe 1 aus. Aber:

Wie kommt es zu der Formel von Aufgabe 1?
Hierzu zunächst noch ein Auszug aus dem oben genannten Internet-Dokument:

"Magic Square of Squares

It's an open question whether there exists a 3x3 magic square comprised entirely of square integers. Martin Gardner has even offered \$100 for the first such square (or, I suppose, a proof that no such square exists). Before considering the possibility of such a square, it's worthwhile to review some basic facts about arbitrary 3x3 magic squares, defined as an array of numbers

$$\begin{matrix} A & B & C \\ D & E & F \\ G & H & I \end{matrix}$$

such that each row, column, and main diagonal has the same sum S."

Nun wird zunächst gezeigt, dass das Element E in der Mitte gleich 1/3 der Summe S ist.

Wir arbeiten mit 8 Gleichungen und 9 Variablen!!!

Hierzu stellen wir die acht möglichen Gleichungen auf.

A+B+C = S	**D+E+F = S**	G+H+I = S	**A+E+I = S**
A+D+G = S	**B+E+H = S**	C+F+I = S	**C+E+G = S**

Nun werden alle Gleichungen, die E enthalten, addiert, und die Terme werden geschickt zusammengefasst (bitte nachrechnen!) – auf diese Idee kommt das CAS nicht!

$$
\begin{aligned}
(A+B+C) + (D+E+F) + (G+H+I) + 3E &= 4S \\
S \quad + \quad S \quad + \quad S \quad + 3E &= 4S \\
3S + 3E &= 4S \\
E &= S / 3
\end{aligned}
$$

Damit wissen wir, dass das mittlere Element gerade ein Drittel der gewählten Summe sein muss. Zum Beispiel ist für die Summe S = 15 das mittlere Element E = 5. Die Lage ist also zur Zeit so:

A	B	C
D	**5**	F
G	H	I

Nun wählen wir gemäß des obigen (h, i)-Quadrates H und I als Variable und können die anderen Elemente mit H und I ausdrücken. Da die magische Summe S = 15 ist, gilt:

A = 15 – 5 – I = 10 – I (Hauptdiagonalen)
G = 15 – H – I (letzte Zeile)
B = 15 – 5 – H = 10 – H. (zweite Spalte)

Mit diesen Werten können nun auch C, D und F leicht bestimmt werden, so dass sich schließlich ergibt:

10–I	10–H	–5+H+I
–10+H+2I	5	20–H–2I
15–H–I	H	I

Wählt man z. B. H = 4 und I = 7, so ergibt sich als magisches Quadrat:

3	6	6
8	5	2
4	4	7

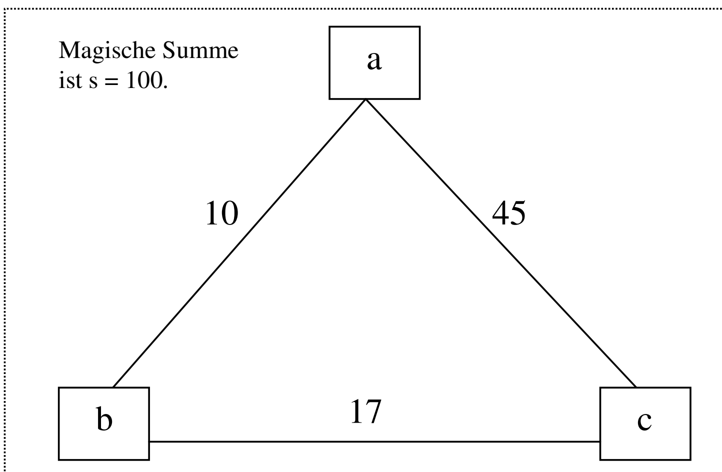
Magische Quadrate und magische Dreiecke — Arbeitsblatt 1.2.1

Aufgabe 1
Oben wurde für das mittlere Element E eines magischen (3,3)-Quadrats gezeigt E = S/3.
Nun sollen (statt H und I wie oben) die Elemente A und C als *freie Variable* gewählt werden.
Zeige, dass sich dann die magischen Quadrate in der folgenden Form ergeben.

A	S-A-C	C
S/3-A+C	S/3	S/3+A-C
2S/3-C	-S/3+A+C	2S/3-A

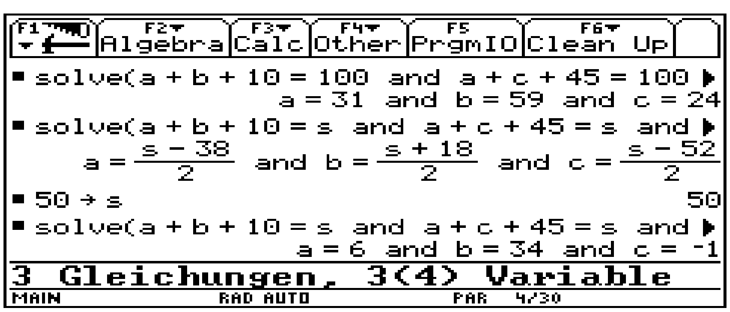
Aufgabe 2
a) Welche magischen Quadrate erhält man für S = 21, A = 1 und B = 2?
b) Definiere einen passenden Baustein am TI-92 für das magische Quadrat von Aufgabe 1 und löse dann Aufgabe 2a mit dem CAS.

Aufgabe 3
Konstruiere ein magisches Dreieck mit der magischen Summe S = 100 und den unten angegebenen Werten. Kommentiere dazu den TI-92-Lösungsweg. Errechne dann die Dreiecke für S = 90 (80, 70, 101(?)).



Zuletzt könntest du auch das Problem abwandeln, indem du andere Zahlen statt 10, 17 und 45 wählst. Wird es mit 10, 10, 10 leichter?

Du könntest dir auch andere Figuren mit ähnlichen Aufgaben ausdenken!



Warum wurden gerade diese Eingaben durchgeführt? Deute die Ergebnisse. Versuche die erste Gleichungseingabe durch Handrechnung zu bearbeiten.

Magische Quadrate und magische Rauten — Arbeitsblatt 1.2.2

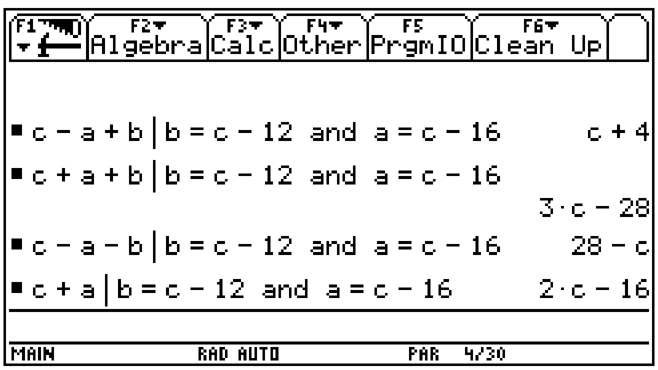
Aufgabe 1

Im Internet werden noch andere Formeln für magische (3, 3)-Quadrate angegeben, u. a. auch diese:

C-B	C+A+B	C-A
C-A+B	C	C+A-B
C+A	C-A-B	C+B

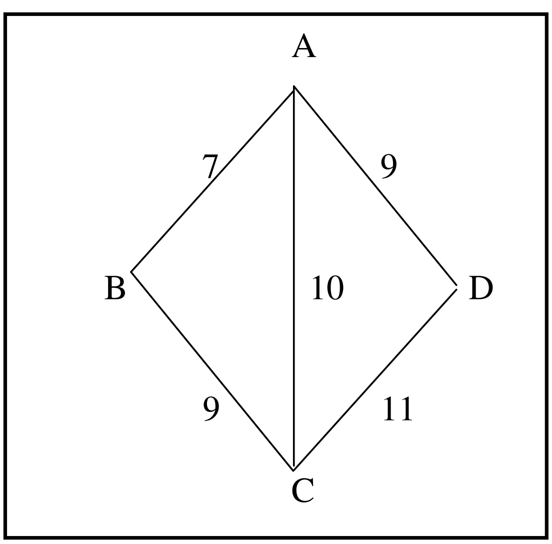
Wie groß sind A, B und C, wenn man die Elemente links oben und rechts oben kennt, wie es bei dem folgenden Quadrat der Fall ist? Beachte auch das CAS-Bild.

12	C+A+B	16
C-A+B	C	C+A-B
C+A	C-A-B	C+B



Aufgabe 2

Von der folgenden magischen Raute kennt man die Summe S längs der einzelnen Strecken. Sie beträgt S = 28. Wie groß sind A, B, C und D?



Lösungstipps:

1) A+7+B = 28, also B = –A+21
   C =
   D = –A+19

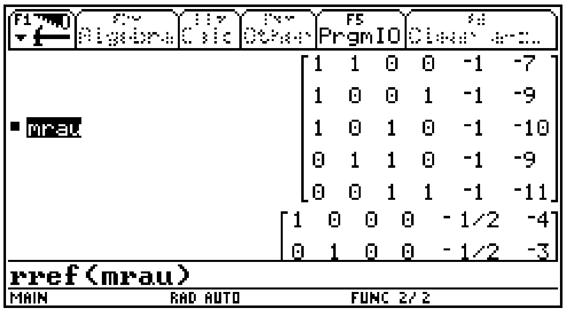
2) Eingesetzt in B+9+C = 28.

   Das ergibt A =

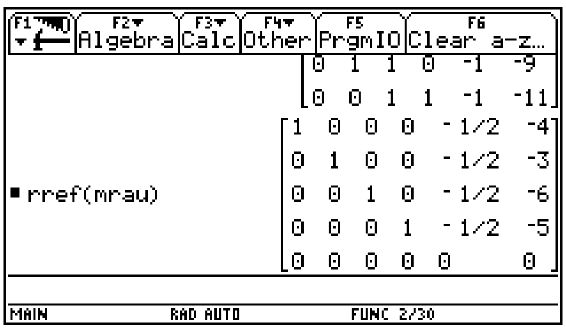
   Usw.

Ausblick

Das Rechnen in den magischen Figuren kann selbstverständlich auch mit linearen Gleichungssystemen erfolgen – wegen der Größe der Systeme eine Sache für die Sekundarstufe 2. Beim TI-92 kann man zum Beispiel für Aufgabe 2 auf Arbeitsblatt 1.2.2 so vorgehen (hier wird gleich allgemein mit der Summe S gerechnet):



Eingabe des Gleichungssystems
A + B – S = –7
A + D – S = –9
A + C – S = –10 usw.
Die erweiterte Koeffizientenmatrix wird als "mrau" (magische Rautr) definiert.
Der Befehl rref(mrau) bearbeitet die Matrix mit dem Gauß-Algorithmus.



Auswertung
Das vereinfachte LGS ist
A = 0.5 S – 4
B = 0.5 S – 3
C = 0.5 S – 6
D = 0.5 S – 5
Das LGS hat unendlich viele Lösungen in Abhängigkeit von dem gewählten S..

Für den Wert S = 28 von Arbeitsblatt 2 ergeben sich damit die Lösung
A = 10, B = 11, C = 8, D = 9.

In ähnlicher Weise können auch andere magische Quadrate bearbeitet werden. Wie in den vorhergehenden Aufgaben verdeutlicht wurde, gibt es diverse Varianten der Aufgabenstellungen. Das Internet stellt unter dem Stichwort "magic squares" zahlreiche weitere Informationen über magische Figuren zur Verfügung. Bezüglich des Unterrichts in der Sekundarstufe 2 sei auch auf Vektorraum-Eigenschaften von magischen Quadraten hingewiesen.

2.1 Quadratische Gleichungen 1: Kreispunkte

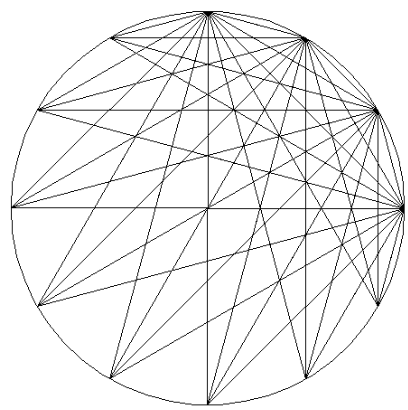
Für eine Unterrichtseinheit über quadratische Gleichungen gibt es zahlreiche interessante Einführungsprobleme. Es können Anwendungsprobleme oder auch innermathematische Probleme sein. Man sollte für den Einstieg solche Probleme auswählen, die in irgendeiner Form "weiterführend" sind, also zu zusätzlichen Fragestellungen anregen. In der folgenden Darstellung wird außerdem noch der Aspekt eines wirkungsvollen Computereinsatzes berücksichtigt. So ist das Beispiel 1 schon in der Herstellung der Abbildung ein Problem der Computergrafik. Beispiel 2 ruft nach Verallgemeinerungen, etwa wenn man auch andere Antennenmasthöhen zulässt.

Verbindungsstrecken zwischen Kreispunkten

Beispiel 1
Wie viel Verbindungsstrecken ?

Zeichne die Figur von Hand!

Falls du ein geeignetes Programm hast: Stelle die Figur vollständig her!



Eine Aufgabenformulierung zu der obigen Figur (dort sind nicht alle Verbindung gezogen) könnte so lauten:
Auf der Peripherie eines Kreises liegen gleichmäßig verteilt zwölf Punkte. Je zwei werden miteinander verbunden. Wie viel Verbindungsstrecken gibt es?

Lösung

Lösung: $(12 \cdot 11) / 2$. Begründe diesen Ansatz!
Vielleicht findet ihr auch den Ansatz $11+10+9+8+...+1$.

Und nun für n Punkte

Aufgabenerweiterung 1:
Nun sollen n Punkte auf dem Kreis verteilt werden. Wie viel Strecken sind es?

Lösung: $n \cdot (n-1) / 2$. Begründe den Ansatz!

276 Strecken,
wie viel Punkte?

Aufgabenerweiterung 2:
Paula hat in einer anderen Zeichnung zur gleichen Problematik 276 Strecken gezählt. Falls sie richtig gezählt hat – wie viel Punkte müssten auf dem Kreis liegen?

Lösungsansatz:

$$\begin{aligned} n \cdot (n-1) \cdot 0.5 &= 276 \\ 0.5n^2 - 0.5n &= 276 \\ n^2 - n - 552 &= 0 \end{aligned}$$

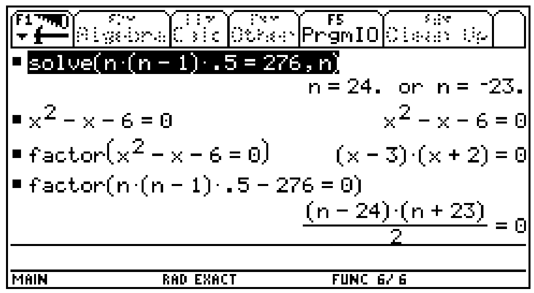
Wie löst man quadratische Gleichungen?

Die Gleichung $n^2 - n - 552 = 0$ ist eine so genannte quadratische Gleichung, weil die Variable n quadratisch auftritt. Derartige Gleichungen sind nicht so leicht zu lösen wie lineare Gleichungen. So würde uns zum Beispiel die Lösung von $2n+6 = 80$ keine Probleme machen.

Wieder einmal solve

SOLVE

Nun haben wir uns schon öfter auf unser CAS verlassen, mit solve konnten wir so manche Gleichung lösen. Wie wir an der folgenden Abbildung sehen, klappt das auch hier. Aber wie macht der Rechner das und geht das auch von Hand? An dem auf die Abbildung folgenden Text kannst du dich mit dieser Problematik beschäftigen.



Die quadratische Gleichung $x^2 - x - 6 = 0$ wird weiter unten bearbeitet.

Lösung für Petras Aufgabe

Die Anwendung von solve auf unsere Gleichung liefert zwei Ergebnisse. Beide erfüllen die Gleichung $n \cdot (n-1) \cdot 0.5 = 276$ (Probe machen!), doch offenbar ist nur der Wert n = 24 für unser Problem brauchbar. Es waren also bei Petras Zählung 24 Punkte, die zu den 276 Verbindungen führten.

$x^2 - x - 6 = (x-3) \cdot (x+2)$
Zerlegen in "Linearfaktoren"

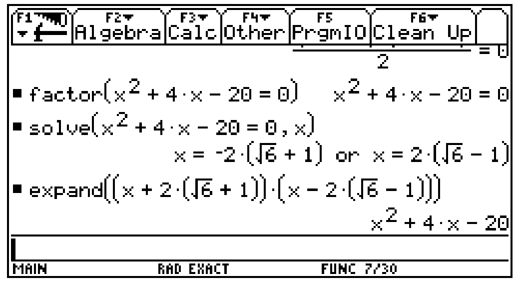
Linearfaktoren

Da man lineare Gleichungen leicht lösen kann (siehe oben), versuchen wir einfach solche quadratischen Terme, mit denen wir es zu tun haben, zu "linearisieren". Wir probieren das am Beispiel $x^2 - x - 6$. Da können wir das Ergebnis schon im Kopf ermitteln. Der Befehl factor(x^2–x–6=0) führt tatsächlich zu zwei sogenannten "Linearfaktoren", nämlich $(x-3)$ und $(x+2)$, siehe obiges Bild. Und nun kann für die Lösungen so argumentiert werden:
$(x-3) \cdot (x+2) = 0$. Wenn $A \cdot B = 0$, so kann entweder nur A=0 sein, nur B=0 sein oder A und B sind beide gleich 0. Also hier:
$(x-3) = 0 \rightarrow x = 3$ oder $(x+2) = 0$, also $x = -2$.
Wie das Bild auch noch zeigt, kann das CAS mit factor auch die Gleichung $n \cdot (n-1) \cdot 0.5 = 276$ linearisieren. Aus dem Ergebnis $(n-24) \cdot (n+23) / 2 = 0$ kann man für $n = 24$ oder $n = -23$ ablesen.

Wenn es gelingt, die quadratische Gleichung in Linearfaktoren zu zerlegen, kann man die Lösungen sofort ablesen.

Erproben wir die Zerlegung ein weiteres Mal, nun z. B. mit dem Term $x^2 + 4x - 20$. Wieder soll uns das CAS helfen.

factor schafft die Zerlegung nicht!



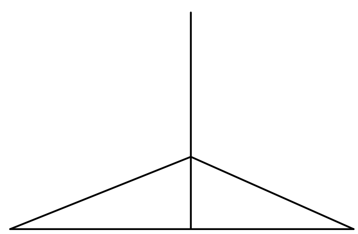
Enttäuscht? factor packt es nicht! Aber mit solve können wir die Gleichung lösen und erhalten (siehe Bildschirm)
$x_1 = -2\cdot(\sqrt{6} + 1)$ und $x_2 = 2\cdot(\sqrt{6} - 1)$.
Möglicherweise liegt das Scheitern der Zerlegung in dem Vorhandensein von Wurzeln in den Lösungen. Wenn wir den umgekehrten Weg gehen, also von den Lösungen ausgehend die Linearfaktoren aufbauen:
$(x - (-2\cdot(\sqrt{6} + 1)) \cdot (x - 2\cdot(\sqrt{6} - 1))$, so ergibt sich tatsächlich wieder die quadratische Gleichung $x^2 + 4x - 20 = 0$.

Es bleibt also dabei:
Bei der Lösung einer quadratischen Gleichung kommt es auf das Finden der Linearfaktoren an.

Beispiel 2
Antennenmast

Seillängen an einem Antennenmast

Ein 6 m hoher Antennenmast soll in einer Höhe von 1.80 m durch Abspannseile gesichert werden. Diese werden im Abstand von 4 m im Boden verankert. Wie lang sind die Seile?



Beschrifte die Zeichnung mit den genannten Maßen und erläutere den folgenden Ansatz:
$4^2 + 1.8^2 = x^2$ oder $x^2 + 0*x - 19.24 = 0$.

Lösung

Was ergibt factor(x^2–19.24 = 0) ? Mit solve(x^2–19.24 = 0,x) oder mit der Wurzeltaste ergibt sich x = 4.38634, x = –4.38634. Länge der beiden Abspannseile?

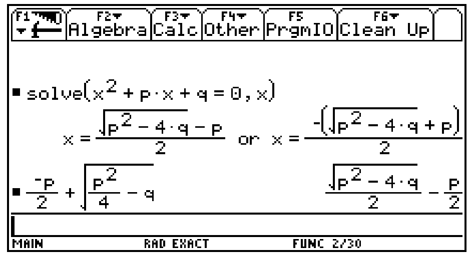
Allgemeine Lösung einer quadratischen Gleichung

Die (p,q)-Formel

Da quadratische Gleichungen bei vielen Anwendungen, auch in der Sekundarstufe 2, immer wieder vorkommen, lohnt sich die Entwicklung einer Formel. Sie ist bekannt unter dem Namen (p,q)-Formel, weil sie quadratische Gleichungen der "Normalform" $x^2 + p\cdot x + q = 0$ bearbeitet. Diese Formel ist natürlich auch dem CAS bekannt.

Befragen wir unseren Computer!

Dazu geben wir ein: solve(x^2+p*x+q=0,x)



Die (p,q)-Formel

Das CAS gibt uns also zwei Lösungen aus.

$x_1 = \frac{(\sqrt{p^2-4q}-p)}{2} \qquad x_2 = -\frac{(\sqrt{p^2-4q}-p)}{2}$

In Formelsammlungen findet man für die beiden Lösungen zuweilen auch andere Terme angegeben. Einer dieser Terme wurde in das CAS eingegeben (siehe Bild oben). Das Umformungsergebnis entspricht (fast) unserer Formel.

Formel erproben

Aufgabe:
Wir haben bei den Aufgaben "Verbindungsstrecken" und "Antennenmast" die beiden quadratischen Gleichungen
1) $n^2 – n – 552 \quad = 0$
2) $x^2 – 33.64 \quad = 0$
gewonnen. Löse diese nun noch einmal mit der (p,q)-Formel.
Beachte bei 1): p = –1, q = –552, bei 2) p = 0, q = –33.64.

Wie ist das hier?

Aufgabe:
Oben wurde die p,q-Formel mit den Ergebnissen für x_1 und x_2 entwickelt. Berechne mit Hilfe des Computers die Terme x_1+x_2 und $x_1 \cdot x_2$. Was fällt auf? Bilde die Terme auch mit Handrechnung.

Rückblick auf die Unterrichtseinheit und Ausblick:

Die ersten Beispiele für quadratische Gleichungen sollten deren Bedeutung in Anwendungsproblemen erkennen lassen. Diese Beispiele sollten zudem eine leichte Kontrolle der Ergebnisse ermöglichen.

Die hier angebotene Einführung geht davon aus, dass die Schüler den Befehl solve bereits kennen. Der frühzeitige Einsatz dieser Anweisung, die die Lösungen quadratischer Gleichungen quasi über eine *black-box* ermittelt (allerdings immer mit der Möglichkeit der Ergebniskontrolle), bedarf anschließend einer vertiefenden Betrachtung. Für diese sind die Linearfaktoren A und B mit A*B=0 geeignet, die auch längerfristig im Unterricht von Bedeutung sind. Mit dem Ansatz über Linearfaktoren kann man auch die Formeln auf ihre Richtigkeit überprüfen, siehe Arbeitsblatt. Der Aspekt der Visualisierung quadratischer Gleichungen im Koordinatensystem wurde in dieser Unterrichtseinheit nicht verfolgt, da die Aufgaben dafür nicht so geeignet sind. Beide Aufgaben eignen sich jedoch gut zu Erweiterungen mit zusätzlichen Fragestellungen (Methode der Aufgabenvariation). Hiervon wird in den folgenden Arbeitsbögen ausgiebig Gebrauch gemacht. Visualisiert wird beim zweiten Einführungsvorschlag.

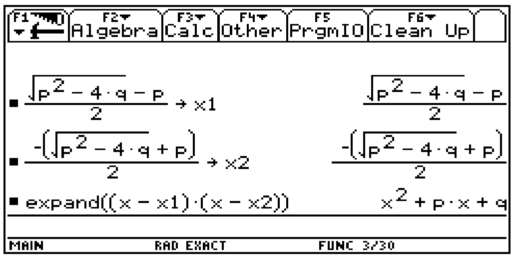
Quadratische Gleichungen und eine kubische Gleichung — Arbeitsblatt 2.1.1

Aufgabe 1: Geburtstagsgäste

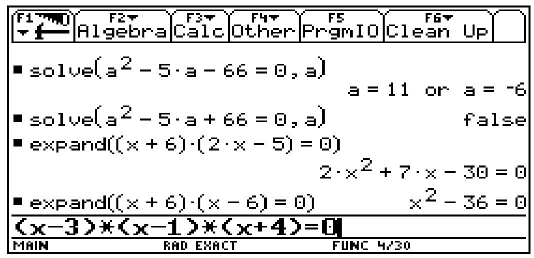
Auf einer Party befinden sich zahlreiche Geburtstagsgäste. Mit einem Sektglas in der Hand wird gerade ein Hoch auf die Dame des Hauses ausgebracht. Dabei stößt jede Person mit jeder anderen einmal an. Die rechengewandte Frau, die schon längst den Überblick über die Anzahl der Anwesenden verloren hatte, erkennt sofort die einmalige Gelegenheit, diese Anzahl festzustellen. Sie hört insgesamt 210 Gläseranstöße. Nun weiß sie Bescheid! Du auch?

Aufgabe 2: Mathematik im Bildschirm

Erläutere die beiden folgenden Bildschirmabdrucke.



Eine Ergänzung zur allgemeinen Lösung



Beispiele für quadratische Gleichungen

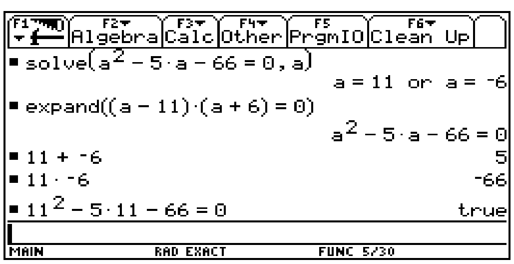
Aufgabe 3: Noch eine Lösungsformel

Manchmal betrachtet man eine andere Grundform für quadratische Gleichungen, die noch etwas allgemeiner ist: $a \cdot x^2 + b \cdot x + c = 0$.

a) Bestimme mit deinem CAS eine Lösungsformel für diese Gleichungsform.

b) Welcher Zusammenhang besteht zwischen dieser (a,b,c)-Form und der (p,q)-Form?

Aufgabe 4: Proben bei quadratischen Gleichungen



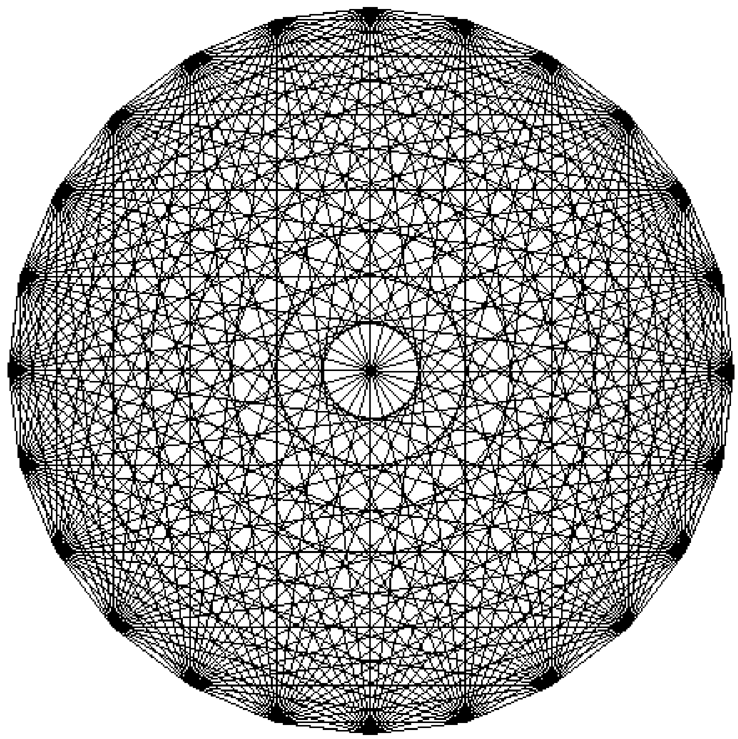
Der nebenstehende Bildschirm zeigt einige Möglichkeiten, für errechnete Lösungen eine Probe (teilweise sogar ohne Rechner) zu machen. Inwiefern? Interessant sind besonders die Proben 11+(–6) und 11·(–6). Vermutung?

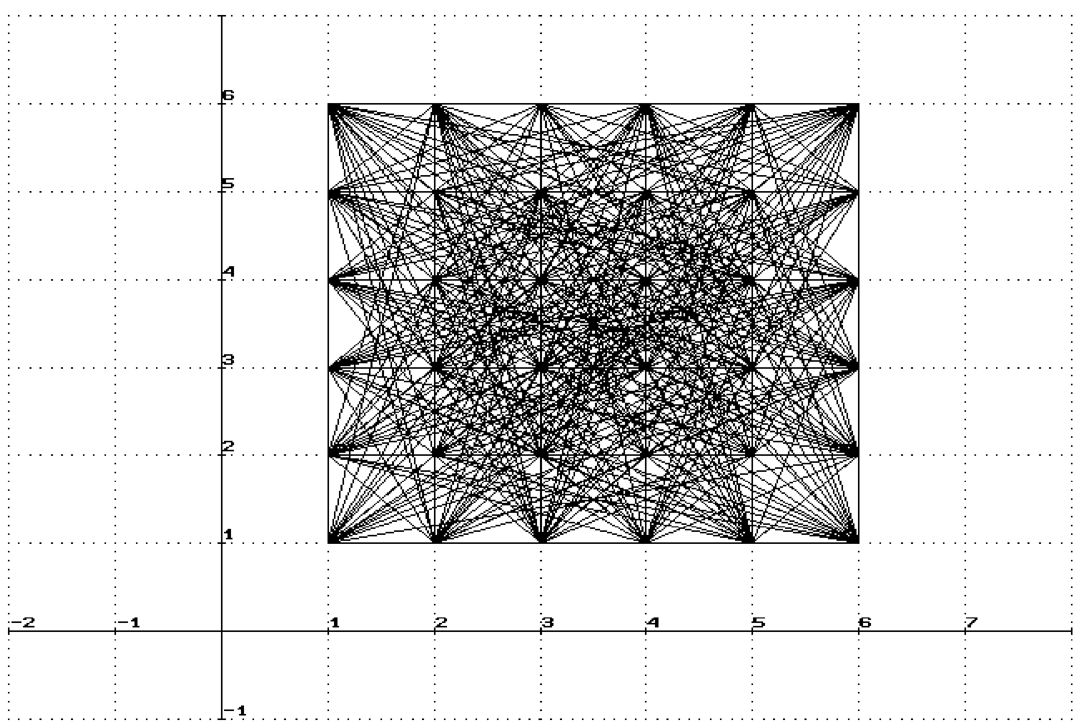
Aufgabe 5:
Ausblick: Ein Würfel wird verkleinert – eine kubische Gleichung

Ein großer Würfel wird verkleinert, indem man zwei Kantenlängen um 2 cm kürzt. Danach beträgt das Volumen des Würfels noch 75.5 cm^3. Welche Kantenlänge hatte der ursprüngliche Würfel? Gehe bei dieser Aufgabe so vor:

1) Planzeichnung, so dass die Würfelverkleinerung deutlich wird.
2) Rechnerischer Ansatz.
3) Benutze nun an allen passenden Stellen das CAS.
4) Werte das Ergebnis aus.

Komplexe Figuren – Wie viele Verbindungsstrecken? **Arbeitsblatt 2.1.2**





Kugelstoßer	Parabel-Gleichung	Weite
Nitschke	f(x) = –0.04x^2 +0.756x+1.70	
Beyer	g(x) = –0.05x^2 +0.786x+1.70	
Lamper	h(x) = –0.045x^2+0.756x+1.72	

Wer gewinnt?

Aufgabe:
Wie weit stoßen die drei Sportler? In welcher Höhe verlassen die Kugeln ihre Hand?

Lösung:
Wir wollen die Parabeln zunächst auf dem Bildschirm unseres CAS grafisch darstellen.

Das erste Bild ist noch nicht problemgerecht. Warum nicht?

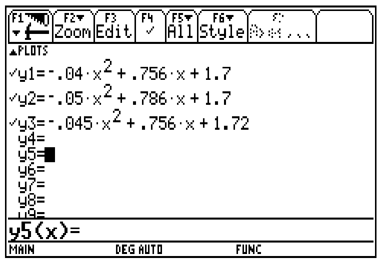


Bild 1

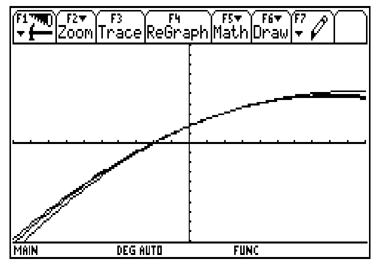


Bild 2

Mit Bild 3 können wir schon mehr anfangen! Was sagt Bild 4 aus?

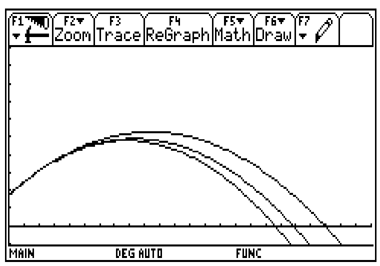


Bild 3

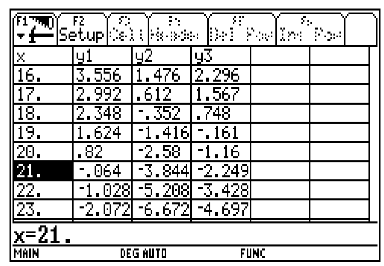


Bild 4

Was sagen die Bilder 5 und 6 aus? Bei Bild 6 wurde nur der Graph zu y2 gezeichnet.

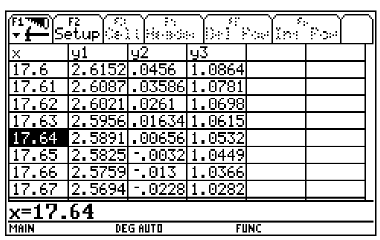


Bild 5

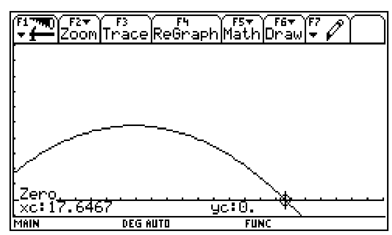


Bild 6

Beyer 17.65

Nitschke 20.93

Für Bild 6 wurde so vorgegangen:
1) Im y=Editor y1 und y3 mittels der F4-Taste aus der Zeichnung nehmen.
2) y2 zeichnen lassen. Dann F5 und Zero wählen.
3) Lower Bound (links vom Schnitt der Kurve mit der x-Achse) und Upper-Bound (rechts vom Schnitt) beliebig wählen.
4) Wir erhalten das Ergebnis: Die Wurfweite von Beyer beträgt etwa 17.65m. Damit gewinnt er allerdings nicht.

Wir fassen den Lösungsweg zusammen:
Bei der Bestimmung der Wurfweite sind wir von einer gegebenen Wurfparabel ausgegangen. Wie wir aus den Funktionsgleichungen erkennen, erhält man mit Termen wie zum Beispiel $f(x) = -0.04x^2 + 0.756x + 1.70$ offenbar Parabeln. Es kommt nun darauf an, ihre **Nullstellen** zu bestimmen – das sind die Stellen, an denen der Graph die x-Achse schneidet. Dort ist der Funktionswert (y-Wert) gleich 0, so dass die Aufgabe lautet:

Löse die Gleichung $-0.04x^2 + 0.756x + 1.70 = 0$ nach x auf.

Die Lösungen haben wir mit einem grafischen Ansatz und dann mit Zero gefunden. Wir können die Güte der Lösungen auch noch überprüfen. Betrachte dazu das folgende CAS-Bild.

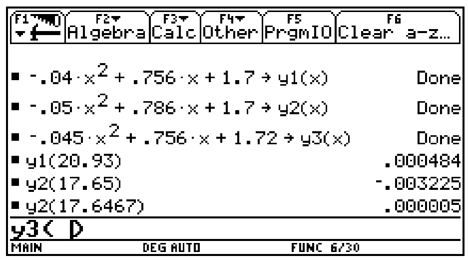


Bild 7

Wir sehen:
Die eingesetzten Werte sind hinreichend genau.

Genauere Ergebnisse (mit 4 bzw. 5 Nachkommastellen) können, wie bei anderen Gleichungsarten auch, mit dem Befehl Solve ermittelt werden, siehe Bild 8.

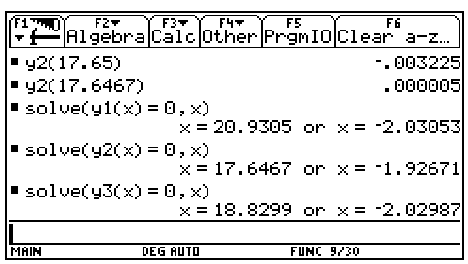


Bild 8

Es gibt auch negative Nullstellen (siehe Bild 2), aber diese kommen natürlich nicht in Frage.

Zum Nachdenken:
Betrachte das nebenstehende Bild. Sind Parabelbögen dabei? Wie könnte man so etwas feststellen?

Wasserspiele in London

Parabelscharen und Schnittpunkte — Arbeitsblatt 2.2.1

Aufgabe 1:

a) Stelle Bild 1 mit deinem Rechner her.
b) Äußere eine Vermutung für die Schnittpunkte je zweier Parabeln.
c) Bestätige die Vermutung durch passende Rechnungen.
d) Ein möglicher Weg wird in dem Bildschirmabdruck (Bild 2) vorgeschlagen. Erläutere diesen Weg. Hinweis: $(x-3)^2 - 1 = (x-1)^2 - 1$ ist äquivalent zu $(x-3)^2 = (x-1)^2$.
.

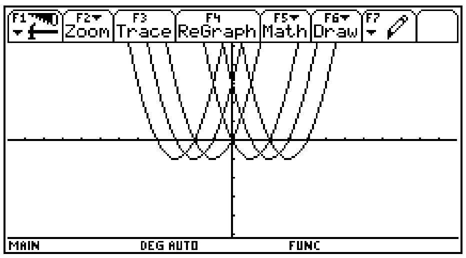


Bild 1

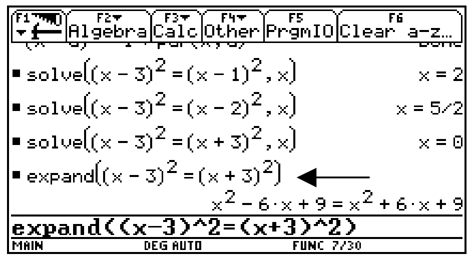


Bild 2

e) Löse die mit einem Pfeil markierte Gleichung von Hand. Inwiefern hilft dir dabei die Zeile mit dem Befehl expand?

Aufgabe 2:

Am TI-92 werden die folgenden Eingaben durchgeführt:

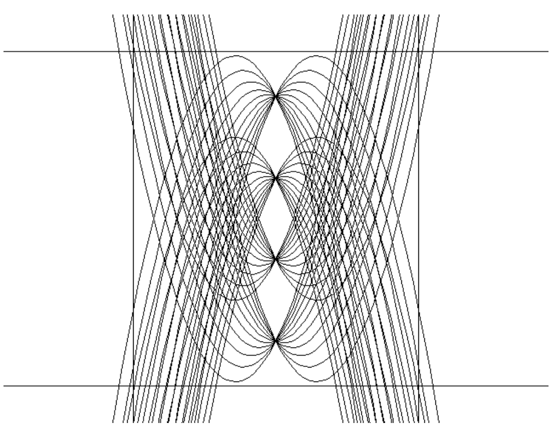
Define parabel(x,a) = (x – a)^2 – 4 und
Define y1(x) = parabel(x,a) | a = {–4,–3,–2,–1,0,1,2,3,4}.

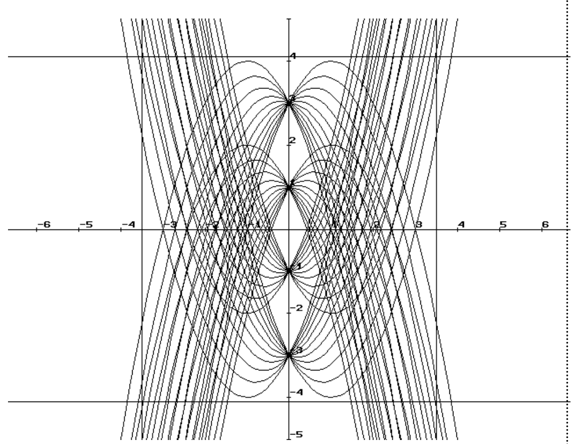
Dabei wird durch die Angabe von | a = {–4,–3,–2,–1,0,1,2,3,4} festgelegt, welche Werte der Parameter a durchlaufen soll.

a) Welches Bild entsteht? Wo siehst du Zusammenhänge mit Aufgabe 1?
b) Was für ein Bild ergibt die Zeichnung von
(x–1)^2 + b | b= {–4,–3,–2,–1,0,1,2,3,4} → y2(x) ?

Aufgabe 3

Wie kann man das folgende Parabel-Tischdeckenmuster erzeugen?


Die Tischdecke



Eine kleine Hilfe für dich