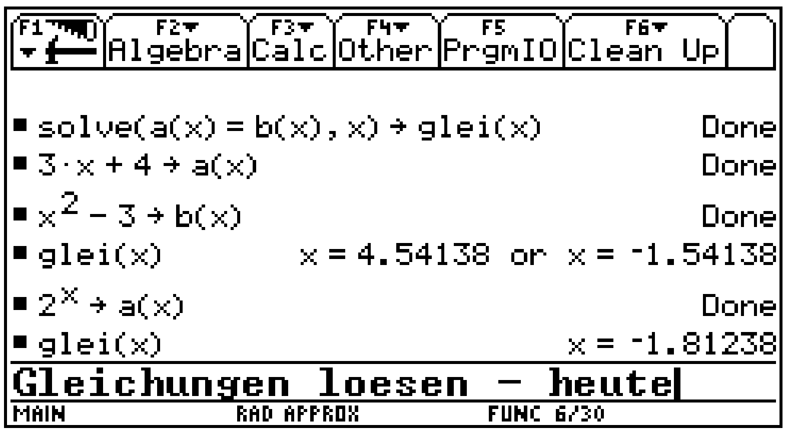
Unterrichtsmaterialien

Gleichungen in der Sekundarstufe 1 mit dem TI-92

Eberhard Lehmann



Herausgegeben von
Wilfried Herget und
Eberhard Lehmann

Schroedel

Eberhard Lehmann: Gleichungen, Neue Materialien für den Mathematikunterricht mit dem TI-83, -89 / -92 in der Sekundarstufe 1, Schroedel-Verlag 2001, Hrsg. Wilfried Herget, Eberhard Lehmann

Inhaltsverzeichnis

Vorwort

Das vorliegende Heft gehört zu der vom Schroedel Schulbuchverlag und von Texas Instruments herausgegebenen Reihe „Mathematikunterricht mit Taschenrechner TI“. Diese Reihe umfasst zurzeit die folgenden Hefttitel:

1. Lineare und quadratische Funktionen
2. Exponential-, Potenz- und Winkel-Funktionen
3. Gleichungen
4. Stochastik

Adressaten

Die Hefte wenden sich zunächst an Lehrerinnen und Lehrer, insbesondere in den didaktisch-methodischen Teilen. Sie können aber auch an Schülerinnen und Schüler ausgegeben werden, da der Text in weiten Teilen für diese formuliert ist und viele **Arbeitsblätter** beigefügt sind.

Es wird in der Regel davon ausgegangen, dass die **grundlegende Bedienung** des verwendeten Taschenrechners vertraut ist. Alle darüber hinaus gehenden Kenntnisse werden jeweils vermittelt, wenn es das Sachgebiet erfordert. Mit jedem der Unterrichtsbeispiele können eigene Unterrichtserfahrungen mit grafikfähigen Taschenrechnern (GTR) – hier TI-83 – und Rechnern mit einem Computeralgebrasystem (CAS) – hier TI-92 und TI-89 – gesammelt werden.

Zum Aufbau der Hefte

Die Hefte enthalten **konkreten Unterricht** in Form von nachvollziehbaren Unterrichtsbeispielen mit unmittelbar verwendbaren **Arbeitsblättern für Schülerinnen und Schüler**.

Die Hefte und die einzelnen Unterrichtsbeispiele sind weitgehend voneinander unabhängig. Kleinere inhaltliche Überschneidungen tragen zu einer Vernetzung von Inhalten bei, so dass gegebenenfalls auch Einheiten aus verschiedenen Heften aneinandergefügt werden können.

Die Unterrichtsbeispiele betreffen ausschließlich **Standardthemen der Sekundarstufe I**, und zwar **unter neuen Aspekten**. Diese Aspekte beziehen sich in erster Linie auf Ansätze zu einer neuen Unterrichts- und Aufgabenkultur sowie auf den Einsatz von grafikfähigen Taschenrechnern und Taschenrechnern mit einem Computeralgebrasystem. Die direkte Programmierung von Rechnern spielt in der Regel keine Rolle und wird nur an wenigen Stellen in Form von sehr kurzen Programmen gezeigt.

Es geht in den Heften um ausgewählte Beispiele für solche Teilthemen, in denen der Einsatz leistungsfähiger Taschenrechner im Unterricht Vorteile bringt. Die vollständige Abarbeitung eines Themenkreises im Sinn eines Lehrplans ist dagegen hier nicht vorgesehen.

Grundlegende **didaktisch-methodische Hinweise** zu dem jeweils behandelten Thema stehen in der Regel am Anfang oder am Ende einer Einheit. Sie sind durch Fettdruck hervorgehoben.

Zum dargestellten Unterricht

Die vorgestellten Beispiele nutzen die Möglichkeiten eines lebendigen Mathematikunterrichts, der u. a. die aus den Ergebnissen der internationalen Vergleichsstudie TIMSS (Third International

Mathematics and Science Study) erwachsenen Forderungen berücksichtigt, zusätzlich aber auch den Einsatz leistungsfähiger Taschenrechner verwirklicht.

In der Regel ist der hier dargestellte Unterricht **thematisch am Schulbuch orientiert.** Es handelt sich dabei um Einführungen, Vertiefungen, Fortsetzungen, besondere Übungsaspekte, Variationsaufgaben, Arbeit mit Parametern usw.

Die **zeitliche Spanne** reicht von ein, zwei Unterrichtsstunden bis hin zu längeren Unterrichtseinheiten von zwei bis drei Wochen.

Der Unterricht ist **problemorientiert** angelegt – mit Anwendungssituationen von außen, aber auch mit innermathematischen Problemstellungen.

Unmittelbar für den Unterricht verwendbar sind die **Arbeitsblätter** als **Kopiervorlagen** für die Schülerinnen und Schüler. Erklärtes Ziel ist es dabei, auch eine **neue Aufgabenkultur** anzusprechen: Offene Aufgabenstellungen, Aufgabenvariation, Aufgaben mit mehreren Lösungswegen, Aufgaben für Partner- und Gruppenarbeit, ...

Veranschaulichungsmöglichkeiten werden in vielfältiger Weise genutzt. Sofern möglich, werden algebraische Lösungen verknüpft mit graphischen Lösungen bzw. Veranschaulichungen und ggf. Tabellen.

Der **Text** ist möglichst schülernah formuliert und berücksichtigt folgende Aspekte in besonderem Maße: Modellbildung, Schilderung von Lösungswegen, Argumentieren, Begründen, Kommentieren, Lösungsvielfalt, Bewerten von Ergebnissen, Bewerten von Modellen.

Die Beiträge streben insgesamt auch eine **neue Unterrichtskultur** an: Mehr Selbsttätigkeit der Schülerinnen und Schüler, Phasen mit Partner- und Gruppenarbeit, Offenheit, Diskussion und vergleichende Bewertung der Lösungswege usw. Verschiedentlich werden auch kleine mathematische **Projekte** angeboten.

Wilfried Herget und Eberhard Lehmann, im Oktober 2000

Vorwort zum Heft „Gleichungen in der Sekundarstufe 1 mit dem TI-92"

Gleichungen spielen bekanntlich im gesamten Mathematikunterricht eine bedeutende Rolle. Die Grundlagen werden in der Sekundarstufe 1 gelegt. Die Auswirkungen des Computereinsatzes auf dieses Gebiet sind besonders groß, weil nun die vielen notwendigen, aber stumpfsinnigen Rechnungen vermieden werden können. Handrechnungen sind nur noch für einfach gestaltete Gleichungen zum Verstehen der grundlegenden Algorithmen sinnvoll. Darüber hinaus ist es insbesondere die Anweisung solve, die die Arbeitsweisen im Gebiet der Gleichungslehre drastisch verändert.
Angesichts der Vielzahl von Gleichungsformen beschränke ich mich hier auf lineare Gleichungen, quadratische Gleichungen und lineare Gleichungssysteme. Expontialgleichungen kommen in dem gebietsübergreifenden Projekt „Marktforschung" zur Geltung (Kapitel 4). Der Anhang ist nicht als Unterrichtseinheit konzipiert: Er beschreibt einige weitere Ideen zur Neugestaltung von Unterricht über Gleichungen und bietet damit Diskussionsstoff.

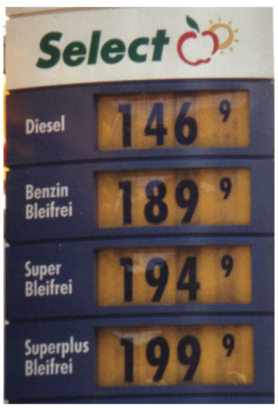
Eine Kurzbeschreibung der sieben Unterrichtseinheiten findet man im Inhaltsverzeichnis.

Eberhard Lehmann, Oktober 2000

1.1 Lineare Gleichungen 1: Benzinkosten

Diese Unterrichtseinheit kann dazu dienen, erstmals in die Benutzung eines Taschencomputers einzuführen. Die fachlichen Inhalte dürften in den Lehrplänen meistens in Klasse 7 angesiedelt sein. Die Idee besteht darin, den Schülerinnen und Schülern an einem Beispiel, das sie vorher von Hand bearbeitet haben, mehrere Bearbeitungsmöglichkeiten mit einem CAS zu zeigen. Dieses Vorgehen hat sich auch in Lehrerfortbildungskursen bewährt, weil es elementar in schon recht breiter Weise in Möglichkeiten des Gleichungslösens mit einem CAS einführt. Damit wird auch der Forderung Rechnung getragen, bei Problemlösungen mehrere Lösungswege zu berücksichtigen.
Wir gehen hier also davon aus, dass die Schülerinnen und Schüler das Einstiegsbeispiel in ihrem Heft ohne Computereinsatz bearbeitet haben – in ähnlicher Weise wie unten angedeutet.

Tanken



Lineare Gleichung
$0.82 \cdot x + 1.10 = 4.79$

Aufgabe:
Herr Lampe macht vor seiner Reise noch eine Inspektion seines Autos an der Tankstelle. Er hat zwar noch viel Benzin im Tank, möchte aber seine preiswerte Tankstelle ausnutzen und den Reservetank volltanken. Heute kostet das Liter Diesel 0.82 Euro. Herr Lampe füllt den Behälter und zahlt einschließlich der für 1.10 Euro erworbenen Tageszeitung 4.79 Euro. Als er zu Hause ankommt, hat er leider die Literanzahl, die er immer in seinen Taschenkalender einträgt, vergessen. – Kannst du helfen?

Lösung: Möglicherweise hast du folgenden Rechenansatz mit einer Gleichung gemacht: $0.82 \cdot x + 1.10 = 4.79$ und dann so gerechnet:

$$\begin{aligned} 0.82 \cdot x + 1.10 &= 4.79 \quad &| -1.10 \\ 0.82 \cdot x &= 3.69 \quad &| : 0.82 \\ x &= 4.50 \end{aligned}$$

Herr Lampe hat also 4.5 Liter getankt.

Für die Probe musst du 4.5 in die Ausgangsgleichung einsetzen, und es ergibt sich tatsächlich: $0.82 \cdot 4.5 + 1.10 = 4.79$.

Probe: Den gefundenen Wert in die Gleichung einsetzen

Der Computer hilft beim Lösen von Gleichungen

Gleichungen der Form, wie sie oben verwendet wurde, treten häufiger auf. **Gleichungen – auch anderer Form – können meistens mit mehreren Methoden gelöst werden.**
Man kann dazu auch das Computeralgebrasystem und die Grafik eines Taschencomputers benutzen. Die Methoden, die du jetzt kennenlernst, solltest du danach an weiteren Aufgaben üben. Dann wird es immer darauf ankommen,

1) für das Problem einen Ansatz zu finden – hier in Form einer Gleichung,
2) die Gleichung mit dem CAS zu lösen (Rechnung, Grafik),
3) das Ergebnis auszuwerten und zu überprüfen.

Wir werden nun verschiedene Lösungswege für lineare Gleichungen kennenlernen. Damit wir nicht immer mit den gleichen Zahlen arbeiten, werden wir auch andere Probleme, die auf Gleichungen führen, bearbeiten.

Weg 1

Lösen durch Probieren

Eine Gleichung wird durch Probieren gelöst

Aufgabe: Löse das Zahlenrätsel!
Wenn man zu dem 5-Fachen einer Zahl z die Zahl 13 addiert, ergibt sich genauso viel, als wenn man zu dem 4-Fachen dieser Zahl z die Zahl 22 addiert.
Begründe den Ansatz: $5 \cdot z + 13 = 4 \cdot z + 22$. Versuche die Zahl z durch Probieren zu finden.

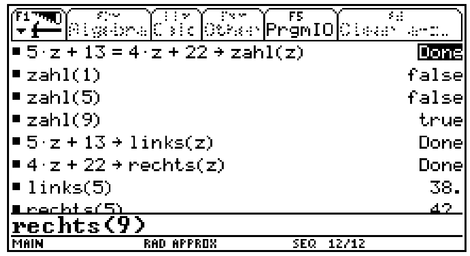


Bild 1

Kommentar: Wir geben die Gleichung $5 \cdot z + 13 = 4 \cdot z + 22$ ein und nennen sie zahl(z). Schließlich suchen wir ja einen passenden Wert für z, der – in die Gleichung eingesetzt – diese zu einer wahren Aussage macht.
Nun geht es los mit dem Probieren: Wir geben z. B. ein

zahl(1), false, offenbar ist 1 keine Lösung.
zahl(5), auch nicht richtig.
zahl(9), Treffer! Setzen wir diesen Wert ein, so ergibt sich auf der linken Seite $5 \cdot 9 + 13 = 58$ und rechts $4 \cdot 9 + 22 = 58$.

Inwiefern können wir nun das Probieren noch verbessern, wenn wir so wie in Bild 2 vorgehen?

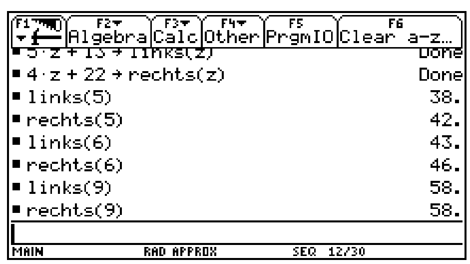


Bild 2

Aufgabe: $3 \cdot x - 0.55 = -4.4 \cdot x + 11$.
Welche Nachteile hat das Probieren?

Weg 2

Lösen durch ausführliches Rechnen

Gleichung lösen durch ausführliche Rechnung

Aufgabe: Löse die Gleichung $3 \cdot x - 0.55 = -4.4 \cdot x + 11$. Die Grundmenge, aus der das x stammen darf, sei die Menge Q der rationalen Zahlen.

Lösung: Du weißt, wie das von Hand geht! Kommentiere nun die Lösung auf dem Bildschirm, Bild 3.

Die Handrechnung wird am Computer nachgemacht!

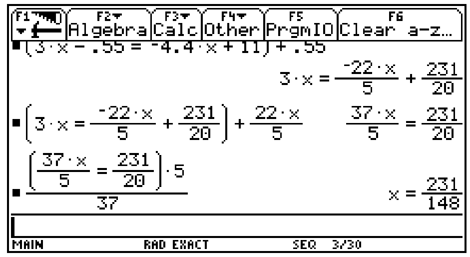


Bild 3

Kommentar: Wir geben wieder die Gleichung ein, setzen jedoch jetzt Klammern darum, um sie als ein Objekt zu kennzeichnen. Nun wird auf beiden Seiten 0.55 addiert. Die Einstellung des CAS ist hierbei so gewählt, dass mit Brüchen, also genau gerechnet wird. Das geht mit MODE, F2, Exact/Approx, Exact.

Aufgabe: Probiere mit diesem Verfahren, ob 231/148 tatsächlich eine Lösung ist.

Weg 3

Schnell Rechnen

Mit dem CAS ganz schnell rechnen

Das CAS hat einen Befehl, mit dem man Gleichungen lösen kann, ohne sich Gedanken über den Lösungsweg machen zu müssen. Wir sollten diesen Befehl aber erst dann einsetzen, nachdem wir den Lösungsweg an einfachen Beispielen selbst durchgeführt und durchschaut haben.

Aufgabe: Ein Lottogewinn
Petra und Paul haben 3600 DM im Lotto gewonnen. 300 DM wollen sie an Greenpeace spenden. Da Petra beim Tippen doppelt so viel eingezahlt hat wie Paul, teilen sie den nach der Spende verbleibenden Rest entsprechend unter sich auf.

Lösung: Den Ansatz für diese Aufgabe erkennst du in Bild 4 und dort ist auch der Weg für die Lösung durch das CAS notiert.

SOLVE

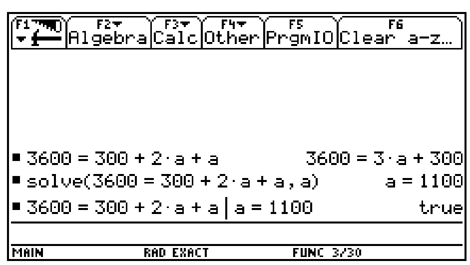


Bild 4

1) Welche Überlegungen haben zur Aufstellung der Gleichung geführt?
2) Wieso hat das CAS aus der Eingabe die neue Gleichung 3600 = 3·a + 300 gemacht?
3) Was muss bei SOLVE eingegeben werden?
4) Die letzte Zeile ist eine andere Form der Probe – erkläre!
5) Wie viel erhalten Petra und Paul?

Weg 4

Graphische Lösung

Eine Gleichung graphisch lösen

Aufgabe: Zum Erlernen dieses Verfahrens ist die Gleichung des Beispiels "Tanken" gut geeignet: 0.82 * x + 1.10 = 4.79.

Die linke Seite 0.82x + 1.10 wird unter dem Namen y1(x) gespeichert, entsprechend wird mit der rechten Seite verfahren. Wir benutzen dazu den "y-Editor" des TI-92.

Näherungsweise Lösung

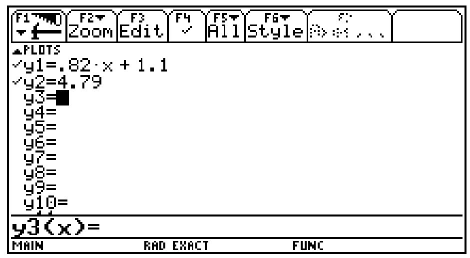


Bild 5

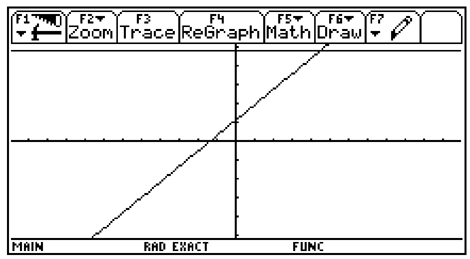


Bild 6

Wir erhalten für y1(x) eine schräge Gerade, für y2(x) ist die Gerade parallel zur x-Achse. Drückt man in der Situation von Bild 6 auf die Cursortaste des Rechners, so erscheint der Cursor auf dem Bildschirm, und wir können mit Hilfe der Cursortaste zum Schnittpunkt der beiden Geraden wandern. Dort lesen wir ab:
x = 4.5 (und y = 4.79).

Aufgabe: Warum geht es um den Schnittpunkt der beiden Geraden?
Das Ablesen des Schnittpunktes kann hier nur näherungsweise erfolgen. Das CAS kennt aber ein noch besseres Verfahren! Der Lösungsweg wird hier für das CAS des TI-92 beschrieben. Vollziehe ihn nach!

Mit "Intersection"

Intersection (Schnittpunkt)

Nachdem Bild 6 erstellt ist, geht man so vor

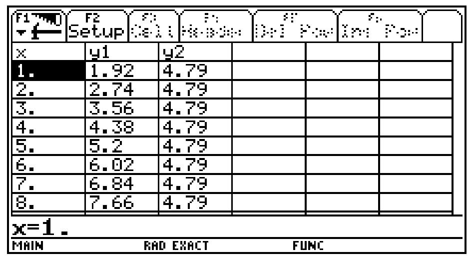
1) Drücke auf die Cursortaste – der Cursor erscheint
2) Drücke F5 und danach 5: Intersection (Schnittpunkt)
3) Du liest: 1stCurve; gehe mit dem Cursor auf die 1. Gerade, Enter
4) Du liest: 2ndCurve; gehe mit dem Cursor auf die 2. Gerade, Enter
5) Du liest: Lower Bound; gehe mit dem Cursor auf eine Stelle links vom Schnittpunkt, Enter
6) Du liest: Upper Bound; gehe mit dem Cursor auf eine Stelle links vom Schnittpunkt, Enter
7) Nun kannst du den Schnittpunkt ablesen!

Weg 5

Ablesen aus der Wertetabelle

Lösungen aus der Wertetabelle ablesen

Wenn der Taschenrechner eine Zeichnung erstellt, muss er genauso eine Wertetabelle erstellen, wie du es im Heft tun würdest. Diese Wertetabelle kann man sich beim TI-92 mit den Befehlen ◊ TABLE (über dem "y") ansehen
Für das obige Beispiel $0.82\cdot x + 1.10 = 4.79$, also
$y1(x) = 0.82\cdot x + 1.10$ und $y2(x) = 4.79$,
sieht die Tabelle so aus:



x	y1	y2
1.	1.92	4.79
2.	2.74	4.79
3.	3.56	4.79
4.	4.38	4.79
5.	5.2	4.79
6.	6.02	4.79
7.	6.84	4.79
8.	7.66	4.79

Bild 7

Vergleicht man die Werte unter y1 und y2, so erkennt man, dass sie vielleicht gleich sind zwischen x=4 und x=5. Also verfeinern wir die Wertetabelle für dieses Intervall. Wähle dazu ◊ Tblset.

Wertetabellen werden in der Mathematik für viele Aufgabenarten benötigt.

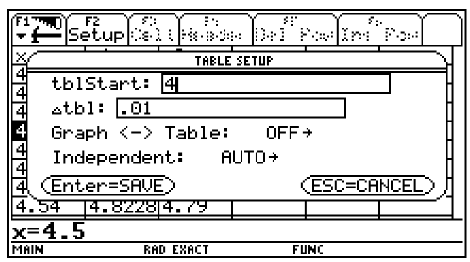
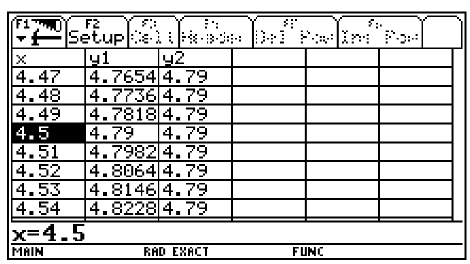


Bild 8

Wir rufen wieder die Wertetabelle auf und tasten uns langsam an den x-Wert heran, für den y1 = y2. Das ist bei x=4.5 der Fall.



x	y1	y2
4.47	4.7654	4.79
4.48	4.7736	4.79
4.49	4.7818	4.79
4.5	4.79	4.79
4.51	4.7982	4.79
4.52	4.8064	4.79
4.53	4.8146	4.79
4.54	4.8228	4.79

Bild 9

Zur Lösung von Gleichungen können viele Verfahren verwendet werden!

Du hast jetzt viele Verfahren zur Lösung linearer Gleichungen mit einem CAS kennengelernt. Einige davon sind auch für grafische Taschenrechner wie den TI-83 geeignet.
Merke: Bei anderen Gleichungsformen kann man stets so ähnlich vorgehen!

Für das folgende Arbeitsblatt kannst du die verschiedenen Verfahren anwenden.

Lineare Gleichungen – verschiedene Anwendungen Arbeitsblatt 1.1.1

Dieses Arbeitsblatt kann verwendet werden, um verschiedene CAS-Methoden zur Lösung linearer Gleichungen miteinander zu kombinieren. Auch kann z. B. eine Aufgabe von verschiedenen Gruppen mit je einer Lösungsmethode bearbeitet und dann vorgetragen werden. Unten sind alle Lösungen mit dem SOLVE-Befehl ermittelt worden.

Anweisung für die folgenden Aufgaben:
Bevor du das CAS einsetzt, musst du erst die Gleichung finden. Das kannst du mit den folgenden Aufgaben üben. – Benutze dann verschiedene Wege zur Aufgabenlösung. Achte darauf, dass sich die Ergebnisse gegenseitig bestätigen.
Weg 1: Lösen durch Probieren
Weg 2: Ausführlich rechnen mit Zwischenschritten
Weg 3: Schnell rechnen mit SOLVE
Weg 4: Graphische Lösung
Weg 5: Ablesen aus der Wertetabelle

Aufgabe 1 – Drei aufeinander folgende Zahlen
Suche drei aufeinanderfolgende natürliche Zahlen, die die Summe 336 (337) haben.

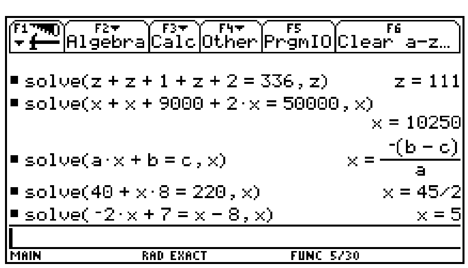
Aufgabe 2 – Erbschaft
Eine Erbschaft von 50000 Euro muss so aufgeteilt werden, dass Person A 9000 Euro weniger erhält als Person B. Person C muss doppelt so viel erhalten wie Person A. – Berechne die Anteile mit Hilfe einer Gleichung. Benutze eine geeignete Gleichungsvariable x.

Aufgabe 3 – die Gleichung a·x + b = c
Löse die allgemeine Gleichung a·x + b = c mit dem SOLVE-Befehl des CAS nach x auf. Dabei seien a, b, c und x rationale Zahlen. Überlege, ob die vom CAS angegebene Lösung tatsächlich für alle Werte der Variablen gilt.

Aufgabe 4 – Swimming-Pool
Das Schwimmbecken einer Badeanstalt soll auf 2.20 m Wassertiefe aufgefüllt werden. Die gegenwärtige Wassertiefe beträgt 40 cm. Pro Stunde kann durch die Leitung soviel zugeleitet werden, dass sich der Wasserspiegel um 8 cm anhebt. – Wie lange dauert das Auffüllen des Beckens?
Lösung: Erläutere den CAS-Befehl solve(40+x*8 = 220,x)

Aufgabe 5 – Gleichungen mit vorgegebener Lösung
Notiere einige lineare Gleichungen der Form a·x + b = c·x + d, die alle die Lösung x=5 haben. Löse dann die Aufgaben grafisch. Hinweis: Wähle die Aufgaben so, dass man die Terme im Koordinatensystem leicht darstellen kann. – Beispiel: –2·x + 7 = x – 8.

Lösungen
mit solve



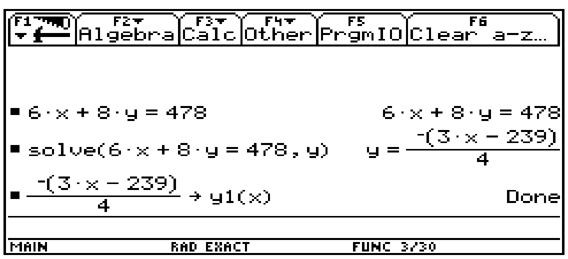
Lineare Gleichungen – Im Jazz-Club Arbeitsblatt 1.1.2

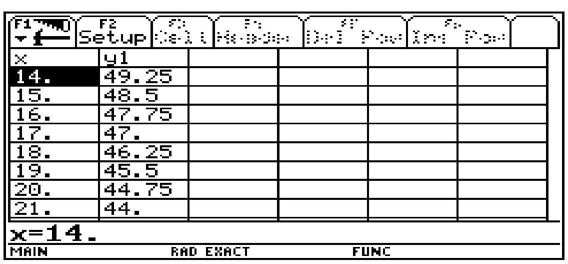
Dieses Arbeitsblatt bringt eine schwierigere Aufgabe, da die oben genannten Methoden zur Lösung linearer Gleichungen aufgrund der Benutzung zweier Variablen übertragen werden müssen.

Aufgabe

Der Eintritt zu einem Jazzkonzert im J-Flat Club kostet für Studierende 6 Euro, sonst 8 Euro. Bei der Abrechnung zeigt sich, dass insgesamt 478 Euro eingenommen wurden. Wie viel Karten wurden verkauft?

Lösung mit dem CAS





Ausblick: Wie ändert sich die Problematik, wenn bekannt ist, dass

a) 21 Karten für Studierende,
b) insgesamt 65 Karten

verkauft wurden?

Ergänze die Lösungskommentare!

Probieren

Begründe den Ansatz! Was bedeuten x und y? Warum werden hier zwei Variable benötigt?

Was bedeutet die Eingabe karten(17,47)?

Etwas systematischer arbeiten

y1 entspricht dem obigen y und musste nur für die folgende Tabelle so bezeichnet werden.

Wir haben also eine (x,y)-Tabelle vor uns. Was sagt z. B. das Paar x = 21, y = 44 aus?

Blättere weiter in dieser Tabelle – nach oben und nach unten. Was fällt alles auf?

Zusammenfassung:

Offenbar hat die Aufgabe mehrere Lösungen. Wie viele sind es?

1.2 Lineare Gleichungen 2: Magische Quadrate

Magische Quadrate können in verschiedenen Klassenstufen eingesetzt werden, um mathematische Kenntnisse zu erwerben oder zu vertiefen. Für die Schüler/innen haben sie sich immer wieder als sehr motivierend erwiesen. Die reichhaltigen Probleme eignen sich gut für den Einsatz des Computers, besonders wenn es um das Entdecken, Vermuten und Erforschen geht. Auch kompliziertere Rechnungen können nun mit CAS leicht durchgeführt werden, was das Eindringen in die Welt der magischen Quadrate stark erleichtert.
Gleichungen und Gleichungssysteme können bei verschiedenen Situationen eingesetzt werden und treten in manchmal ungewohntem Gewand auf. Dieser Aspekt wird hier im Vordergrund stehen. Die Unterrichtseinheit wird sich auf Fragestellungen für die Sekundarstufe 1 beschränken.

6	1	8
7	5	3
2	9	4

Was ist an diesem Zahlenquadrat magisch?

Es ist sehr spannend, sich im Internet über "magic squares" zu zu informieren. Versuche es!

Magische Quadrate haben die Eigenschaft, für die Summen der Zahlen jeder Zeile, jeder Spalte und jeder Diagonalen den gleichen Wert ergeben. Bei dem nebenstehenden Quadrat ist es die Summe 15.

Viele Fragen ergeben sich:

- Gibt es weitere magische Quadrate mit der magischen Summe s = 15?
- Wie findet man magische Quadrate mit anderen Summen?
- Gibt es auch magische Quadrate der Ordnung 4,
  d. h mit 4 x 4 Elementen?

Hinweis: Man kann auch magische Quadrate bilden, in denen eine Zahl mehrfach vorkommt oder in denen sogar negative Zahlen auftreten.

Aufgabe 1
Im Internet findet sich unter der URL
http://www.pse.che.tohoku.ac.jp/~msuzuki/magicsquare.algebraform.html
(1999) u. a. der folgende Text:
3 x 3 square

a	*b*	*c*
d	*e*	*f*
g	*h*	*i*

"Let h and i be the independent variables, then the algebraic for the magic square becomes

$10-i$	$10-h$	$-5+h+i$
$-10+h+2i$	5	$20-h-2i$
$15-h-i$	h	i

Damit wird eine Formel angeboten, mit der man magische Quadrate erzeugen kann.

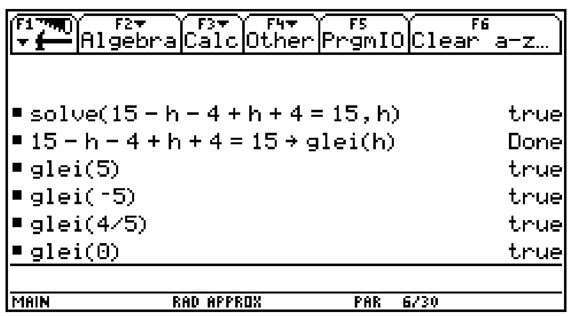
- Welche magische Summe haben diese Quadrate? Überprüfe alle Wege.
- Setze h = 9 und i = 4 ein. Das magische Quadrat kennst du schon!
- Kann man für i = 4 noch andere magische Quadrate gewinnen?

Eine Gleichung mit unendlich vielen Lösungen

Lösung zur letzten Frage:
Aus der letzten Zeile lesen wir für i = 4 die folgende Gleichung ab:
(15 – h – 4) + h + 4 = 15, also 15 – h + h = 15, also 15 = 15.
Wir können also für h einsetzen, was wir wollen. Für i = 4 liefert jedes h ein magisches Quadrat. Auch bei den anderen Gleichungen ist das so.

Aufgabe 2
Erläutere das folgende CAS-Bild!

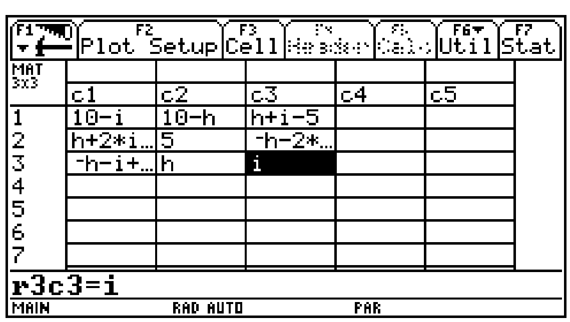
Was sagt uns das CAS bei solchen Gleichungen?

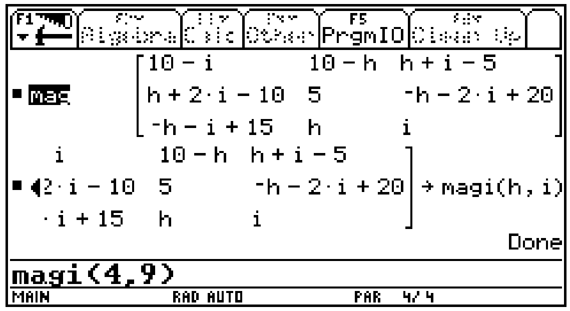


Die folgende Aufgabe 3 berechnet das magische Quadrat für einige Werte von h und i. Gleichzeitig lernen wir, wie man eine Matrix (das ist ein rechteckiges Zahlenschema) in das CAS eingibt und wie man mit ihr arbeiten kann.

Aufgabe 3
Kommentiere die folgenden TI-92-Bilder ausführlicher:
Wir geben zunächst ein: APPS, Dat/Matrix Editor, New, dann bei Type Matrix, Variable Mag, Row dimension 3, Col dimension 3, danach werden die Werte in die Tabelle eingetragen.

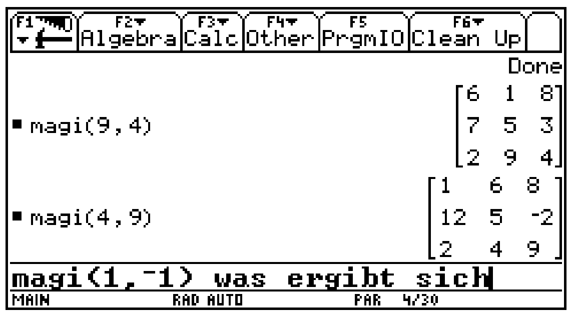
Eingabe einer Matrix im Matrix-Editor des TI-92





Der Baustein magi(h,i) erzeugt magische Quadrate!

Die Matrix wird zur Kontrolle ausgegeben und dann unter dem Namen magi(h, i) gespeichert. Der Baustein magi(h, i) enthält die beiden Parameter h und i. Ruft man nun diesen Baustein auf, indem man für h und i Werte einsetzt, so erhält man die zugehörigen magischen Quadrate.



Wir kennen uns nun schon etwas mit der Formel von Aufgabe 1 aus. Aber:

Wie kommt es zu der Formel von Aufgabe 1?
Hierzu zunächst noch ein Auszug aus dem oben genannten Internet-Dokument:

"Magic Square of Squares

It's an open question whether there exists a 3x3 magic square comprised entirely of square integers. Martin Gardner has even offered $100 for the first such square (or, I suppose, a proof that no such square exists). Before considering the possibility of such a square, it's worthwhile to review some basic facts about arbitrary 3x3 magic squares, defined as an array of numbers

$$\begin{matrix} A & B & C \\ D & E & F \\ G & H & I \end{matrix}$$

such that each row, column, and main diagonal has the same sum S."

Nun wird zunächst gezeigt, dass das Element E in der Mitte gleich 1/3 der Summe S ist.

Hierzu stellen wir die acht möglichen Gleichungen auf.

$$\begin{array}{llll} A+B+C = S & \mathbf{D+E+F = S} & G+H+I = S & \mathbf{A+E+I = S} \\ A+D+G = S & \mathbf{B+E+H = S} & C+F+I = S & \mathbf{C+E+G = S} \end{array}$$

Nun werden alle Gleichungen, die E enthalten, addiert, und die Terme werden geschickt zusammengefasst (bitte nachrechnen!) – auf diese Idee kommt das CAS nicht!

Wir arbeiten mit 8 Gleichungen und 9 Variablen!!!

$$\begin{aligned} (A+B+C) + (D+E+F) + (G+H+I) + 3E &= 4S \\ S \quad + \quad S \quad + \quad S \quad + 3E &= 4S \\ 3S + 3E &= 4S \\ E &= S / 3 \end{aligned}$$

Damit wissen wir, dass das mittlere Element gerade ein Drittel der gewählten Summe sein muss. Zum Beispiel ist für die Summe $S = 15$ das mittlere Element $E = 5$. Die Lage ist also zur Zeit so:

A	B	C
D	**5**	F
G	H	I

Nun wählen wir gemäß des obigen (h, i)-Quadrates H und I als Variable und können die anderen Elemente mit H und I ausdrücken. Da die magische Summe $S = 15$ ist, gilt:

$A = 15 - 5 - I = 10 - I$ (Hauptdiagonalen)
$G = 15 - H - I$ (letzte Zeile)
$B = 15 - 5 - H = 10 - H.$ (zweite Spalte)

Mit diesen Werten können nun auch C, D und F leicht bestimmt werden, so dass sich schließlich ergibt:

$10-I$	$10-H$	$-5+H+I$
$-10+H+2I$	5	$20-H-2I$
$15-H-I$	H	I

Wählt man z. B. $H = 4$ und $I = 7$, so ergibt sich als magisches Quadrat:

3	6	6
8	5	2
4	4	7

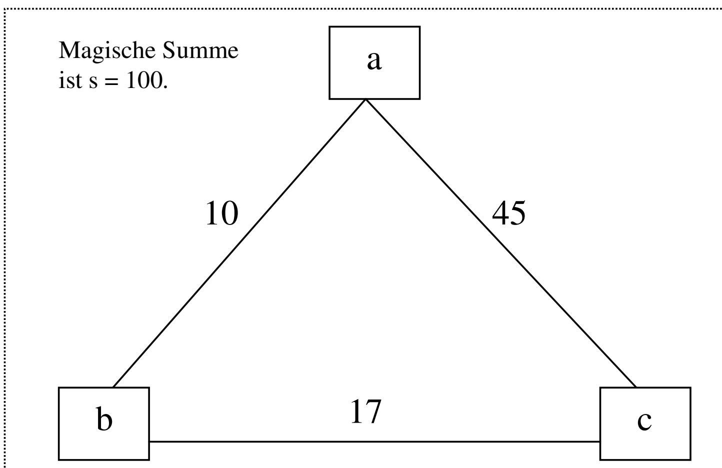
Magische Quadrate und magische Dreiecke Arbeitsblatt 1.2.1

Aufgabe 1
Oben wurde für das mittlere Element E eines magischen (3,3)-Quadrats gezeigt E = S/3.
Nun sollen (statt H und I wie oben) die Elemente A und C als *freie Variable* gewählt werden.
Zeige, dass sich dann die magischen Quadrate in der folgenden Form ergeben.

A	S-A-C	C
S/3-A+C	S/3	S/3+A-C
2S/3-C	-S/3+A+C	2S/3-A

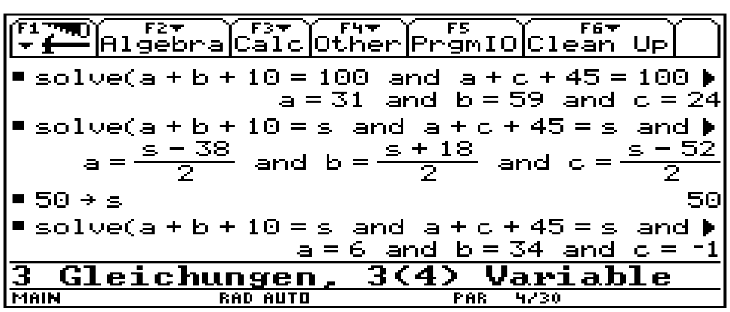
Aufgabe 2
a) Welche magischen Quadrate erhält man für S = 21, A = 1 und B = 2?
b) Definiere einen passenden Baustein am TI-92 für das magische Quadrat von Aufgabe 1 und löse dann Aufgabe 2a mit dem CAS.

Aufgabe 3
Konstruiere ein magisches Dreieck mit der magischen Summe S = 100 und den unten angegebenen Werten. Kommentiere dazu den TI-92-Lösungsweg. Errechne dann die Dreiecke für S = 90 (80, 70, 101(?)).



Zuletzt könntest du auch das Problem abwandeln, indem du andere Zahlen statt 10, 17 und 45 wählst. Wird es mit 10, 10, 10 leichter?

Du könntest dir auch andere Figuren mit ähnlichen Aufgaben ausdenken!



Warum wurden gerade diese Eingaben durchgeführt? Deute die Ergebnisse. Versuche die erste Gleichungseingabe durch Handrechnung zu bearbeiten.

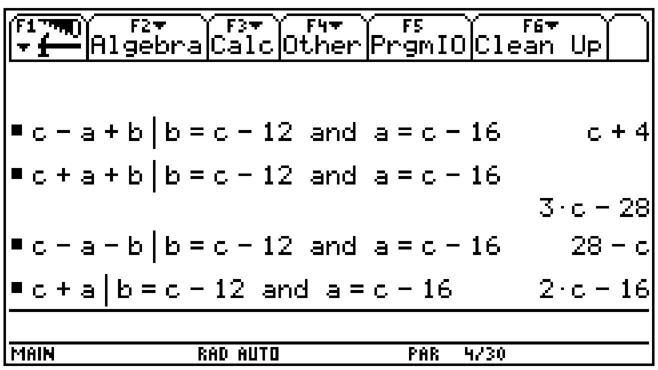
Magische Quadrate und magische Rauten — Arbeitsblatt 1.2.2

Aufgabe 1
Im Internet werden noch andere Formeln für magische (3, 3)-Quadrate angegeben, u. a. auch diese:

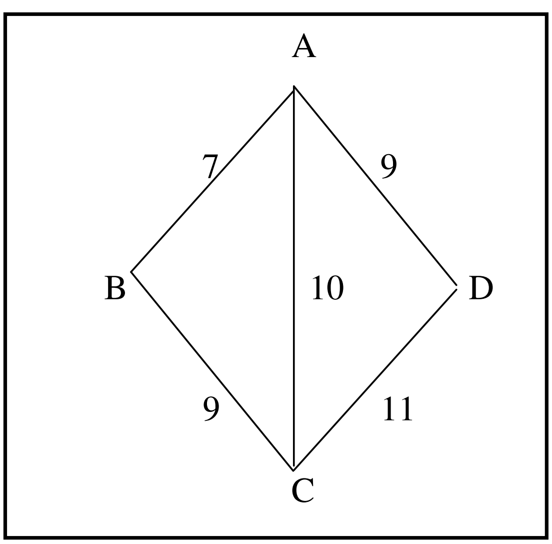
C−B	C+A+B	C−A
C−A+B	C	C+A−B
C+A	C−A−B	C+B

Wie groß sind A, B und C, wenn man die Elemente links oben und rechts oben kennt, wie es bei dem folgenden Quadrat der Fall ist? Beachte auch das CAS-Bild.

12	C+A+B	16
C−A+B	C	C+A−B
C+A	C−A−B	C+B



Aufgabe 2
Von der folgenden magischen Raute kennt man die Summe S längs der einzelnen Strecken. Sie beträgt S = 28. Wie groß sind A, B, C und D?



Lösungstipps:

1) A+7+B = 28, also B = –A+21
C =
D = –A+19

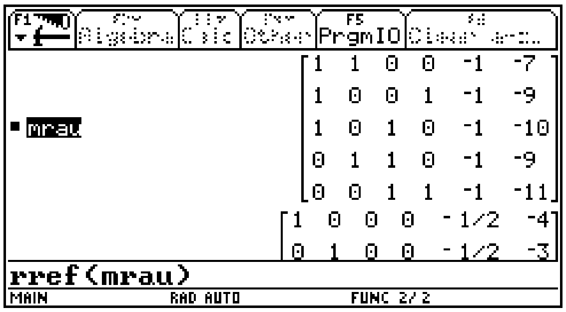
2) Eingesetzt in B+9+C = 28.

Das ergibt A =

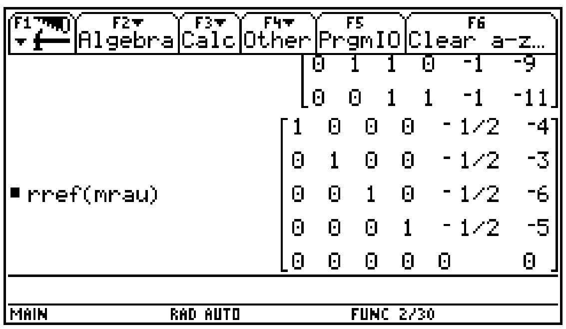
Usw.

Ausblick

Das Rechnen in den magischen Figuren kann selbstverständlich auch mit linearen Gleichungssystemen erfolgen – wegen der Größe der Systeme eine Sache für die Sekundarstufe 2. Beim TI-92 kann man zum Beispiel für Aufgabe 2 auf Arbeitsblatt 1.2.2 so vorgehen (hier wird gleich allgemein mit der Summe S gerechnet):



Eingabe des Gleichungssystems
A + B – S = –7
A + D – S = –9
A + C – S = –10 usw.
Die erweiterte Koeffizientenmatrix wird als "mrau" (magische Rautr) definiert.
Der Befehl rref(mrau) bearbeitet die Matrix mit dem Gauß-Algorithmus.



Auswertung
Das vereinfachte LGS ist
A = 0.5 S – 4
B = 0.5 S – 3
C = 0.5 S – 6
D = 0.5 S – 5
Das LGS hat unendlich viele Lösungen in Abhängigkeit von dem gewählten S..

Für den Wert S = 28 von Arbeitsblatt 2 ergeben sich damit die Lösung
A = 10, B = 11, C = 8, D = 9.

In ähnlicher Weise können auch andere magische Quadrate bearbeitet werden. Wie in den vorhergehenden Aufgaben verdeutlicht wurde, gibt es diverse Varianten der Aufgabenstellungen. Das Internet stellt unter dem Stichwort "magic squares" zahlreiche weitere Informationen über magische Figuren zur Verfügung. Bezüglich des Unterrichts in der Sekundarstufe 2 sei auch auf Vektorraum-Eigenschaften von magischen Quadraten hingewiesen.

2.1 Quadratische Gleichungen 1: Kreispunkte

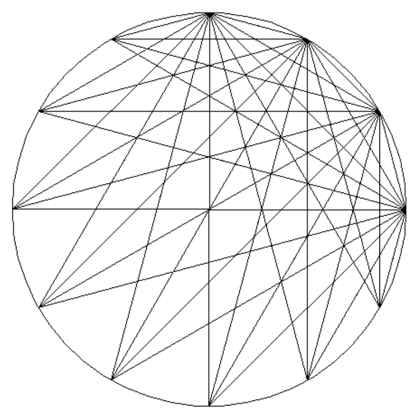
Für eine Unterrichtseinheit über quadratische Gleichungen gibt es zahlreiche interessante Einführungsprobleme. Es können Anwendungsprobleme oder auch innermathematische Probleme sein. Man sollte für den Einstieg solche Probleme auswählen, die in irgendeiner Form "weiterführend" sind, also zu zusätzlichen Fragestellungen anregen. In der folgenden Darstellung wird außerdem noch der Aspekt eines wirkungsvollen Computereinsatzes berücksichtigt. So ist das Beispiel 1 schon in der Herstellung der Abbildung ein Problem der Computergrafik. Beispiel 2 ruft nach Verallgemeinerungen, etwa wenn man auch andere Antennenmasthöhen zulässt.

Verbindungsstrecken zwischen Kreispunkten

Beispiel 1
Wie viel Verbindungsstrecken ?

Zeichne die Figur von Hand!

Falls du ein geeignetes Programm hast: Stelle die Figur vollständig her!



Eine Aufgabenformulierung zu der obigen Figur (dort sind nicht alle Verbindung gezogen) könnte so lauten:
Auf der Peripherie eines Kreises liegen gleichmäßig verteilt zwölf Punkte. Je zwei werden miteinander verbunden. Wie viel Verbindungsstrecken gibt es?

Lösung

Lösung: $(12 \cdot 11) / 2$. Begründe diesen Ansatz!
Vielleicht findet ihr auch den Ansatz 11+10+9+8+...+1.

Und nun für n Punkte

Aufgabenerweiterung 1:
Nun sollen n Punkte auf dem Kreis verteilt werden. Wie viel Strecken sind es?

Lösung: $n \cdot (n-1) / 2$. Begründe den Ansatz!

276 Strecken,
wie viel Punkte?

Aufgabenerweiterung 2:
Paula hat in einer anderen Zeichnung zur gleichen Problematik 276 Strecken gezählt. Falls sie richtig gezählt hat – wie viel Punkte müssten auf dem Kreis liegen?

Lösungsansatz:

$$\begin{aligned} n \cdot (n-1) \cdot 0.5 &= 276 \\ 0.5n^2 - 0.5n &= 276 \\ n^2 - n - 552 &= 0 \end{aligned}$$

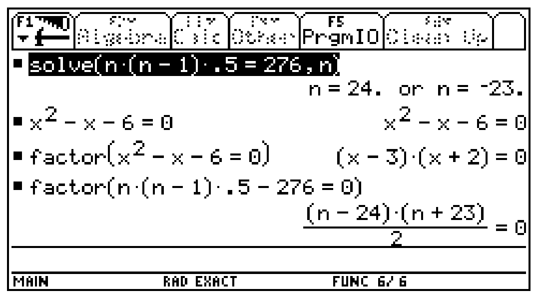
Wie löst man quadratische Gleichungen?

Die Gleichung n^2–n–552 = 0 ist eine so genannte quadratische Gleichung, weil die Variable n quadratisch auftritt. Derartige Gleichungen sind nicht so leicht zu lösen wie lineare Gleichungen. So würde uns zum Beispiel die Lösung von 2n+6 = 80 keine Probleme machen.

Wieder einmal solve

SOLVE

Nun haben wir uns schon öfter auf unser CAS verlassen, mit solve konnten wir so manche Gleichung lösen. Wie wir an der folgenden Abbildung sehen, klappt das auch hier. Aber wie macht der Rechner das und geht das auch von Hand? An dem auf die Abbildung folgenden Text kannst du dich mit dieser Problematik beschäftigen.



Die quadratische Gleichung x^2–x–6 = 0 wird weiter unten bearbeitet.

Lösung für Petras Aufgabe

Die Anwendung von solve auf unsere Gleichung liefert zwei Ergebnisse. Beide erfüllen die Gleichung n·(n–1) ·0.5 = 276 (Probe machen!), doch offenbar ist nur der Wert n = 24 für unser Problem brauchbar. Es waren also bei Petras Zählung 24 Punkte, die zu den 276 Verbindungen führten.

x^2–x–6 = (x–3)·(x+2)
Zerlegen in "Linearfaktoren"

Linearfaktoren

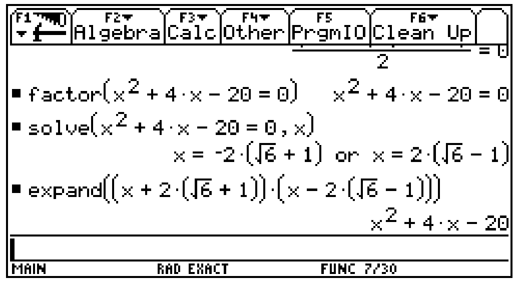
Da man lineare Gleichungen leicht lösen kann (siehe oben), versuchen wir einfach solche quadratischen Terme, mit denen wir es zu tun haben, zu "linearisieren". Wir probieren das am Beispiel x^2–x–6. Da können wir das Ergebnis schon im Kopf ermitteln. Der Befehl factor(x^2–x–6=0) führt tatsächlich zu zwei sogenannten "Linearfaktoren", nämlich (x–3) und (x+2), siehe obiges Bild. Und nun kann für die Lösungen so argumentiert werden:
(x–3) · (x+2) = 0. Wenn A·B=0, so kann entweder nur A=0 sein, nur B=0 sein oder A und B sind beide gleich 0. Also hier:
(x–3) = 0 → x = 3 oder (x+2) = 0, also x = –2.
Wie das Bild auch noch zeigt, kann das CAS mit factor auch die Gleichung n· (n–1)·0.5=276 linearisieren. Aus dem Ergebnis (n–24) · (n+23) / 2 = 0 kann man für n = 24 oder n = –23 ablesen.

Wenn es gelingt, die quadratische Gleichung in Linearfaktoren zu zerlegen, kann man die Lösungen sofort ablesen.

Erproben wir die Zerlegung ein weiteres Mal, nun z. B. mit dem Term x^2+4x–20. Wieder soll uns das CAS helfen.

factor schafft die Zerlegung nicht!

FACTOR



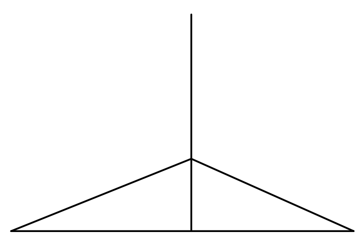
Enttäuscht? factor packt es nicht! Aber mit solve können wir die Gleichung lösen und erhalten (siehe Bildschirm)
$x_1 = -2\cdot(\sqrt{6} + 1)$ und $x_2 = 2\cdot(\sqrt{6} - 1)$.
Möglicherweise liegt das Scheitern der Zerlegung in dem Vorhandensein von Wurzeln in den Lösungen. Wenn wir den umgekehrten Weg gehen, also von den Lösungen ausgehend die Linearfaktoren aufbauen:
$(x - (-2\cdot(\sqrt{6} + 1)) \cdot (x - 2\cdot(\sqrt{6} - 1))$, so ergibt sich tatsächlich wieder die quadratische Gleichung $x^2 + 4x - 20 = 0$.

Es bleibt also dabei:
Bei der Lösung einer quadratischen Gleichung kommt es auf das Finden der Linearfaktoren an.

Beispiel 2
Antennenmast

Seillängen an einem Antennenmast

Ein 6 m hoher Antennenmast soll in einer Höhe von 1.80 m durch Abspannseile gesichert werden. Diese werden im Abstand von 4 m im Boden verankert. Wie lang sind die Seile?



Beschrifte die Zeichnung mit den genannten Maßen und erläutere den folgenden Ansatz:
$4^2 + 1.8^2 = x^2$ oder $x^2 + 0*x - 19.24 = 0$.

Lösung

Was ergibt factor(x^2–19.24 = 0) ? Mit solve(x^2–19.24 = 0,x) oder mit der Wurzeltaste ergibt sich x = 4.38634, x = –4.38634. Länge der beiden Abspannseile?

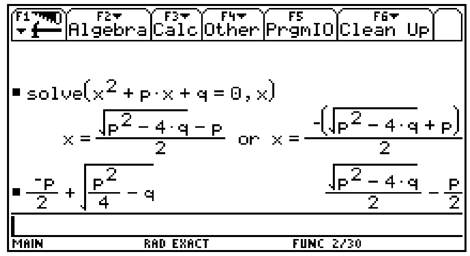
Allgemeine Lösung einer quadratischen Gleichung

Die (p,q)-Formel

Da quadratische Gleichungen bei vielen Anwendungen, auch in der Sekundarstufe 2, immer wieder vorkommen, lohnt sich die Entwicklung einer Formel. Sie ist bekannt unter dem Namen (p,q)-Formel, weil sie quadratische Gleichungen der "Normalform" $x^2 + p\cdot x + q = 0$ bearbeitet. Diese Formel ist natürlich auch dem CAS bekannt.

Befragen wir unseren Computer!

Dazu geben wir ein: solve(x^2+p*x+q=0,x)



Das CAS gibt uns also zwei Lösungen aus.

Die (p,q)-Formel

$$x_1 = \frac{(\sqrt{p^2-4q}-p)}{2} \qquad x_2 = -\frac{(\sqrt{p^2-4q}-p)}{2}$$

In Formelsammlungen findet man für die beiden Lösungen zuweilen auch andere Terme angegeben. Einer dieser Terme wurde in das CAS eingegeben (siehe Bild oben). Das Umformungsergebnis entspricht (fast) unserer Formel.

Formel erproben

Aufgabe:
Wir haben bei den Aufgaben "Verbindungsstrecken" und "Antennenmast" die beiden quadratischen Gleichungen
1) $n^2 - n - 552 \quad = 0$
2) $x^2 - 33.64 \quad = 0$
gewonnen. Löse diese nun noch einmal mit der (p,q)-Formel.
Beachte bei 1): $p = -1$, $q = -552$, bei 2) $p = 0$, $q = -33.64$.

Wie ist das hier?

Aufgabe:
Oben wurde die p,q-Formel mit den Ergebnissen für x_1 und x_2 entwickelt. Berechne mit Hilfe des Computers die Terme x_1+x_2 und $x_1 \cdot x_2$. Was fällt auf? Bilde die Terme auch mit Handrechnung.

Rückblick auf die Unterrichtseinheit und Ausblick:

Die ersten Beispiele für quadratische Gleichungen sollten deren Bedeutung in Anwendungsproblemen erkennen lassen. Diese Beispiele sollten zudem eine leichte Kontrolle der Ergebnisse ermöglichen.
Die hier angebotene Einführung geht davon aus, dass die Schüler den Befehl solve bereits kennen. Der frühzeitige Einsatz dieser Anweisung, die die Lösungen quadratischer Gleichungen quasi über eine *black-box* ermittelt (allerdings immer mit der Möglichkeit der Ergebniskontrolle), bedarf anschließend einer vertiefenden Betrachtung. Für diese sind die Linearfaktoren A und B mit A*B=0 geeignet, die auch längerfristig im Unterricht von Bedeutung sind. Mit dem Ansatz über Linearfaktoren kann man auch die Formeln auf ihre Richtigkeit überprüfen, siehe Arbeitsblatt. Der Aspekt der Visualisierung quadratischer Gleichungen im Koordinatensystem wurde in dieser Unterrichtseinheit nicht verfolgt, da die Aufgaben dafür nicht so geeignet sind. Beide Aufgaben eignen sich jedoch gut zu Erweiterungen mit zusätzlichen Fragestellungen (Methode der Aufgabenvariation). Hiervon wird in den folgenden Arbeitsbögen ausgiebig Gebrauch gemacht. Visualisiert wird beim zweiten Einführungsvorschlag.

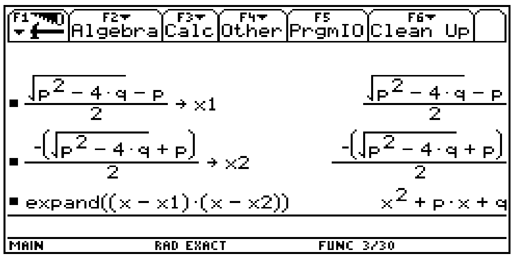
Quadratische Gleichungen und eine kubische Gleichung — Arbeitsblatt 2.1.1

Aufgabe 1: Geburtstagsgäste

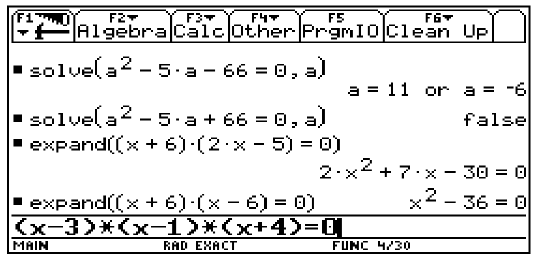
Auf einer Party befinden sich zahlreiche Geburtstagsgäste. Mit einem Sektglas in der Hand wird gerade ein Hoch auf die Dame des Hauses ausgebracht. Dabei stößt jede Person mit jeder anderen einmal an. Die rechengewandte Frau, die schon längst den Überblick über die Anzahl der Anwesenden verloren hatte, erkennt sofort die einmalige Gelegenheit, diese Anzahl festzustellen. Sie hört insgesamt 210 Gläseranstöße. Nun weiß sie Bescheid! Du auch?

Aufgabe 2: Mathematik im Bildschirm

Erläutere die beiden folgenden Bildschirmabdrucke.



Eine Ergänzung zur allgemeinen Lösung



Beispiele für quadratische Gleichungen

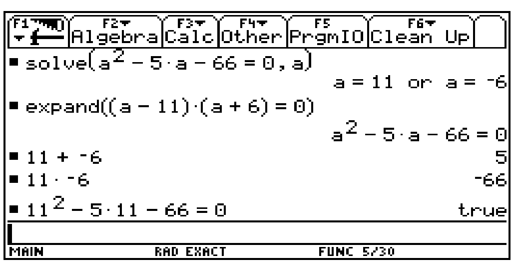
Aufgabe 3: Noch eine Lösungsformel

Manchmal betrachtet man eine andere Grundform für quadratische Gleichungen, die noch etwas allgemeiner ist: $a \cdot x^2 + b \cdot x + c = 0$.

a) Bestimme mit deinem CAS eine Lösungsformel für diese Gleichungsform.

b) Welcher Zusammenhang besteht zwischen dieser (a,b,c)-Form und der (p,q)-Form?

Aufgabe 4: Proben bei quadratischen Gleichungen



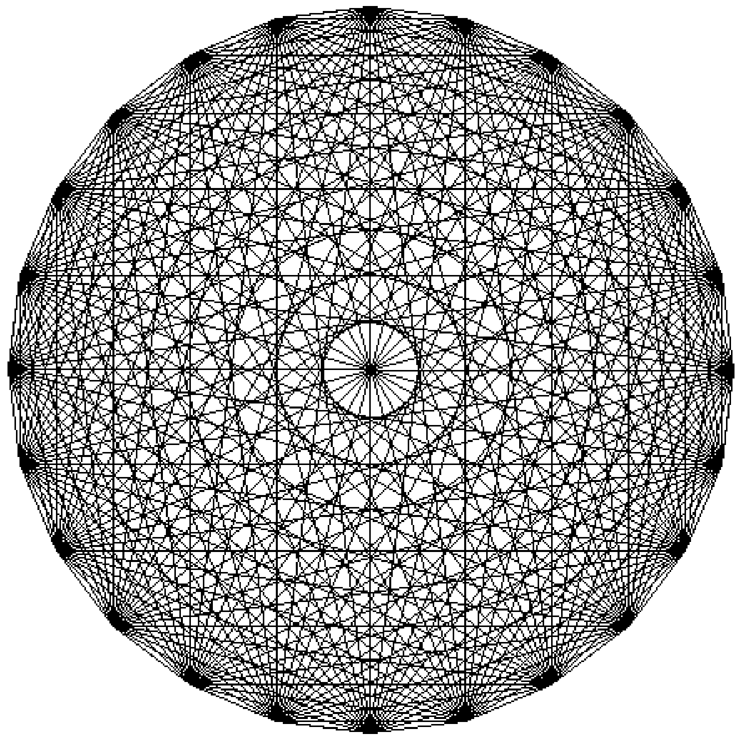
Der nebenstehende Bildschirm zeigt einige Möglichkeiten, für errechnete Lösungen eine Probe (teilweise sogar ohne Rechner) zu machen. Inwiefern? Interessant sind besonders die Proben 11+(–6) und 11·(–6). Vermutung?

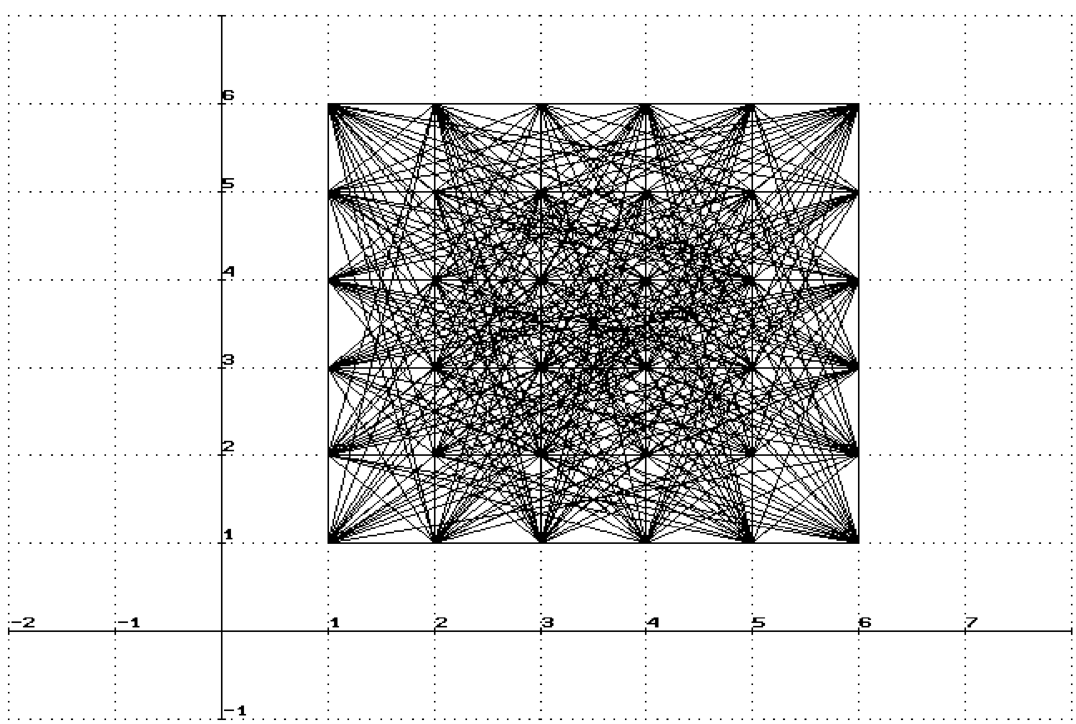
Aufgabe 5:
Ausblick: Ein Würfel wird verkleinert – eine kubische Gleichung

Ein großer Würfel wird verkleinert, indem man zwei Kantenlängen um 2 cm kürzt. Danach beträgt das Volumen des Würfels noch 75.5 cm^3. Welche Kantenlänge hatte der ursprüngliche Würfel? Gehe bei dieser Aufgabe so vor:

1) Planzeichnung, so dass die Würfelverkleinerung deutlich wird.
2) Rechnerischer Ansatz.
3) Benutze nun an allen passenden Stellen das CAS.
4) Werte das Ergebnis aus.

Komplexe Figuren – Wie viele Verbindungsstrecken? **Arbeitsblatt 2.1.2**





2.2 Quadratische Gleichungen 2: Kugelstoßen

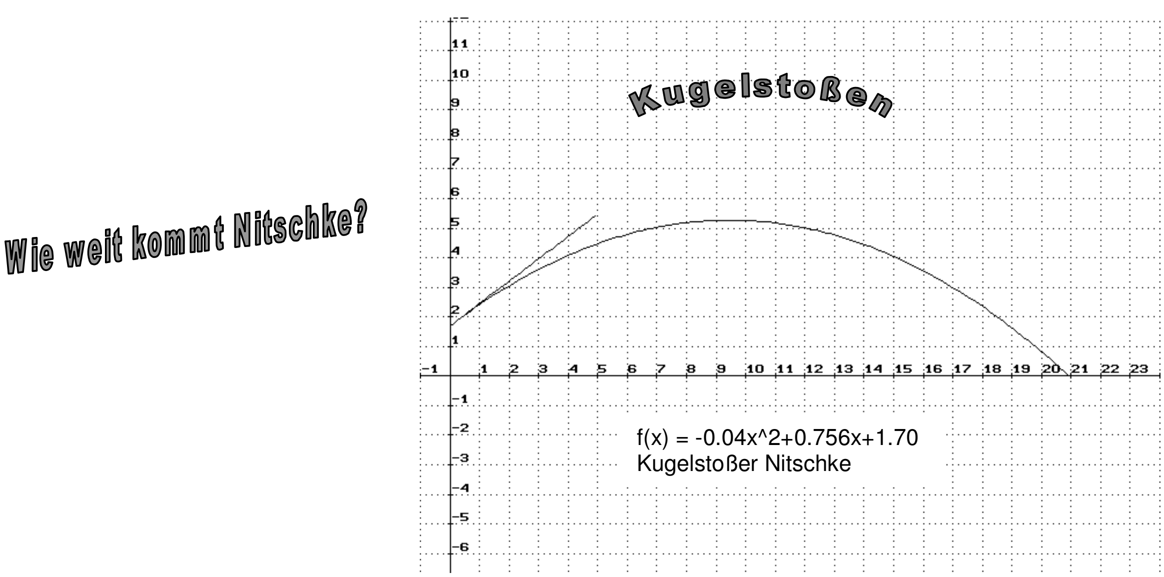
Der hier geschilderte Ansatz benutzt ein Problem aus dem Sport: Kugelstoßweiten. Möglichkeiten der Modellbildung können nachgelesen werden in "Modellbildungen zum Kugelstoßen" (Autor: Peter Bardy), Materialien für einen realitätsbezogenen Mathematikunterricht, Band 3, Verlag Franzbecker, 1996. Wir beschränken uns hier auf den mathematischen Gehalt. Zu den Vorgaben gehört eine graphische Darstellung, die den Sachverhalt verdeutlicht. Die Frage nach der Stoßweite führt zur Lösung einer quadratischen Gleichung mit Koeffizienten, die nicht gerade zur Handrechnung motivieren. Für den Einsatz eines CAS spricht weiterhin, dass für den Schüler dann auch Varianten zugänglich werden: Unterschiedliche Abwurfhöhe und Abwurfwinkel, unterschiedlicher Kraftaufwand, Einbeziehung des Luftwiderstands usw. Diese Parameter führen dann auf unterschiedliche Funktionsgleichungen.

Unterrichtsvoraussetzungen: Für den Einsatz des Abschnitts gibt es mehrere Möglichkei-ten:
1) Parabeln sind schon vorher betrachtet worden. Dann handelt es sich
a) um eine Übung oder
b) um eine Einführung in die Problematik "Schnittpunkte mit der x-Achse."

2) Parabeln sollen an Hand der Sportthematik eingeführt werden. Dann handelt es sich um einen problemorientierten Einstieg, der sich
a) bei enger Auslegung, allein um Parabelgleichungen und Schnittpunktberechnungen kümmert oder
b) bei Berücksichtigung des Modellaspektes und der Sportrealität auch als längeres Projekt weitergeführt werden kann. In diesem Fall wird man dann auch nicht sofort mit den Funktionsgleichungen beginnen.

Hier wird der Fall 1b weiter ausgeführt.

Zur Information:
Zur Optimierung von Leistungen beim Sport interessiert man sich unter anderem auch für mathematische Modelle, worüber man in entsprechenden Büchern oder im Internet nachforschen kann. So kann z. B. die Bahn einer Kugel beim Kugelstoßen durch ein Modell beschrieben werden, das **Parabeln** verwendet, wobei der Luftwiderstand vernachlässigt wird. Die Kugel stellen wir uns dabei als Punkt vor. In der Abbildung findet sich auf der vertikalen Achse die Stelle, an der die Kugel die Hand des Kugelstoßers verlässt.



Kugelstoßer	Parabel-Gleichung	Weite
Nitschke	f(x) = –0.04x^2 +0.756x+1.70	
Beyer	g(x) = –0.05x^2 +0.786x+1.70	
Lamper	h(x) = –0.045x^2+0.756x+1.72	

Wer gewinnt?

Aufgabe:
Wie weit stoßen die drei Sportler? In welcher Höhe verlassen die Kugeln ihre Hand?

Lösung:
Wir wollen die Parabeln zunächst auf dem Bildschirm unseres CAS grafisch darstellen.

Das erste Bild ist noch nicht problemgerecht. Warum nicht?

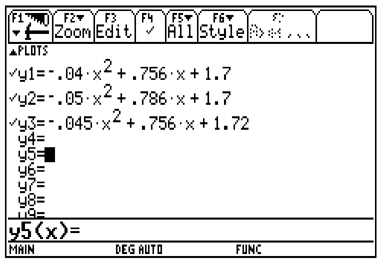


Bild 1

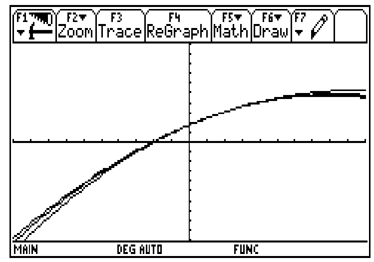


Bild 2

Mit Bild 3 können wir schon mehr anfangen! Was sagt Bild 4 aus?

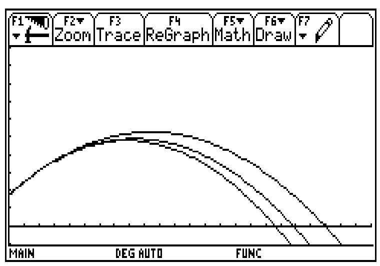


Bild 3

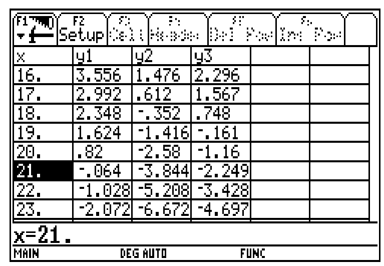


Bild 4

Was sagen die Bilder 5 und 6 aus? Bei Bild 6 wurde nur der Graph zu y2 gezeichnet.

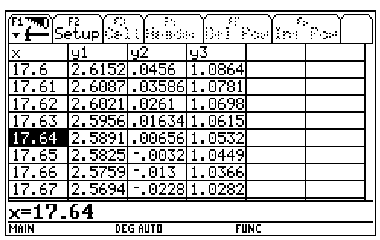


Bild 5

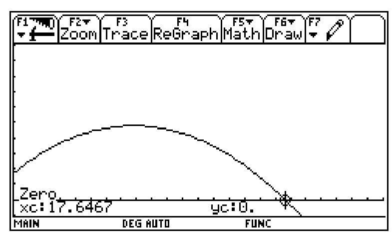


Bild 6

Beyer 17.65

Nitschke 20.93

Für Bild 6 wurde so vorgegangen:

1) Im y=Editor y1 und y3 mittels der F4-Taste aus der Zeichnung nehmen.
2) y2 zeichnen lassen. Dann F5 und Zero wählen.
3) Lower Bound (links vom Schnitt der Kurve mit der x-Achse) und Upper-Bound (rechts vom Schnitt) beliebig wählen.
4) Wir erhalten das Ergebnis: Die Wurfweite von Beyer beträgt etwa 17.65m. Damit gewinnt er allerdings nicht.

Wir fassen den Lösungsweg zusammen:
Bei der Bestimmung der Wurfweite sind wir von einer gegebenen Wurfparabel ausgegangen. Wie wir aus den Funktionsgleichungen erkennen, erhält man mit Termen wie zum Beispiel
$f(x) = -0.04x^2 + 0.756x + 1.70$ offenbar Parabeln. Es kommt nun darauf an, ihre **Nullstellen** zu bestimmen – das sind die Stellen, an denen der Graph die x-Achse schneidet. Dort ist der Funktionswert (y-Wert) gleich 0, so dass die Aufgabe lautet:

Löse die Gleichung $-0.04x^2 + 0.756x + 1.70 = 0$ nach x auf.

Die Lösungen haben wir mit einem grafischen Ansatz und dann mit Zero gefunden. Wir können die Güte der Lösungen auch noch überprüfen. Betrachte dazu das folgende CAS-Bild.

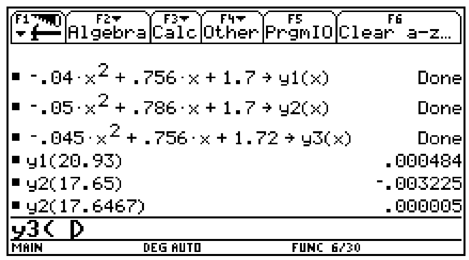


Bild 7

Wir sehen:
Die eingesetzten Werte sind hinreichend genau.

Genauere Ergebnisse (mit 4 bzw. 5 Nachkommastellen) können, wie bei anderen Gleichungsarten auch, mit dem Befehl Solve ermittelt werden, siehe Bild 8.

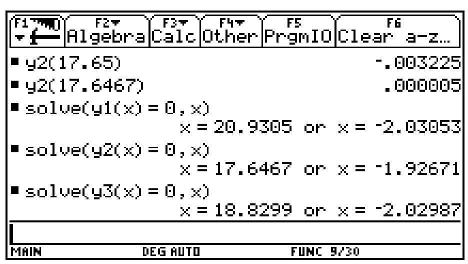


Bild 8

Es gibt auch negative Nullstellen (siehe Bild 2), aber diese kommen natürlich nicht in Frage.

Zum Nachdenken:
Betrachte das nebenstehende Bild. Sind Parabelbögen dabei? Wie könnte man so etwas feststellen?

Wasserspiele in London

Parabelscharen und Schnittpunkte **Arbeitsblatt 2.2.1**

Aufgabe 1:

a) Stelle Bild 1 mit deinem Rechner her.
b) Äußere eine Vermutung für die Schnittpunkte je zweier Parabeln.
c) Bestätige die Vermutung durch passende Rechnungen.
d) Ein möglicher Weg wird in dem Bildschirmabdruck (Bild 2) vorgeschlagen. Erläutere diesen Weg. Hinweis: $(x–3)^2 –1 = (x–1)^2 – 1$ ist äquivalent zu $(x–3)^2 = (x–1)^2$.
.

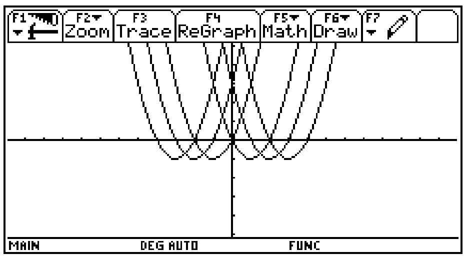


Bild 1

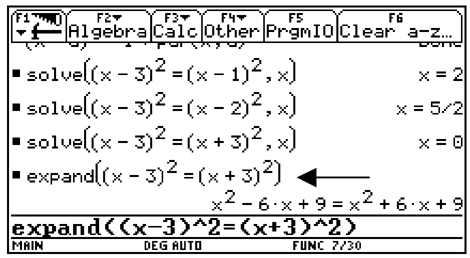


Bild 2

e) Löse die mit einem Pfeil markierte Gleichung von Hand. Inwiefern hilft dir dabei die Zeile mit dem Befehl expand?

Aufgabe 2:

Am TI-92 werden die folgenden Eingaben durchgeführt:

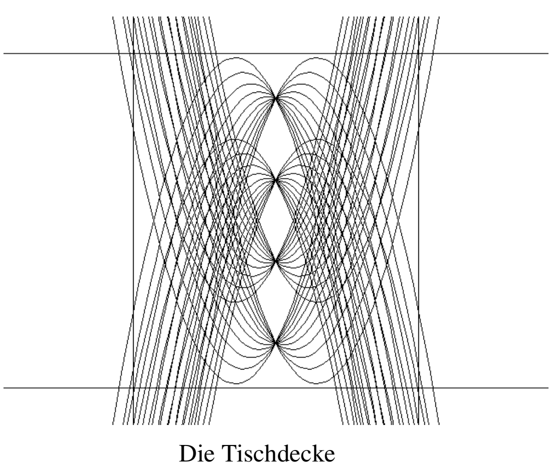
Define parabel(x,a) = (x – a)^2 – 4 und
Define y1(x) = parabel(x,a) | a = {–4,–3,–2,–1,0,1,2,3,4}.

Dabei wird durch die Angabe von | a = {–4,–3,–2,–1,0,1,2,3,4} festgelegt, welche Werte der Parameter a durchlaufen soll.

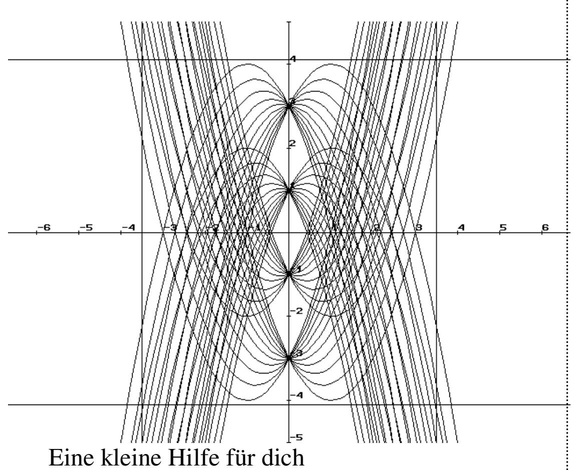
a) Welches Bild entsteht? Wo siehst du Zusammenhänge mit Aufgabe 1?
b) Was für ein Bild ergibt die Zeichnung von
(x–1)^2 + b | b= {–4,–3,–2,–1,0,1,2,3,4} → y2(x) ?

Aufgabe 3

Wie kann man das folgende Parabel-Tischdeckenmuster erzeugen?



Die Tischdecke



Eine kleine Hilfe für dich

3.1 Lineare Gleichungssysteme 1: Lagerhaltung

Es gibt viele Problemstellungen, die auf lineare Gleichungssysteme und deren Lösung führen, so dass diese mit Recht einen hohen Stellenwert in den Sekundarstufen 1 und 2 haben. Ob jedoch alle in der Sekundarstufe 1 bisher üblichen Lösungsverfahren (Additionsverfahren, Gleichsetzverfahren, Einsetzverfahren) bei dem Vorhandensein von Computeralgebra-Systemen dort noch nötig sind, muss bezweifelt werden. CAS eröffnen auch hier völlig neue Wege.
Hier wird mit dem Einstieg über ein Materialverflechtungsproblem sogleich auf das Matrizenverfahren (Gauß-Algorithmus) abgezielt, das eine Systematisierung des Additionsverfahrens ist und später für die umfangreicheren Gleichungssysteme in der Sekundarstufe 2 das bedeutungsvollste ist.

Lagerbestand und Bestellungen

Ein Textilbetrieb fertigt zwei verschiedene Kinderröcke R1 und R2, die jeweils aus zwei Stoffen S1 und S2 bestehen. Die für einen Rock benötigten Stoffmengen (in passenden Einheiten) sowie der derzeitige Lagerbestand (in der gleichen Einheit) können der folgenden Tabelle entnommen werden.

	Rock R1	Rock R2	derzeitiger Lagerbestand an Materialien
Benötigte Stoffmenge S1	6	2	456
Benötigte Stoffmenge S2	4	5	348

Von Stoff 1 werden also 6 Einheiten für Rock 1 und 2 Einheiten für Rock 2 benötigt.

Materialverbrauch

a) Wie viel Material wird für eine Bestellung von 5 Röcken R1 und 8 Röcken R2 benötigt? Wie lautet der neue Lagerbestand?

Aufbrauchen des Lagers

b) Untersuche, ob sich der in der Tabelle angegebene Lagerbe stand (456; 348) durch eine passende Bestellung vollständig aufbrauchen läßt.

Lösungen

Lösung zu a)
Materialbedarf von S1: 5*6 + 8*2 = 46 Einheiten
Materialbedarf von S2: 5*4 + 8*5 = 70 Einheiten
Lagerbestand ist jetzt: 410 Einheiten von S1, 278 Einheiten von S2. Wieso?

Lösung zu b)
x sei die Stückzahl von S1, y die Stückzahl von S2. Dann muss gelten:

Lineares Gleichungssystem (LGS)

Gleichung G1: $6x + 2y = 456$
Gleichung G2: $4x + 5y = 348$

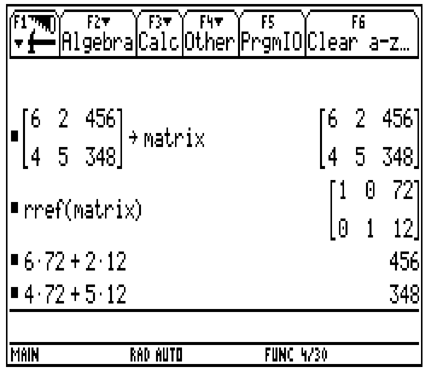
Der Lösungsansatz erfolgt mit Hilfe eines "linearen Gleichungssystems", kurz LGS. Es besteht hier aus zwei Gleichungen G1 und G2 mit je zwei Variablen x und y.

Probe: Du musst die Richtigkeit für *beide* Gleichungen überprüfen!

Als Lösung ergibt sich x=72, y=12, also die Lösungsmenge {(72, 12)}. Mit dieser Bestellung von 72 Röcken R1 und 12 Röcken R2 lässt sich der Lagerbestand vollständig aufbrauchen.

Bestätige das durch eine Probe!

Lösung mit einem CAS



Mit dem TI-92 kann man das LGS so eingeben: [[6,2,456][4,5,348]]. Daraus macht der Rechner die im Bild sichtbare Matrix. Mit dem Be-fehl rref(matrix) erzeugt der Rechner eine neue Matrix und damit ein neues, einfacheres LGS. Auf dem Computerbild ist außer der Umformung auch noch die Probe zu sehen.

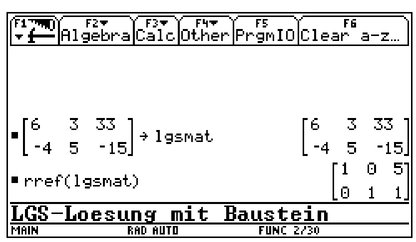
Das ideale Gleichungssystem!

Wir notieren das neue Gleichungssystem:
G1-neu 1x + 0y = 72
G2 neu 0x + 1y = 12.
Das neue System ist geradezu ideal zum Ablesen der Lösung: Man sieht sofort, dass x = 72 und y = 12.

Merke: Bei linearen Gleichungssystemen mit 2 Variablen ergeben sich als Lösungen immer Zahlenpaare!

Nun ist wohl die Hauptfrage:
Wie schafft es das CAS, aus dem schwierigen LGS ein so leichtes LGS zu machen, aus dem man die Lösung sofort ablesen kann?

Sehen wir uns dazu noch einen zweiten Bildschirmabdruck an:



Welches Gleichungssystem wurde hier bearbeitet?
Zu welchem System hat der Rechner umgeformt?
Wie heißt die Lösungsmenge?

Die Grundidee: Das zweite LGS ist deshalb so einfach, weil als Koeffizienten von x und y jeweils nur Einsen und Nullen auftreten. Das also gilt es zu erreichen!
Bei dem vorliegenden LGS teilen wir die erste Gleichung durch 6. Damit wird schon die erste "1" erzeugt:

Schrittweise Vereinfachung des LGS durch Handrechnung

G1: 6x + 3y = 33 // : 6
G2: -4x + 5y = -15 Gleichung 2 erst einmal unverändert lassen

So lange neue Gleichungen erzeugen, bis sie ganz einfach zu lösen sind!

G1:	$1x + 0.5y = 5.5$	das ist die neue Gleichung 1
G2:	$-4x + 5y = -15$	// G2:=G1 + G2 / 4,

> Hinweis: G2:=G1 + G2 / 4 bedeutet: Die neue Gleichung G2 ergibt sich durch die Rechnung: Gleichung G1 + 1/4 der alten Gleichung G2.

G1:	$1x + 0.5y = 5.5$	Gleichung bleibt unverändert
G2:	$0x + 1.75y = 1.75$	// G2:= G2 / 1.75
G1:	$1x + 0.5y = 5.5$	// G1:= G1 - G2 / 2
G2:	$0x + 1y = 1$	Gleichung fertig
G1:	$1x + 0 = 5$	Also ist x=5, y=1, so wie
G2:	$0x + 1y = 1$	es auch der Bildschirm zeigt.

So könnte es das CAS gemacht haben!

Mischungsaufgabe 1

Auch die folgende Aufgabe führt auf ein lineares Gleichungssystem:
Zwei Sorten Tee zu 25 Euro und 35 Euro je Kilogramm, sollen so gemischt werden, dass ein Preis von 28 Euro entsteht. Berechne das Mischungsverhältnis.

- Erläutere zuerst den folgenden Ansatz:
  $25a + 35b = 28$
  $a + b = 1$
- Löse das LGS mit dem CAS-Befehl rref und dann von Hand nach der obigen Methode.
- Deute das Ergebnis a = 0.7, b = 0.3

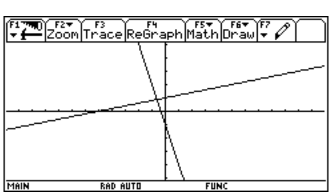
Mischungsaufgabe 2
Wo steckt der Fehler?

Eine ähnliche Tee-Mischungsaufgabe wie oben hat das Gleichungssystem
$25a + 35b = 40$
$a + b = 1$
ergeben.
Löse das LGS. Wo steckt der Fehler?

Schnittpunkt zweier Geraden

Gegeben sind zwei Geraden mit den beiden Gleichungen $y = 0.2x + 1$ und $y = -3x - 1$. In welchem Punkt schneiden sich die Geraden?
Hinweise:

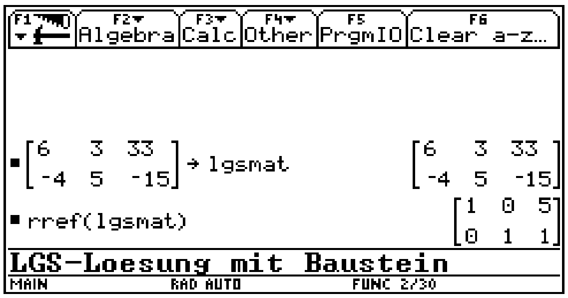
1) Du kannst die Gleichungen so umformen, dass sich ein LGS der von oben bekannten Form ergibt.
2) Es gibt aber auch die so genannte "Gleichsetzmethode", die hier weiterhilft. Informiere dich über diese Methode, falls sie dir noch unbekannt ist.
3) Eine weitere Methode besteht darin, die Geraden in ein Koordinatensystem einzuzeichnen und ihren Schnittpunkt abzulesen. Auch das geht mit dem CAS.



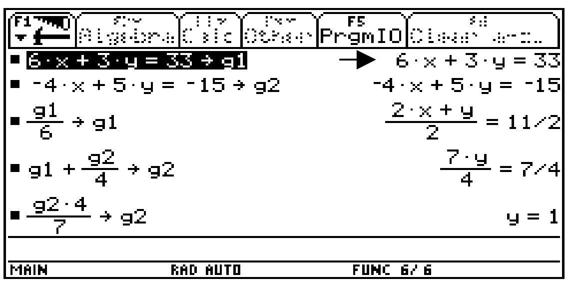
Schrittweise Lösung eines LGS mit dem CAS

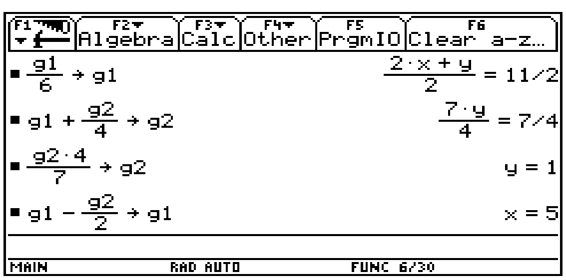
Arbeitsblatt 3.1.1

Aufgabe 1: Kommentiere die folgenden Bildschirmabdrucke!



lgs99-3.tif





Aufgabe 2:
Welches Rechnerprotokoll würde sich für das Gleichungssystem
G1 $2a - 6b = 10$
G2 $8a + 5b = 11$
ergeben?

Das kommentierte Rechnerprotokoll – ergänze!

g1:=g1 // 6, die alte Gleichung (siehe →)
wird durch 6 dividiert, um als Koeffizient vor x eine 1 zu haben.
Beachte: Die CAS-Ausgabe ist gleichbedeutend mit
$x + y/2 = 11/2$.

g2:=g1+g2 / 4
g2:=g2*4/7

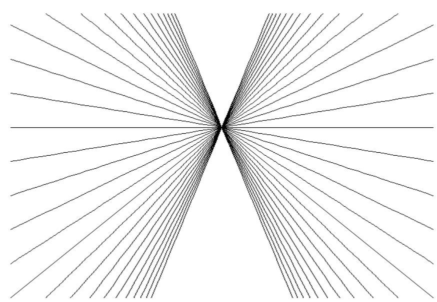
Projektarbeit - Geradenbüschel Arbeitsblatt 3.1.2

- Die folgende Problemstellung sollt ihr in mehreren Gruppen bearbeiten.
- Irgendwie hängen alle Teilproblemstellungen miteinander zusammen. So empfiehlt es sich, auch mal zum Nachbarn zu sehen und Informationen auszutauschen.
- Auch ein Blick ins Schulbuch kann nicht schaden.
- Am Ende von Problem 1 soll jede Gruppe ihre Ergebnisse vorstellen. Überlegt euch also, wie ihr das Referat unter euch aufteilt.
- Danach wird Problem 2 bearbeitet und auch hier werden die Lösungen vorgetragen.
- Die Dokumentation eurer Arbeit könnte mit den Dokumentationen der anderen Gruppen zu einer Gesamtdokumentation zusammengefasst werden.
- Eure Lehrerin bzw. euer Lehrer wird am Ende auch die tieferen mathematischen Hintergründe und Zusammenhänge eurer Arbeit mit euch besprechen.
- So entsteht schließlich ein Heft mit interessanter Mathematik, das ihr vorzeigen könnt und das eine gute Grundlage eurer weiteren Arbeit ist.
- Vielleicht habt ihr auch die Möglichkeit, eure Arbeit im Internet zu veröffentlichen.
- Einschließlich der Dokumentation und der Referate werdet ihr etwa vier Stunden benötigen (vielleicht auch eine weniger oder mehr).

Und nun das Problem! Es handelt sich um ein Beispiel aus der Computergrafik:

Problem 1:
Zeichne mit dem Rechner möglichst viele Geraden durch einen Punkt. Es entsteht ein Geradenbüschel.

Gruppe A	durch den Punkt A(2,3),
Gruppe B	durch den Punkt B(–2,3),
Gruppe C	durch den Punkt C(–2,–3),
Gruppe D	durch den Punkt D(2,–3).



Problem 2:
Anschließend lösen die Gruppen A und B gemeinsam die folgende Aufgabe:
Leite eine Formel her (ggf. unter Verwendung des CAS), die für jede Gerade durch A und jede Gerade durch B sofort den jeweiligen Schnittpunkt errechnet! Die Gruppen C und D lösen die entsprechende Aufgabe für ihre Punkte C und D.

Weitere Schnittpunktberechnungen:
Formuliere für die folgenden Aufgaben jeweils das zum Problem gehörige Gleichungssystem.

- Berechne alle Schnittpunkte der Geraden mit den Gleichungen y = 5 bzw. x = 5 mit den Geraden eures Geradenbüschels.
- Berechne die Schnittpunkte aller Büschelgeraden mit der Winkelhalbierenden y = x.

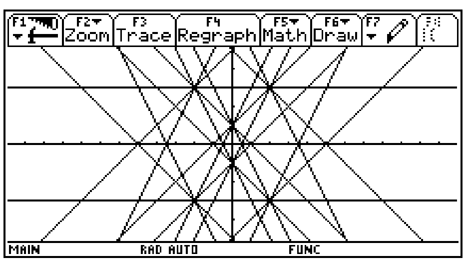
Lösungen zur Projektarbeit:

Zu Problem 1

Die Schülerinnen und Schüler werden vermutlich erst einzelne Geraden über die Form y = m*x+n bestimmen, die durch die gewünschten Punkte gehen. Sie wählen z. B. für A(2,3) eine Gerade mit der Steigung m=1, also 3 = 1*2 + n und n=1. Damit ergibt sich die erste Geradengleichung y = x + 1, die über x+1→ y1(x) eingezeichnet wird.

Irgendwann werden Sie auf die Idee kommen, m variabel zu lassen, so dass n = 3 – 2*m und damit y = m*x + (3 – 2*m). Nun können sie das Geradenbüschel erzeugen; beim CAS des TI-92 kann das so geschehen:
m*x + (3 – 2*m) | m = {–3, –2, –1, –0.5,0, 0.5,1,2,3} → y2(x) , ein Geradenbüschel durch A(2,3).
Die anderen Geradenbüschel können dem Bildschirmabdruck des y-Editors entnommen werden.

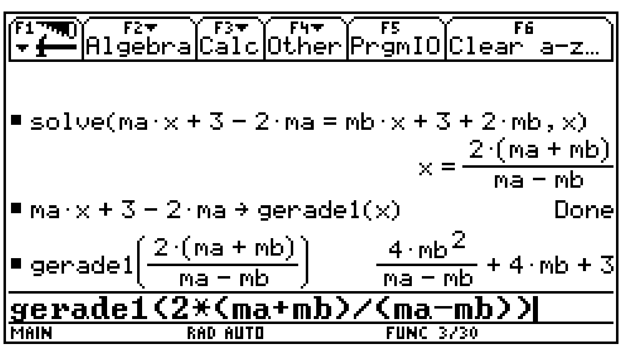
Bringt man nun alle Büschel auf den Bildschirm, so ergibt sich ein eindrucksvolles Panorama, das man allerdings schneller und besser mit einem Funktionenplotter erzeugt, siehe Abbildung.



Die Schüler haben vermutlich schon längst bemerkt, dass ihre Lösungen alle so ähnlich sind. Man kann diskutieren, wie man von einem Geradenbüschel zu einem anderen kommen kann (Spiegelung, Drehung) und ob man vielleicht sogar alle Lösungen zusammenfassen kann und eine allgemeine "Büschelformel" entwerfen kann. Für einen Punkt (a,b) ergibt sich ein "Büschelbaustein"
y-b = m(x-a), also y = mx+(b-am). Eingabe:
mx+(b-am) → busch(x,m,a,b)
Einge Beispielaufrufe diese Bausteins sind:
busch(x,m,2,3) | m = {-3,-2,-1,-0.5,0, 0.5,1,2,3}
busch(x,m,-5,1)| m = {-3,-2,-1,-0.5,0, 0.5,1,2,3}

Zu Problem 2

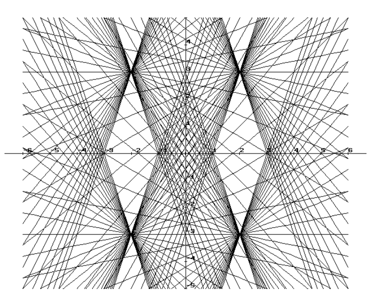
Diese Aufgabe ist nun um Einiges anspruchsvoller und übt Schnittpunktberechnungen an einem komplexen Beispiel. Da alle Schüler die Geradenbüschel entworfen haben, sind die Grundlagen gleich. Eine elegante Bearbeitungsmöglichkeit wird hier am CAS-Bildschirm gezeigt.



$y = m_A{*}x + 3 - 2\, m_A$
$y = m_B{*}x + 3 + 2\, m_B$
Für den Schnittpunkt $S(x_S, y_S)$ ergibt sich:

$x_S = 2(m_A + m_B) / (m_A - m_B)$ und

$y_S = 4\, m_B^2 / (m_A - m_B) + 4\, m_B + 3$



Animation mit einem Funktionenplotter (hier mit PLOT 11)

3.2 Lineare Gleichungssysteme 2: Baumschule

Zunächst wird auf den Einführungstext zur LGS-Einführung 1 (Lagerhaltung) verwiesen. Bei der folgenden Einführung besteht die Leitidee in der Veranschaulichung eines LGS durch Funktionsgraphen (mit späterer Lösung mittels des Rechnerbefehls "Intersection") und passender Rechnung mit der Gleichsetzmethode. Diese Idee ist von fundamentaler Bedeutung, weit über den Schnittpunkt von Geraden hinaus. – Die Schnittpunktberechnung wird hier zusätzlich in ein lineares Optimierungsproblem eingebettet.

Auf einer Baumschule

a) Eine Baumschule hat für die Bepflanzung einer Fläche mit Lärchen und Fichten 8 ha zur Verfügung. Davon sollen höchstens 4 ha mit Lärchen und höchsten 6 ha mit Fichten versehen werden.

Lärchen und Fichten pflanzen

b) Außerdem muss beachtet werden, dass für die Arbeitsstunden jährlich insgesamt nur 1000 Arbeitsstunden zur Verfügung stehen. Die Lärchenpflanzung erfordert jährlich 160 Arbeitssstunden pro ha, die Fichtenpflanzung 100 Arbeitsstunden pro ha.

Fläche bepflanzen

Welche Möglichkeiten der Bepflanzung stehen der Verwaltung der Baumschule zur Verfügung?
Welche ist die günstigste?

Lösungshinweise:
x sei die variable Flächengröße für die Lärchenschonung, y sei die variable Flächengröße für die Fichtenschonung. Dann kann man einige Ungleichungen aus dem Text ablesen. Erläutere diese!

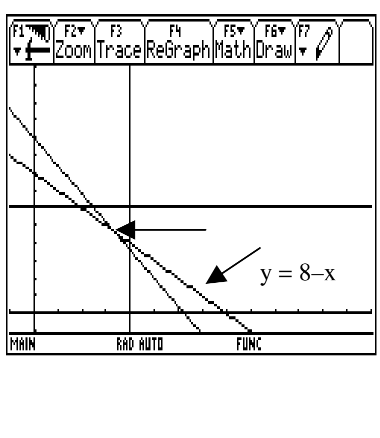
Ungleichungen –
Lineare Optimierung

(a) $x + y \le 8$ mit $x \le 4$ und $y \le 6$
(b) $160\,x + 100\,y \le 1000$
(c) $x \ge 0$ und $y \ge 0$

Darstellung im
Koordinatensystem

Es ist zweckmäßig, sich den Sachverhalt im Koordinatensystem zu veranschaulichen. Dazu werden statt der Ungleichungen zunächst die Gleichungen betrachtet, die dann nach y aufgelöst und als Gleichungen für Geraden gezeichnet werden können.

Das Planungsgebiet

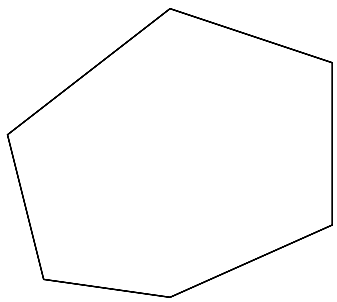


Beschrifte die einzelnen Geraden gemäß den obigen Gleichungen (a), (b) und (c) in der Form y =...

Die Lösungsmöglichkeiten lassen sich im Sechseck P1(0,0), P2(4,0),...,P6(0,6) finden. Schraffiere dieses Sechseck. Begründung?

Die Eckpunkte des Sechsecks sind Schnittpunkte von Geraden

Aufgabe:
Bestimme die Koordinaten der noch nicht bekannten Eckpunkte P3, P4 und P5 des Sechsecks.



Lösung:
Du erkennst sicherlich, dass diese Punkte die Schnittpunkte von jeweils zwei Geraden sind:

Für P3 $y = (1000 - 160x)/100$ und $x = 4$,
für P4 $y = (1000 - 160x)/100$ und $y = 8 - x$,
für P5 $y = 8 - x$ und $y = 6$.

Die Zeichnung gibt uns ja schon grobe Näherungswerte, aber wie können wir rechnerisch vorgehen?
Berechne nun die fehlenden Punkte P3, P4, P5! Einfach ist es für P3 und P5, denn da kennen wir schon jeweils eine Koordinate des Schnittpunkts.

Einsetzen

Für P5 $6 = 8 - x$, also $x = 2$, d. h. P5(2, 6)
Für P3 $y = (1000 - 160*4)/100 = 3.6$, d. h. P3(4, 3.6).

Das eben praktiziert Einsetzen scheint erfolgreich zu sein! Probieren wir es also auch für P4:
$8 - x = (1000 - 160x) / 100$
$8 - x = 10 - 1.6x$, also $x = 10/3$ und $y = 8 - x = 14/3$. Damit ergibt sich P4(10/3, 11/3).

Gleichsetzen

Die Eckpunkte des Sechsecks

Zusammengefasst: Die Eckpunkte des Sechsecks sind P1(0,0), P2(4,0), P3(4,3.6), P4(10/3,14/3), P5(2, 6), P6(0,6).
Jeder Punkt dieses Sechsecks auf dem Rand und im Innern (man kann es Planungsgebiet nennen) kommt als Lösungspunkt in Frage. Zum Beispiel erfüllt A(2, 3) alle oben genannten Ungleichungen, jedoch nicht besonders günstig, denn es wird von den 8 ha nur die Fläche 2 ha + 3 ha = 5 ha benutzt. Und von den 1000 Arbeitsstunden werden nur 2*160 + 3*100 = 620 ausgenutzt.

Die optimale Lösung

- Wie ist es bei den Eckpunkten des Planungsgebiets?
- Wann werden die 8 ha voll ausgenutzt? Für P4 gilt:

10/3*160 Stunden + 14/3*100 Stunden = 1000 Stunden
(volle Ausnutzung der Arbeitszeit) und
10/3 ha + 14/3 ha = 8 ha (volle Ausnutzung der Fläche).
Damit ist die Frage nach der günstigsten Bepflanzung beantwortet: **Etwa 3.3 ha sollten mit Lärchen und etwa 4.6 ha mit Fichten bepflanzt werden.**

So kann es die Baumschule machen!

Die beiden Gleichungen zusammen bilden ein lineares Gleichungssystem, hier sind es 2 Gleichungen mit 2 Variablen.

Wir haben erkannt, dass sich die optimalen Werte aus der Schnittpunktberechnung der beiden Geraden mit den Gleichungen $y = 8 - x$ und $y = 10 - 1.6x$ ergeben haben.

Die Gleichsetzmethode

Für die Berechnung wurde die Gleichsetzmethode benutzt: Die linken Seiten der Gleichungen sind gleich, also müssen es auch die rechten sein: $8 - x = 10 - 1.6x$.

Die Gleichsetzmethode und die graphische Lösung am TI–92 — Arbeitsblatt 3.2.1

Die Gleichsetzmethode ist neben anderen Anwendungen immer dann von Bedeutung, wenn man Schnittpunkte von Graphen berechnen möchte, also z.B.

Graph 1	Parabel:	y = x^2 + 5	Graph 2	Gerade: y = 10x + 1
Graph 1	Gerade:	y = –0.7x + 1	Graph 2	Gerade: y = 2x – 5
Graph 1	Hyperbel:	y = 2/x	Graph 2	Gerade: y = x + 1

Auf diesem Arbeitsblatt geht es jedoch nur um den Schnitt zwischen Geraden.

Aufgabe:

a) Zeichne die folgenden Geraden g1, g2 und g3 mit Hilfe des TI-92 (oder des Grafikrechners) in ein Koordinatensystem – bitte maßstabsgetreu.

g1: $y = 0.8x - 2$

g2: $y = 1.5x - 1$

g3: $y = -x + 5$

b) Die Geraden bilden ein Dreieck, dessen Eckpunkte A, B und C berechnet werden sollen.

c) In der Computergrafik benötigt man oft die Bewegung von Objekten, wie z.B. spiegeln, drehen, verschieben. Hier soll nun das Dreieck an der x-Achse gespiegelt werden. Berechne die hierbei entstehenden Schnittpunkte.

Hinweis: Bevor du diese Aufgaben bearbeitest, soll in einer Bildserie gezeigt werden, wie man Schnittpunkte von Graphen mit dem Befehl "Intersection" bestimmen kann. Erläutere die Bilder!

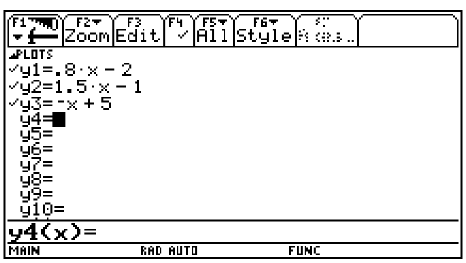


Bild 1

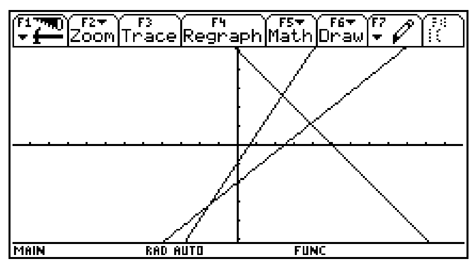


Bild 2

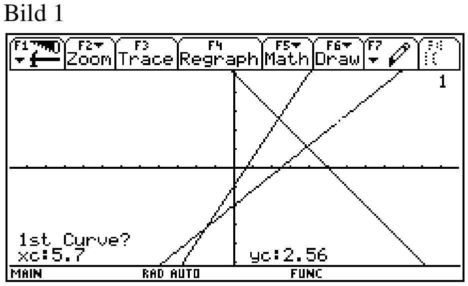


Bild 3: Es wurde F5, Intersection gedrückt

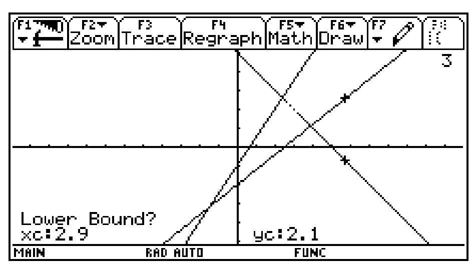


Bild 4

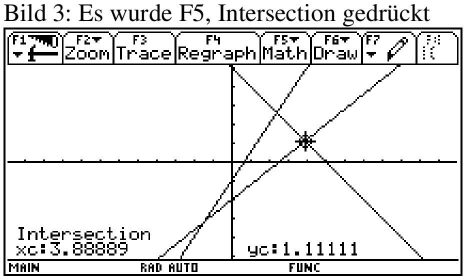


Bild 5: Der Schnittpunkt ist bestimmt!

Rechnerisch geht es zum Beispiel so:
1) SOLVE(y1(x) = y3(x),x) ergibt3.88889.
2) y1(3.88889) = 1.11111.

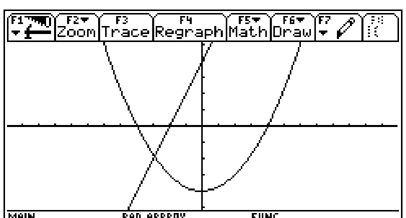
Auf die gleiche Art lassen sich auch die anderen Schnittpunkte bestimmen.

Zu Arbeitsblatt LGS-2.2: Nachdem das Problem des Schnittes zweier Geraden durch die Bearbeitung der komplexen Aufgabenstellung "Baumschule" (lineare Optimierung) als wichtig erkannt wurde, dient das Arbeitsblatt LGS-2.1 der Übung der Gleichsetzmethode. Diese steht also bei dem hier skizzierten Ansatz als Lösungsmethode für lineare Gleichungssysteme im Vordergrund.

- Da die Gleichsetzmethode eine weitertragende Methode ist, sollte das in den Übungsaufgaben auch deutlich werden. Hierzu dient die folgende Aufgabe 1, mit der bewusst der enge Rahmen LGS aufgebrochen wird.
- Aufgabe 2 hingegeben vertieft die Gleichsetzmethode durch die Betrachtung einer Geradenschar. Sie bringt die Auffassung des Autors zum Ausdruck, dass viele elementare mathematische Problemstellungen interessant werden durch den Übergang von einzelnen Objekten zu Mengen von Objekten.
- Andererseits kann das einführende Optimierungsproblem eine eigene Unterrichtsreihe zur linearen Optimierung einleiten. Wer diesen Weg wählt, kann mit einer passenden Aufgabe weitermachen. Man wird dann auch auf den Begriff der Zielfunktion eingehen, die das Einführungsbeispiel eher belastet hätte.

Übungen zur Gleichsetzmethode — Arbeitsblatt 3.2.2

ZEICHNUNG



Parabel $y = x^2 - 1$, Gerade $y = 2x+1$

Teillösung zu c)
$x(S) = 0.4d - 0.6$, wobei d der jeweilige y-Achsenabschnitt der Geraden ist. $y(S) = ?$

AUFGABENSTELLUNG – RECHNUNG

Aufgabe 1

a) Formuliere passende Schnittpunkt-Aufgaben zu der nebenstehenden Zeichnung. Beachte nicht nur die Graphen, sondern auch die Achsen des Koordinatensystems. Berechne die Schnittpunkte.
b) Schneidet die Gerade die Parabel ein zweites Mal?
c) Bearbeite die Rechnung bei b) mit
- Intersection,
- dem Gleichsetzverfahren durch Handrechnung,
- dem SOLVE-Befehl.

Aufgabe 2

a) Zeichne mit dem TI-92 8 Geraden mit der Steigung $m = -2$ und eine weitere Gerade g mit der Gleichung $y = 0.5x+1.5$.
b) Bestimme alle 8 Schnittpunkte der Geraden. Setze hierzu deinen Taschencomputer möglichst geschickt ein.
c) Ermittle eine Formel für die Schnittpunkte aller überhaupt möglichen Geraden der Steigung $m = -2$ mit der Geraden g.

4. Gleichungsprojekt: Marktforschung

Kaufverhalten bei Computer-Zeitschriften

Das hier angebotene Unterrichtsprojekt ist in unterschiedlichen Funktionen in verschiedenen Klassenstufen einsetzbar. Ausgehend von einer gemeinsamen Problemstellung (siehe unten) kann die Bearbeitung des Problems mit verschiedenen Hilfsmitteln, die auch mehrfach mit Gleichungen zusammenhängen, bearbeitet werden. Diese Hilfsmittel werden in der Regel in den Lehrplänen in verschiedenen Klassenstufen bereitgestellt. Zu den Kennzeichen eines projektorientierten Unterrichts gehören außerdem auch gebietsübergreifende Aspekte. – Aus diesen Vorbemerkungen ergeben sich für die Realisierung des Projekts u. a. folgende Möglichkeiten:

1) Das Problem wird zur Einführung des jeweiligen Gleichungstyps gestellt. Die anderen Bearbeitungsmethoden sind entweder Wiederholungen vorhergehenden Stoffs oder werden – weil noch nicht behandelt – weggelassen.
2) Das Projekt wird an einer Stelle des Unterrichts durchgeführt, an der es möglich ist, alle oder fast alle Lösungsmethoden parallel entwickeln zu lassen, z. B. in Gruppenarbeit. Das wird in der Regel nicht dem üblichen Ablauf entsprechen, aber heute wird immer wieder auch gebietsübergreifendes Arbeiten notwendig, denn die heute favorisierten offenen Aufgabenstellungen erfordern gerade solche Ansätze.

Das folgende Diagramm zeigt einen möglichen Projektablauf. Führt man ein derartiges Projekt durch, so sollte der Ablauf auch den Schülerinnen und Schülern nicht vorenthalten werden!

Das Problem "Kaufverhalten"

↓

Wir erarbeiten gemeinsame Grundlagen zur Problembearbeitung:
Übergangsgraph, Baumdiagramme, erste Hochrechnungen

↓

Gruppe 1	Gruppe 2	Gruppe 3	Gruppe 4	Gruppe 5
Problemanalyse und Modellbildung	Stationäre Verteilung: **Lösung eines LGS**, **rechnerisch**	Stationäre Verteilung: **Lösung eines LGS**, **graphisch**	"Grenzwert", Lösung über Folgen	Arbeit mit **Exponentialgleichungen**

Gemeinsam: Vorträge, Diskussionen – Zusammenfassung

↓

Alle bearbeiten **Übungsaufgaben zu LGS und Exponentialgleichungen**

Eine ausführliche Darstellung eines entsprechenden Projekts unter dem Aspekt "Wahrscheinlichkeitsrechnung" findet sich in [1, S. 56].

Informationen zu dem Projekt — Arbeitsblatt 4.a

Das Problem "Kaufverhalten für Computer-Zeitschriften" wird hier als Projekt angeboten. Euer Lehrer wird euch vermutlich die Problemstellung geben und den Übergangsgraphen von euch erklären lassen. Dann geht es in die Gruppenarbeit, in der Ihr in Teams die auf einem Arbeitsblatt formulierten Probleme lösen werdet. Alle Gruppen hängen in irgendeiner Form miteinander zusammen, so dass Ihr auch von Gesprächen mit den anderen Gruppen profitieren könnt. Zuletzt werdet Ihr hoffentlich alles sauber aufgeschrieben haben und euer Referat – teilt es euch untereinander auf – wird sicher für alle verständlich sein. Auf Fragen eurer Mitschüler/innen solltet Ihr vorbereitet sein. Am Ende des Projektes werdet Ihr zusammenfassende Aufgaben bearbeiten.

Zum Anfang aber arbeiten alle zusammen, um einige gemeinsame Grundlagen für das Projekt zu schaffen!

Das Problem

Ein Marktforschungsinstitut wurde von einem Verlag damit beauftragt, das Kaufverhalten der Käufer von zwei neu aufgelegten, wöchentlich erscheinenden Computerzeitschriften A und B des eigenen Verlages zu untersuchen, um so Hilfen für spätere Produktions- und Vertriebsentscheidungen zu liefern. A und B unterscheiden sich in der Aufmachung und in der fachlichen Orientierung (mehr Software bzw. mehr Hardware). Sie enthalten jedoch auch Artikel und Werbung, die ähnlichen Inhalts sind. Konkurrenzzeitschriften gibt es noch nicht.

Marktforschung

Das Institut ermittelt mit Hilfe statistischer Untersuchungen, dass zwischen den beiden Zeitschriften wöchentliche Wechsel der Käufer stattfinden, die sich durch die Übergangstabelle S wie folgt beschreiben lassen:

zu	A	B
von A	80 %	20 %
von B	5 %	95 %

Der Wechsel zwischen den Zeitschriften A und B von Woche n zu Woche (n+1)

> Der Wechsel zwischen den Zeitschriften wird in einer Übergangstabelle beschrieben. Diese wird auch Übergangsmatrix genannt.

Beispielsweise kaufen also (von Woche zu Woche) 20 % der A-Käufer nun die Zeitschrift B. Weiterhin wurde festgestellt: Anfangs (in Woche 0) kauften 200 Kunden die Zeitschrift A und 300 Kunden die Zeitschrift B.

Erwerb von Grundkenntnissen

Arbeitsblatt 4.b

Unsere gemeinsame Fragestellung ist nun:
Wie entwickeln sich die Käuferzahlen in Woche 1, Woche 2, ... bzw. langfristig?

Aufgabe 1: Erläutere den folgenden Übergangsgraphen. Inwiefern ist der Name Übergangsgraph sinnvoll?

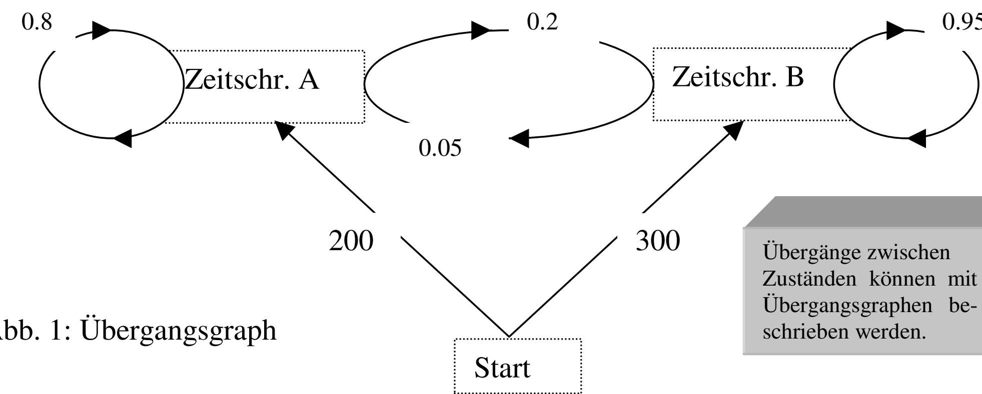


Abb. 1: Übergangsgraph

Übergänge zwischen Zuständen können mit Übergangsgraphen beschrieben werden.

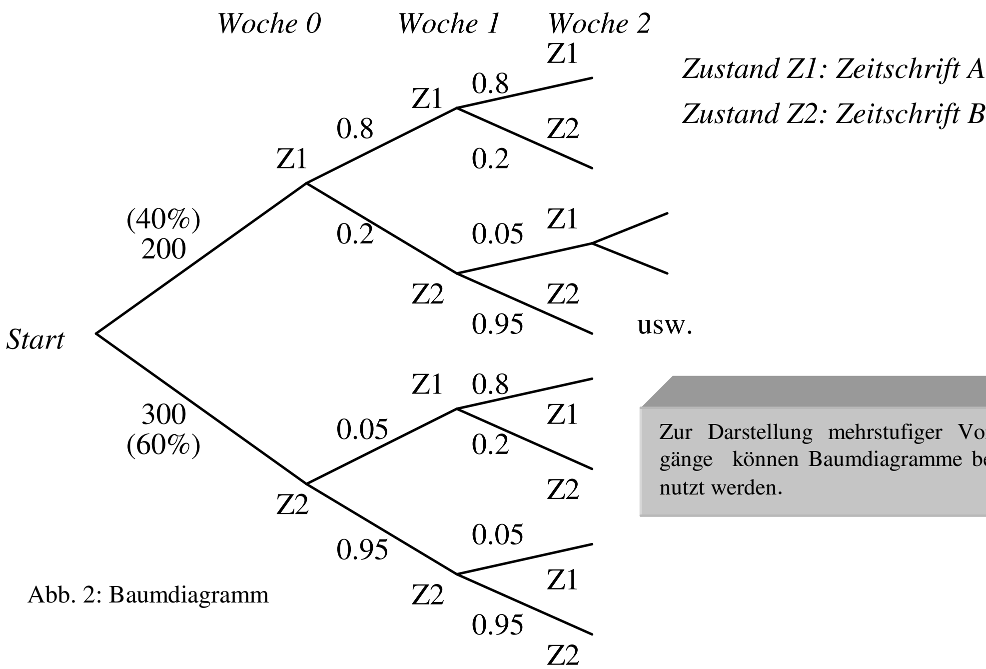
Aufgabe 2: Der Vorgang startet mit den Käuferzahlen 200 für Zeitschrift A und 300 für Zeitschrift B.
Berechne die Käuferzahlen für die nächsten drei Wochen.

Erläutere dazu zunächst die Lösung für die erste Woche. Beachte dabei die Pfade in dem obigen Übergangsgraphen!

Zeitschrift A: $200 \cdot 0.8 + 300 \cdot 0.05 = 160 + 15 = 175$
Zeitschrift B: $200 \cdot 0.2 + 300 \cdot 0.95 = 40 + 285 = 325$

Wie lauten nun die Anzahlen für die zweite und für die dritte Woche? Beachte: Die Anzahlen müssen auf ganze Zahlen gerundet werden. Die Summe Anzahlen muss dabei immer 500 sein.

Lösung:
Man könnte nun wie oben schrittweise weiterrechnen, was übrigens bequem auch mit einem einfachen Taschenrechner geht. Zur Darstellung mehrstufiger Vorgänge kann man auch "Baumdiagramme" verwenden, siehe Abbildung 2 auf der nächsten Seite. Dadurch werden die einzelnen Kaufvorgänge und die daraus folgenden Rechenvorgänge klarer. Wenn man dann noch die einzelnen Pfade geschickt zusammenfasst, gelangt man zu einem "reduzierten Baumdiagramm", siehe Abbildung 3.



Zur Darstellung mehrstufiger Vorgänge können Baumdiagramme benutzt werden.

Abb. 2: Baumdiagramm

Die Abbildungen leiten auch gut über zu Fragen zum langfristigen Verhalten des Systems.

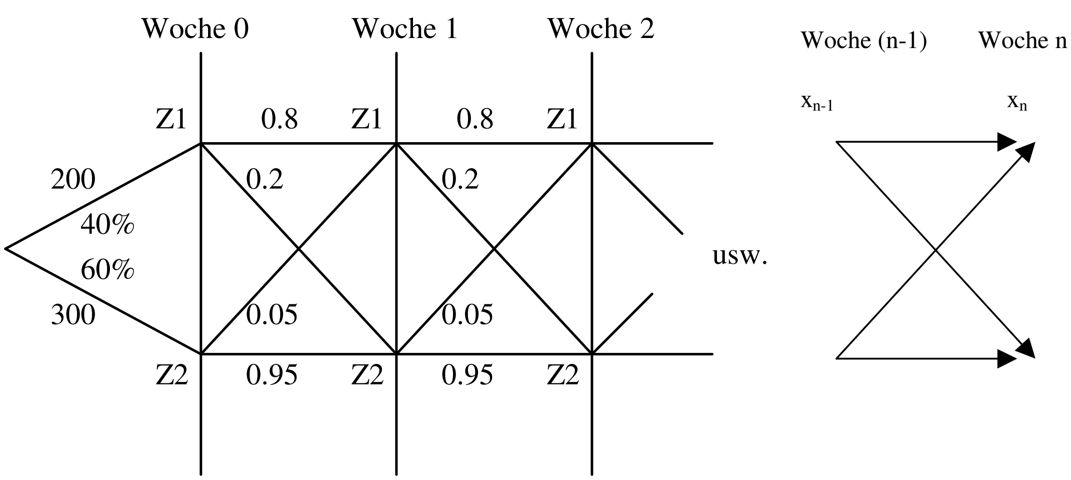


Abb. 3: *Reduziertes Baumdiagramm* "Kaufverhalten"

Mit diesen Betrachtungen sind die notwendigen Vorbereitungen für den Übergang zur Gruppenarbeit erledigt. Jede Gruppe kann nun ihren speziellen Arbeitsbogen durcharbeiten und ihre Ergebnisse schließlich den Mitschüler/innen vortragen und zur Diskussion stellen.

Gruppe 1 Problemanalyse und Modellbildung Arbeitsblatt 4.1

Bearbeitet den folgenden **Arbeitsauftrag**, so dass Ihr später darüber referieren könnt. Darüber hinaus kann z. B. unter dem Stichwort "Marktanalyse" im WWW (Internet) nach weiteren Informationen gesucht werden. – Warum ist der Text eine wesentliche Ergänzung zu der Problemstellung aus den Arbeitsblättern 4.a und 4.b?

In der obigen Problemstellung werden gewisse Zahlenwerte vorgegeben. Dabei ergibt sich die Frage, wie das Marktinstitut zu diesen Werten gekommen ist.

(1) Es geht zunächst um die Analyse der Situation. Der Verlag könnte eine Statistik beginnen, die den Absatz der beiden Zeitschriften enthält. An Hand dieser Statistik könnten Entscheidungen getroffen werden. Allerdings würde es lange dauern, bis hier Trends erkennbar sind.
(2) Das Marktforschungsinstitut geht anders vor. Es untersucht zunächst über einige Monate hinweg
a) **den Wechsel einer repräsentativen Auswahl von Käufern von Woche zu Woche** zwischen den Zeitschriften A und B, um so zunächst neben den reinen Absatzzahlen auch einige statistische Daten über das Kaufverhalten von Kunden zu gewinnen.
b) Falls sich für den Übergang zwischen den Zeitschriften Trends feststellen lassen, sollte es möglich sein, diesen **Trend über weitere Monate hinweg zu verfolgen und "hochzurechnen".**

Wir entwickeln ein mathematisches Modell für das Kaufverhalten.

Statistische Daten

Das Marktforschungsinstitut entscheidet sich für eine Befragung von 500 Käufern. Es stellt fest, dass diese Käufer zu Beginn der Umfrage folgendermaßen kaufen:

200 Personen kauften Zeitschrift A (absolute Häufigkeit H(A) = 200),
300 Personen kauften Zeitschrift B (absolute Häufigkeit H(B) = 300).

Dann gilt:
200/500 = 0.4 = 40 % kauften Zeitschrift A (relative Häufigkeit h(A) = 0.4),
300/500 = 0.6 = 60 % kauften Zeitschrift B (relative Häufigkeit h(B) = 0.6).

Der „Kauf der Zeitschrift A" kann auch als ***Ereignis*** im Sinne der Wahrscheinichkeitsrechnung interpretiert werden. Dann kann definiert werden:

Tritt in einer Folge von n Versuchen ein Ereignis E genau H(E) mal ein (H(E) heißt ***absolute Häufigkeit von E)***, so nennt man h(E) := H(E) / n die ***relative Häufigkeit von E***.
Gemäß den obigen Daten wird verständlich, dass wir als Anfangsverteilung wählen:
Anfangsverteilung (h(A), h(B)) = (0.4; 0.6), kurz (a, b) = (0.4; 0.6).

Für das Kaufverhalten wurde festgestellt:

Käufer	Kauf in Woche ... 1 2 3 4 5 6 ...	
1	A A B A A B ...	das ist eine Folge von Übergängen
2	A B B B B B ...	(Übergangskette)
3	B B B B B B ...	
…	……………….. …	
500	B B A A A B ...	Tabelle 1

Um Tabelle 1 auszuwerten, müssen vier Fälle unterschieden werden, die in *Strichlisten* notiert werden können.
Kauf A, wieder Kauf von A: //////// usw. Kauf A, Wechsel zu Kauf B: //// usw.
Kauf B, Wechsel zu Kauf A: /// usw. Kauf B, wieder Kauf B: /////////// usw.

Übergangsmatrix – Übergangsgraph

Die Ergebnisse werden in *Übergangstabellen* (auch *Übergangsmatrizen* genannt) festgehalten:

Woche 0 → Woche 1	zu A	zu B	Woche 1 → Woche 2	zu A	zu B	Woche 2 → Woche 3	zu A	zu B
von A	79 %	21 %	von A	81 %	19 %	von A	78 %	22 %
von B	5 %	95 %	von B	5 %	95 %	von B	4 %	96 %

Da die Prozentsätze etwa gleich bleiben, nimmt das Institut folgende Übergangstabelle S als von Woche zu Woche gültig an (das ist eine Modellannahme, die hinterfragt werden kann, siehe unten):

	zu A	zu B	
von A	80 %	20 %	*Übergangsmatrix* S
von B	5 %	95 %	Woche n → Woche (n+1)

Die Übergangstabelle kann auch in einem *Übergangsgraphen* dargestellt werden, siehe hierzu Abbildung 1.

Modellkritik

Bei der bisherigen Modellbildung wurden zwei Annahmen gemacht, die zwar in dieser Form recht "gewagt", aber doch typisch sind:

1) Der Wechsel der Käufer findet nur zwischen den Zeitschriften A und B statt, alle untersuchten Personen kaufen in jeder Woche genau eine dieser Zeitschriften.

2) Der Wechsel findet jeweils mit den oben genannten Übergangsprozentsätzen statt.

3) Es bleiben immer die gleichen Käufer.

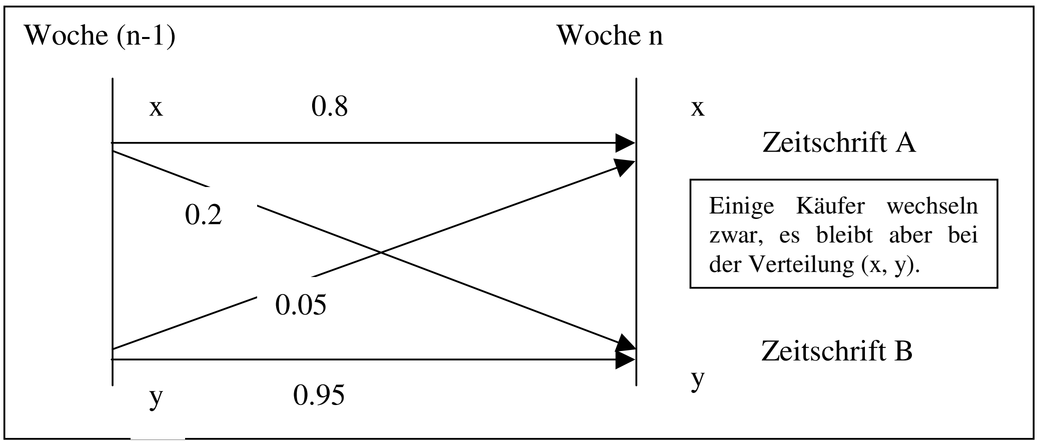
> Modelle zur Beschreibung der Realität müssen kritisch hinterfragt werden.

Gruppe 2 Stationäre Verteilung — Arbeitsblatt 4.2
Lösung eines linearen Gleichungssystems

Berechnung der stationären Verteilung

Die Erfahrungen bei der Berechnung der Zeitschriftenanzahlen für die nächsten Wochen können zu der Frage führen, ob es eine Zeitschriften-Verteilung gibt, bei der sich die Anzahlen bzw. Prozentsätze nicht mehr ändern.

Aufgabe 1: Erläutere die folgende Skizze. Welche Überlegungen führen zu dem linearen Gleichungssystem (siehe Aufgabe 2) mit 3 Gleichungen und 2 Variablen?

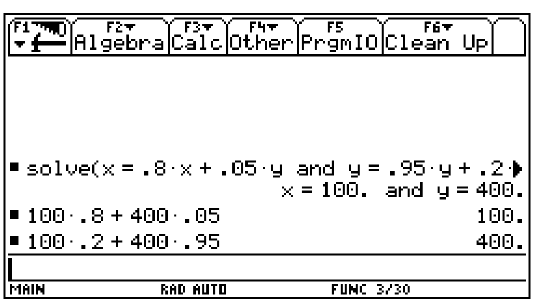


Aufgabe 2: Zeige, dass das Gleichungssystem

$x = 0.8x + 0.05y$
$y = 0.2x + 0.95y$
$x + y = 500$ die Lösung $(x, y) = (100, 400)$ hat.

Was bedeutet diese Lösung?

Mit dem TI-92-PLUS kann die Lösung durch folgende Eingabe bestimmt werden:
SOLVE(x = 0.8x + 0.05y and y = 0.2x + 0.95y and x + y = 500, {x,y})

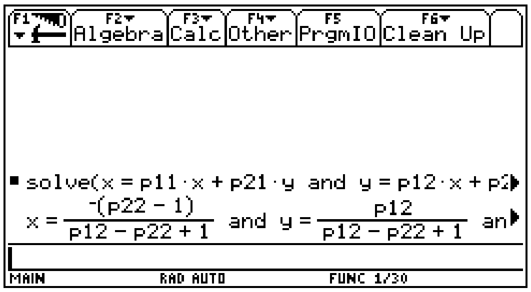


Auswertung: Wenn zuletzt 100 Personen Zeitschrift A und 400 Personen B gekauft haben, dann gilt auch für die nächste Woche:
100 kaufen A und 400 kaufen B! Erläutere dazu die Zeilen 3 und 4 des CAS!
(100, 400) ist also eine **stationäre Verteilung**. Sie ändert sich nicht mehr.

(x, y) heißt ***stationäre Verteilung (Fixvektor),*** wenn sich die Verteilung in dem nachfolgenden Schritt nicht ändert. Stationäre Verteilungen können, sofern sie existieren, berechnet werden mit den Formeln $\mathbf{x = p_{21} / (p_{12} + p_{21})}$ und $\mathbf{y = p_{12} / (p_{12} + p_{21})}$**.** Dabei liegt die Übergangsmatrix P zugrunde:

$$P = \boxed{\begin{matrix} p_{11} & p_{12} \\ p_{21} & p_{22} \end{matrix}}$$

Aufgabe 3: Bestätige die Formel mit Hilfe des CAS (TI-92-Plus!):



Hinweis:
Offenbar werden andere Formeln ausgegeben. Durch geschickte Termumformung kann man aber die Äquivalenz der Formeln zeigen. Beachte hierzu, dass z. B. $p_{21} = 1 - p_{11}$ ist.

Außerdem merken wir uns:
Das lineare Gleichungssystem

(1) $\mathbf{x = p_{11}\, x + p_{21}\, y}$
(2) $\mathbf{y = p_{12}\, x + p_{22}\, y}$
(3) $\mathbf{x + y = 1}$

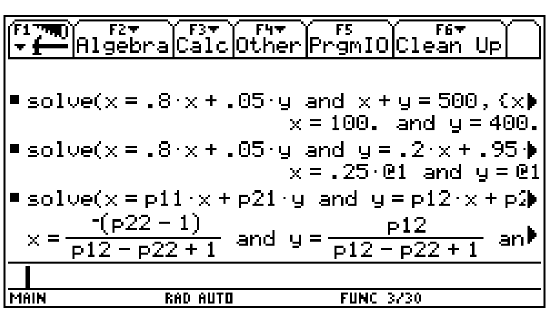
dient zur Berechnung der stationären Verteilung.

Die stationäre Verteilung kann als Lösung eines linearen Gleichungssystems ermittelt werden.

Aufgabe 4: Bestätige die obige Formel durch Handrechnung.

Zusatzüberlegungen

Wir kommen nun zu einigen Zusatzüberlegungen zu den verwendeten Gleichungssystemen. Dabei wird sich überraschenderweise zeigen, dass man die 2. Gleichung (oder die erste Gleichung) zur Berechnung der Lösung gar nicht benötigt! Dazu geben wir das obige Zahlenbeispiel und auch die allgemeine Rechnung in den TI-92 ein. Du hast dann die Aufgabe herauszufinden, warum schon Gleichung (1) und Gleichung (3) reichen, nicht jedoch Gleichung (1) und Gleichung (2)!

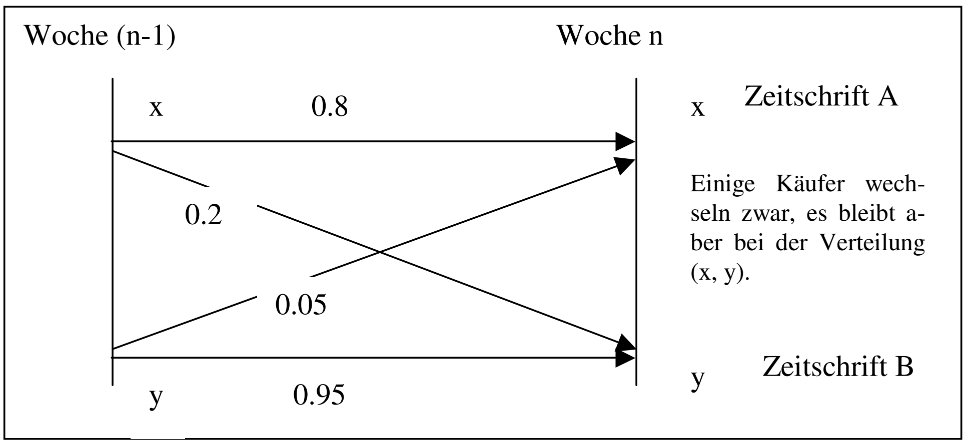


Das bedeutet
x = 0.25y

Gruppe 3 Stationäre Verteilung — Arbeitsblatt 4.3
Grafische Lösung eines LGS als Schnitt von Geraden

Ermittlung der stationären Verteilung auf grafischem Weg
Die Erfahrungen bei der Berechnung der Zeitschriftenanzahlen für die nächsten Wochen können zu der Frage führen, ob es eine Zeitschriften-Verteilung gibt, bei der sich die Anzahlen bzw. Prozentsätze nicht mehr ändern.

Aufgabe 1: Erläutere die folgende Skizze. Welche Überlegungen führen zu dem linearen Gleichungssystem (siehe Aufgabe 2) mit 3 Gleichungen und 2 Variablen?



Aufgabe 2: Bestimme die Lösung des Gleichungssystems

(1) $x = 0.8x + 0.05y$
(2) $y = 0.2x + 0.95y$
(3) $x + y = 500$

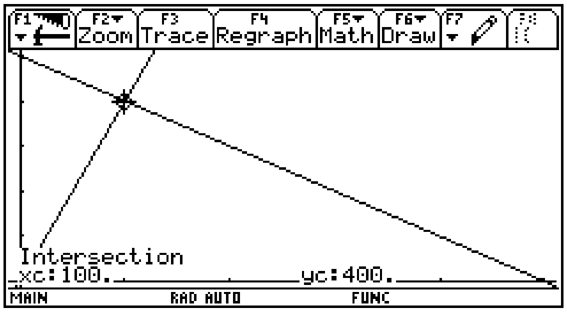
auf grafischem Wege.

Aufgabe 3: Bestätige durch Handrechnung und TI-92-Rechnung, dass sich das Gleichungssystems auch so schreiben lässt:

(1) $y = 4x$
(2) $y = 4x$
(3) $y = 500 - x$

Erstaunlicherweise sind also die Gleichungen (1) und (2) gleichbedeutend, so dass wir uns im Folgenden mit den Gleichungen (1) $y = 4x$ und (3) $y = 1 - x$ begnügen können.
Hinweis: Ob Gruppe 2 das auch erkannt hat? Notfalls könnt Ihr ja einen Tipp geben!

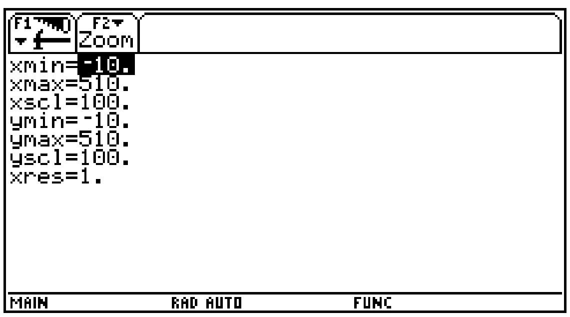
Die folgende Abbildung löst das Gleichungssystem grafisch:



Die stationäre Verteilung kann als Schnitt zweier Geraden ermittelt werden.

Für die Herstellung der Zeichnung kann so vorgegangen werden:

1) Eingabe der Gleichungen im y-Editor mit y1(x) = 4x und y2(x) = 500 – x.
2) Mit ◊WINDOW wird der Bildschirmausschnitt angepasst, denn bei der normalen Einstellung sieht man nur die Gerade y = 4x. Die Anpassung erfolgt mit den Werten:



Die Werte auf der x-Achse und y-Achse laufen also von –10 bis 510, die Einteilung der Achsen erfolgt in 100-er Schritten, in der Wertetabelle erscheinen die Werte mit der Schrittweite x = 1.

Aufgabe: Warum werden die genannten Werte gewählt?

3) Mit ◊ GRAPH wird gezeichnet.
4) Zur Bestimmung des Geradenschnittpunkts wählen wir F5 und INTERSECTION.
5) Wir wählen mit dem Cursor als *First Curve* eine der beiden Geraden, als *Second Curve* die andere Gerade.
6) Für *Lower Bound* gehen wir mit dem Cursor auf eine Stelle links vom Schnittpunkt, für *Upper Bound* rechts vom Schnittpunkt.
7) Daraufhin wird uns angezeigt: x = 100, y = 400.

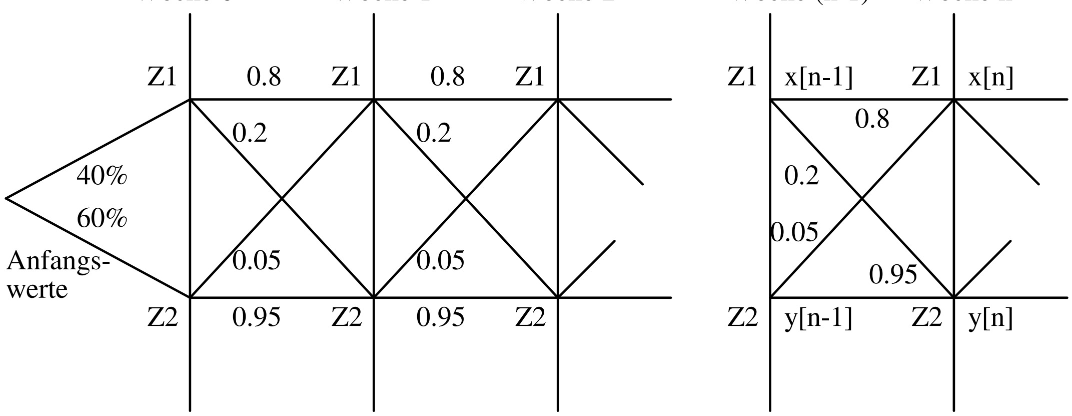
Auswertung:
100 Personen kaufen langfristig Zeitschrift A und 400 Personen Zeitschrift B.

Aufgabe 4: Wie ändern sich die Ergebnisse, wenn man folgenden Hinweis beachtet?

Hinweis: Eure Gruppe soll davon ausgehen, dass nicht von den absoluten Zahlen (500 Befragungen, 200 Zeitschrift A – das sind 40 % –, 300 Zeitschrift B – das sind 60 %) – ausgegangen wird, sondern von den angegebenen Prozentsätzen (40 %, 60 %).
Insgesamt sind es dann 100 %, also ist x + y = 1.

Gruppe 4 Arbeitsblatt 4.4
Lösung über Folgen

Die Anfangsbetrachtungen zu Abbildung 3 können fortgesetzt werden, indem man das langfristige Verhalten des Systems „hochrechnet". Dieser Ansatz führt auf **sogenannte „rekursiv definierte Folgen".**
Wir gehen dazu aus von dem oben betrachteten reduzierten Baumdiagramm und ergän-zen es durch die Wochen (n-1) und n, siehe Abbildung.

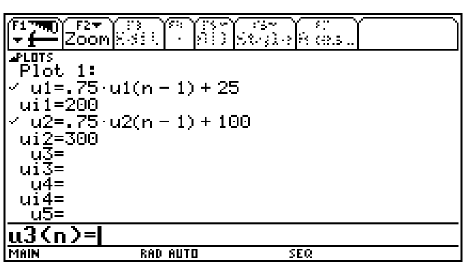


Der Anfangsvektor mit den Anfangswerten ist hier (x[0], y[0]) = (0.4, 0.6)

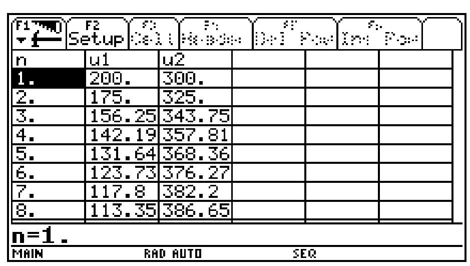
Dabei ist x[n] = x_n der Prozentsatz der Käufer von Zeitschrift A, und y[n] = y_n ist der Prozentsatz der Käufer von B

Aufgabe 1: Begründe, dass für die Anfangswerte (200, 300) gilt
$x_n = 0.80x_{n-1} + 0.05y_{n-1} = 0.8x_{n-1} + 0.05(500 - x_{n-1})$, also
$\mathbf{x_n = 0.75x_{n-1} + 25}$ und entsprechend $\mathbf{y_n = 0.75y_{n-1} + 100}$.

Mit dem Taschencomputer kann man nun bequem viele Werte berechnen.

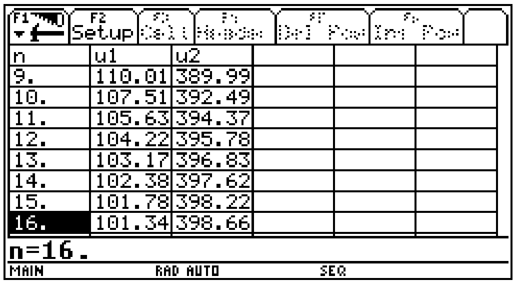


Beim TI-92 stellt man ein:
MODE Graph SEQUENCE und gibt dann die Folgen in der im Bild sichtbaren Form ein, ui1 = 200 ist der Anfangswert.



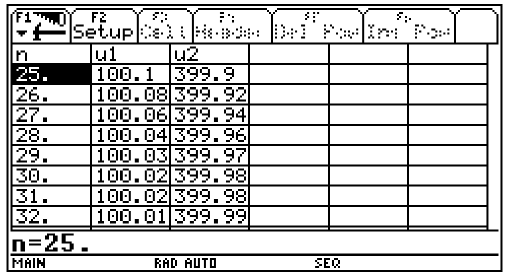
n	u1	u2
1.	200.	300.
2.	175.	325.
3.	156.25	343.75
4.	142.19	357.81
5.	131.64	368.36
6.	123.73	376.27
7.	117.8	382.2
8.	113.35	386.65

Das sind die ersten acht Folgenwerte.



n	u1	u2
9.	110.01	389.99
10.	107.51	392.49
11.	105.63	394.37
12.	104.22	395.78
13.	103.17	396.83
14.	102.38	397.62
15.	101.78	398.22
16.	101.34	398.66

n=16.



n	u1	u2
25.	100.1	399.9
26.	100.08	399.92
27.	100.06	399.94
28.	100.04	399.96
29.	100.03	399.97
30.	100.02	399.98
31.	100.02	399.98
32.	100.01	399.99

n=25.

Mit wachsendem n streben die Werte der Folge x_n anscheinend gegen 100 und die der Folge y_n gegen 400. Dieses sind die „Grenzwerte” der Folgen.

Aufgabe 2: Reproduziert die jeweiligen TI-92-Ausgaben und berechnet einzelne Werte von Hand, z. B. x_{13} aus x_{12}.

Aufgabe 3: Vergleicht die errechneten „Grenzwerte” mit den Ergebnissen anderer Gruppen.

Aufgabe 4: Begründet die folgende Aussage!

Allgemein sieht man entsprechend die

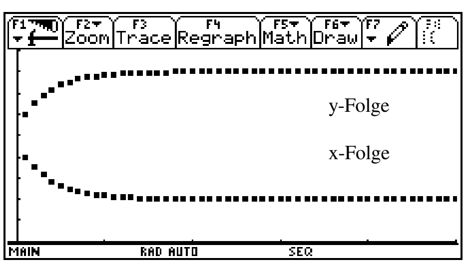
Rekursionsformel zur Berechnung der Verteilungen (x_n, y_n) zur Untersuchung des langfristigen Systemverhaltens bei gegebener Übergangsmatrix S:

$S = \begin{pmatrix} p_{11} & p_{12} \\ p_{21} & p_{22} \end{pmatrix}$ $\quad x_n = (p_{11} - p_{21})\, x_{n-1} + p_{21}$ mit dem Anfangswert x_0 ;

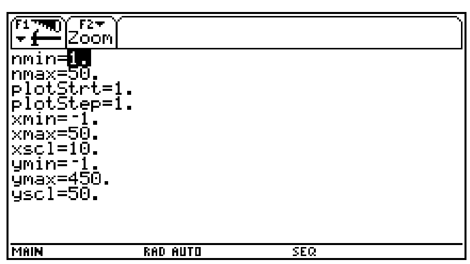
$y_n = s - x_n$ Dabei muss $0 \le p_{11}, p_{12}, p_{21}, p_{22} \le 1$ gelten.

Hinweis: Oben war $s = 500$, $x_0 = 200$ und $y_0 = 300$.

Man kann nun die errechneten Werte in ein (n, x_n)-Koordinatensystem von Hand eintragen. Bequemer und leicht erweiterbar geht es mit der Grafik des TI-92.



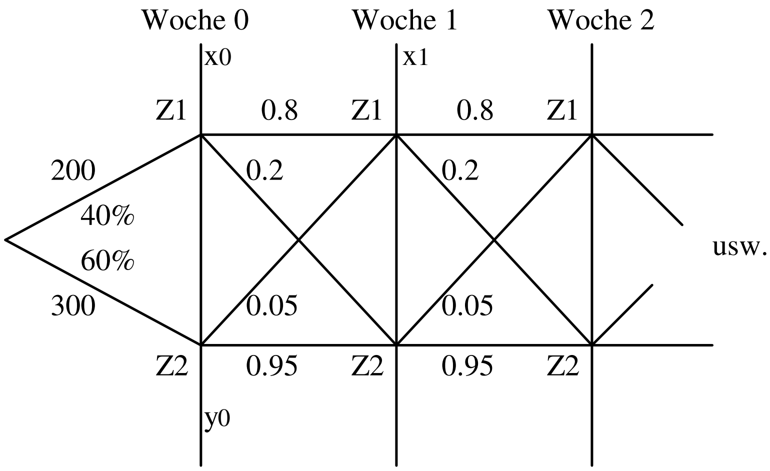
Welche Werte stehen an den Achsen-Markierungen?



So sieht der WINDOW–Bildschirm aus.

Gruppe 5 — Arbeitsblatt 4.5

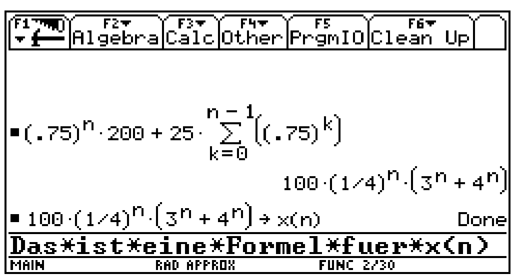
Aufgabenstellungen mit Exponential-Gleichungen



Aufgabe 1: Erläutere die folgende Herleitung:
Aus der Abbildung entnimmt man: $x_1 = 0.8x_0 + 0.05y_0 = 0.8x_0 + 0.05(500 - x_0)$, also

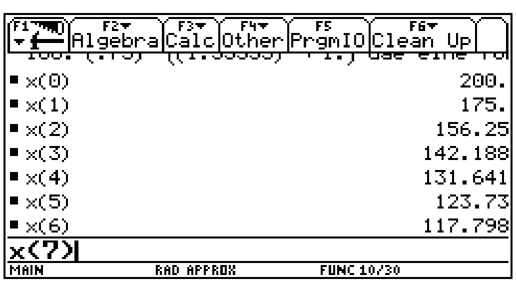
$x_1 = 0.75\ x_0+25$
$x_2 = 0.75\ x_1+25 = 0.75(0.75\ x_0+25)+25 = 0.75^2\ x_0+0.75*25+25$
$x_3 = 0.75\ x_2+25 = 0.75(0.75\ x_1+25)+25 = 0.75^3\ x_0+0.75^2*25+0.75*25+25$
$x_n = 0.75\ x_{n-1}+25 = 0.75^n\ x_0+(0.75^{n-1}+0.75^{n-2}+...+0.75^0)*25.$

Mit der weiteren Vereinfachung betrauen wir den TI-92:



Die Eingabe erfolgt so:
0.75^n*200+25*Σ(0.75^k,k,0,n–1)

Das Summenzeichen Σ erhält man im Home-Editor mit F3, 4.



Mit dieser Formel können die Werte für Zeitschrift 1 berechnet werden.
Aufgabe 2: Bestätige den Wert für x(100) = 100 (Einstellung MODE Approximate). Ändere dann die Einstellung auf MODE Exakt und deute das Ergebnis.

Aufgabe 3: Die vom TI-92 ausgegebene Formel lässt sich mit Hilfe der Potenzgesetze noch vereinfachen – der TI-92 schafft das aber nicht! Zeige durch Umformung von Hand, dass sich $x(n) = 100(0.75^n + 1)$ ergibt.
Hier sieht man nun auch: Wenn n immer größer wird nähert sich x(n) immer mehr dem Wert 100. – Begründe diese Feststellung.

Exponentialgleichungen

Aufgabe 4: In einer der Wochen hat sich die Anzahl von 118 verkauften Exemplare der Zeitschrift 1 ergeben. In welcher Woche war das?

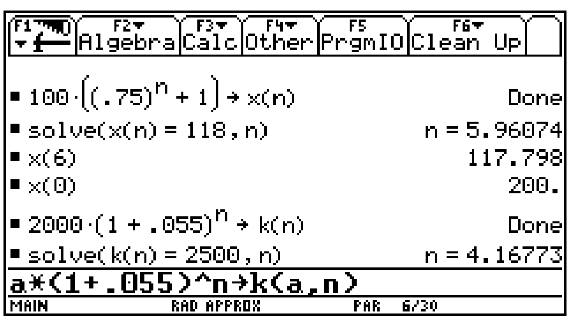
Lösung: SOLVE$(100(0.75^n + 1) = 118, n)$, siehe TI–92–Bild unten. Der TI–92 gibt das Ergebnis 5.96074... aus. Es handelte sich also um die 7. Woche, da die Zählung mit Woche 0 beginnt. Für $n = 0$ ist $x(0) = 100\ (1+1) = 200$.

Kommentiere die folgende von Hand ermittelte Lösung:

Lösung einer Exponentialgleichung

$$
\begin{aligned}
100(0.75^n + 1) &= 118 \\
0.75^n + 1 &= 1.18 \\
0.75^n &= 0.18 \\
n \ln(0.75) &= \ln(0.18) \\
n &= \ln(0.18 / \ln(0.75) \\
n &= 5.96074...
\end{aligned}
$$

Aufgabe 5: Ein Kapital von 2000 Euro wird zu 5.5 % verzinst. Der jährliche Zinsertrag wird jeweils dazu addiert (Zinseszins). Die Summe ist dann der neue Grundbetrag. Nach wie viel Jahren ist der ursprüngliche Betrag von 2000 Euro auf 2500 Euro angewachsen?
Kommentiere den Bildschirmabdruck!



Hinweis: Die ersten vier Zeilen beziehen sich auf die Aufgabe 4, dann folgen zwei Zeilen zu Aufgabe 5. Die letzte Zeile betrifft Aufgabe 6.

Geldanlage

Aufgabe 6:
Erläutere die letzte Bildschirmzeile. Welche Vorteile bietet diese Eingabe gegenüber der Definition von k(n) in der drittletzten Zeile?

Aufgaben

Vorbemerkung: Die Fragestellung aus dem Projekt kann in das Gebiet "Markow-Ketten" eingeordnet werden. Dieses Gebiet hat den Vorzug, Lösungsmethoden aus Analysis, linearer Algebra und Wahrscheinlichkeitsrechnung benutzen zu können. Außerdem können Fragestellungen aus vielen verschiedenen Anwendungsgebieten gestellt werden.

Aufgabe 1:
Bei der Übertragung von Punkten (•) und Strichen (–) durch Morsestationen bestehe auf jeder Station die Wahrscheinlichkeit 0.005 (also in 0.5 % der Fälle) dafür, dass das Zeichen geändert wird. Der Prozess beginne im Zustand „Strich“.

a) Begründe, dass die zugehörige Übergangsmatrix A folgende Form besitzt:
$\begin{pmatrix} 0.995 & 0.005 \\ 0.005 & 0.995 \end{pmatrix}$. Zeichne einen Übergangsgraphen.

Morsen

b) Zeichne ein reduziertes Baumdiagramm für die Übermittlung von 4 Zeichen. Das erste Zeichen sei
ein „Strich“ (–). Der Startvektor ist also $v_0 = (1\ 0)$ in der Reihenfolge (Strich, Punkt).

c) In wie viel Prozent der Fälle ergibt sich die Kette K = { – – • •}?

d) In wie viel Prozent der Fälle wird als viertes Zeichen ein Punkt empfangen?

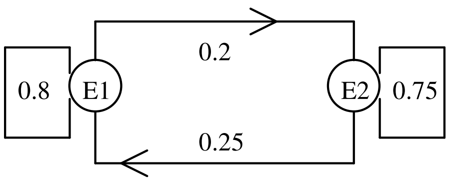
e) Zeige, dass sich als Formel für das Empfangen eines Striches im Schritt n ergibt:
$s_n = 0.99 \cdot s_{n-1} + 0.005$

f) Zeige, dass sich aus e) die Formel $s_n = 0.99^n + 0.005 \cdot (1 - 0.99^n)$ ergibt.

g) Mit welchem linearen Gleichungssystem kann man die stationäre Verteilung errechnen? Löse dieses System mit dem CAS rechnerisch und grafisch.

h) Löse die Gleichung in f) nach n auf. Verwende das CAS.

Aufgabe 2:
Eine Maschine in einem Betrieb wird von Zeit zu Zeit eingeschaltet. Es gibt also die Zustände E1 (Maschine arbeitet nicht) und E2 (Maschine arbeitet). Die Übergangs-Prozentsätze entnimmt man dem folgenden Übergangsgraphen.

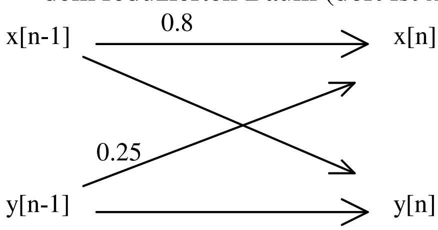


Maschinenüberwachung

a) Wie verhält sich das System langfristig? Benutze zur Lösung ein lineares Gleichungssystem. Ermittle die Lösung mit dem CAS grafisch und rechnerisch.

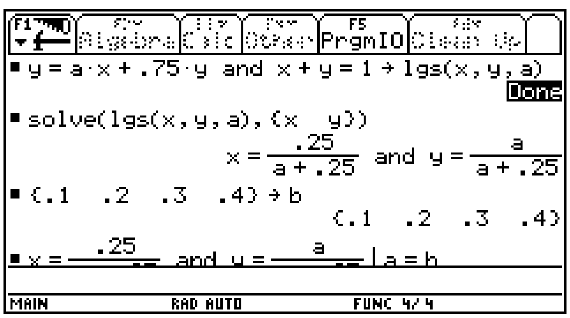
a) Die Maschine möge zu Beginn laufen, d. h. $x_0 = 1$. Jeweils am Ende einer festen Zeitperiode wird der Zustand beobachtet. Mit welcher Wahrscheinlichkeit läuft die Maschine dann nach der vierten Beobachtung?

b) Zeige $x_n = 0.55^n \cdot x_0 + 0.25 \cdot \{ (1 - 0.55^n / (1 - 0.55) \}$. Beachte dazu den folgenden Ausschnitt aus
dem reduzierten Baum (dort ist x_i = x[i]).

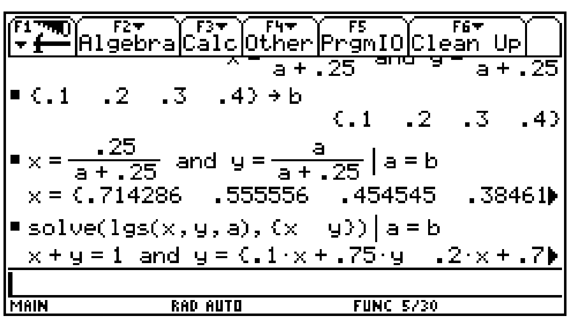


x[n] + y[n] = 1 beachten!

d) Der Übergangswert von E1 nach E2 wird nun variiert und allgemein mit dem Wert a bezeichnet. Welches lineares Gleichungssystem ergibt sich jetzt für die Berechnung des langfristigen Systemverhaltens? Erläutere das TI-92-Bild.



Die Menge b steht damit für weitere Aufgaben zur Verfügung.



Aufgabe 3: Bei dem obigen Projekt waren zwei der Gleichungen äquivalent, so dass eine der drei Gleichungen überflüssig war. Wie ist die Situation bei den folgenden linearen Gleichungssystemen mit 3 Gleichungen und 2 Variablen?
Hinweis: Löse alle Gleichungssysteme mit dem CAS.

Wie setzt sich die Ergebnisanzeige nach rechts fort?

a)	$2x - 3y = 12$	b)	$3x - 4y = -7$	
	$x + 2y = 10$		$5x + 5y = 35$	$-a + 5b = -6$
	$5x - 30 = 7.5y$		$2x - 3y = -5$	$a + 6b = -5$

Weitere didaktische und methodische Hinweise für die Lehrperson

Der Computer kann im Rahmen dieser Unterrichtseinheit (und damit in ähnlicher Weise auch bei allen Aufgabenstellungen in Zusammenhang mit Markow-Ketten) in vielfältiger Weise nützlich sein.

A) Für die Durchführung der Simulation des Kaufverhaltens
(Algorithmus, Veranschaulichung)

B) Für die graphische Darstellung des Kaufverhaltens als
- Folge-Graph im (n, x_n) - Koordinatensystem
- Folge-Graph im (x_{n-1}, x_n) - Koordinatensystem
- Treppe im (x_{n-1}, x_n) - Koordinatensystem
- Geraden im (x_{n-1}, x_n) - Koordinatensystem

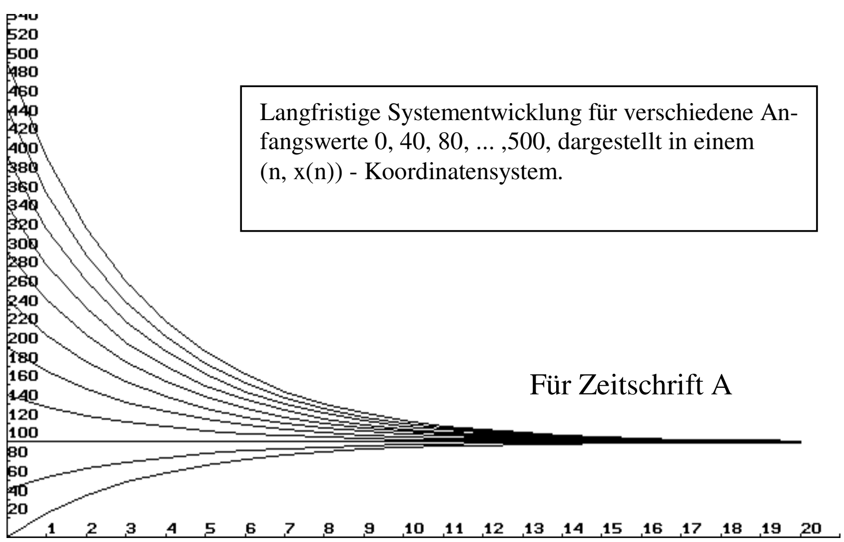
C) Für die rechnerische Bearbeitung des Kaufverhaltens
- Hochrechnen von Folgewerten
- Hochrechnen von Matrizenpotenzen
- Lösen des LGS zur Bestimmung stationärer Verteilungen

D) Für das Experimentieren mit den grafischen Darstellungen und Rechnungen
- Wahl unterschiedlicher Übergangswahrscheinlichkeiten
- Wahl unterschiedlicher Anfangswerte

E) Für die Darstellung der Übergangsmatrix als Übergangsgraph

Literatur

[1] Lehmann, E.: Wahrscheinlichkeitsrechnung, problemorientierte Unterrichtseinheiten, Volk und Wissen Verlag, Berlin 1997



Langfristige Systementwicklung für verschiedene Anfangswerte 0, 40, 80, ... ,500, dargestellt in einem (n, x(n)) - Koordinatensystem.

Anhang Gleichungen in neuer Sicht

Die folgenden Ausführungen sind für Lehrerinnen und Lehrer bestimmt, münden jedoch in einen Arbeitsbogen für Schülerinnen und Schüler, der einen neuartigen Aspekt in der Gleichungslehre verfolgt: **Die gleichzeitige Behandlung mehrerer Gleichungstypen.**
Gleichungen begleiten unseren Mathematik-Unterricht über viele Jahre hin, von der Einführung der einzelnen Gleichungstypen bis hin zu ihren Anwendungen in den Oberstufenkursen. Die folgenden Überlegungen gelten zunächst für die Sekundarstufe 1, wenn Gleichungstypen neu eingeführt und angewendet werden.

- Wenn man heute über Unterricht zu den Gleichungen nachdenkt, kommt man angesichts der vorhandenen CAS schnell zu dem Ergebnis, dass die Aufgabenplantagen, die zur Festigung der jeweiligen Methode dienen sollten, keine Bedeutung mehr haben und weggelassen werden können.

- Gleichungen sind nicht einfach da, wie es uns die Aufgabenkaskaden von Schulbüchern suggerieren; Gleichungen entstehen vielmehr bei unterschiedlichen Situationen (inner- und außermathematisch) durch Modellierung.

- Dabei wird man merken, dass verschiedene Gleichungsarten und jeweils auch unterschiedlich strukturierte Gleichungen auftreten.

- Das kann zur Auflösung des bisherigen Lehrplansystems führen, die Gleichungstypen isoliert und schön nacheinander in verschiedenen Schuljahren durchzusprechen.
- So sind heute Projekte denkbar, in denen man auch verschiedene Typen gleichzeitig betrachten kann, wenn man nur dem CAS eine wichtige Rolle bei der Lösung der Gleichungen zubilligt. Stellt man beispielsweise eine Zeichnung her, in der verschiedene Objekte vorkommen (Geraden, Parabeln usw.), und sucht nun Schnittpunkte der dargestellten Kurven, so gelangt man sofort zu unterschiedlichen Gleichungstypen, siehe Abbildung 1.

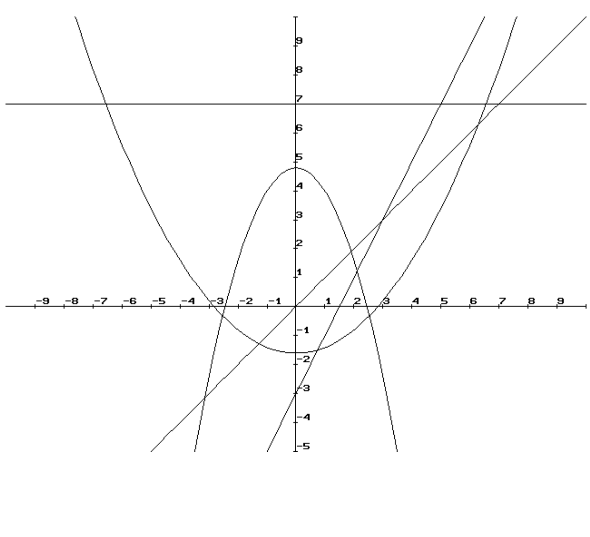


Abb. 1: Viele Schnittpunkte – viele Gleichungen – ein Gleichungsprojekt!

Viele Gleichungen und viele Schnittpunkte

Das Gemeinsame:
- Immer werden Schnittpunkte bestimmt, also führt immer der gleiche Ansatz zum Ziel.
- Stets geht es darum, bei gegebener Grundmenge Werte für x zu finden, die die Gleichung erfüllen.
- Stets hilft das CAS mit dem Befehl SOLVE oder mit Wertetafeln.
- Je nach Situation gibt es keine Lösung, endlich viele oder unendlich viele Lösungen.
- Immer kann das Problem grafisch veranschaulicht werden.

Das Unterschiedliche:
Der Gleichungstyp ändert sich und damit auch Aufwand und Methode der (Hand-) Rechnung (der Algorithmus). Hier muss ggf. die jeweilige Klassenstufe beachtet werden.

- Vermutlich werden die speziellen Lösungsmethoden (Algorithmen) für die einzelnen Gleichungstypen angesichts der leicht verfügbaren SOLVE-Anweisung an Bedeutung verlieren.

- Als ein weiteres universell einsetzbares Verfahren kann man mit dem CAS leicht Wertetabellen herstellen und damit Gleichungen durch passende Verfeinerung (näherungsweise) lösen.

- So entsteht die Frage:
  Brauchen wir überhaupt noch spezielle Methoden? Benötigen wir z. B. die (p,q)-Formel? Benötigen wir Formeln zur Berechnung der Lösung linearer Gleichungssysteme?

  Wir stellen uns die Frage:

Was bleibt wichtig? Was wird wichtiger als bisher? Was ist neu?

Die Überlegungen werden unten (S.62) in einer Tabelle zusammengefasst, die fünf Spalten enthält:

Welche Teilgebiete werden weiterhin behandelt?	Was wird stärker, was wird *schwächer* betont?	Wie hilft das CAS dabei?	*Was kann wegfallen?*	Was soll neu eingeplant werden?

Worauf kommt es bei Gleichungen an – wenn man sie erst einmal hat?

- Stets geht es um Grundmengen wie ∠, Θ, 3 oder Teilmengen davon und um Lösungsmengen (eine, zwei, endlich viele, unendlich viele, keine Lösung). Dabei ist die Frage wichtig: Warum kommt gerade diese Lösungsmannigfaltigkeit heraus?

- Außerdem geht es um das Erkennenkönnen des jeweiligen Gleichungstyps in Zusammenhang mit dem Ausgangsproblem. Wir benötigen also Überblickswissen über die verschiedenen Gleichungstypen und wie man sie bearbeitet (Struktur-Erkennungskompetenz).

- Veranschaulichungen erleichtern uns die Situation und können zu ungefähren Lösungen führen.

- Die von Hand ermittelten oder vom CAS angebotenen Ergebnisse des Gleichunglösens muss man mathematisch und im Sinn der Aufgabenstellung auswerten können! Dabei sind auch Proben wichtig.

- Allgemeine Lösungen der einzelnen Gleichungstypen bleiben wichtig, um Fallunterscheidungen durchführen und strukturieren zu können. Die allgemeinen Lösungen kann uns auch das CAS liefern! Die Fallunterscheidungen können durch Auswahl einiger Exemplare veranschaulicht werden.

- Die schnelle Lösung von Gleichungen mit CAS wirft die Frage nach den im Rechner versteckten Lösungsmethoden auf. Hier entsteht die Motivation, Gleichungen auch ohne CAS lösen zu können. Wichtig ist dabei das Verständnis für den Lösungsweg, und dafür reichen einfach strukturierte Beispiele. Zur Vermeidung von Rechenfehlern kann man auch bei diesem schrittweisen Vorgehen das CAS benutzen.

- Hierbei wird nun auch die Frage nach den Äquivalenzumformungen relevant. Lösungsmethoden verstehen heisst auch, über die erlaubten Äquivalenzumformungen Bescheid zu wissen.

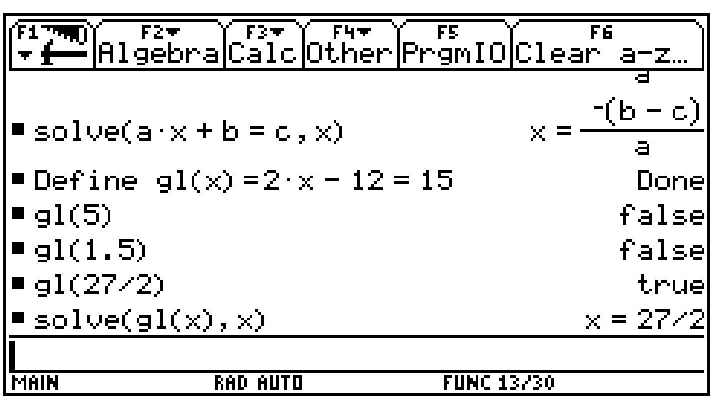
- Erläuterungen von Rechnerbildschirm-Abdrucken sind gut geeignet, um das Verständnis für die Vorgänge zu üben oder zu überprüfen.

Wie geht man mit der Anweisung SOLVE(...) um?

SOLVE(a(x) = b(x), x).

Beispiel: Der Befehl SOLVE(3x+7 = –5, x) ergibt x = –4, löst also die Gleichung ohne sichtbare Zwischenrechnungen und ist bei den Schülerinnen und Schülern selbstverständlich sehr beliebt – und entsprechend geht es bei vielen anderen Gleichungstypen, so dass man allgemein schreiben kann: SOLVE(a(x) = b(x), x).
Doch der Zeitpunkt der Freigabe dieses Befehls für den nachfolgenden Unterricht ist von verschiedenen Faktoren abhängig:
- Welche Vorstellungen hat die Lehrperson vom Mathematikunterricht, welche längerfristigen Intentionen verfolgt sie?
- Welche Rahmenbedingungen für die Mathematik muss die Lehrperson berücksichtigen (Lehrplan, Beschlüsse der Fachkonferenz,...)
- Steht das CAS auf längere Sicht (immer) oder nur eine gewisse Zeit lang zur Verfügung?
- Wie ist der Leistungsstand der Lerngruppe?
- Sind genügend charakteristische Beispielgleichungen von Hand gelöst worden?
- Haben die Lernenden den Algorithmus des Lösungsverfahrens prinzipiell verstanden?
- Wurden die möglichen auftretenden Lösungsfälle schon berücksichtigt oder soll gerade hier der Rechner helfen?
- Welchen Umfang nimmt die Lösung derartiger Gleichungen bei komplexeren Aufgaben zu dem betrachteten Gebiet oder später ein?

SOLVE gibt uns auch die Möglichkeit, zum Beispiel die Gleichung ax = b allgemein zu lösen. Außerdem zeigt der nächste Bildschirmabdruck, wie man die Technik des Abkürzens bzw. Definierens von Termen oder Gleichungen ausnutzen kann, um kurz und problemangepasst formulieren zu können.



Der Rechner berücksichtigt nicht von allein, dass für a = 0 ein Sonderfall eintritt.

gl(5), gl(1.5): Lösung einer Gleichung durch Probieren. Dieser Ansatz kann für die Lösung von Gleichungen immer benutzt werden.

Die Definition der Gleichung 2x–12 = 15 als g1(x) kann beim TI-92 auf zwei Arten erfolgen:
Define g1(x) = (2x-12=15) oder 2x-12=15→ g1(x).

Handrechnung und SOLVE – White Box und Black Box

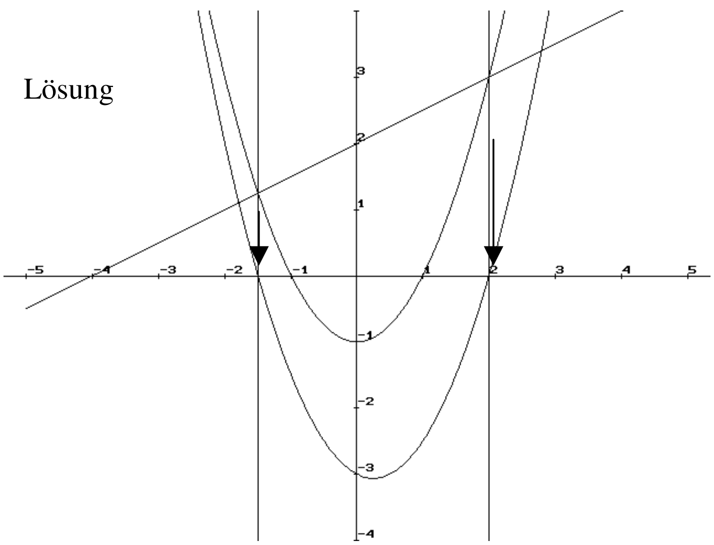
In der White Box-Phase geht es darum, das jeweilige Lösungsverfahren zu verstehen.

Einfache Gleichungen eines Typs sollen in der Anfangsphase und gelegentlich auch später noch mit Handrechnung gelöst werden können (White Box). Ansonsten wird der Befehl SOLVE verwendet (Black Box)

Gleichungen und Gleichungsumformungen veranschaulichen – ein bislang vernachlässigter Aspekt

Gleichungsumformungen können veranschaulicht werden; man merkt daran, wie die Gleichung immer einfacher/kürzer wird und wie sich das in der Veranschaulichung ausdrückt. So kann man z. B. die Lösungen bequem auf der x-Achse ablesen.

Beispiel:
Interpretiere die Frage nach der Lösung der Gleichung $x^2 - 1 = 0.5x + 2$ graphisch. Veranschauliche die Umformung
$x^2 - 1 = 0.5x + 2$ // $-0.5x - 2$, d. h. $x^2 - 0.5x - 1 - 2 = 0$ im Koordinatensystem.



In ähnlicher Weise lassen sich alle Äquivalenzumformungen graphisch veranschaulichen.

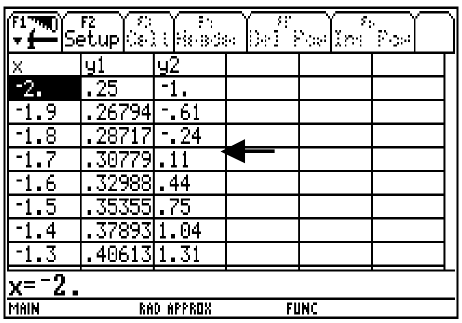
Die angegebene Äquivalenzumformung sorgt dafür, dass die x-Werte der Schnittpunkte schließlich direkt auf der x-Achse abgelesen werden können. Das entspricht der Lösung der Gleichung $x^2 - 0.5x - 3 = 0$.

Die Veranschaulichung von Gleichungen läuft stets darauf hinaus, Schnittpunkte zwischen zwei Graphen zu markieren und zu berechnen.

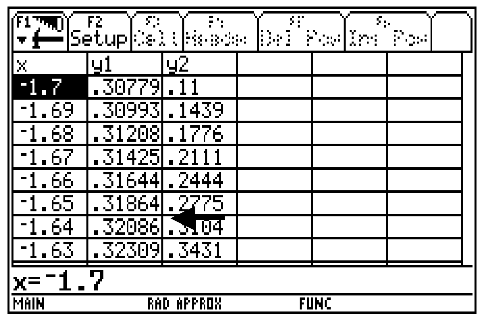
Handrechnung und Wertetafeln

Bei der Erstellung von Wertetafeln ist höchstens noch die Berechnung einiger Werte von Hand sinnvoll, z. B. auch zur Bestätigung eines Rechnerergebnisses und zur Kontrolle der Rechenfertigkeiten.

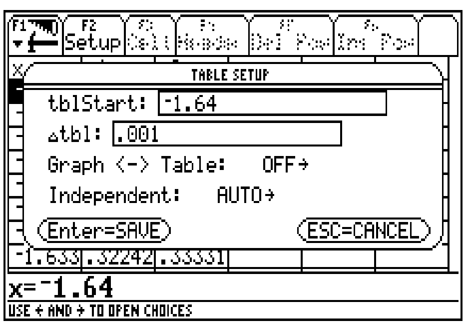
Wertetafeln betonen den Aspekt der **Suche** nach Lösungen: Werte links von der Lösung, Werte rechts von der Lösung. Wertetafeln vermitteln damit die unmittelbare Verbindung zum Ablesen der Lösung aus der grafischen Darstellung.

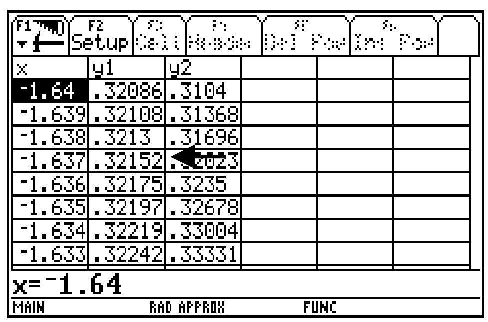


x	y1	y2
-2.	.25	-1.
-1.9	.26794	-.61
-1.8	.28717	-.24
-1.7	.30779	.11
-1.6	.32988	.44
-1.5	.35355	.75
-1.4	.37893	1.04
-1.3	.40613	1.31



x	y1	y2
-1.7	.30779	.11
-1.69	.30993	.1439
-1.68	.31208	.1776
-1.67	.31425	.2111
-1.66	.31644	.2444
-1.65	.31864	.2775
-1.64	.32086	.3104
-1.63	.32309	.3431





x	y1	y2
-1.64	.32086	.3104
-1.639	.32108	.31368
-1.638	.3213	.31696
-1.637	.32152	.[illegible]2023
-1.636	.32175	.3235
-1.635	.32197	.32678
-1.634	.32219	.33004
-1.633	.32242	.33331

Die Einstellungen des TI-92 für die Tabellenausgabe erfolgen in TblSetup, die Ausgabe der Tabellen mit Table.

Die Erstellung von Wertetafeln – linke Seite der Gleichung, rechte Seite der Gleichung – ist eine elementare Methode, die für jede Art von Gleichung verwendbar ist und daher schon frühzeitig Verwendung finden kann.

Ein Überblick: Gleichungen in neuer Sicht

Welche Teilgebiete werden weiterhin behandelt?	**Was wird stärker, was wird *schwächer* betont?**	**Wie hilft das CAS dabei?**	***Was kann wegfallen?***	**Was soll neu eingeplant werden?**
Situationen modellieren	Viel mehr Beispiele mit Anwendungen (inner/außermathematische), mehr Veranschaulichungen	Ansätze auf Stimmigkeit mit Zahlenwerten überprüfen oder Ansätze graphisch untersuchen		Schüler suchen in ihrem Umfeld nach (eingekleideten) Problemen mit Gleichungen
Gleichungen und Gleichungssysteme ausrechnen	*Weit weniger Handrechnung*	Der Befehl SOLVE löst fast jede Gleichung	*Ausführliche Handrechnung wird überflüssig,. Aufgabenkaskaden streichen*	Automatisches Lösen von Gleichungen **(SOLVE)**
				Zu vorgegebenen Gleichungen werden vom Schüler Texte erfunden.
Grundmengen und Lösungsmengen	Auswertung von Ergebnissen wird mehr geübt, Plausibilitätsprüfungen können leicht durchgeführt werden.	Lösungsmengen unter bestimmten Bedingungen (z. B.| a={1,2,3}) errechnen lassen, probieren, kontrollieren		**Parameter in Gleichungen**, **Problemstellungen damit variieren**
Begriffsbildung: Grundmenge G, Lösungsmenge L, Äquivalenzumformung (ÄU)	Bedeutung von G und L für das jeweilige Modell wird mehr hervorheben, entstehende Gleichungsstrukturen werden mehr hinterfragt	Aufgabenstellungen mit CAS, die Begriffsbildung fördern. Z. B. kann man SOLVE auf äquivalente Gleichungen anwenden.	*Trockene Begriffsdefinitionen werden unterlassen.*	Veranschaulichung von Grund- und Lösungsmengen, Gleichungen aus vorgegebenen Lösungsmengen aufstellen lassen
Grundlegende Algorithmen und Handrechnung	Das Schwergewicht liegt auf dem Verstehen der Algorithmen mittels einfacher Beispiele, *aber nicht auf dem häufigen schrittweisen Ausführen der Algorithmen*	CAS kann zur Kontrolle benutzt werden. Man kann fragen: „Wie macht das CAS das?"	*Handrechnungen bei komplexeren Beispielen unterbleiben.*	Graphische Veranschaulichung von Algorithmen
Äquivalenzumformungen an einfachen Gleichungen	Das Verstehen der Umformungen wird wichtiger.	FACTOR, EXPAND verwenden und gelegentlich mit Handrechnung nachvollziehen	*Längeres Üben von Äquivalenzumformungen unterbleibt.*	
Allgemeine Lösungen	Fallunterscheidungen , Darstellungen für Algorithmen	Das CAS enthält Formeln und hilft bei der Entwicklung weiterer Formeln, CAS-Bausteine für allgemeine Lösungen können definiert werden.	*Ausführliche Herleitungen von Hand werden unterlassen.* Stattdessen werden Rechnungsschritte mit dem CAS durchgeführt.	Veranschaulichung von Lösungsfällen durch Grafiken, z. B. im Koordinatensystem
		Lösen andersartiger Gleichungen mit dem CAS möglich.		Berücksichtigung andersartiger Gleichungen, z. B. ggT(x,45)=9
		Anlegen von Wertetafeln, Verfeinerung von Wertetafeln		**Lösen von Gleichungen durch Wertetafeln**
		Lösen im Grafikbildschirm, mehrfache Anwendung von SOLVE(f(x) = g(x),x)		**Gleichzeitige Betrachtung verschiedener Gleichungstypen,** z. B. Schnittpunkte von Geraden, Parabeln und Hyperbeln im Kosy (siehe Arbeitsbogen)

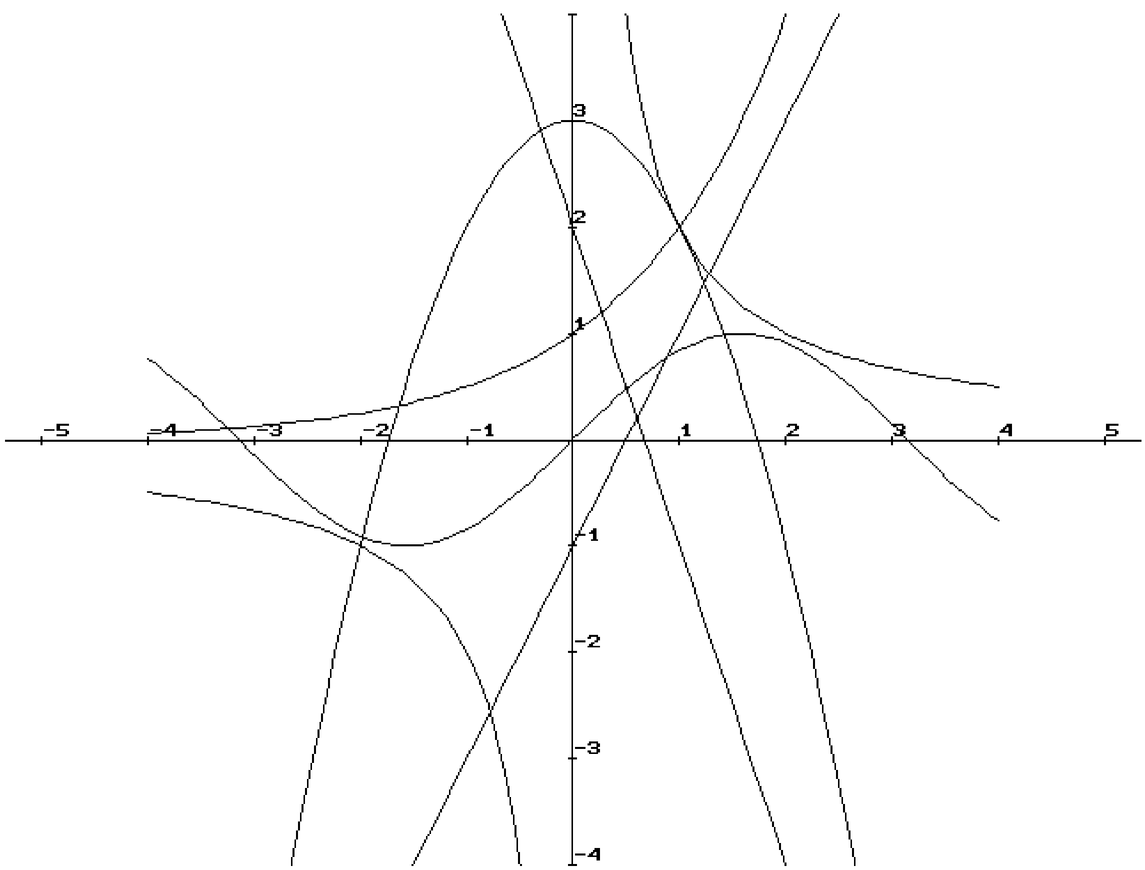
Schnittpunkte Arbeitsbogen A1

Eine Zeichnung – viele Graphen, viele Gleichungstypen

In der Abbildung sind zahlreiche Funktionsgraphen zu sehen. Diese schneiden sich in mehreren Punkten. Folgende Aufgaben sollen (am besten in Gruppenarbeit) gelöst werden.

Aufgabe 1:
Fülle die beigefügten Tabellen aus, soweit es euch möglich ist. Stelle für jedes Kästchen eine passende Taschenrechner-Zeichnung her.

Hinweise:
- Für die zu lösenden Gleichungen kann der SOLVE-Befehl verwendet werden.
- Es soll in der Abbildung jeweils markiert werden, welcher Schnittpunkt berechnet wurde. Dazu ist es zweckmäßig, sich auf eine sinnvolle Bezeichnung der Schnittpunkte in einer vernünftigen Reihenfolge zu einigen.



Trage die Gleichung und die Art der Gleichung ein

Graph zu zu	$f(x) = 2x-1$	$g(x) = -3x+2$	$h(x) = -x^2+3$	$i(x) = 2/x$	$j(x) = 2^x$	$k(x) = \sin(x)$
$f(x) = 2x-1$		$2x-1 = -3x+2$ lineare Gleichung				
$g(x) = -3x+2$						
$h(x) = -x^2+3$						
$i(x) = 2/x$						
$j(x) = 2^x$						
$k(x) = \sin(x)$						

Trage die zugehörige Grundmenge G und die Lösungsmenge L ein

Graph zu zu	$f(x) = 2x-1$	$g(x) = -3x+2$	$h(x) = -x^2+3$	$i(x) = 2/x$	$j(x) = 2^x$	$k(x) = \sin(x)$
$f(x) = 2x-1$	G=Q, unendlich viele Lösungen, z. B. (1,1), (4,7)					
$g(x) = -3x+2$						
$h(x) = -x^2+3$						
$i(x) = 2/x$						
$j(x) = 2^x$			$x = 1$ oder $x = -1.63658$			
$k(x) = \sin(x)$						

Aufgabe 2: Erläutere die folgenden TI-92-Eingaben und -Ausgaben

```
2^x                 → a(x)        done
–x^2+3              → b(x)        done
SOLVE(a(x) = b(x),x)              x=1 or x= –1.63658
```

Aufgabe 3: Legt weitere Tabellen an, um nun die Schnittpunkte jeder Kurve mit den Koordinatenachsen zu berechnen.