

# Matrizenrechnung – Anwendungen Teil 2

Vorwort	Seite 5
Inhaltsverzeichnis	7
-----	
<b>0.</b> Inhaltsverzeichnis des Buches <b>Lineare Algebra mit Matrizen – Anwendungen I</b> , Nachdruck des Buches „Lineare Algebra mit Vektoren und Matrizen“, von Eberhard Lehmann, Metzler-Verlag 1990	11
-----	
* Überblick Matrizenanwendungen in den beiden Büchern	13
1. Tabellen - Matrizen – Grundlagen – Gesetze – Matrizen im CAS	15
1.1 Elemente in Tabellen positionieren und wieder finden	15
1.2 Matrizen und Listen eingeben am Taschencomputer	18
1.3 Zu Problemen Matrizen finden	20
1.4 Gesetze für das Rechnen mit Matrizen	23
<b>CAS-Grundlagen über Matrizenoperationen siehe</b>	
- Anhang A Matrizen beim TI-92 bzw. Voyage 200	
- Anhang B Matrizen beim TI-Nspire-CAS	
<b>Grundlagen zu linearen Gleichungssystemen mit CAS, siehe</b>	
- Anhang C	
2. Magische Quadrate – Matrizen – Gleichungssysteme	27
2.1 Magische Quadrate aus dem Internet	27
2.2 Arbeiten mit magischen Bausteinen	30
2.3 Ein Baustein für magische (4,4)-Quadrate	31
2.4 Ein <b>CAS-Programm</b> zur Überprüfung magischer Quadrate	32
2.5 Wie findet man den Baustein für magische (4,4)-Quadrate?	34
2.6 Weitere Aufgaben zu magischen Quadraten	37

3. Skatturnier – spielen – gewinnen – verlieren – Skatmatrix	38
3.1 Der Problemkreis	38
3.2 Problemstellung 1: Gewinne – Verluste	39
3.3 Problemstellung 2: Rekonstruktion des Punktevektors aus dem Gewinnvektor	42
3.4. Eigenschaften der Abrechnungsmatrizen – Forschungsarbeit für den Leistungskurs	44
3.5. Eine Geometrie des Skatspiels	48
4. Warteschlangen	54
4.1 <b>Ein Versandproblem – Modellierung mit Übergangsmatrizen</b>	55
4.1.1 Versandabteilung – eine Aufträge-Warteschlange	56
4.1.2 Lösungsskizzen und Ergänzungen – LGS mit Matrizen	57
4.1.3 Modellbildungsprozesse zum Versandproblem	60
4.1.3.1 Schritte der Modellbildung – Schritte 1 bis 5	60
4.1.3.2 Simulation des Versandproblems (siehe auch Kapitel 5.4.1)	65
4.2 <b>Warteschlange an einer Tankstelle</b>	67
4.2.1 Bearbeitung für maximal 3 Kunden	67
4.2.2 Allgemeine Lösung der Tankstellen-Warteschlange	70
4.2.3 Weitere Aufgaben zu Warteschlangen	74
5. Modellierung von Problemen mit stochastischen Übergangsmatrizen durch Simulation	76
5.1 Entwicklung eines Algorithmus zur Simulation von Glücksrädern	77
5.2 Herleitung einer Formel für die Simulation eines Glücksrads mit n Sektoren	81
5.3 Simulations-Algorithmus, Entwurf – <b>Programmierung mit CAS</b>	82
5.4 Anwendungsaufgaben für die Simulation von stochastischen Übergangsmatrizen	86
5.4.1 Simulation einer Warteschlange - Versandabteilung (siehe auch Kap.4.1.3.1)	86
5.4.2 Simulation eines Irrgartens	91
5.4.3 Simulation des CRAP-Spiels	94
5.4.4 Simulation des Sammelbilderproblems – Unterrichtsreihe	98
5.4.4.1 Problemstellung – Grundbegriffe – Vorbemerkungen	98
5.4.4.2 Problemanalyse, Modellbildung, Lösung durch Simulation, <b>CAS-Programm</b>	102
5.4.4.3 Lösung mit Hilfe von Übergangsmatrizen	106
5.4.4.4 Die geometrische Verteilung – Herleitung ihres Erwartungswertes	111
6. Matrizen in der Computergrafik – Abbildungsgeometrie	118
6.1 Bilder auf den Kopf stellen	119
6.2 Geometrische Objekte an Achsen spiegeln, Einstieg in die Analytische Geometrie	120
6.3 Verschiebung (Translation)	122
6.4 Die Matrix $A_{(2,2)} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$	123
6.4.1 Realisierung von Abbildungen mit dem CAS – Variationen der Parameterwerte	125
6.4.2 – Zentrische Streckung, Skalierung	127
6.4.3 Drehungen	129
6.4.4 Achsenspiegelungen	133
6.4.5 Inverse Matrizen - Abbildungen umkehren	137
6.5 Abbildungsmatrizen, Schrägbilder, Transformationen	139
6.5.1 Schrägbilder - vom $\mathbb{R}^3$ zum $\mathbb{R}^2$ mit Abbildungsmatrizen	140
6.5.2 Abbilden mit (3,3)-Matrizen	145

7. Matrizen modellieren bewertete Graphen	147
Kürzeste Wege – kürzeste Fahrzeiten – Fahrpreise – Adjazenzmatrix - Distanzmatrix	
7.1 Vorbemerkungen für die Arbeit mit einem CAS	148
7.2 Wege vom Start zum Ziel – Fahrkosten	149
7.3 Eine neue Matrizenverknüpfung	154
7.3.1 Digraphen – Adjazenzmatrix	154
7.3.2 Geodätische Pfeilwege – Entfernungsmatrix	155
7.3.3 Min-Addition und Min-Potenz von Matrizen	157
7.3.4 Wege über mehrere Knoten – mehrstufige Übergangsmatrizen	159
7.4 Algorithmen, Entwurf Min-Potenz-Algorithmus, <b>Programmierung mit CAS</b>	160
7.5 Bewertung von Graphen – Kostenmatrix	163
7.6 Aufgaben zur Vertiefung und Wiederholung	166
8. Boolesche Matrizen anwenden	172
8.1 Boolesche Summe und zwei Boolesche Produkte	173
8.2 Booleschen Matrizen bei symmetrischen, reflexiven und transitiven Relationen – Feststellen von Relationseigenschaften	180
8.3 Boolesche Matrizen-Algebra	185
8.4 Darstellung binärer Schaltungen – Netzwerkmatrix – Klemmenmatrix	188
9. Matrizenanwendungen aus der Elektrotechnik	193
9.1 Einige Grundlagen	193
9.2 Berechnung von Netzwerken - Knoten- und Maschenmatrix	195
9.3 Aufgaben	203
10. Eigenwerte und Eigenvektoren von Matrizen	205
10.1 Eigenwerte bei (2,2)-Matrizen – Abbildungsmatrizen	207
10.2 Eigenwerte und Eigenvektoren einiger spezieller Matrizen	213
10.3 Anwendungsaufgabe aus der Populationsdynamik	221
10.4 Anwendungsaufgabe mit stochastischer Matrix – Sessellift	230
10.5 Matrizeninverse mit Faddejev – Eigenwerte - Analyse einer Black-Box – <b>Programmierung mit CAS</b>	234
10.6 Matrizenpotenzen allgemein berechnen, Grenzwert von Matrizenfolgen	238
11. Markow-Kette - Kauf von zwei Zeitschriften - Marktforschung	246
Modellierung des langfristigen Käuferverhaltens - vielfältige Lösungswege	
Einleitung – Markow-Ketten im Unterricht	
11.1 Eine Studie zum Kaufverhalten	247
11.1.1 Problemanalyse und Modellbildung	249
11.1.2 Lösung mit Matrizenpotenzen	251
11.1.3 Untersuchung des langfristigen Kaufverhaltens mit Hilfe von Folgen und Funktionsgraphen	253
11.1.4 Lösung über Eigenwerte	258
11.1.5 Lösung durch Simulation mit Animation	259
11.2 Zwei weitere Beispiele für graphische Veranschaulichungen von Markow-Ketten	261
11.3 Weitere Hinweise zum Computereinsatz, <b>CAS-Programm</b>	262
11.4 Markow-Ketten – langfristiges Verhalten – Überblick	265

12. Codieren mit Matrizen	267
13. Dürer – Fibonacci – Lotto	273
13.1 Dürer-Matrix	273
13.2 Fibonacci-Matrizen	276
13.3 Die Lotto-Matrix	284
<b>Anhang A, B</b>	
A Befehlsvorrat - Rechnen mit Matrizen – TI-92, Voyage 200	288
B Befehlsvorrat - Rechnen mit Matrizen – TI-Nspire-CAS	296
<b>Anhang C</b>	
<b>Lineare Gleichungssysteme (LGS) mit CAS</b>	<b>312</b>
<b>C.1 Vorgefertige CAS-Bausteine zur Bearbeitung von LGS</b>	<b>312</b>
C.1.1 CAS-Bausteine für die schnelle Lösung von LGS	312
C.1.2 CAS-Bausteine für die schrittweise Lösung von LGS	313
<b>C.2 Mathematische Grundlagen</b>	<b>314</b>
C.2.1 Allgemeine Definition linearer Gleichungssysteme	314
C.2.2 Der Gauß-Algorithmus - Hinführung zu CAS-Bausteinen	316
C.2.3 Gauß-Algorithmus - allgemein für (2,2)- und (3,3)-LGS	325
C.2.4 Das Ablesen der Lösungsmenge aus dem Gauß-Endschema - Rang einer Matrix - Lösungskriterien für LGS	327
<b>C.3 Unterricht zum Thema LGS</b>	<b>333</b>
C.3.1 Weniger rechnen - mehr verstehen	333
C.3.2 Einige Probleme, die auf LGS führen - Bearbeitung mit CAS	334
C.3.3 Erstellen von LGS mit Hilfe von Matrizen	346
<b>Sachverzeichnis</b>	<b>350</b>
CD	352

## Buchende

## Zur weiteren Information

0.

### Lineare Algebra mit Matrizen – Matrizen-Anwendungen I

Nachdruck des Buches „Lineare Algebra mit Vektoren und Matrizen“

Von Eberhard Lehmann, Metzler-Verlag 1990

#### Inhaltsverzeichnis dieses Buches

<b>Inhalt</b>	
Vorwort . . . . .	5
Kapitel 1	
Tabellen — Matrizen . . . . .	7
Kapitel 2	
Skalarprodukt — Matrizenmultiplikation . . . . .	13
2.1 Materialverflechtung und Marktforschung . . . . .	13
2.2 Einige besondere Matrizen . . . . .	23
2.3 Matrizen in der Abbildungsgeometrie . . . . .	33
2.4 Materialverflechtung — Modellerweiterung . . . . .	48
2.5 Gesetze für das Rechnen mit Matrizen . . . . .	52
Kapitel 3	
Analytische Geometrie . . . . .	60
3.1 Matrizen — Vektoren — Geraden — Ebenen — Linearkombinationen . . . . .	61
3.2 Skalarprodukte — Abstands- und Winkelberechnungen . . . . .	71
Kapitel 4	
Lineare Gleichungssysteme . . . . .	87
4.1 Probleme, die auf lineare Gleichungssysteme führen	87
<b>Inhalt</b>	
Vorwort . . . . .	5
Kapitel 1	
Tabellen — Matrizen . . . . .	7

Kapitel 5	
Vektorräume – Lineare Abhängigkeit – Basis	143
5.1 Magische Quadrate – Vektorräume	143
5.2 Lineare Abhängigkeit – Lineare Unabhängigkeit	151
5.3 Matrixrang – Zeilenrang und Spaltenrang	158
5.4 Basis und Dimension – Basistransformationen	161
Kapitel 6	
Inverse Matrizen	171
6.1 Begriff – Berechnung – Sätze	171
6.2 Das Stücklisten-Problem	179
6.3 Input-Output-Analyse	183
Kapitel 7	
Matrizenpotenzen – Mehrstufige Prozesse	190
7.1 Maschinenüberwachung – Irrfahrten	190
7.2 Populationsdynamik	206
7.3 Stochastische Matrizen	211
Anhang	
Computereinsatz in der linearen Algebra	218
Der Lineare Algebra-Matrizen-Rechner MATRIX	219
Programmieren mit Prozeduren aus der UNIT M90_U	222
Matrizen aus der Sicht der Informatik – Ausgewählte Matrizenprozeduren	225
Aus der Computergraphik	227
Stichwortverzeichnis	232
Softwareverzeichnis	235
Literaturverzeichnis	235

**Zu diesem Buch gibt es auch ein Lösungsheft!**

Die meisten Leistungen des Programms MATRIX (seinerzeit unter DOS, programmiert in Turbo-Pascal) können heute von einem Computeralgebrasystem (CAS) übernommen werden. Hierzu wird auf die Anhänge A und B des Buches

E. Lehmann:  
„Matrizen-  
Anwendungen II“,  
Leh-Soft, Berlin  
2009

Anhang A (für Voyage 200),  
Anhang B (für TI-Nspire-CAS)

## Überblick über die Matrizenanwendungen in den Büchern

Band 1 – Lineare Algebra mit Matrizen, Anwendungen Teil 1 (ehemals Metzler-Verlag / Schroedel-Verlag, jetzt bei Leh-Soft), 1995, mit vielen Aufgaben

Band 2 – Matrizenrechnung, Anwendungen Teil 2, Schülerbuch mit vielen Aufgaben

Thema/ Kurzbezeichnung der Anwendung	in Band 1	in Band 2	kurze Erläuterung	Verwendete Matrizenverknüpfungen, LGS
Grundlagen Matrizen	X	x	Einführende Beispiele, Begriffsbildungen	Matrizen finden
Matrizenkalkül im CAS-Voyage 200 TI-Nspire		X X	Befehlsvorrat für Matrizen auf diesen Rechnern	Alle Verknüpfungen
Matrizenkalkül, Theorie	X	x	Rechengesetze u.a	Die wichtigsten Verknüpfungen
Materialverflechtung	X		Ein Betrieb benötigt für die Produktionsstufen verschiedene Materialien, Rohstoffbedarf	$A+B$ , $A*B$ , LGS, $A*(B+C)$ , große LGS
Input-Output-Analyse	X		Input-Output, Lieferungen	$A*B$ , $A^{-1}$ ,
Skatspielabrechnung	x	X	Abrechnung eines Skatturniers, Rekonstruktion des Punktestands	Abrechnungsmatrix, $A*B$ , $A^{-1}$ , LGS
Warteschlangen		X	Beispiel: Kunden warten an einer Tankstelle, $sM$ stochastische Matrizen	$sM$ , $A*B$ , $A^n$ , Eigenwerte, große LGS,
Kürzeste Wege, Kommunikation		X	<b>Entwicklung eines Programms</b> für kürzeste Wege, Anwendungen	Adjazenzmatrix, Distanzmatrix, Minpotenz $A^n$
LGS, diverse Anwendungen	X	X		$A*B$ , $A^{-1}$
Simulation stochastischer Matrizen		X	<b>Entwicklung eines Programms</b> zur Simulation, diverse Anwendungen	Matrizen simulieren
Elektrotechnik		X	Knotenmatrix, Maschenmatrix, Netzwerke	$A*B$ , Boolesche Matrizen
Stücklistenproblem	X			$A*B$ , $A^{-1}$ ,
Populationsdynamik	X		Anwendung aus der Biologie, Analogien zu stochastischen Matrizen	$A^n$
Irrfahrten	X			Stochast.M, $A^n$
Abbildungsgeometrie und Computergrafik	x	X		$A*B*C$ , $A^{-1}$ , $A^n$
Analytische Geometrie	x		Die wichtigsten Grundlagen in Kurzform	

Maschinen- überwachung	X			Stochast. Matrizen, $A*B$ , $A^n$
Stochastische Mat- rizen	X	X		$A*B$ , $A^n$
Markow-Ketten Kaufverhalten		X	Untersuchung des Kauf- verhaltens	$A^n$ ,
Magische Quadrate	x	X		Lgs, $A^n$ ,
Codematrizen		X		$A*B$ , $A^{-1}$
Diverse kleinere Anwendungen	X	X		$A*B$ , $A^n$ , Eigenwerte
Eigenwerte, Eigenvektoren		X	Theoretische Überlegun- gen und Anwendungen	$A^n$ , $\lim A^n$ , Grenzmatrix
Ausgewählte Programme		x	$A^n$ , Simulation, $A^{-1}$ nach Faddejev, 6 Sam- melbilder	