Berliner Beiträge

zum Mathematikunterricht mit Computern

Heft 2

Mit Beiträgen von

Ramona Rutenberg - Ursula Wunsch - Günter Dreesen-Meyer - Schüler der Paul-Natorp-Oberschule, Klasse 9b (von Konrad Meyfarth) - Ulrich Döring - Werner Ladenthin - Eberhard Lehmann

Herausgeber
Eberhard Lehmann, Berlin, Januar 2005
mirza@snafu.de, www.snafu.de/~mirza

Die Berliner Beiträge werden gefördert von Texas Instruments und Leh-Soft

Vorwort und Inhaltsverzeichnis zu Heft 2

Die Autorinnen und Autoren der Beiträge von Heft 2 der *Berliner Beiträge zum Mathematikunterricht mit Computern* arbeiten im Berliner-CAS-Projekt Sekundarstufe.2 bzw. im CAS-Arbeitskreis Berlin.

Die Beiträge
- stammen aus der Anfangszeit des Projektes oder
- bauen auf einem breiteren Erfahrungsbereich auf.
- Zwei Beiträge stammen aus der Sekundarstufe 1 (Matrizen, Ungleichungen visualisieren) geben jedoch gleichzeitig Anregungen für die Sekundarstufe 2 (Abbildungsgeometrie, Visualisieren von stückweise definierten Graphen).

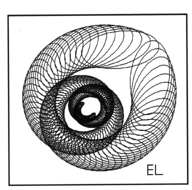
Es wird insbesondere über Erfahrungen in der Analysis und in der Abbildungsgeometrie mit Matrizen sowie über lineare Gleichungssysteme berichtet. **Fast alle Beiträge befassen sich mit konkretem durchgeführten Unterricht mit dem CAS des Voyage 200 der Fa. Texas Instruments. Dabei haben auch SchülerInnen einen wertvollen Beitrag geleistet (Seite 14 f.).**

Der Workshop-Bericht aus der Zeit vor dem Projektbeginn zeigt eine mögliche Gestaltung eines Workshops in der Vorbereitungszeit mit Tipps zum CAS-Einsatz.

Die Kopien der *Berliner Beiträge zum Mathematikunterricht mit Computern* werden jetzt von der Firma Texas Instruments finanziert. Besten Dank!

Allgemeine Informationen	www.ti.com/calc/deutschland
Kostenlose Ausleihe von Rechnern	www.ti.com/calc/deutschland/leihprogramm.htm

TEXAS INSTRUMENTS



Eberhard Lehmann (Herausgeber)
Mirza@snafu.de
www.snafu.de/~mirza

Inhaltsverzeichnis
Heft 2, Berliner Beiträge zum CAS-Unterricht

Wachstumsfunktionen im Leistungskurs Mathematik

Ursula Wunsch, Fritz-Karsen-Gesamtschule

Wachstum • Exponentiell • Beschränkt • Logistisch	Regression	Anwendung: Wachstum bei Fichten	Voyage 200

Einleitung

Im zweiten Semester des Leistungskurses ist die Bearbeitung von Funktionen zum exponentiellen, beschränkten und logistischem Wachstum vorgesehen.
Der Einstieg über die Lösung von entsprechenden Differentialgleichungen ist von der 'mathematischen Seite' her sicher angemessen, aber er entspricht nicht der realen Situation. In der Realität geht man bei Wachstumsproblemen zumeist von gemessenen Wertepaaren aus.

Ohne den Einsatz eines CAS ist nur ungenau aus diesen Wertetabellen auf die Funktionsgleichung zu schließen. Man wählt dazu zwei Wertepaare und berechnet daraus die Parameter der Funktionsgleichung des angenommenen Wachstumsmodells.
Dabei hängt sehr viel vom Glück ab, ob die aus rechnerischer Sicht gewählten Wertepaare auch für die Funktion 'gut' gewählt sind.

Man muss also als Lehrer/in die Aufgaben so konstruieren, dass man mit einem solchen Vorgehen auch passende Funktionsgleichung erhält. **Mit dem Voyage 200 eröffnen sich hier Möglichkeiten realistischer zu arbeiten.**

Bei allen drei Wachstumsfunktionen handelt es sich um exponentielle Zusammenhänge, die durch Logarithmieren zu einer linearen Darstellung der Funktionswerte geführt werden können.

Exponentielles Wachstum

Die Funktionsgleichung ist von der Form $f(x) = ae^{kx}$, durch Logarithmieren erhält man $\ln(f(x)) = kx\ln(a)$.
Die Darstellung für den Logarithmus der Funktionswerte ist also eine Gerade. Eine Gleichung dieser Geraden lässt sich durch lineare Regression relativ einfach bestimmen.
Und aus dieser Geradengleichung ist durch die Zusammenhänge *ln(a)* als y-Achsenabschnitt und *k* als Steigung die exponentielle Funktionsgleichung zu ermitteln.
Der Voyage bietet auch die Möglichkeit einer exponentiellen Regression an. Da aber keine Parameter über die Güte einer solchen Näherung Aufschluss geben, wäre dieser Weg aufwendiger als der beschriebene.

Beschränktes Wachstum:

Die Funktionsgleichung von der Form $f(x) = S - ae^{kx}$ wird zu $S - f(x) = ae^{kx}$ umgeformt und dann logarithmiert, so erhält man $\ln(S - f(x)) = \ln(a) + kx$.
Die Funktionsgleichung lässt sich auch hier wieder aus Steigung und y-Achsenabschnitt der Regressionsgeraden ermitteln.
Bei der Bearbeitung konkreter Aufgaben muss man zumeist davon ausgehen, dass die Schranke S nicht sofort aus den Werten abzulesen ist. Man kann daher einen Wert für S annehmen und durch die Güte der Ausgleichsgeraden abschätzen, ob der angenommene Wert verwendbar ist.

Logistisches Wachstum:

Einfacher zu bearbeiten als mit der Formel von Verhulst ist dieses Verhalten mit einer Funktionsgleichung in der Form $f(x) = \dfrac{aS}{a + (S-a)e^{-Skx}}$, dabei ist S die obere Schranke und a der Anfangswert.

Daraus erhält man: $\dfrac{1}{f(x)} = \dfrac{a}{aS} + \dfrac{(S-a)}{aS}e^{-Skx}$ bzw. $\ln(\dfrac{1}{S} - \dfrac{1}{f(x)}) = \ln\dfrac{(S-a)}{aS} - Skx$.

Aus diesem linearen Zusammenhang ergibt sich die Funktionsgleichung des logistischen Wachstums durch $k = \frac{-m}{S}$ und $a = \frac{S}{1+Se^{b}}$, wobei m die Steigung und b der y-Achsen-abschnitt der Geraden ist. Auch beim logistischen Wachstum kann die Grenze S durch Schätzen und Verbessern der Ausgleichsgeraden ermittelt werden.

Anhand einer konkreten Aufgabe soll jetzt die Vorgehensweise mit dem CAS des Voyage 200 dargestellt werden (die Daten - nicht der Aufgabentext - wurden der "Fichtenaufgabe" aus den EPA-Mathematik 2002, S.20, entnommen).

Aufgabe:

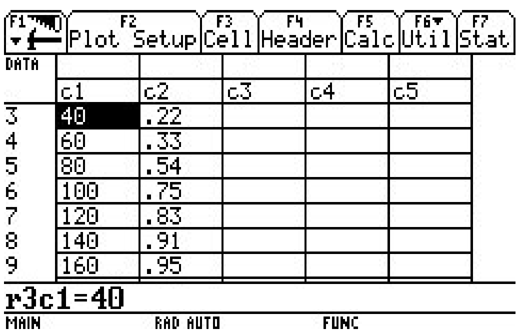
Fichten stellen in Deutschland mit über 40% der Gesamtwaldfläche die wichtigste Holzart dar. In einer Region wurden folgende Durchschnittswerte gemessen:

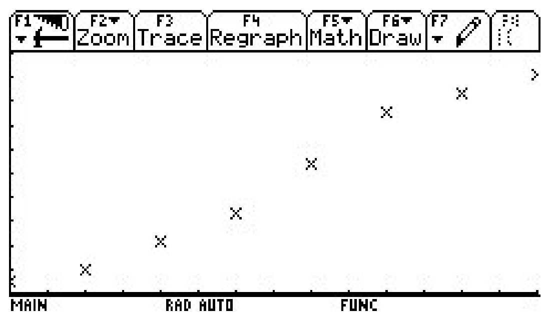
Alter des Baumes in Jahren	0 (Setzling)	20	40	60	80	100	120	140	160
Durchmesser in m (bei älteren Fichten gemessen in 1,30 m Höhe)	0,05	0,1	0,22	0,33	0,54	0,75	0,83	0,91	0,95

Bestimmen Sie unter der Annahme des logistischen Wachstums eine Gleichung der Funktion d mit $d(t) = \frac{aS}{a+(S-a)e^{-Skt}}$, die das Dickenwachstum der Fichten beschreibt. Skizzieren Sie die gemessenen Durchschnittswerte sowie den Graphen von d.

(1) Die Werte werden in den Data/Matrix-Editor des Voyage eingegeben.

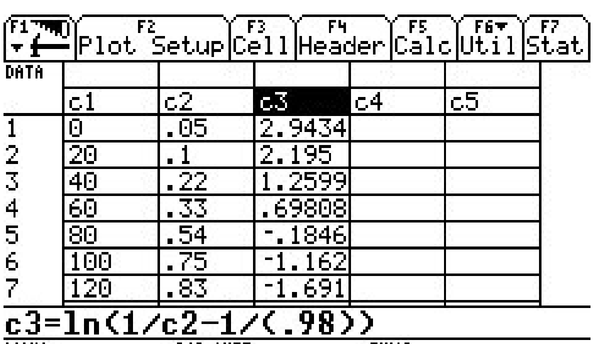
(2) Über F2 'Plot Setup' ist die Darstellungsweise dieser Werte zu setzen und dann im Graphikfenster darzustellen.

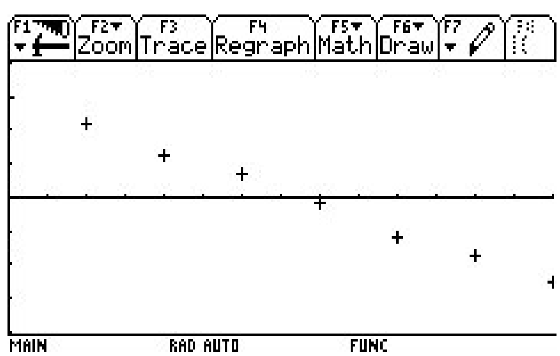




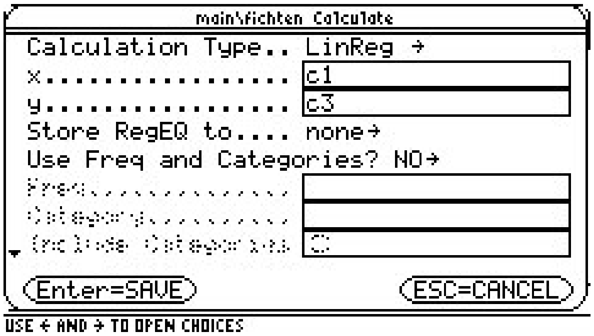
(3) An der Darstellung sieht man, dass eine Annäherung durch logistisches Wachstum sinnvoll ist. Auch die obere Grenze kann durch die Zeichnung abgeschätzt werden, sie kann nur unwesentlich größer als der letzte Funktionswert sein. Eine erste Vermutung könnte also S=0,98 sein.

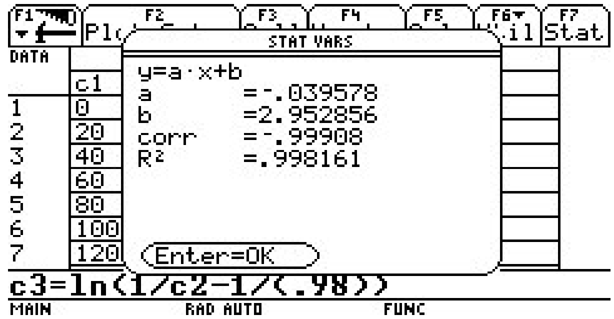
(4) Mit dieser Annahme trägt man jetzt die logarithmischen Werte in c3 ein, dazu genügt es in der Titelzeile c3 die Berechnungsformel einzugeben. Und diese logarithmischen Werte lassen sich dann auch plotten.





(5) Über F5 'Calc' kommt man jetzt in die Auswahlmenüs um die lineare Regression der logarithmischen Werte berechnen zu lassen.



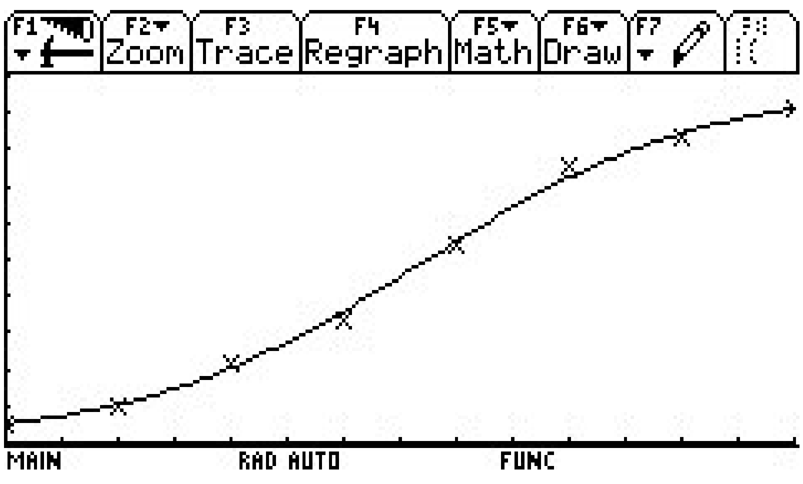


(6) Man erhält als Steigung den Wert a = –0,039578 und als y-Achsenabschnitt b = 2,952856. Die Güte der Gerade ergibt sich aus dem Wert für den Korrelations-koeffizienten 'corr'. Im zweiten Semester fehlen die statistischen Voraussetzungen für das Verständnis dieses Wertes, daher soll als Abschätzung genügen, dass die Gerade um so besser ist, je dichter der Betrag dieses Wertes an 1 liegt.

(7) Es ist an dieser Stelle sehr leicht, die Annahme für S zu verändern, man muss nur in der Formel zur Berechnung von c3 einen anderen Wert eintragen und wieder eine lineare Regression durchführen. Im konkreten Beispiel erhält man für S = 0,97 und auch für S = 0,99 schlechter angepasste Geraden, die Werte des Korrelationskoeffizienten corr sind in diesen Fällen –0,9981 bzw. –0,9989.

(8) Aus der Steigung und dem y-Achsenabschnitt der Regressionsgeraden erhält man für die Funktionsgleichung des logistischen Wachstums: a = 0,049552 und k = 0,251682 und damit die Gleichung $d(t) = \dfrac{0.048561}{0.049552 + 0.930448e^{-0.039579t}}$.

Der Anfangswert d(0) stimmt mit dem aus der Annäherung berechneten Wert a ziemlich gut überein und auch die Zeichnung des Graphen zu d(t) zusammen mit den vorgegebenen Werten ergibt eine gute Übereinstimmung.



Nach zwei Monaten Taschencomputer-Einsatz - meine erste Grundkurs-CAS-Klausur

von Frau Rutenberg (Wieland-Herzfelde-Oberschule, Weißensee), 24.11.2003

Ganzrationale Funktionen	Differential- und Integralrechnung, Flächenberechnung	Klausur, Grundkurs	Voyage 200

<u>CAS-Einsatz ist bei allen Aufgaben erlaubt!</u>

1.Aufgabe: (7 BE)

Gegeben sei die Funktion $f(x)=\frac{1}{2}x^3-4$.

Der Graph der Funktion schließt mit den beiden Koordinatenachsen ein Flächenstück ein. Berechnen Sie die Fläche durch Anwendung der Streifenmethode des Archimedes.

a) Geben Sie das Flächenmaß zunächst näherungsweise an, indem Sie eine Tabelle für drei kleiner werdende Rechteckbreiten erstellen.
b) Berechnen Sie erneut durch eine Rechtecksumme und einer Grenzwertbildung das exakte Flächenmaß.

🕮 Hinweis: Erläutern Sie jeweils die benutzten Bausteine und ihre Anwendung.

2. Aufgabe: (3 BE)

Zeigen Sie, dass $F_1(x)=x\left(\frac{3}{2}x+4\right)$ *und* $F_2(x)=\frac{3}{2}x^2+4x-\frac{9}{2}a$ Stammfunktionen von $f(x)=3x+4$ sind.

3. Aufgabe: (5 BE)

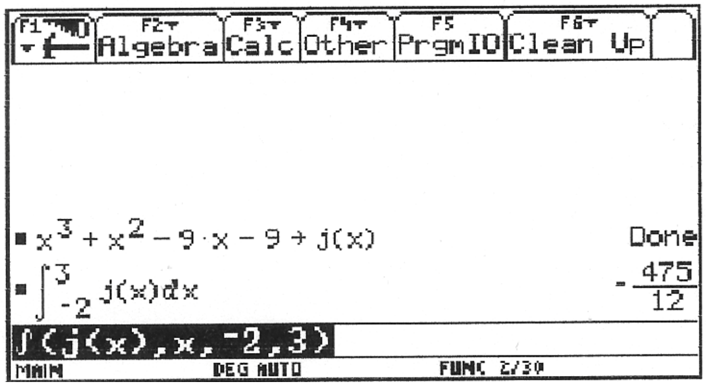
Deuten Sie die Regel $\int_{-a}^{a} f(x)dx = 2\cdot\int_{0}^{a} f(x)dx$, falls f eine zur y-Achse symmetrische Funktion ist, geometrisch. Unterstützen Sie ihre Aussagen durch Bearbeitung eines selbst gewählten Beispiels mit dem CAS.

🕮 Beschreiben Sie die Arbeit mit dem CAS, indem Sie die Ein- und Ausgaben angeben bzw. auf kariertes Papier abzeichnen.

4. Aufgabe: (7 BE)

Gegeben sei die Funktion $f(x)=x^3+x^2-9x-9$, I=[-2;3]

a) Berechnen Sie den Inhalt der Fläche, die über dem Intervall I zwischen dem Graph von f und der x-Achse liegt.
b) Eine Schülergruppe hat diese Aufgabe mit dem CAS wie folgt gelöst:

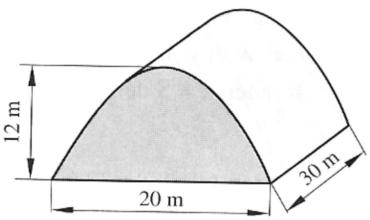


Analysieren Sie die Vorgehensweise der Schüler und werten Sie das Ergebnis.

<u>5. Aufgabe: (8 BE)</u>

Beim Bau einer Reithalle wird eine parabolische Bogenkonstruktion verwendet. Die Maße sind der Skizze zu entnehmen.

a) Bestimmen Sie die Gleichung dieser Parabel.
b) Berechnen Sie den Inhalt der Querschnittsfläche.
c) Berechnen Sie das Luftvolumen.



Hinweis: Gelingt Ihnen die Lösung der Teilaufgabe a) nicht, bearbeiten Sie die Teilaufgaben b) und c), indem Sie das Vorgehen verbal formulieren.

Eine Schülerbefragung nach einem Jahr CAS-Einsatz (Voyage 200)

Günter Dreeßen-Meyer, August 2004

Befragung		Grundkurs	Voyage 200

Zusammenstellung zur Befragung der Schülerinnen und Schüler

Mädchen			**Jungen**		
positiv	**negativ**	**Bemerkung**	**positiv**	**negativ**	**Bemerkung**
Schnelles Erstellen von Graphen, Verwendung von Table	Zu Beginn zu schnell und zu viel	Einstieg mit der Handrechnung, dann CAS-Einsatz	Neue Technologie auch im Mathematikunterricht	CAS zeigt keine Zwischenschritte an, Auffinden der Fehler bei der Handrechnung dadurch schwer	Handrechnung ist notwendig zum Verstehen des Lösungsweges
CAS vereinfacht viele kom-plizierte Rechnungen	Der Rechenweg geht verloren	CAS nur bei komplexen Aufgabenstellungen verwenden	Es lassen sich mehr unterschiedliche Aufgabenstellung und Anwendungen bearbeiten – Rechenzeit entfällt	Das händische Rechnen wird verlernt	Handrechnung ist immer wichtig, CAS zur Kontrolle
Viel Spaß gehabt	Es fehlt die Zeit des Reflektierens beim händischen Rechnen		Einfache und simple Bedienbarkeit	Was ist später, wenn der Rechner nicht mehr zur hand ist	CAS nur bei komplexen und anspruchvolles Aufgaben einsetzen
Nachvollziehbare Syntax der Befehle des CAS	Mehr Zeit bei Aufgaben mit Rechner-arbeit und Handrech-nung		Der CAS erleichtert viel, wenn die Bedienung und die Befehle erst einmal erlernt sind	Bei fehlerhafter Eingabe reagiert der Rechner gnadenlos	
Am Anfang zu schwierig, dann aber doch positiv	Ich vermisse die Handrechnung		Mehr Konzentration im Unterricht auf das Finden des Lösungswegs	Die wahre Mathematik, das Rechnen, fehlt mir	

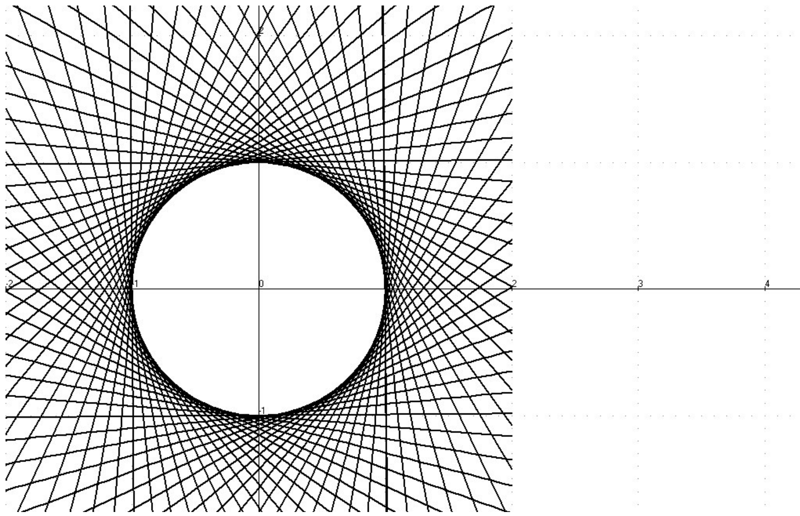
	Befehle nicht merkbar, Syntax zu schwer, kleinste Eingabefehler werden bestraft, Fehler in der Eingabe nur schwer erkennbar		Große Erleichterung beim Erstellen der Graphen einer Funktion	Es braucht eine lange Zeit, den Rechner zu bedienen	
	Komplexere Aufgaben jetzt möglich, dadurch Ma schwerer		Befehle sind meist leicht und verständlich		

Ein Kommentar (E.Lehmann)

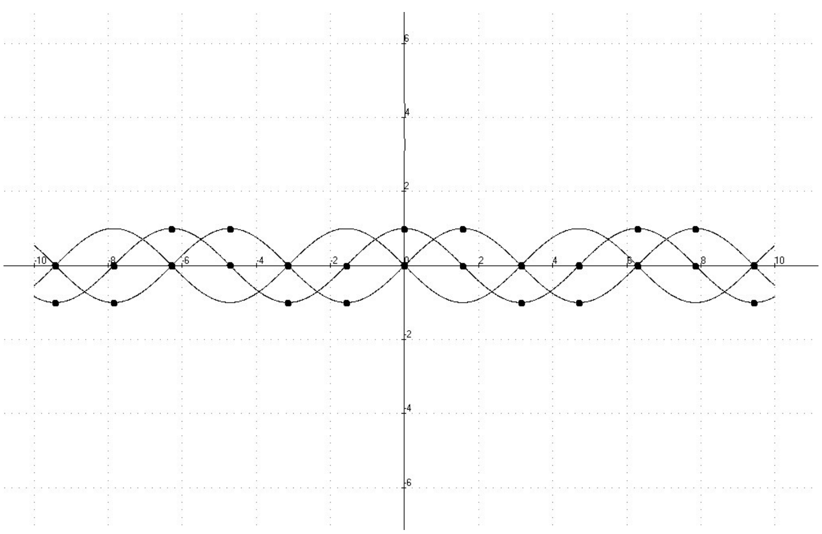
Die Äußerungen der Schüler benennen deutlich etliche Probleme des Rechnereinsatzes, die sich einerseits auf das Gerät, andererseits aber auch auf die veränderte Unterrichtskultur beziehen, an die sich Schüler und Lehrer gewöhnen müssen. Derartige Umfragen sind auch gerade für den Lehrer von Bedeutung, da sich dadurch für ihn die Möglichkeit ergibt Unterrichtspraktiken zu regulieren. Kennzeichnen für die leider verbreitete Sicht auf die Mathematik ist die Schüleräußerung: ***"Die wahre Mathematik, das Rechnen, fehlt mir."***
Glücklicherweise ist man inzwischen in Didaktik und Methodik weiter. Das Außenbild von Mathematik hat sich aber noch nicht in gleichem Maß gewandelt.

Einige Bilder zum Analysis-Unterricht - geeignet zum Interpretieren

Von Eberhard Lehmann



Der Kreis als Hüllkurve!
Erläutere die Abbildung. Kannst Du sie auch herstellen?



Die Sinusfunktion und ihre Ableitungen.
Wie könnte die Zeichnung - ausgehend vom Graphen zu y = sin(x) - schrittweise entstanden sein.

Viele Kreise
- eine Unterrichtsstunde im Grundkurs, 1. Semester

Eberhard Lehmann

Kreise	Parameterdarstellung	Anwendung: Türgitter	Voyage 200

Vorbemerkung

Die im Folgenden skizzierte Stunde im Grundkurs Mathematik, 1.Semester, wurde in den normalen Kursablauf eingeschoben. Sie wurde von mir als Projektleiter des Berliner CAS-Projekts Sekundarstufe 2 gehalten – die Klasse war mir unbekannt. Von der sonst unterrichtenden Lehrerin Frau Vogt wurden zuletzt die Ableitungen der Sinus- und Cosinus-Funktion behandelt und u.a. bei der Kettenregel verwendet. Jedem Schüler steht ein Taschencomputer Voyage 200 (Texas Instruments) ständig zur Verfügung. Die Schüler haben den Rechner seit ca. drei Monaten.

Die hier dargestellte Stunde hatte folgende Zielsetzungen:
a) Schwerpunkte:

- Einführung der Parameterdarstellung von Kreisen und
- Anwendung bei der Zeichnung vieler Kreise an verschiedenen Positionen im Koordinatensystem mit Hilfe des Taschencomputers

b) Außerdem:
Übungen zu sin und cos in einer neuen Form
Wiederholung von Gradmaß und Bogenmaß.

Die Stunde wurde eingeleitet mit einer Folie, die ein Bild des Malers Kandinsky zeigte, in dem zahlreiche Kreise künstlerisch dargestellt waren. Das hinten gezeigte Foto (Türgitter mit vielen systematisch angeordneten Kreisen, aufgenommen in Kalabrien) bot danach einen Einblick in die spätere Aufgabenstellung. Diese von den Schülern unerwartete „unmathematische" Einleitung in die Stunde führte ersichtlich zu einer guten Motivation und Aktivität der Schüler, die insbesondere in den Phasen (2) und (3) deutlich wurde.

(1) Nach einer durch den Arbeitsbogen vorstrukturierten Einführung der Kreis-Parameterdarstellung mit der Darstellung des Einheitskreises auf dem Bildschirm des Taschencomputers ging die Stunde in eine
(2) offene Phase über, in der die Schüler weitere Kreise nach eigenem Gutdünken auf dem Bildschirm erzeugten.
(3) Einige Ergebnisse wurden über den Projektor (View-Screen) vorgestellt.

Dr. Eberhard Lehmann, 12-2003
Stunde im Grundkurs ma-1 an der Fritz-Karsen-Schule

Arbeitsbogen und Folie

Stundenthema: Viele Kreise

Unsere gemeinsame Arbeitsgrundlage ist die
Parameterdarstellung des Einheitskreises
$x(t) = \cos(t)$, $y(t) = \sin(t)$.

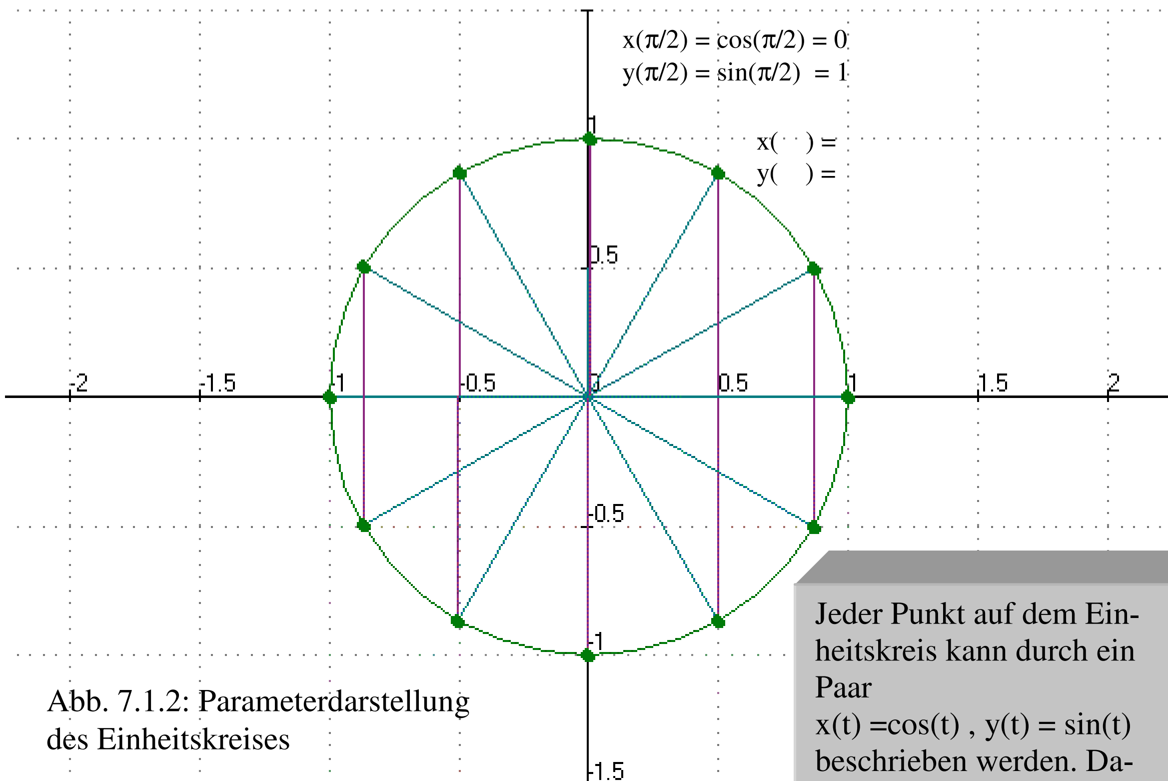


Abb. 7.1.2: Parameterdarstellung des Einheitskreises

Jeder Punkt auf dem Einheitskreis kann durch ein Paar $x(t) = \cos(t)$, $y(t) = \sin(t)$ beschrieben werden. Dabei gilt $t \in [0, 2\pi]$.

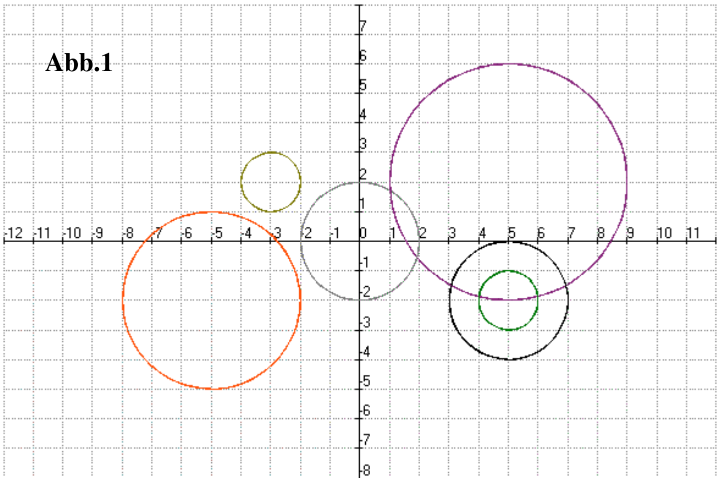
Erläutere diese Aussage!

Hausaufgabe:
a) Berechne die Punkte des Einheitskreises zu den Winkeln mit $t = 0.5$, $t = 1$, $t = 2$, $t = 3$, $t = 4$, $t = 35°$, $t = 270°$, $t = 2\pi$.
b) Berechne den Winkel t zu den Kreispunkten (0.5, 0.8860), (–0.5, –0.8860).
c) Liegen die Punkte (0.5, 0.88), auf dem Einheitskreis?

Folie

Aufgabe:
Die folgende Abbildung 1 zeigt viele Kreise an verschiedenen Stellen des Koordinatensystems.

- Zeichne diese Kreise mit dem Taschencomputer.



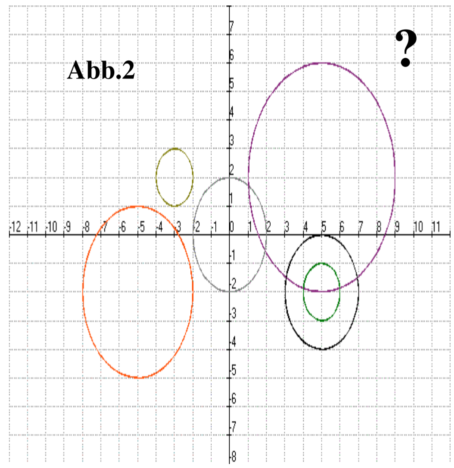
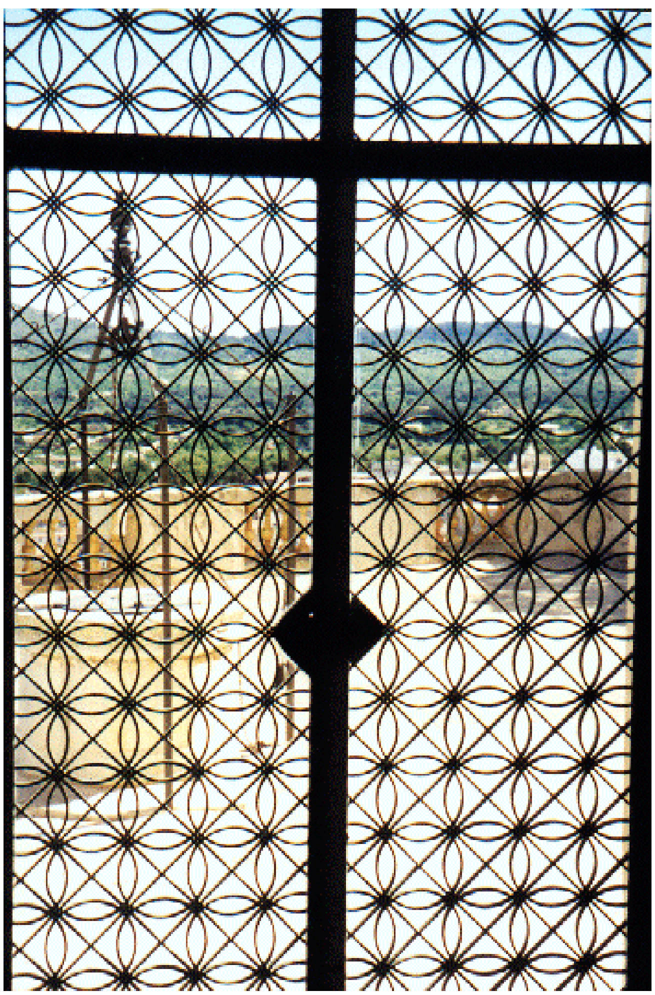


Abb.3



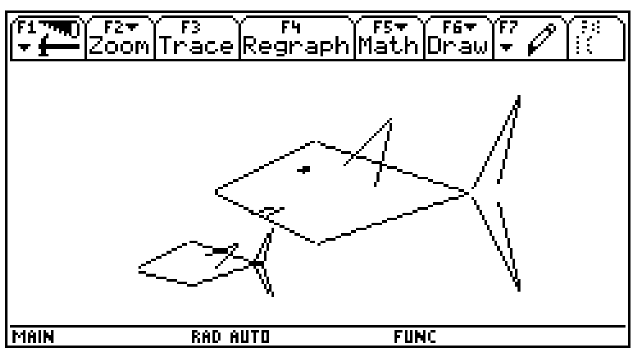
Wie SchülerInnen spielerisch den Umgang mit Ungleichungen lernen - Beispiele aus Klasse 9b -

von SchülerInnen der Paul-Natorp-Oberschule, aus dem Unterricht von Konrad Meyfarth,
zusammengestellt von Eberhard Lehmann

Stückweise definierte Funktionen und ihre Graphen	Interessante Hausarbeit	9.Klasse	Voyage 200

Kommentar (von Eberhard Lehmann)
Der Beitrag ist in verschiedener Hinsicht bemerkenswert.
1) *Er zeigt, mit welcher Hingabe SchülerInnen ihre Hausarbeit machen können, wenn sie die Aufgabe interessant und herausfordernd finden.*
2) *Wir sehen, wie hier die Eigentätigkeit und Kreativität der SchülerInnen gefördert wird.*
3) *Wir bemerken, wie man ein sonst eher langweiliges Thema (stückweise definierte Funktionen, Ungleichungen, Definitions- und Wertebereiche) durch eine auffordernde Visualisierung quasi unmerklich üben und vertiefen kann.*
4) *Die benötigten allgemeinen und mathematischen Kompetenzen treten hier miteinander verknüpft auf.*
5) *Die kleinen Geschichten fördern die Fantasie der Schüler.*

Die zwei Fische
Von Manuel

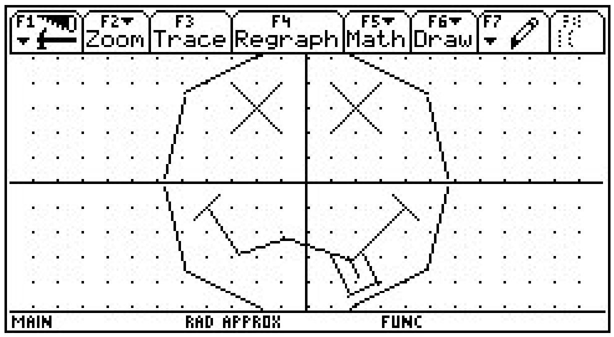


<u>Fish5:</u>	Y13= 1/3x|-2.5<=x and x<=-1.6
Y1= 1/2x+2|-4<=x and x<=0	Y14= -1/3x-3.5|-5<=x and x<=-2
Y2= -1/3x+2|0<=x and x<=6	Y15= 0.5x|-1.9<=x and x<=-1.3
Y3= 2x-12|6<=x and x<=8	Y16= 1/3x-2|-5<=x and x<=-2
Y4= 4x-28|7<=x and x<=8	Y17= 1/2x+1|-0.5<=x and x<=-0.3
Y5= -1/2x-2|-4<=x and x<=0	Y18= 1/10x+1|-0.6<=x and x<=-0.2
Y6= 1/3x-2|0<=x and x<=6	Y19= -1/8x+0.8|-0.7<=x and x<=-0.4
Y7= -2x+12|6<=x and x<=8	Y20= 1/2x+0.5|-7<=x and x<=-5
Y8= -4x+28|7<=x and x<=8	Y21= -0.5/2x-4.8|-7<=x and x<=-4.9
Y9= x|1<=x and x<=3	Y22= -2x-7.7|-2.5<=x and x<=-1.8
Y10= 4x-8.9|2.3<=x and x<=3.09	Y23= -3x-9.1|-2.1<=x and x<=-1.7
Y11= x+1|-4<=x and x<=-3	Y24= 2x+2.2|-2.5<=x and x<=-1.8
Y12= 1/3x-1|-4.3<x and x<=-3	Y25= 3.5x+4.5|-2.1<=x and x<=-1.7

Als ich den TI-92 zum ersten mal benutzt hatte,war ich noch ein bißchen unsicher mit der Anwendung. Doch schon nach ein paar Tagen hatte ich einiges gelernt. Nach etwa einer Woche bekamen wir die Aufgabe, einen Fisch mit dem TI-92 zu zeichnen. Am Anfang fiel es mir noch ein bißchen schwer mit den vielen Funktionen zurecht zukommen, aber durch das Training in der Klasse konnte ich schnell damit umgehen. Da mir der eine Fisch zu einfach vorkam, zeichnete ich einen zweiten. Einen großen und einen kleinen. Es kamen viele schöne Bilder zustande und es war eine gute Abwechslung für den Unterricht. - Viele Grüße Manuel

Die Geschichte zu dem Nirvana- Smiley

Von Vera



<table>
<tr>
<td><u>Nirvana</u>

Y1= 1/2x-6|x<=5
Y2= -1/2x-6|-5<=x
Y3= -1/2x+6|x<=5
Y4= 1/2x+6|-5<=x
Y5= 4x+23|-5.8<=x and x<=-4.8
Y6= -4x+23|4.8<=x and x<=5.8
Y7= -4x-23|-5.8<=x and x<=-4.8
Y8= 4x-23|4.8<=x and x<=5.8
Y9= -x+1|-3<=x and x<=-1
Y10= x+5|-3<=x and x<=-1</td>
<td>Y11= -x+5|1<=x and x<=3
Y12= x+1|1<=x and x<=3
Y13= x+3|-4.5<=x and x<=-3.5
Y14= -x+3|3.5<=x and x<=4.5
Y15= -3/2x-7|-4<=x and x<=-2.7
Y16= 1/3x-2|-2.8<=x and x<=-0.8
Y17= -1/3x-2.5|-1<=x and x<=2
Y18= x-5|2<=x and x<=4
Y19= -2x-1|0.8<=x and x<=1.8
Y20= 1/2x-5.5|1.7<=x and x<=3
Y21= -2x+0.35|1.7<=x and x<=2.1
Y22= -2x+1.7|2.2<=x and x<=2.9</td>
</tr>
</table>

Endlich mal eine Hausaufgabe, die sogar ein wenig Spaß machte: Wir sollten mit unseren TI-s verschiedene Bilder konstruieren**! Am gleichen Tag hatten wir gelernt, wie man Graphen zeichnet und einschränkt.** Also machte ich mir einen Tee und setzte mich an meinen Schreibtisch. Was sollte ich nun zeichnen? Zur Aufwärmung begann ich mit einem Herz. Dies war jedoch sehr leicht zu zeichnen und für mich keine Herausforderung. Ich wollte etwas anspruchsvolleres, etwas, das kein Anderer in der Klasse zeichnen würde.

Ich blickte hoch und überlegte. Dann sah ich das Poster von Kurt Cobain, das an meiner Wand hing, und im gleichen Moment fiel es mir ein: Ich wollte einen Nirvana- Smiley zeichnen, das Symbol und Erkennungszeichen dieser Legenden, die Musikgeschichte geschrieben und mit ihren Liedern nicht nur mich begeistert haben.

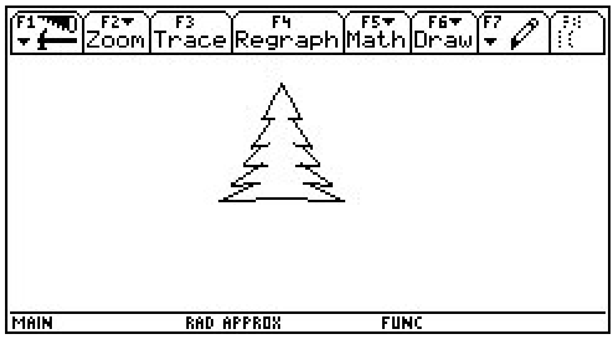
Also gut, womit fang ich an? Am besten mit dem kreisförmigen "Grundriss". Dann konnte ich genau bemessen, wo die Kreuze, die die Augen darstellen, sein sollten und wo

der Mund anfing und aufhörte. Das schwierigste war wohl die Zunge, doch auch dieses Problem war zu meistern...

Ungefähr eine Stunde später konnte ich mein endgültiges Werk betrachten und ich war stolz und zufrieden.

Der Tannenbaum

Von Malte

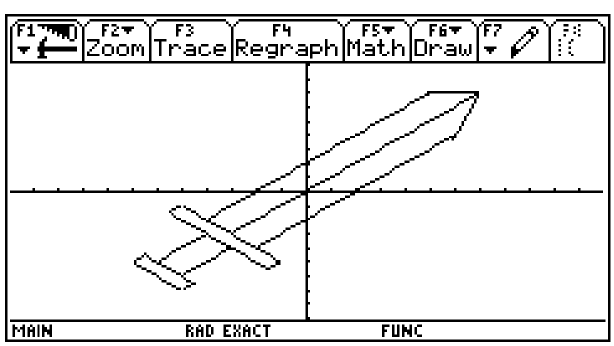


<u>Der Tannenbaum</u>	
	Y11= 1/10x+0.8|-1.5<=x and x <=-0.6
Y1= 1.8x+4|-0.85<=x and x <=0	Y12= -1/10x+0.8|0.6<=x and x <=1.5
Y2= -1.8x+4|0<=x and x <=0.85	Y13= 1/1.5x+1.3|-2<=x and x <=-0.8
Y3= 1/10x+2.65|-0.85<=x and x <=-0.3	Y14= -1/1.5x+1.3|0.8<=x and x <=2
Y4= -1/10x+2.65|0.3<=x and x <=0.85	Y15= 1/10x+0.1|-2<=x and x <=-0.9
Y5= 1.5x+3.2|-1.2<=x and x <=-0.5	Y16= -1/10x+0.1|0.9<=x and x <=2
Y6= -1.5x+3.2|0.5<=x and x <=1.2	Y17= 1/2x+0.5|-25<=x and x <=-1
Y7= 1/10x+1.6|-1.2<=x and x <=-0.5	Y18= -1/2x+0.5|1<=x and x <=2.5
Y8= 1/10x+1.6|0.5<=x and x <=1.2	Y19= 1/20x-0.6|-2.5<=x and x <=0
Y9= 1x+2.3|-1.5<=x and x <=-0.8	Y20= -1/20x-0.6|0<=x and x <=2.5
Y10= -1x+2.3|0.8<=x and x <=1.5	[Y21= -30x+15|0.5<=x and x <=0.6]
	[Y22= 30x+15|-0.6<=x and x <=-0.5]

Ja, ja, es weihnachtet sehr.- Eines Abends ging ich nach draußen. Ich merkte, es war sehr kalt und überall sah man schöne Weihnachtslichter in den Fenstern. Da dachte ich mir, ich zeichne einen Tannenbaum auf dem TI. So kam es auch. Er wurde schöner, als ich es mir vorgestellt hatte.

Das Schwert:

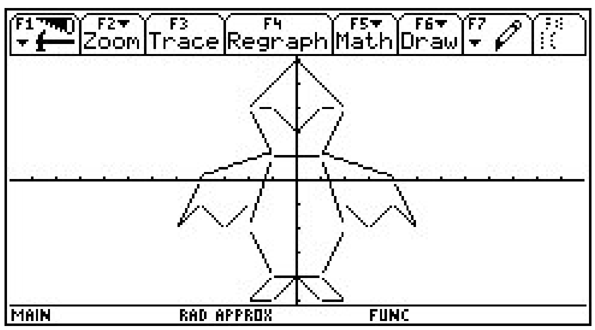
von Frederic



Schwert:	
Y1= 1x+2|-4<=x and x<=5	Y9= -1x-7|-5.5<=x and x<=-1.5
Y2= 1x-2|-2<=x and x<=6	Y10= 1x+1|-6<=x and x<=-4
Y3= 1x|-3<=y and x<=7	Y11= 1x-1|-5<=x and x<=-3
Y4= 3x-14|5.9<= x and x <=7	Y12= -1x-11|-6.5<=x and x<=-4.5
Y5= 0x+7|4.9<=x and x<=7	Y13= 1x+2|-7<=x and x<=-6.5
Y6= -1x-6|-5<=x and x<=-1	Y14= 1x-2|-5<=x and x<=-4.5
Y7= 1x+4|-5.5<=x and x<=-5	Y15= -1x-12|-7<=x and x<=-5
Y8= 1x-4|-1,5<=x and x<=-1	

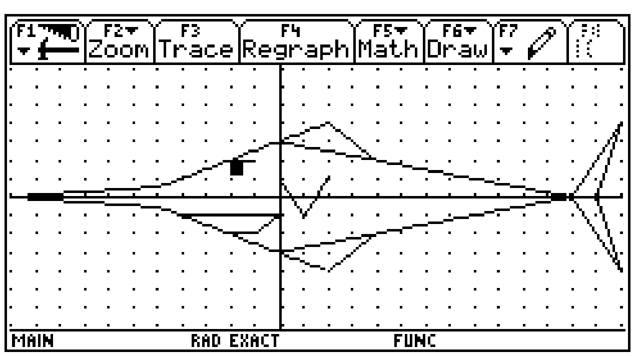
Dieses legendäre Schwert hat einst dem mächtigen Ritter Lanzelot gehört. Es heißt, dass diesem Schwert geheimnisvolle magische Kräfte innewohnen sollen. Bisher hat aber noch niemand die magischen Runen auf dem Schwert entziffern können. Es liegt derzeit in einem Museum in England und wird täglich von mehreren hundert Besuchern bewundert.

Der Pinguin
von Charmaine



Der Pinguin
Eines Tages tauchte ein Pingiun im Graphen auf, von vielen Geraden gezeichnet. Die Fische, die vom Ti als erstes gezeichnet wurden, bekamen Angst.Da Pinguine gerne Fische essen, doch dieser Pinguin war Vegetarier und so wurden alle Freunde.

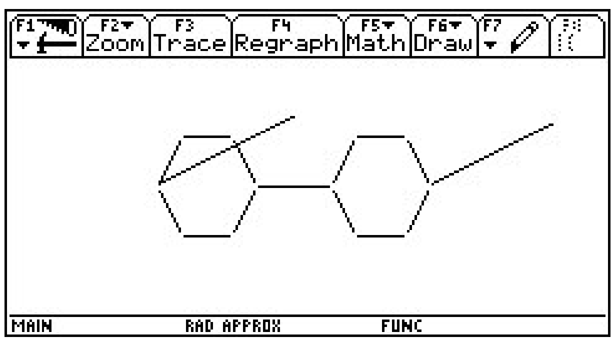
Meinfish
Von Frederic



Meinfish:	
Y1= 1/2x+3|-5<=x and x<=0	Y15= -1/2x-3|-0.1<=xand x<=2
Y2= -1/4x+3|0<=x and x<=12	Y16= x-6|2<=x and x<=4
Y3= 2x-24|11.8<=x and x<=14	Y17= 0x-2|-2<=x and x<=-1
Y4= 4x-52|12.8<=x and x<=14	Y18= 1x-1|-1.1<=x and x<=0
Y5= -1/2x-3|-5<=x and x<=0	Y19= 0x-1|-4.1<=x and x<=0
Y6= 1/4x-3|0<=x and x<=12	Y20= 0x+2|-2<=x and x<=-1
Y7= -2x+24|11.8<=x and x<=14	Y21= 0x+1.9|-2<=x and x<=-1.5
Y8= -4x+52|12.8<=x and x<=14	Y22= 0x+1.8|-2<=x and x<=-1.5
Y9= 1/11x+1|-11<=x and x<=4.9	Y23= 0x+1.7|-2<=x and x<=-1.5
Y10= -1/11x-1|-11<=x and x<=-4.9	Y24= 0x+1.6|-2<=x and x<=-1.5
Y11= 1/2x+3|-0.1<=x and x<=2.1	Y25= 0x+1.5|-2<=x and x<=-1.5
Y12= -1x+6|2<=x and x<=4	Y26= 0x+1.4|-2<=x and x<=-1.5
Y13= -2x+1|0<=x and x<=1	Y27= 0x+1.3|-2<=x and x<=-1.5
Y14= 2x-3|0.9<=x and x<=2.1	Y28= 0x+1.2|-2<=x and x<=-1.5

Dieser Schwertfisch ist der größte seiner Art. Noch größer als der riesige weiße Hai. Er gilt als unschlagbar und er ist mehrere hundert Jahre alt.Er ist sehr gutmütig und er frisst auch nur Pflanzen. Er setzt sich oft für kleinere Fische ein wenn sie dem Tode nahe sind. Er könnte nie jemanden etwas antun aber wenn andere in Gefahr sind hält ihn nichts.

Die Zauberbrille
von Max



Brille	
Y1= 0x+2|2<=x and x<=4	Y9= 2x+4|-3<=x and x<=-2
Y2= 2x-2|1<=x and x<=2	Y10= 0x+2|-5<=x and x<=-3
Y3= -2x+2|1<=x and x<=2	Y11= 0x-2|-5<=x and x<=-3
Y4= 0x-2|2<=x and x<=4	Y12= 2x+12|-6<=x and x<=-5
Y5= 2x-10|4 <=x and x<=5	Y13= -2x-12|-6<=x and x<=-5
Y6= -2x+10|4<=x and x<=5	Y14= 1/2x+3|-6<=x and x<=-0.5
Y7= 0x+0|-2<=x and x<=1	Y15= 1/2x-2.5|5<=x and x<=10
Y8= -2x-4|-3<=x and x<=-2	

König Merlin der 15. regierte sein kleines Land nun schon etliche Jahre. Bisher war das Volk sehr zufrieden mit ihm, er trieb gute Diplomatie und kurbelte gleichzeitig die Wirtschaft schön hoch.
Doch noch nie in seiner Amtszeit war er in einer solchen verzwickten Lage. Sein Land war sehr bergig, so dass man ohne Späher und Wachen, die einem schnell von herankommenden Feinden berichteten, einen gegenerischen Angriff nicht früh genug sehen konnte. Nun bestand die Gefahr eines Angriffs der barbarischen Nachbarn, den Trolliten. Deshalb schickte er alle seine Späher und Wachen zur Südseite seiner Festung, um schnell genug planen zu können. Doch die Angst vor einem anderen Angriff von der Nordseite brachte ihn zum Verzweifeln. Denn wenn dort nun eine riesige Armee hinter dem nächsten Hügel wartete, war die Schlacht seinerseits verloren.
In seiner Ratlosigkeit begab er sich zu all seinen Beratern, Erfindern und Magiern. Und einer von ihnen hatte auch eine sehr gute Erfindung, die allerdings noch nicht ganz ausgereift war.
Eine Brille, mit der viele Menschen besser sehen konnten. Die Besonderheit war, dass man nicht etwa schärfer sehen konnte, sondern durchsichtig. Also durch die Berge und Hügel hindurch bis hin zu feindlichen Truppen. Doch diese Brille funktionierte nur unter schwierigen Bedingungen:
Zum einen nur in 60 Metern über dem Boden und zum andern musste der Träger einen Kopfstand machen. So gab der König sofort den Befehl, einen großen, 60 Meter großen Turm zu bauen. Er selbst ging hinauf, mit der Brille und einem Gummi. Mit dem Gummi befestigte er die Brille, damit sie beim Kopfstand nicht herunterfallen würde.
Dieses Ritual, das sich schnell herumsprach und wegen dem ihn viele andere Herrscher verspotteten, wiederholte er nun mehrmals täglich. Bei einem der Kopfstände sah er nun die Trolliten, die ihn tatsächlig angreifen wollten. Er sah genau, wo wieviele Einheiten marschierten und konnte so einen guten Gegenangriff planen, der den Gegner in einen Hinterhalt führte. - Und so konnte er, dank der Brille, viele weitere Jahre erfolgreich herrschen.

Matrizen
Eine Unterrichtseinheit mit dem Voyage 200
im Wahlpflichtfach Mathematik (9. Klasse)

Ulrich. Döring, Willi-Graf-Oberschule

Matrizen, LGS, Abbildungsgeometrie	Matrizenkalkül, Rechengesetze	Wahlpflichtfach und Sekundarstufe 2	Voyage 200

Das Thema „Matrizen“ im Wahlpflichtfach Mathematik ist sehr gut geeignet, Schüler mit einem Computeralgebrasystem (CAS) vertraut zu machen und sie von der Leistungsfähigkeit moderner Taschencomputer zu überzeugen. Die im Folgenden beschriebene Unterrichtseinheit wurde mit einer Lerngruppe durchgeführt, die noch keine Erfahrung im Umgang mit CAS hatte. Zunächst wird ein tabellarischer Überblick der Unterrichtseinheit gegeben.

Übersicht über die Unterrichtseinheit

1./2. Std.	• Begriff der Matrix • Eingabe von Matrizen beim Voyage 200 • Matrizenaddidition (Beispiele für Hand- und CAS-Rechnung) • Matrizenmultiplikation (Falk-Schema, Beispiele für Hand- und CAS-Rechnung) • Hausaufgabe (Anwendungsaufgabe zur Matrizenmultiplikation)
3./4. Std.	• Gesetze für das Rechnen mit Matrizen (u. a. Überprüfung der Gültigkeit mithilfe des CAS am Beispiel von (2,2)-Matrizen) • Spezielle Matrizen und ihre Eigenschaften (Einheitsmatrix, inverse Matrix) • Hausaufgabe (exemplarische Überprüfung des Distributivgesetzes mit dem CAS)
5./6. Std.	• Abbildungsgeometrie im R^2 (Ermittlung der (2,2)-Abbildungsmatrizen zu Spiegelung an der x- bzw. y-Achse sowie an der 1. Winkelhalbierenden, Punkspiegelung am Ursprung, Drehung um 90°) • Durchführung der Abbildungen mithilfe des CAS am Beispiel von Dreiecken und Vierecken • Hausaufgabe (Zweifache Abbildung eines Trapezes mithilfe des CAS)
7./8. Std.	• Abbildungsgeometrie im R^2 (Ermittlung der (2,2)-Abbildungsmatrizen zu Dehnung in x- bzw. y-Richtung, zentrische Streckung) • Hintereinanderausführung von Abbildungen • Hausaufgabe (Zweifache Abbildung eines Dreiecks mithilfe des CAS)
9./10. Std.	• „Rückgängigmachen“ einer Abbildung mithilfe der inversen Matrix • Festigung der Abbildungsgeometrie anhand von Übungsaufgaben • Hausaufgabe (zentrische Streckung eines Dreiecks und „Rückgängigmachen“ der Abbildung unter Verwendung des CAS)
11./12. Std.	• Graphische Lösung von (2,2)-LGS mithilfe des CAS • Der CAS-Baustein „Gerade“ *ger(m,x,n)* mit Anwendungsbeispielen • Hausaufgabe zur Verwendung des CAS-Bausteins „Gerade“
13./14. Std.	• Der Gauß-Algorithmus am Beispiel eines (3,3)-LGS • LGS in Matrixschreibweise • Lösen eines (3,3)-LGS mithilfe des CAS unter Verwendung der Bausteine *mRow* und *mRowAdd* • Hausaufgabe zur Lösung eines (3,3)-LGS mithilfe des CAS
15./16. Std.	• Übung: Lösen eines (3,3)-LGS mithilfe des CAS unter Verwendung der Bausteine *mRow* und *mRowAdd* • Textaufgabe, die auf ein (3,3)-LGS führt, „Umschreiben“ in eine „CAS-gerechte“ Form, Lösen mithilfe des Bausteins *Rref* • Hausaufgabe (Textaufgabe, Lösen mithilfe des CAS).
17./18. Std.	• Lösen eines (3,3)-LGS unter Verwendung der inversen Matrix mithilfe des CAS

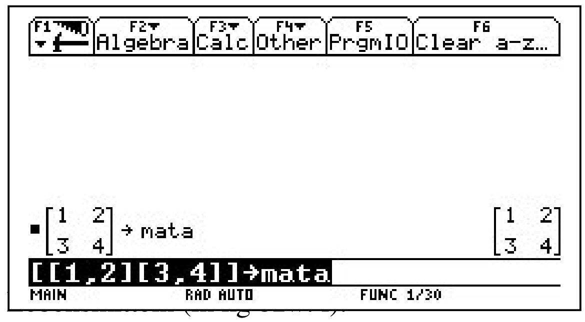
	• Übungsaufgaben (Kleingruppenarbeit) zur Festigung und zur Vorbereitung auf die Klassenarbeit
19./20. Std.	• Zweistündige Klassenarbeit unter Verwendung des Voyage 200

Um die Unterrichtseinheit zu veranschaulichen und für einen Interessenten nachvollziehbar darzustellen, werden im Folgenden Anmerkungen zum Arbeiten mit dem Voyage 200, didaktische Kommentare und eine Reihe von Beispielaufgaben (kleinerer Schriftgrad) angegeben.

Einführung

Die Eingabe von größeren Matrizen erfolgt am besten über den Data/Matrix Editor: Apps → Data/Matrix Editor → New ↵ → Matrix wählen → Variablenname eingeben z. B. mata → Anzahl Reihen wählen → Anzahl Spalten wählen, ↵ Zahlen in die Matrix eintragen.

Kleinere Matrizen können auch direkt über die Eingabezeile im Ausgangsbildschirm eingetragen werden. Die nebenstehende Abb. zeigt ein Beispiel.



Übungsaufgaben zur Matrizenmultiplikation sollten in dieser Altersstufe einfache Anwendungen sein. Die folgende Aufgabe wurde als Hausaufgabe nach der 1. Doppelstunde gestellt.

Die Hausfrauen H_1, H_2 und H_3 haben folgenden Bedarf an

	H_1	H_2	H_3
Fleisch	2,5	2	1,5
Milch	4	3	3,5
Äpfel	2	3	4
Wurst	0,5	0,4	0,3

In zwei Supermärkten sind folgende Preise (in €) ausgezeichnet:

	Fleisch je kg	Milch je l	Äpfel je kg	Wurst je kg
Supermarkt I	12,5	0,85	2,0	9,0
Supermarkt II	11,2	0,90	1,85	8,5

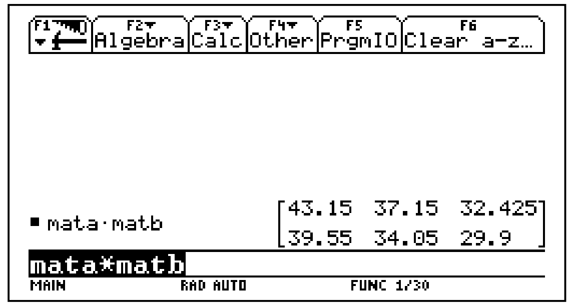
Berechne die Kosten, die jede Hausfrau für ihren Bedarf in jedem der beiden Supermärkte hätte. Schreibe und rechne als Matrizenmultiplikation!

Die entscheidende Denkarbeit ist hier die Anordnung der Matrizen bei der Multiplikation. Die Spaltenzahl der 1. Matrix muss mit der Zeilenzahl der zweiten Matrix übereinstimmen, damit eine Multiplikation möglich ist. Die relativ aufwendige Rechenarbeit kann man dann dem Symbolrechner überlassen.

Eine mögliche Lösung:

$$\begin{pmatrix} 12{,}5 & 0{,}85 & 2 & 9 \\ 11{,}2 & 0{,}90 & 1{,}85 & 8{,}5 \end{pmatrix}_{(2,4)} \cdot \begin{pmatrix} 2{,}5 & 2 & 1{,}5 \\ 4 & 3 & 3{,}5 \\ 2 & 3 & 4 \\ 0{,}5 & 0{,}4 & 0{,}3 \end{pmatrix}_{(4,3)}$$

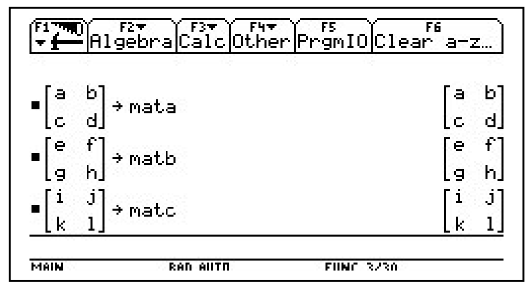
$$= \begin{pmatrix} 43{,}15 & 37{,}15 & 32{,}43 \\ 39{,}55 & 34{,}05 & 29{,}9 \end{pmatrix}_{(2,3)}$$



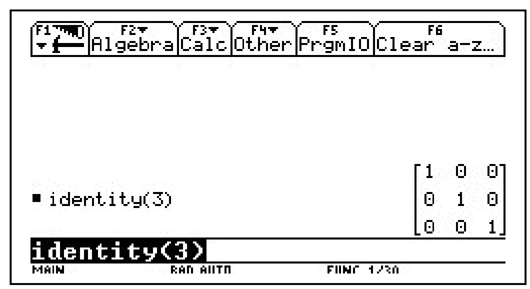
Rechengesetze

Der Nachweis von Matrizengesetzen ist teilweise langatmig. Man sollte sich daher auf exemplarisches Arbeiten beschränken und beispielsweise Überprüfungen zu den Gesetzmäßigkeiten unter Verwendung von (2,2)-Matrizen mithilfe des CAS durchführen. Sehr wichtig für das weitere Arbeiten ist jedoch die Erkenntnis, dass das kommutative Gesetz bei der Matrizenmultiplikation in der Regel nicht gilt. Einige Übungsaufgaben sind im Folgenden angegeben.

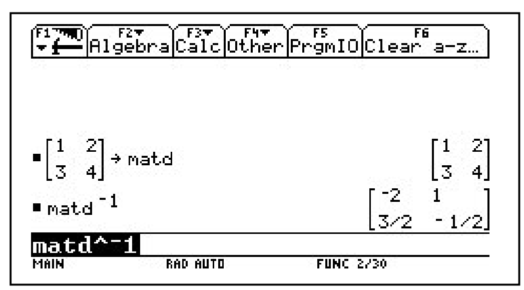
1. Für das Rechnen mit Matrizen gelten spezielle Rechengesetze. Keinesfalls dürfen die Rechengesetze für das Rechnen mit rationalen Zahlen unreflektiert auf das Rechnen mit Matrizen übertragen werden!!!
Definiere drei (2,2)-Matrizen in allgemeiner Form (s. Abb.rechts) und überprüfe
a. die Gültigkeit des **Assoziativgesetzes**; d. h. $A \cdot (B \cdot C) = (A \cdot B) \cdot C$.
b. des **Distributivgesetzes**; d. h. $A \cdot (B + C) = A \cdot B + A \cdot C$.
c. des **Kommutativgesetzes**; d. h. $A \cdot B = B \cdot A$.



2. Mit E bezeichnet man die sog. **Einheitsmatrix**. Es gilt $A \cdot E = E \cdot A = A$. E ist immer eine quadratische Matrix und kann mit dem Baustein *identity(Zeilenanzahl)* in das CAS (TI) eingegeben werden (Ausprobieren!).



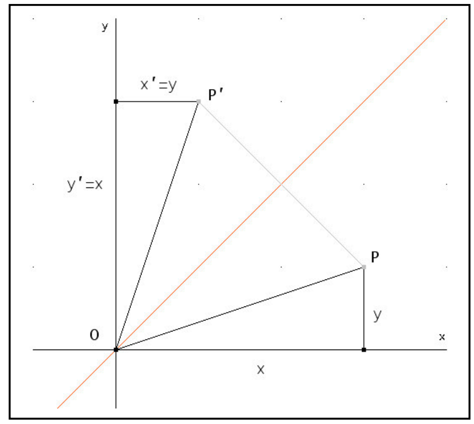
3. Die sog. **Inverse** A^{-1} einer quadratischen Matrix A hat folgende Eigenschaft: $A^{-1} \cdot A = A \cdot A^{-1} = E$. Ermittle die Inverse D^{-1} der Matrix D per Hand! $D = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$.
Überprüfe die Richtigkeit Deines Ergebnisses, indem Du den Baustein „*matd*^-*1*“ in das CAS eingibst. Natürlich musst Du vorher die Matrix matd (= D) eingeben und definieren!



Abbildungsgeometrie

Es reicht aus, wenn man die Vorgehensweise an einem Beispiel (z. B. Spiegelung eines Punktes an der 1. Winkelhalbierenden) (vgl. Abb. nächste Seite) bespricht. Alle anderen Abbildungsgleichungen können die Schüler dann in Partnerarbeit selbst finden.

Spiegelung eines Punktes an der 1. Winkelhalbierenden



Die Abbildungsgleichungen lauten:

$$I.\ x' = y$$
$$II.\ y' = x$$

bzw. in Matrixschreibweise:

$$\begin{pmatrix} x' & y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x & y \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \quad kurz: P' = P \cdot A$$

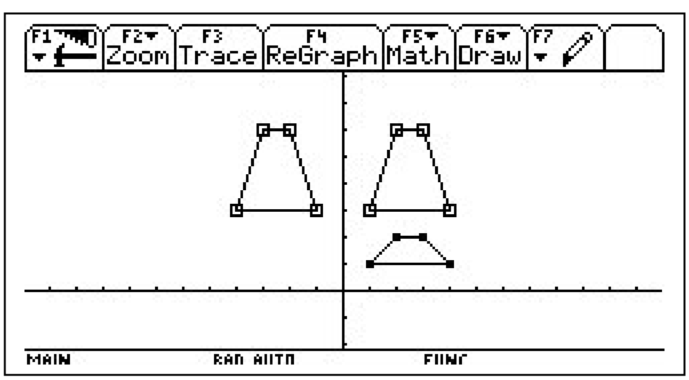
Als geometrische Objekte bieten sich in der 9. Klasse Dreiecke und Vierecke an. Die Eingabe des Dreiecks ABC mit A(2/1), B(4/2), C(3/4) erfolgt über den Data/Matrix-Editor und wird kurz beschrieben:
Apps → Data/Matrix-Editor→ New → ↵ List wählen → Variablenname eingeben z. B. lista ↵ Koordinaten der Punkte in die Tabelle eingeben (unter c1 stehen die x-Koordinaten, unter c2 die y-Koordinaten):

c1	c2	
2	1	
4	2	
3	4	
2	1	Damit wird der Linienzug geschlossen.

→ F2 → Plot1 → F1 (Define) → Plot Type: xyline → Mark: Box oder Square (Original- und Bildfigur sollten unterschiedliche Darstellungen der Eckpunkte haben!) → x:c1 → y:c2 ↵. Jetzt kann das Dreieck gezeichnet werden (mode steht auf function). Die Koordinaten des Bilddreiecks (z. B. bei einer Spiegelung an der 1. Winkelhalbierenden mit den Abbildungsgleichungen I. x' = y, II. y' = x) werden sofort berechnet, wenn man in der Liste oben eingibt c3 = c2 bzw. c4 = c1. Das Bilddreieck kann dann nach einem analogen Verfahren wie oben beschrieben gezeichnet werden.

Zwei typische Übungsaufgaben mit dem CAS sind im Folgenden angegeben:

1. Das Trapez ABCD mit A(1/1), B(4/1), C(3/2), D(2/2) soll durch eine Hintereinanderausführung (= Verkettung) zweier Abbildungen abgebildet werden:
I. Dehnung in y-Richtung (Dehnungsfaktor 3): Bildtrapez I: A'B'C'D',
II. Spiegelung an der y-Achse: Bildtrapez II: A''B''C''D''.
Stelle die Abbildungsgleichungen zu I und II auf und führe die Abbildungen mithilfe des CAS durch (s. Abb. unten). Wie könnte man das Originaltrapez ABCD mithilfe einer Abbildung III **in einem Schritt** auf das Bildtrapez A''B''C''D'' abbilden? (Abbildungsgleichung!). Welcher Zusammenhang besteht zwischen der Abbildungsmatrix zu III mit den Abbildungsmatrizen zu I und II?



Der Zusammenhang zwischen den 3 Abbildungsmatrizen A_I, A_{II}, A_{III} sei kurz hergeleitet:
Es gilt:

$$(1)\ P' = P \cdot A_I;\ (2)\ P'' = P' \cdot A_{II};\ (1)\ in\ (2): P'' = P \cdot A_I \cdot A_{II};\ Daraus\ folgt: A_{III} = A_I \cdot A_{II}$$

$$Konkret\ gilt\ hier: \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}.$$

2. Bestimme mithilfe der Abbildungsgleichung
$\left(x'\ y'\right) = \left(x\ y\right) \cdot \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ das Bild des Dreiecks ABC mit A(1/1), B(3/2), C(2/3). Zeichne Original- und Bilddreieck mithilfe des CAS (TI)! Wie könnte man das Bilddreieck aus dem gegebenen Originaldreieck konstruieren? Durch welche Abbildung (Abbildungsgleichung!) könnte man die Abbildung wieder rückgängig machen? Welcher Zusammenhang besteht zwischen den beiden Abbildungsmatrizen?

Lineare Gleichungssysteme

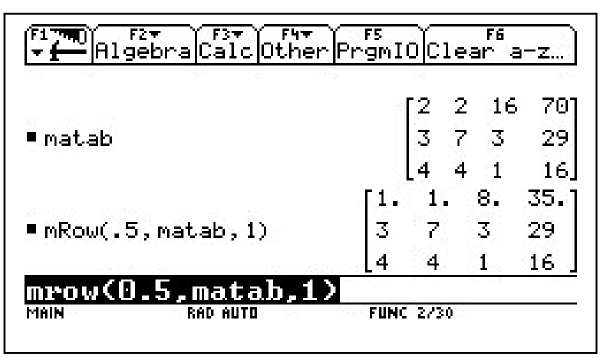
Zunächst wird die graphische Lösung von (2,2)-LGS mithilfe des CAS durchgeführt. In diesem Zusammenhang wird der CAS-Baustein $m \cdot x + n \rightarrow ger(m, x, n)$ eingeführt. Die Verfahrensweise dazu ist in der Literatur hinreichend beschrieben, so dass darauf hier nicht weiter eingegangen wird.

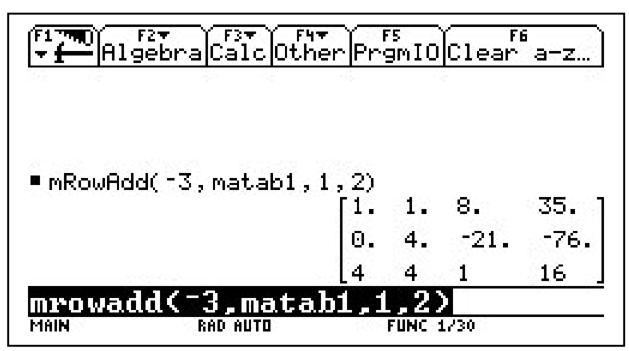
Danach wird besprochen, wie man (höhere) LGS mithilfe von Matrizen darstellt. Beispiel:

$$\left| \begin{array}{l} I.\ a_{11}x + a_{12}y + a_{13}z = b_1 \\ II.\ a_{21}x + a_{22}y + a_{23}z = b_2 \\ III.\ a_{31}x + a_{32}y + a_{33}z = b_3 \end{array} \right| \qquad \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix} \quad kurz: A_{(3,3)} \cdot X_{(3,1)} = B_{(3,1)}$$

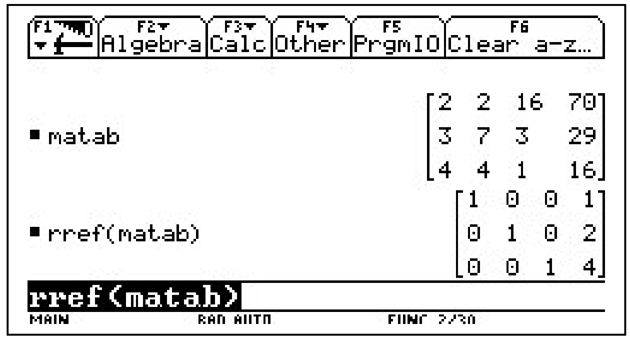
Die Matrix A heißt Koeffizientenmatrix, (A, B) ist die um B erweiterte Koeffizientenmatrix.

Danach wird die Vorgehensweise beim Gauß-Algorithmus am Beispiel eines (3,3)-LGS besprochen. Da die Vorgehensweise bei Handrechnung relativ langwierig und zudem fehleranfällig ist, erscheint der Einsatz des Symbolrechners hier besonders sinnvoll. Mithilfe der CAS-Bausteine *mRow* und *mRowAdd* kann man eine Gleichung des LGS mit einer Zahl multiplizieren bzw. eine Gleichung durch Addition der Gleichung mit dem Vielfachen einer anderen Gleichung ersetzen. Das sei im Folgenden illustriert:





Durch den Baustein *mRow(Faktor k, Matrixbezeichnung, Zeilenindex i)* wird bei der erweiterten Koeffizientenmatrix in der Abbildung links oben die 1. Zeile mit 0,5 multipliziert. Für die weiteren Rechenoperationen muss die erhaltene Matrix jeweils eine andere Bezeichnung bekommen (hier matab1)! Durch den Baustein *mRowAdd(Faktor k, Matrixbezeicnung, Zeilenindex i, Zeilenindex j)* wird bei der erweiterten Koeffizientenmatrix in der Abbildung rechts oben durch Addition der mit dem Faktor (-3) multiplizierten 1. Zeile zu der 2. Zeile an der 1. Stelle der 2. Zeile eine 0 erzeugt.



Anschließend werden Textaufgaben behandelt, die auf (3,3)- bzw. (4,4)-LGS führen. Hier liegt der Schwerpunkt darauf, dass die Schüler die im Text formulierten Bedingungen in ein LGS „übersetzen“. Danach muss das LGS in eine „CAS-gerechte“ Form gebracht werden. Die Lösung kann man dann in einem Schritt mit dem Baustein *Rref(Matrixbezeichnung)* erhalten. Dieser Baustein löst das LGS nach dem verbesserten Gauß-Algorithmus. Die Lösungsmenge kann unmittelbar in der rechten Spalte abgelesen werden (s. Abb. rechts).

Ein LGS kann auch unter Verwendung der inversen Koeffizientenmatrix gelöst werden (sofern diese existiert). Auch dies sollte an Beispielen besprochen werden:

$$A \cdot X = B \;\; / \cdot A^{-1} \text{ von links} \Rightarrow A^{-1} \cdot (A \cdot X) = A^{-1} \cdot B \Rightarrow (A^{-1} \cdot A) \cdot X = A^{-1} \cdot B \Rightarrow E \cdot X = A^{-1} \cdot B$$

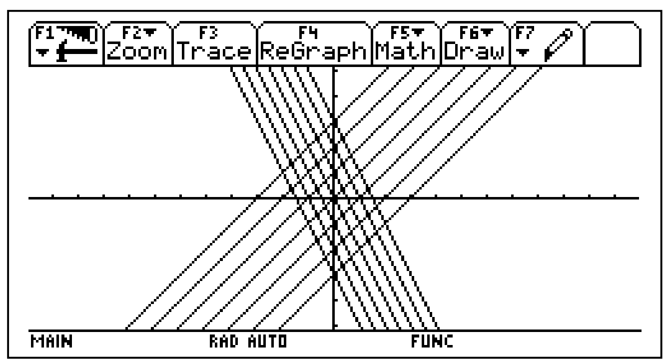
$$\Rightarrow X = A^{-1} \cdot B$$

Für die im Folgenden angegebene Klassenarbeit, die am Ende der Unterrichtseinheit geschrieben wurde, stand den Schülern eine Bearbeitungszeit von 100 Minuten zur Verfügung.

WPF MA-9	**1. Klassenarbeit** **Name:** ____________________________	**Dö**

Anleitung: Bei der Bearbeitung der Aufgaben soll der Voyage 200 als Hilfsmittel benutzt werden. Die Ergebnisse sind sorgfältig im Heft zu dokumentieren und zu kommentieren. Dabei ist auf eine **saubere äußere Form** und die **korrekte Anwendung von Rechtschreibungs- und Interpunktionsregeln** zu achten, weil sonst ggf. eine **Herabsetzung der Note** erfolgen **muss**! Bei Textaufgaben wird ein Antwortsatz verlangt!

1. Definiere den CAS-Baustein $m \cdot x + n \rightarrow ger(m, x, n)$ und erzeuge damit die nebenstehende Graphik. Erläutere Dein Vorgehen kurz! Im Graphikfenster wurde die übliche Einsstellung „ZoomDec“ gewählt.



2. In einem Sportstadion gibt es Plätze für 5 €, 6,50 € und 8 €. An den vier Sonntagen eines Monats werden für die einzelnen Preisklassen folgende Anzahlen an Eintrittskarten verkauft:

Sonntage	1. Klasse (5 €)	2. Klasse (6,50 €)	3. Klasse (8 €)
1. Sonntag	11950	2130	1910 Karten
2. Sonntag	7210	980	1200 Karten
3. Sonntag	11300	1600	1350 Karten
4. Sonntag	12100	2300	1800 Karten

Schreibe als Matrizenmultiplikation (im Heft!) und berechne die Gesamteinnahmen

a. für jeden einzelnen Sonntag,
b. für alle 4 Sonntage zusammen.

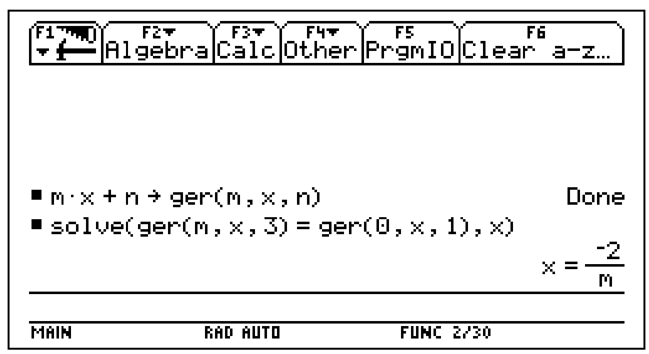
3. 1. Das Dreieck ABC mit A(1/1), B(3/4), C(2/4), soll durch eine Hintereinanderausführung (= Verkettung) zweier Abbildungen abgebildet werden:
I. Punktspiegelung am Ursprung (0/0): Bilddreieck I: A'B'C',
II. Spiegelung an der x-Achse: Bilddreieck II: A''B''C''.
Stelle die Abbildungsgleichungen zu I und II auf und führe die Abbildungen mithilfe des CAS durch. Notiere aus der Tabelle im CAS die Koordinaten der Punkte der beiden Bilddreiecke im Heft! Wie könnte man das Originaldreieck ABC mithilfe einer Abbildung III **in einem Schritt** auf das Bilddreieck A''B''C'' abbilden? (Abbildungsgleichung!). Welcher Zusammenhang besteht zwischen der Abbildungsmatrix zu III mit den Abbildungsmatrizen zu I und II (Herleitung in Matrixschreibweise!)?

4. Löse das angegebene LGS nach dem Gauß'schen Eliminationsverfahren mithilfe des CAS unter Verwendung der Bausteine „mRow“ und „mRowAdd“! Die Veränderung der erweiterten Koeffizientenmatrix muss dabei jeweils im Heft dokumentiert werden!

$$\left| \begin{array}{r} I.\ 3x+3y+2z=5 \\ II.\ 2x+4y+3z=4 \\ III.\ -5x+2y+4z=-9 \end{array} \right| G=\mathbb{Q}x\mathbb{Q}x\mathbb{Q}$$

5. An einer Kinokasse werden Karten in drei Preislagen verkauft: I. Rang 6 €, II. Rang 8 €, III. Rang 10 €. Bei einer Vorführung werden 60 Karten zu insgesamt 460 € verkauft. Für den zweiten Rang wurden ebenso viele Karten wie für die beiden anderen Ränge zusammen verkauft. Wie verteilen sich die 60 Karten auf die einzelnen Ränge?
Erläutere zunächst genau die Bedeutung der Variablen, stelle danach ein LGS auf, bringe es in eine CAS-gerechte Form und löse das LGS mithilfe der „Ref“-Bausteins! Antwortsatz!

6. Erkläre genau, welche Aufgabenstellung in der nebenstehenden Abb. behandelt wurde! Interpretiere jetzt das Ergebnis (Fallunterscheidung für verschiedene Werte von m, Sonderfall) und erläutere Deine Überlegungen anhand einer graphischen Darstellung!



Probleme beim Lösen von linearen Gleichungssystemen mit Parametern unter Verwendung des rref()-Befehls

Günter Dreeßen-Meyer

Lineare Gleichungssysteme	Rref(matrix) - Befehl	Sekundarstufe 2	Voyage 200

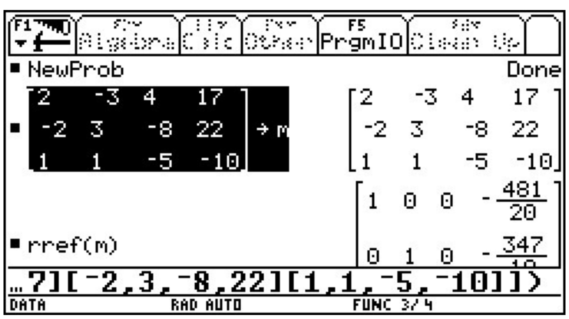
Die TI-Nachrichten 1/04 haben einen Artikel von K.H. Keunicke zum Thema Lineare Gleichungssysteme und der VOYAGE 200 veröffentlicht. Keunicke geht zu Beginn des Artikels auf das Problem ein, dass die meisten CAS-Systeme Schwierigkeiten haben, LGS mit Parametern korrekt zu lösen.
Dieses Problem soll hier näher untersucht werden.

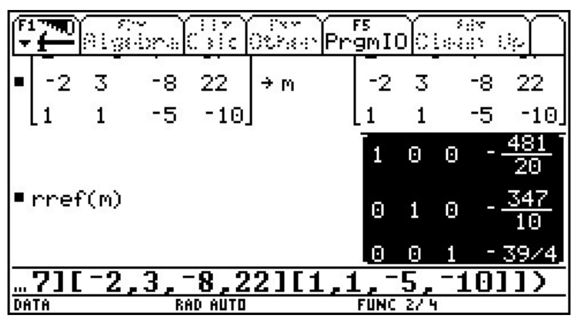
1.

Betrachten wie ein normales lineares Gleichungssystem:

$$2x - 3y + 4z = 17$$
$$-2x + 3y - 8z = 22$$
$$x + y - 5z = -10$$

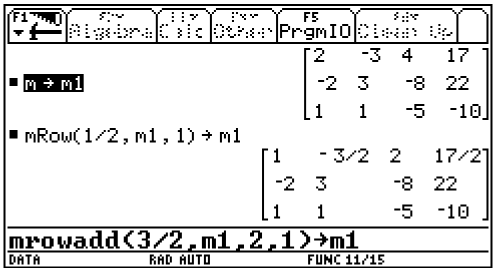
Die Koeffizientenmatrix des LGS kann bequem über den Data-Matrix-Editor des V200 eingegeben werden (oder auch direkt im Home-Bereich). Mit Hilfe der rref()-Befehls wird das erweiterte Gaußsche Eliminationsverfahren durchgeführt. Der umgeformten Matrix können die Lösungszahlen für x, y und z direkt entnommen werden, da die in der Diagonale stehenden Zahlen auf 1 normiert werden.

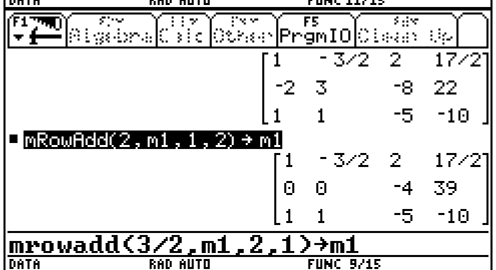


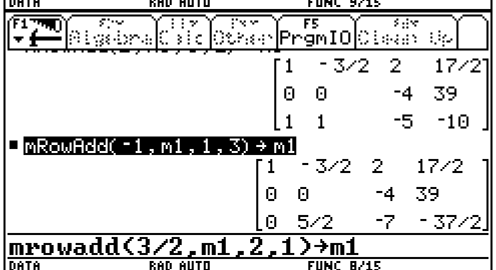


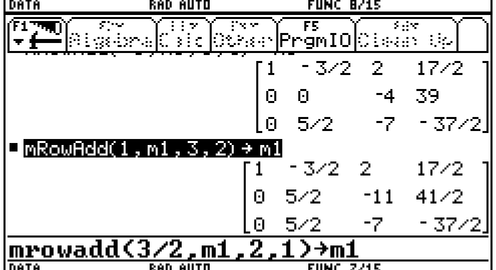
2.

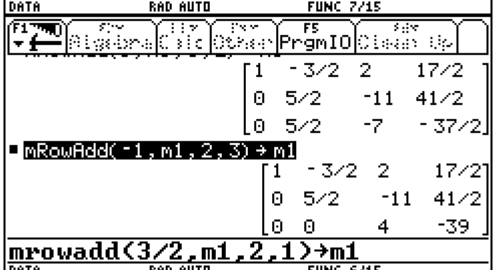
Die Umformung in die Diagonalform kann durch die beiden Befehle mrow() und mrowadd() selbst manuell durchgeführt werden. Es ist nur darauf zuachten, dass die Matrix immer wieder abgespeichert wird.

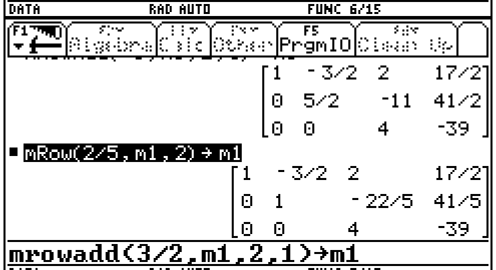

PrgmIO
m → m1
2 -3 4 17
-2 3 -8 22
1 1 -5 -10
mRow(1/2, m1, 1) → m1
1 -3/2 2 17/2
-2 3 -8 22
1 1 -5 -10
mrowadd(3/2,m1,2,1)→m1
DATA RAD AUTO FUNC 11/15

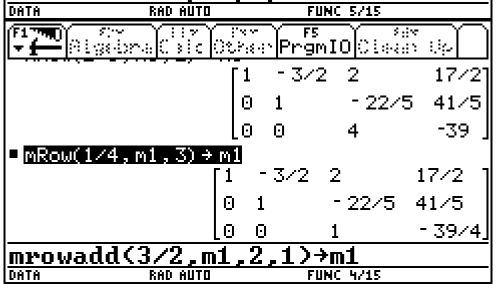

PrgmIO
1 -3/2 2 17/2
-2 3 -8 22
1 1 -5 -10
mRowAdd(2, m1, 1, 2) → m1
1 -3/2 2 17/2
0 0 -4 39
1 1 -5 -10
mrowadd(3/2,m1,2,1)→m1
DATA RAD AUTO FUNC 9/15

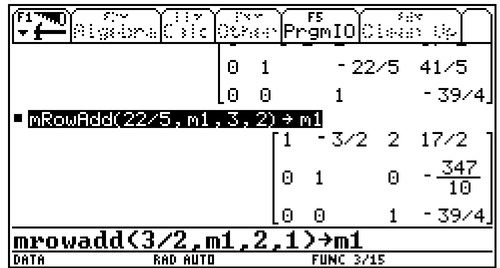

PrgmIO
1 -3/2 2 17/2
0 0 -4 39
1 1 -5 -10
mRowAdd(-1, m1, 1, 3) → m1
1 -3/2 2 17/2
0 0 -4 39
0 5/2 -7 -37/2
mrowadd(3/2,m1,2,1)→m1
DATA RAD AUTO FUNC 8/15

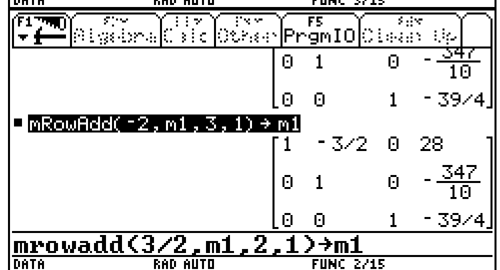

PrgmIO
1 -3/2 2 17/2
0 0 -4 39
0 5/2 -7 -37/2
mRowAdd(1, m1, 3, 2) → m1
1 -3/2 2 17/2
0 5/2 -11 41/2
0 5/2 -7 -37/2
mrowadd(3/2,m1,2,1)→m1
DATA RAD AUTO FUNC 7/15

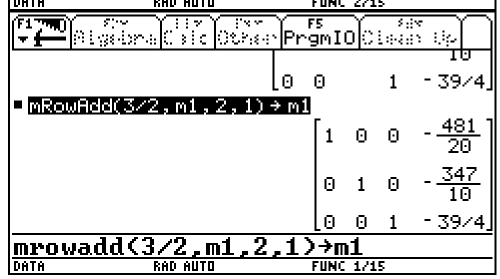

PrgmIO
1 -3/2 2 17/2
0 5/2 -11 41/2
0 5/2 -7 -37/2
mRowAdd(-1, m1, 2, 3) → m1
1 -3/2 2 17/2
0 5/2 -11 41/2
0 0 4 -39
mrowadd(3/2,m1,2,1)→m1
DATA RAD AUTO FUNC 6/15


PrgmIO
1 -3/2 2 17/2
0 5/2 -11 41/2
0 0 4 -39
mRow(2/5, m1, 2) → m1
1 -3/2 2 17/2
0 1 -22/5 41/5
0 0 4 -39
mrowadd(3/2,m1,2,1)→m1
DATA RAD AUTO FUNC 5/15


PrgmIO
1 -3/2 2 17/2
0 1 -22/5 41/5
0 0 4 -39
mRow(1/4, m1, 3) → m1
1 -3/2 2 17/2
0 1 -22/5 41/5
0 0 1 -39/4
mrowadd(3/2,m1,2,1)→m1
DATA RAD AUTO FUNC 4/15

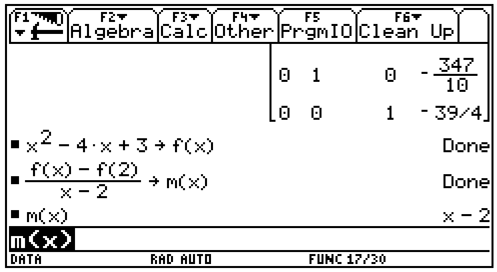

PrgmIO
0 1 -22/5 41/5
0 0 1 -39/4
mRowAdd(22/5, m1, 3, 2) → m1
1 -3/2 2 17/2
0 1 0 -347/10
0 0 1 -39/4
mrowadd(3/2,m1,2,1)→m1
DATA RAD AUTO FUNC 3/15


PrgmIO
0 1 0 -347/10
0 0 1 -39/4
mRowAdd(-2, m1, 3, 1) → m1
1 -3/2 0 28
0 1 0 -347/10
0 0 1 -39/4
mrowadd(3/2,m1,2,1)→m1
DATA RAD AUTO FUNC 2/15

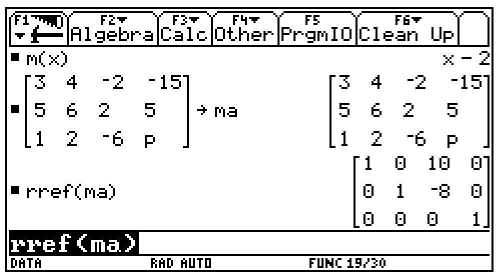

PrgmIO
0 0 1 -39/4
mRowAdd(3/2, m1, 2, 1) → m1
1 0 0 -481/20
0 1 0 -347/10
0 0 1 -39/4
mrowadd(3/2,m1,2,1)→m1
DATA RAD AUTO FUNC 1/15

3.

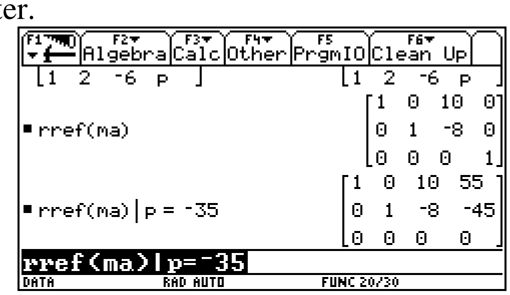
Was passiert jetzt aber bei einem LGS mit einer Variablen? Ein CAS-System versucht Terme möglichst weit zu vereinfachen. Dabei werden allerdings Ausnahmen und Sonderfälle einfach wegdividiert. Das passiert schon bei einfachen Termen wie z.B. einem Differenzenquotienten.



Das passiert jetzt auch bei der Diagonalisierung von Matrizen. Das CAS wirft die Variable beim Umformen einfach hinaus. Das LGS ist unlösbar, da es die unvollständige Nullzeile 0 0 0 1 enthält, so muss die umgeformte Matrix interpretiert werden.



Allerdings übersieht das CAS den Spezialfall p = -35. Für p = -35 ergibt sich eine vollständige Nullzeile, also ist das LGS in diesem Fall mehrdeutig lösbar. Es ergibt sich eine Lösung mit einem Parameter.

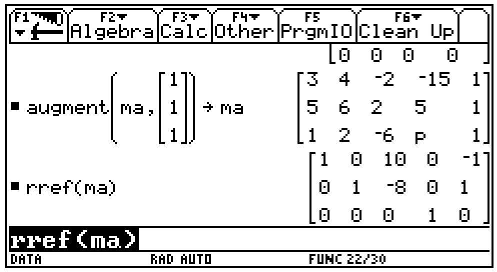


Geht man manuell an die Matrix ma mit den beiden im V200 vorhandenen Befehlen und diagonalisiert die Matrix, so kommt man in der Tat an die Stelle, wo das CAS durch p+35 brutal dividiert und damit p verschluckt.

4.

Wie kann das CAS überlistet werden? Durch welche Möglichkeit kann bei der Umformung der Spezialfall p = -35 sichtbar gemacht werden? Bisher ging ich nach einem Tipp von Heinz Lackmann aus Münster davon aus, an die Matrix eine Kontrollspalte $\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}$ anzuhängen. Die

Kontrollspalte wird mit umgeformt. Es entstehen Brüche, die im Nenner die Spezialfälle enthalten. Der augment-Befehl fügt Spalten einer Matrix hinzu.
Das klappte bisher immer ganz gut. Das CAS des V200 konnte ebenso wie DERIVE die Spezialfälle immer anzeigen. Aber bei der von Keunicke verwendeten Matrix funktioniert das jetzt nicht.

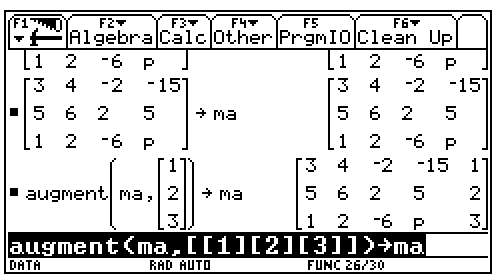


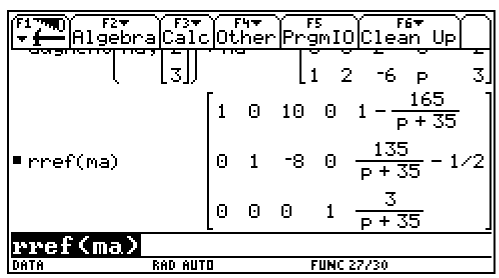
Was ist der Grund dafür?
Interpretieren wir die einzelnen Spalten der umgeformten Matrix auf Komplanarität. Man erkennt: Die umgeformte Kontrollspalte ist komplanar zu den beiden ersten Spalten der Matrix.

$$-1 \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ 5 \\ 1 \end{pmatrix} + 1 \cdot \begin{pmatrix} 4 \\ 6 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Fazit:

Die Kontrollspalte sollte also so gewählt werden, dass sie nicht komplanar zu den beiden ersten Spaltenvektoren ist. Wie man dann die Koeffizienten wählt ist egal. Das CAS formt die Kontrollzeile mit um: Die Nenner ergeben die Spezialfälle, die dann gesondert untersucht werden müssen.





Protokoll des Workshops vom 27.November 2002

Berliner CAS-Projekt-Sekundarstufe 2 - Projektleitung: Eberhard Lehmann
E-Mail: mirza@snafu.de, Homepage: www.snafu.de/~mirza

Tipps für die Arbeit mit dem Voyage 200	Workshop-Protokoll	Sekundarstufe 2	Voyage 200

Einführung in die Arbeit mit den Taschencomputern Voyage 200 bzw. dem TI-92-Plus

Die Einführung erfolgt an einem Beispiel aus dem Grundkurs ma-2 zum Thema Exponentialfunktionen. Der Weg wird in Anlage 1 geschildert.

Tipp 1: Auch bei Schülern erfolgt die erste Einführung in die Arbeit mit dem Voyage 200 am besten an einem konkreten, gerade aktuellen Unterrichtsbeispiel.

Planung des nächsten Workshops
Zeit: Februar / März 2003

- Frau Letzner: Bericht von einer Examensstunde über die e-Funktion mit DERIVE
- Lineare Gleichungssysteme im Kurs ma-2

Weitere Themen

- Vorstellen von Unterricht aus den fraglichen Kursen mit DERIVE / TI-92
- Dokumentation von Unterricht mit Computern

Bemerkung zum Projektstand (Dezember 2004)

Seit Projektbeginn 2002 haben diverse weitere Workshops stattgefunden, die sich mit den anstehenden fachlichen Themen und der Umsetzung an geeigneten Stellen mit dem CAS des Voyage 200 befassten. Verschiedentlich referierten KollegInnen über ihre Unterrichtserfahrungen, so dass ein reger Gedankenaustausch entstand. Dabei erweiterten sich auch schrittweise die CAS- und die Bedienungskenntnisse des Taschencomputers. Zuletzt standen Überlegungen zur Gestaltung von Grundkurs-Abituraufgaben mit CAS im Mittelpunkt der Überlegungen. **Inzwischen haben die ProjektteilnehmerInnen für ihre Grund- bzw. Leistungskurse Abituraufgaben mit CAS bei den Gutachtern eingereicht.** Im Auftrag des LISUM Berlin wird jetzt auch an Entwürfen für mögliche zukünftige CAS-Aufgaben beim Zentralabitur gearbeitet. Aus dem Projektkreis sind Frau Keller und Herr Geist beteiligt.
Am 13.Dezember 2004 findet für die Projektgruppe eine ganztägige Fortbildungsveranstaltung zum CAS-Einsatz in der Stochastik statt. Dieses Gebiet folgt demnächst in den Projektkursen. Die Tagung wird eingeleitet mit dem Vortrag von Herrn StD. Benno Grabinger (Rheinland-Pfalz). Daran schließen sich Workshops mit einschlägigen Stochastik-Themen an. Die Tagung wird finanziert durch das LISUM Berlin und Texas Instruments.

ANLAGE 1: Voyage 200-Einführung

1) Kurze Erklärung des Tastenfeldes – die großen Bereiche
   Taschenrechner – Buchstaben- /Zeichen – Tasten zum Steuern (enter usw.) – F-Tasten zum Aufrufen von Menüs usw. Hierzu wird benutzt:

- Folie mit Kopie des Voyage und Markierung wichtiger Tasten (siehe → ANLAGE 2)

2) Nun geht es sofort zur Sache!
Weg 1: Ein Beispiel, das den S von Handrechnung bekannt ist, wird nun mit dem Rechner bearbeitet (Vorteil:Keine Belastung mit neuem mathematischem Inhalt)

Weg 2: Eine neue (wenig umfangreiche) Aufgabe mit dem Rechner bearbeiten.

Problemstellung: Drei Funktionen im Streit

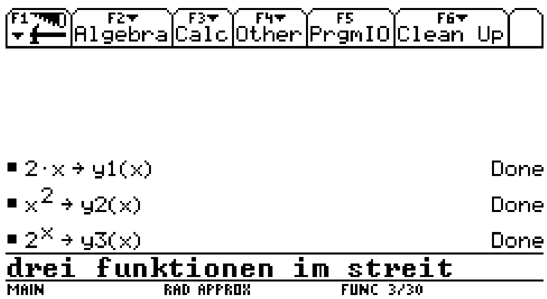


Abb.1: Speicherung der Funktionen

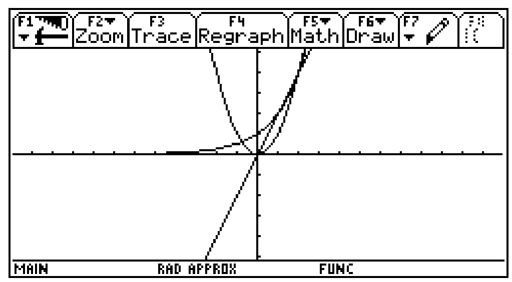


Abb.2: Die Graphen (welcher ist welcher?)

Tipp 2: Hier ist als offene Unterrichtsform ein Brainstrorming mit den Schülern geeignet, die eigenständig Fragestellungen zum Thema „Drei Funktionen im Streit" (Abb.1 und 2) formulieren können.

Einige Aspekte, die jetzt betrachtet werden können, sind:
- Die Graphen
- Auf der Suche nach den Schnittpunkten?
- Zoombox (die Zeichnung maßstabsgetreu machen, dann Vergrößern des fraglichen Bereiches)
- Solve (für Nullstellen- und Extremwertberechungen)

Tipp 3: Zum Sammeln von Ergebnissen ist eine Tabelle geeignet:

Weitere Aspekte:
- Tabelle
- Flächenberechnungen
- Die Graphen der Ableitungsfunktionen

Arbeitsbogen (Abbildungen hergestellt mit dem Programm ANIMATO)

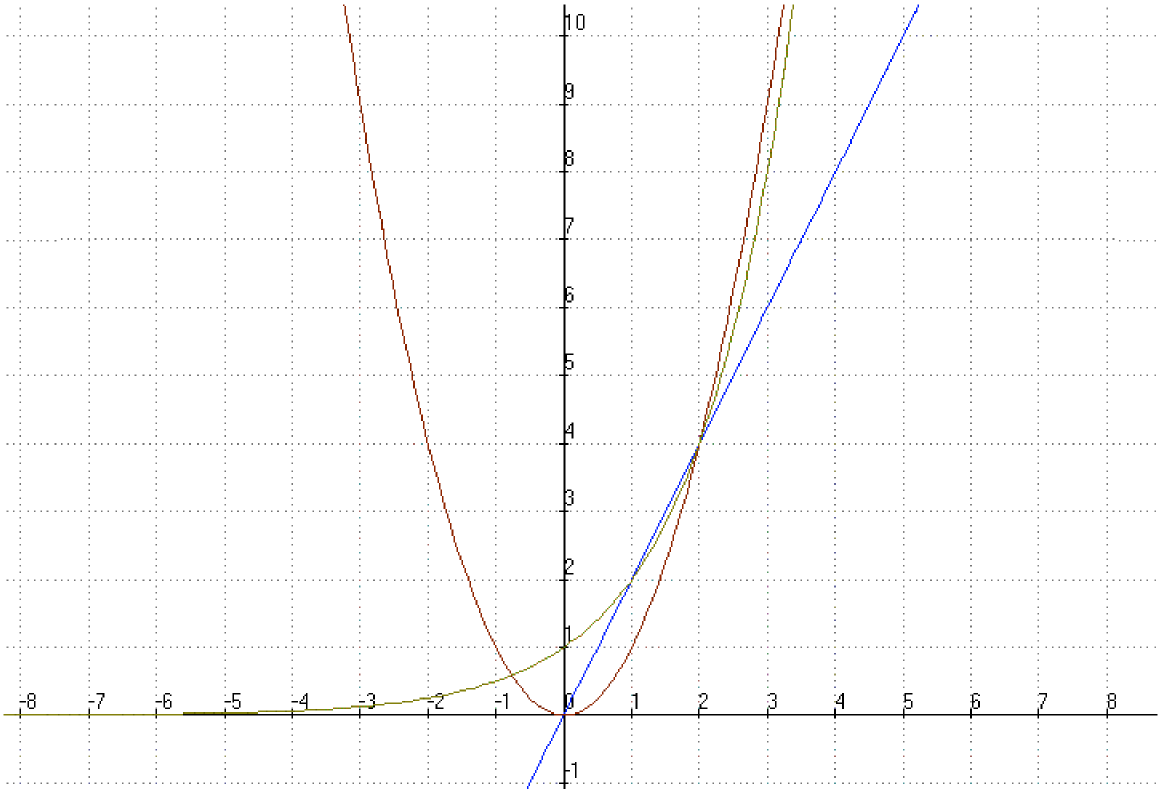


Abb.3: **Aufgabe: Welcher Graph gehört zu welcher Funktion?**
Schreiben Sie einen begründenden Text.

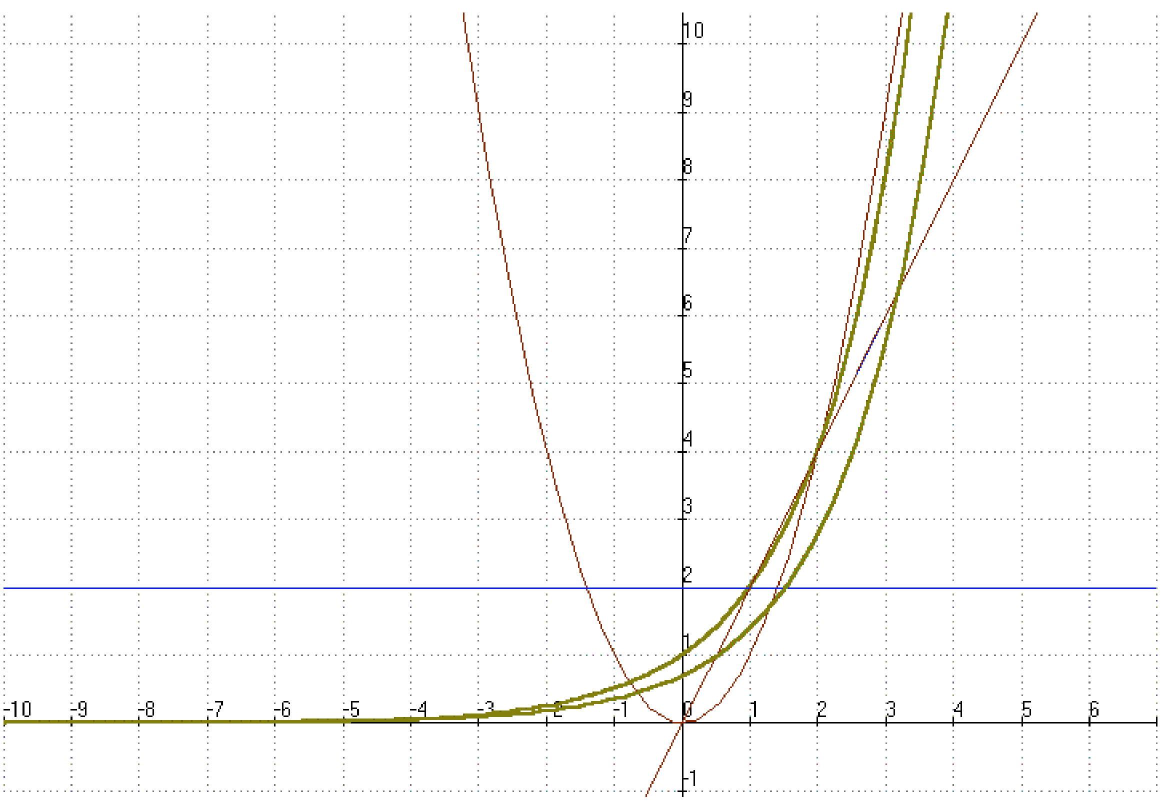


Abb.4: **Aufgabe: Was wird hier dargestellt? Text schreiben!**

Arbeitsbogen Übergang zu einer neuen Problematik

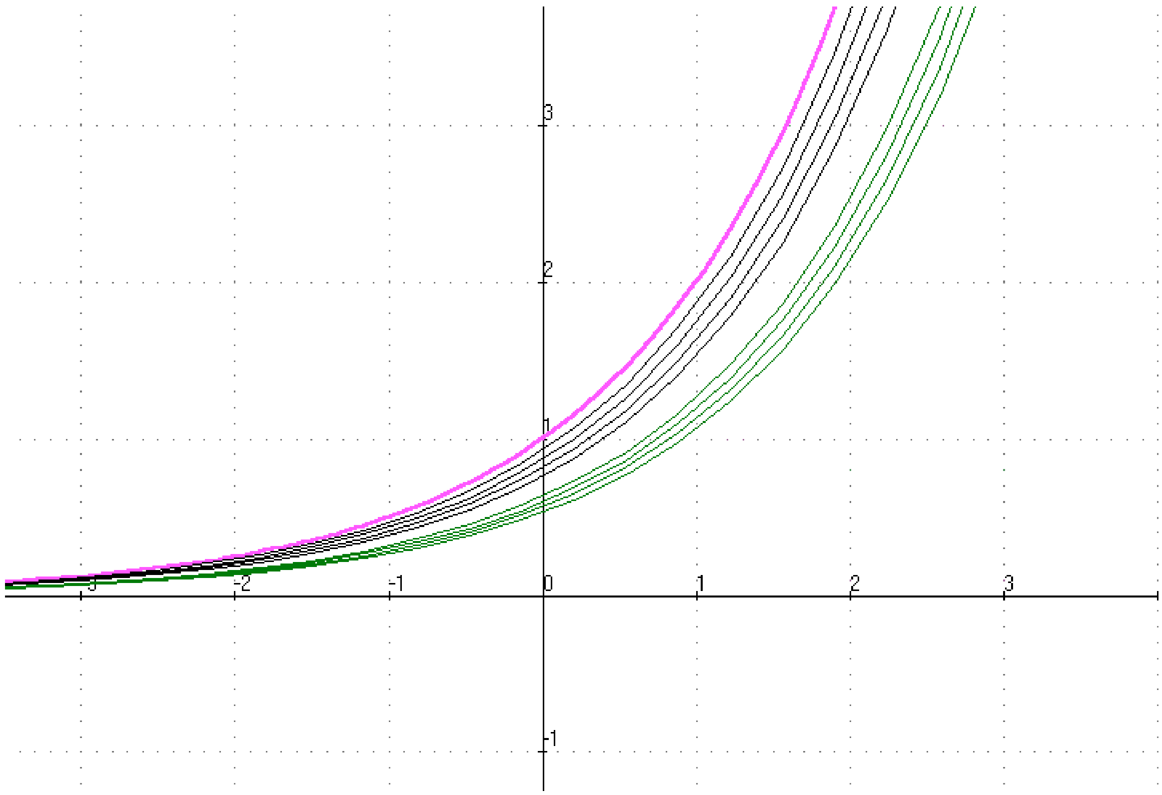
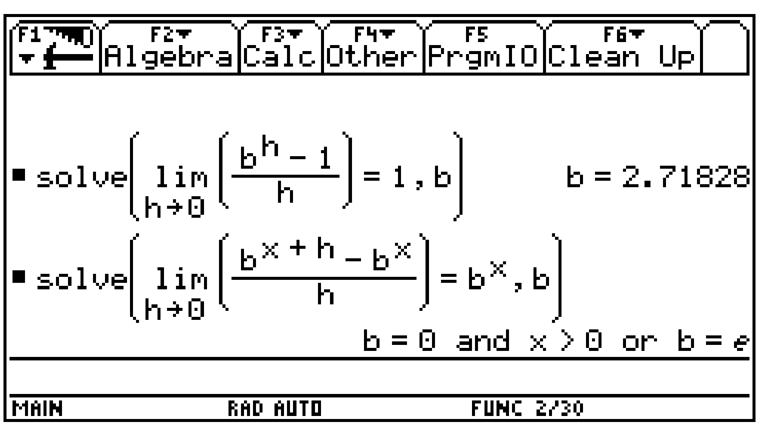


Abb.5 **Aufgabe: Worum geht es hier? Erstellen Sie eine entsprechende Abbildung mit dem Voyage 200**.

- Die Interpretation der Zeichnung

Anhand der Funktion y = 2^x wird visualisiert, wie aus den Graphen der Differenzenquotientenfunktion für h→ 0 immer mehr der Graph der Ableitungsfunktion entsteht. Man erstelle eine entsprechende Zeichnung mit dem CAS (TI-92, Voyage 200).

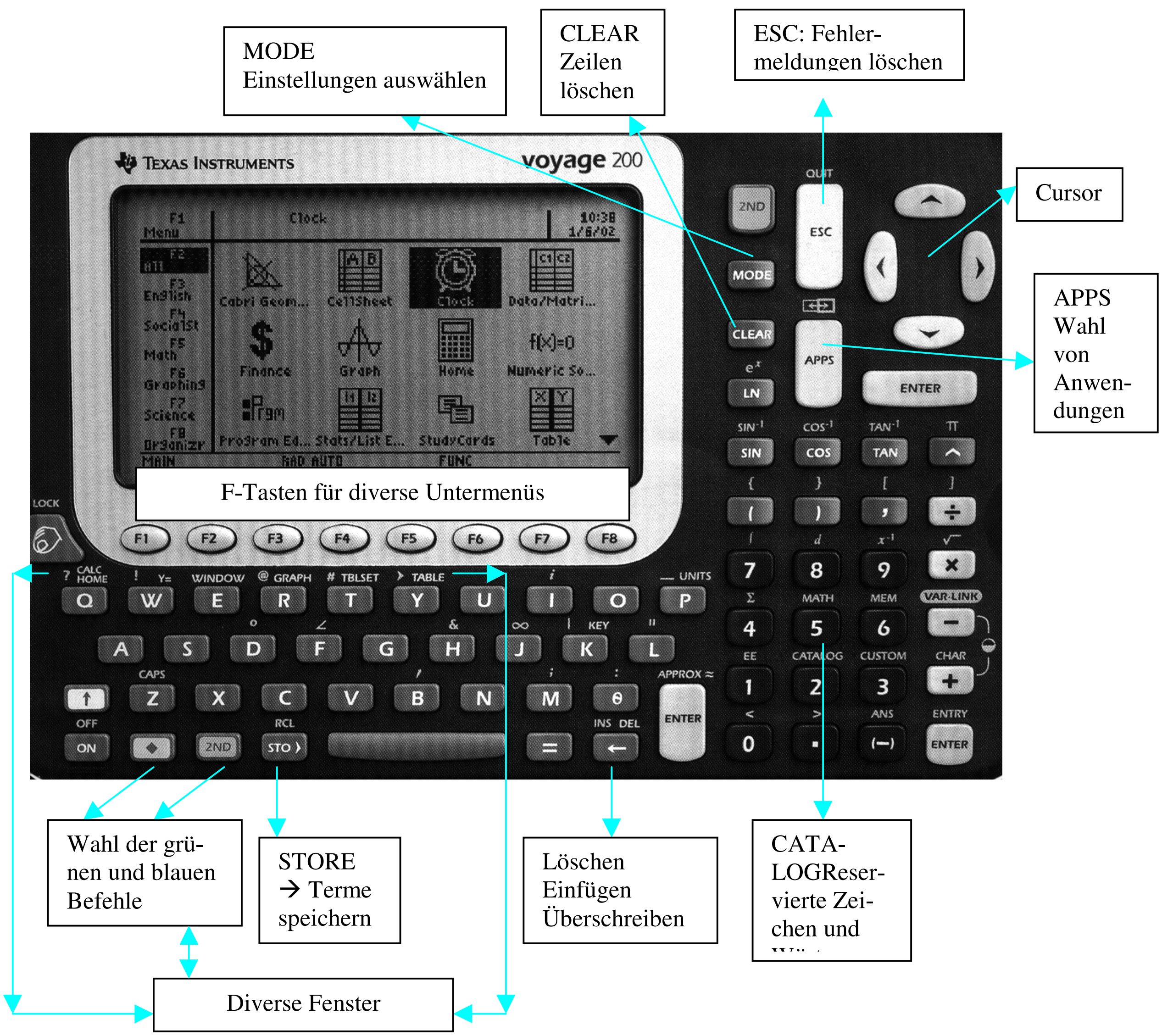
- Die Vermutung
- Die Rechnung (Grenzwert des Differenzenquotienten)



Für welches b ist der Grenzwert des Differenzenquotienten gleich 1?

Das ist der Fall, wenn b = e (Eulersche Zahl) ist.

ANLAGE 2: **Einige wichtige Tasten beim Voyage 200**



Tipp 4: Diese Übersichtsabbildung sollten alle Schüler vor der Einführung des Rechners erhalten.

Ende von ANLAGE 2

Eine Klausuraufgabe aus der Differentialrechnung für den Leistungskurs

Werner Ladenthin

Gebrochen-rationale Funktion	Funktionenschar	Auswertung von Screenshots	Voyage 200

Hinweis: Die vorliegende Aufgabe stammt aus einer LK-Klausur für eine Bearbeitungszeit von etwa 60-75 Minuten.

Gegeben ist die Schar der Funktionen f_a, definiert durch $f_a(x) = \dfrac{(x+1)^2 \cdot (x-a)}{(x+1)\cdot(x-2)}$ mit dem Parameter $a \in R$ und maximalem Definitionsbereich $D_{f_a} \subseteq R$.

a) Definieren Sie die Funktionen f_{-1}, f_2, f_3 und f_{-4} wie im Screenshot 1 angegeben und begründen Sie die spezielle Auswahl der Parameter a.

b) Beschreiben Sie die Graphen der speziellen Funktionen f_{-1}, f_2, f_3 und f_{-4} der Schar (ZoomDec) und geben Sie an, welche wesentlichen Informationen durch die Darstellung nicht gegeben werden.

c) Werten Sie eine Wertetabelle der Funktionen f_{-1}, f_2, f_3 und f_{-4} aus (mit textlicher Dokumentation), und ergänzen Sie damit die fehlenden Informationen aus dem vorangegangenen Aufgabenteil.

d) Definieren Sie als $f1(x,a)$ die erste Ableitung der Funktionen der Schar und als $f2(x,a)$ die zweite Ableitung der Funktionen der Schar und interpretieren Sie alle Aussagen, die der gegebene Screenshot 2 ermöglicht.

e) Ergänzen Sie die graphische Darstellung der Funktionen f_{-1}, f_2, f_3 und f_{-4} durch eine weitere Funktion der Schar, die die Eigenschaften der Funktionsschar sinnvoll ergänzt. Geben Sie mit Begründung an, welchen zusätzlichen Parameter Sie dabei verwendet haben.

f) Geben Sie mit Begründung Eigenschaften der Funktionen der Schar an, die direkt aus der Definition von f_a ablesbar sind und die durch die vorgenommenen Berechnungen bestätigt wurden.

Hinweis: Die Screenshots befinden sich auf der nachfolgenden Seite.

Ende der Klausur

Die Screenshots

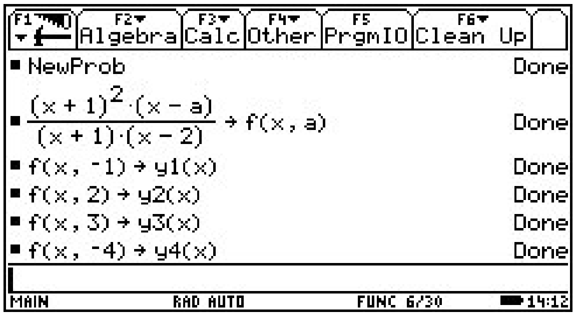


Bild 1, zu a) Schülertext

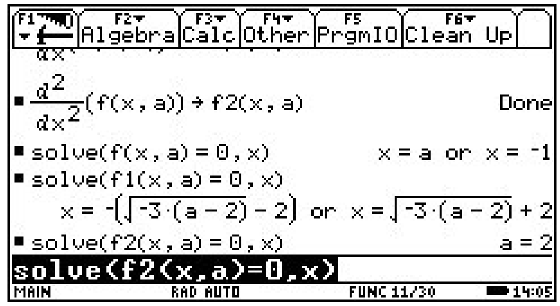


Bild2, zu d) Schülertext

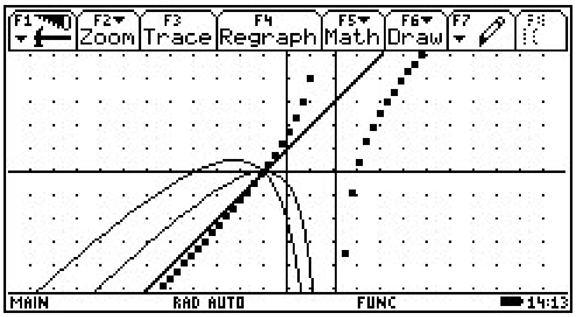
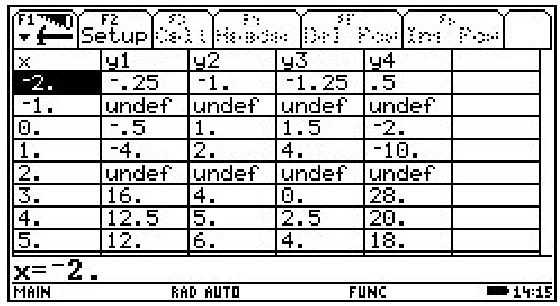


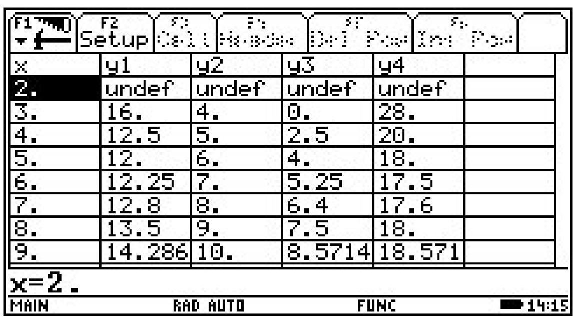
Bild 3, zu b) Lösungen



x	y1	y2	y3	y4
-2.	-.25	-1.	-1.25	.5
-1.	undef	undef	undef	undef
0.	-.5	1.	1.5	-2.
1.	-4.	2.	4.	-10.
2.	undef	undef	undef	undef
3.	16.	4.	0.	28.
4.	12.5	5.	2.5	20.
5.	12.	6.	4.	18.

x=-2.

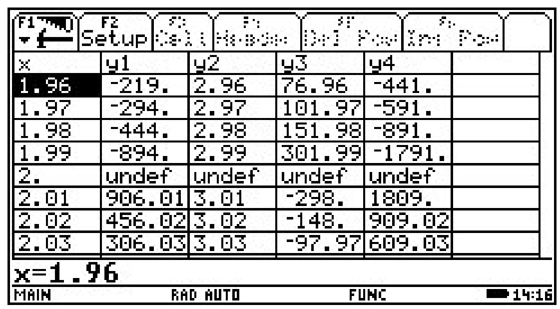
Bild 4, zu c) Lösungen



x	y1	y2	y3	y4
2.	undef	undef	undef	undef
3.	16.	4.	0.	28.
4.	12.5	5.	2.5	20.
5.	12.	6.	4.	18.
6.	12.25	7.	5.25	17.5
7.	12.8	8.	6.4	17.6
8.	13.5	9.	7.5	18.
9.	14.286	10.	8.5714	18.571

x=2.

Bild 5, zu c) Lösungen



x	y1	y2	y3	y4
1.96	-219.	2.96	76.96	-441.
1.97	-294.	2.97	101.97	-591.
1.98	-444.	2.98	151.98	-891.
1.99	-894.	2.99	301.99	-1791.
2.	undef	undef	undef	undef
2.01	906.01	3.01	-298.	1809.
2.02	456.02	3.02	-148.	909.02
2.03	306.03	3.03	-97.97	609.03

x=1.96

Bild 6, zu c) Lösungen

Bearbeitungsvorschlag:

a) Die Funktionen f_{-1} und f_2 sind Spezialfälle der gegebenen Funktionsschar; für den Parameter $a=-1$ reduziert sich die Zählerfunktion von f_{-1} zu $(x+1)^3$, für den Parameter $a=2$ ändert sich das Verhalten an der Definitionslücke mit Polstelle (für $a \neq 2$) zu einer Definitionslücke, die stetig fortsetzbar ist.
Die beiden anderen gegebenen Parameter zeigen Funktionen der Schar, die außerhalb der beiden Spezialfälle liegen.

b) Alle Graphen zeigen eine gemeinsame Nullstelle bei $x=-1$, die aber nicht im Definitionsbereich von f_a liegt.
Für f_{-1} und f_{-4} existiert ein rel. Maximum für negative Argumente und eine Polstelle bei $x=2$.
Die Funktion f_3 hat im vorliegenden Ausschnitt keine Extremstellen, zeigt aber deutlich eine Polstelle mit Vorzeichenwechsel bei $x=2$.
Die Funktion f_2 wird durch eine Gerade abgebildet.
Für die Funktionen f_{-1} und f_{-4} fehlt eine Darstellung für $x>2$. Somit kann auch über einen Vorzeichenwechsel dieser Funktionen an der Polstelle $x=2$ keine Aussage gemacht werden.

c) Die Wertetabelle gibt für alle dargestellten Funktionen der Schar die Definitionslükken bei $x=-1$ und $x=2$ aus.
Für $x>2$ werden Funktionswerte von f_{-1} und f_{-4} ausgegeben, die offensichtlich außerhalb des Anzeigebereichs der Funktionen liegen.
Für $x>2$ haben f_{-1} und f_{-4} Extremstellen, die für f_{-1} im Intervall $[4;6]$ und für f_{-4} im Intervall $[5;7]$ liegen. Eine genauere Auflösung der Tabelle ermöglicht die Bestimmung von $x \approx 5$ bzw. $x \approx 6{,}24$ als Minimalstellen der Funktionen f_{-1} und f_{-4}.

Die Wertetabelle liefert bei Einstellung im Bereich um die Definitionslücke $x=2$ für die gegebenen Funktionen eine Polstelle mit Vorzeichenwechsel, falls $a \neq 2$. Auch die Art des Vorzeichenwechsels kann aus der Tabelle abgelesen werden.

d) Zunächst werden mögliche Nullstellen von f_a mit $x=a$ oder $x=-1$ bestimmt. Hierbei ist zu beachten, dass $-1 \notin D_{f_a}$ nur eine Nullstelle der stetigen Fortsetzung von f_a ist. Die einzige Nullstelle liegt bei allen Funktionen der Schar bei $x=a$ mit Ausnahme von $a=2$, da auch $2 \notin D_{f_a}$. Die Funktionen f_2 und f_{-1} haben also keine, alle anderen Funktionen der Schar eine Nullstelle.

Nullstellen der ersten Ableitung, die nicht Nullstellen der zweiten Ableitung sind, sind Extremstellen der Funktion. Dies liegt hier für alle Funktionen der Schar vor. Es gibt also maximal zwei Extremstellen der Funktionen. Zur Entscheidung ist der Radikand zu untersuchen. Für $a>2$ ist er negativ; für diese Parameter liegen also keine Extremstellen vor. Für $a \leq 2$ ist der Radikand nicht negativ, es gibt also maximal zwei Extremstellen. Dies gilt für alle Funktionen f_a mit $a \neq 2$ und $a \neq -1$. Die Funktion

f_2 hat keine Extremstellen, da diese hier nur an den Definitionslücken liegen könnten; die Funktion f_{-1} hat eine Extremstelle bei $x=5$.

Die Berechnung der Nullstellen der zweiten Ableitungsfunktion liefert nur die Lösung $a=2$. Dies bedeutet, dass für keinen anderen Parameter Wendestellen möglich sind. Der Fall $a=2$ ist aber der bereits betrachtete Sonderfall der linearen Funktion. Diese hat selbstverständlich an jeder Stelle des Definitionsbereichs den Funktionswert null für die zweite Ableitung ($f_2''(x)=0$). Dies zeigt aber gleichzeitig, dass für f_2 ebenfalls keine Wendestellen vorliegen.

e) Bei dieser Aufgabestellung sind verschiedene Parameterwahlen möglich. Die Wahl von beispielsweise $a=1$ (Parameter zwischen den beiden Sonderfällen) zeigt eine Funktion mit wiederum einer Maximalstelle, die aber zwischen der Definitionslücke $x=-1$ und der Polstelle $x=2$ liegt.

f) Der Funktionsvorschrift kann man direkt die beiden Spezialfälle für die Parameter $a=-1$ und $a=2$ entnehmen.

Der Fall $a=-1$:

Auf $D_{f_a}=R\setminus\{-1;2\}$ gilt: $f_{-1}(x)=\dfrac{(x+1)^2\cdot(x+1)}{(x+1)\cdot(x-2)}=\dfrac{(x+1)^2}{(x-2)}=g(x)$

Die Funktion g hat damit keine Nullstelle und die Polstelle bei $x=2$ mit Vorzeichenwechsel, da der Linearfaktor $(x-2)$ mit dem Exponenten 1 auftritt.

Der Fall $a=2$:

Auf $D_{f_a}=R\setminus\{-1;2\}$ gilt: $f_2(x)=\dfrac{(x+1)^2\cdot(x-2)}{(x+1)\cdot(x-2)}=x+1=h(x)$

Die Funktion h ist eine lineare Funktion mit zwei Definitionslücken und hat damit weder Nullstellen (Definitionslücke) noch Extrem- oder Wendestellen.

Ggf. können hier noch weitere Eigenschaften sinnvoll angegeben werden.

Bei den Schülerbearbeitungen war auffällig:

Die Beschreibung der Graphen gemäß b) wurde stark ausgeweitet und durch andere Fenstereinstellungen und Tabellenwerte ergänzt. Dagegen fehlte die simple Feststellung, dass für x>2 teilweise die graphische Darstellung (beim angegebenen Zoom) nicht ausgegeben wird. Damit wurden auch die nach c) zu untersuchenden "fehlenden Informationen" nicht entsprechend der Musterlösung bearbeitet. Hier müsste im Unterricht offensichtlich eine genauere Vereinbarung zu den Lösungsanforderungen und Ausweitungen gegenüber dem Aufgabentext getroffen werden. Die Interpretation gemäß d) konnte nicht von allen Schülern in der angestrebten Vollständigkeit ausgeführt werden. Aufgabenteil f) wurde teilweise integriert in Aufgabenteil a) bearbeitet. Dies war aber in gewisser Weise auch erwartet, da sich mit dem letzten Aufgabenteil die Gesamtaufgabe wieder schließen sollte.

Anhang zu Heft 2

Vorwort zu Heft 1

Die "Berliner Beiträge zum Mathematikunterricht mit Computern" sind mit Heft 1 erstmals im Mai 2004 erschienen. Die Idee zu dieser kleinen Zeitschrift entstand aus den Erfahrungen in den Berliner Computeralgebrasystem-Projekten.

1) CAS-Projekt, Sekundarstufe 1, 2001-2003: 5 Schulen mit insgesamt 15 Klassen der Klassenstufen 8-10 wurden mit dem Taschencomputer TI-92 ausgerüstet, zahlreiche Workshops dienten der Unterstützung der Lehrer.
2) CAS-Projekt, Sekundarstufe 2 (vorwiegend Grundkurse), seit 2003: 7 Schulen mit insgesamt ca. 15 Kursen arbeiten mit dem Taschencomputer Voyage 200. Auch hier werden diverse Workshops durchgeführt.

Darüber hinaus gibt es in Berlin seit 2002 einen CAS-Arbeitskreis, der sich im Jahr ca. fünfmal trifft. Durch intensive Fortbildungsveranstaltungen an diversen Schulen sind viele Mathematikfachbereiche in den Computereinsatz im Mathematikunterricht eingeführt worden. Inzwischen schreiben auch Kurse diverser Schulen Abiturprüfungen in Mathematik mit Hilfe von Computeralgebrasystemen, wie z.B. DERIVE oder mit dem TI-92.

In den Projekten, im Arbeitskreis und an anderen Stellen entstehen in Berlin interessante Unterrichtsbeispiele mit Computereinsatz. Die "Berliner Beiträge zum Mathematikunterricht mit Computern" geben nun interessierten Kollegen die Möglichkeit, solche Beiträge zu veröffentlichen und damit einem breiteren Leserkreis bekannt zu machen. Die Beiträge stammen also direkt aus dem Unterricht - häufig von Kollegen, die noch nicht lange mit einem Computer im Mathematikunterricht arbeiten. Die Beiträge sind daher auch besonders für Kollegen geeignet, die gerade ihre ersten Rechnererfahrungen machen.

Gelegentlich werden auch "Gastbeiträge" zu lesen sein.

Berlin, d. 2.5.2004 — Eberhard Lehmann, Herausgeber

Inhaltsverzeichnis zu Heft 1

Hinweis: Die kurzen Anmerkungen zu den Beiträgen stammen meistens vom Herausgeber.

Walter Gussmann, Konrad Meyfarth, Walter Stoss Seite 21
(Paul-Natorp-Oberschule)

- Bilder mit Sinus- und Kosinus-Funktionen (Klasse 10)
  Die Erstellung von Bildern ist für die Schüler in der Regel eine interessante und motivierende Aufgabenstellung. Hier können sie ihrer Phantasie freien Lauf lassen. Das übt den Umgang mit den ihnen bekannten Funktionen und Graphen und führt sie häufig zu neuen Überlegungen über Graphen und Erweiterungen. An einem PC können dann die Taschencomputer-Entwürfe weiter ausgebaut werden unter Ausnutzung der verbesserten graphischen Möglichkeiten.

Eberhard Lehmann (Projektleiter CAS-Projekte) Seite 22-27

- Tipps für den Entwurf von CAS-Klassenarbeiten
  Für die Erstellung von Klassenarbeiten oder Klausuren mit CAS-Aufgaben kann man auf verschiedene Aufgabentypen zurückgreifen. Derartige Typen werden hier zusammengestellt. Selbstverständlich sind die Aufgaben auch für den normalen Unterricht geeignet. Zum Beispiel kann man sich einem Problem mit einer Gruppenarbeit nähern, wobei die einzelnen Gruppen verschiedene Aufgabentypen (aber am gleichen Problem) bearbeiten.

- Animationen mit Funktionen und Relationen, das Programmsystem ANIMATO