Anhang Gleichungen in neuer Sicht

Die folgenden Ausführungen sind für Lehrerinnen und Lehrer bestimmt, münden jedoch in einen Arbeitsbogen für Schüler, der einen neuartigen Aspekt in der Gleichungslehre verfolgt: **Die gleichzeitige Behandlung mehrerer Gleichungstypen.**
Gleichungen begleiten unseren Mathematik-Unterricht über viele Jahre hin, von der Einführung der einzelnen Gleichungstypen bis hin zu ihren Anwendungen in den Oberstufenkursen. Die folgenden Überlegungen gelten zunächst für die Sekundarstufe 1, wenn Gleichungstypen neu eingeführt und angewendet werden.

- Wenn man heute über Unterricht zu den Gleichungen nachdenkt, kommt man angesichts der vorhandenen CAS schnell zu dem Ergebnis, dass die alten Aufgabenplantagen, die zur Festigung der jeweiligen Methode dienen sollten, keine Bedeutung mehr haben und weggelassen werden können.

- Gleichungen sind nicht einfach da, wie es uns die Aufgabenkaskaden von Schulbüchern suggerieren; Gleichungen entstehen vielmehr bei unterschiedlichen Situationen (inner- und außermathematisch) durch Modellierung.

- Dabei wird man merken, dass verschiedene Gleichungsarten und jeweils auch unterschiedlich strukturierte Gleichungen auftreten.

- Das kann zur Auflösung des bisherigen Lehrplansystems führen, die Gleichungstypen isoliert und schön nacheinander in verschiedenen Schuljahren durchzusprechen.

- So sind heute Projekte denkbar, in denen man auch verschiedene Typen gleichzeitig betrachten kann, wenn man nur dem CAS eine wichtige Rolle bei der Lösung der Gleichungen zubilligt. Stellt man beispielsweise eine Zeichnung her, in der verschiedene Objekte vorkommen (Geraden, Parabeln usw.), und sucht nun Schnittpunkte der dargestellten Kurven, so gelangt man sofort zu unterschiedlichen Gleichungstypen, siehe Abbildung 1.

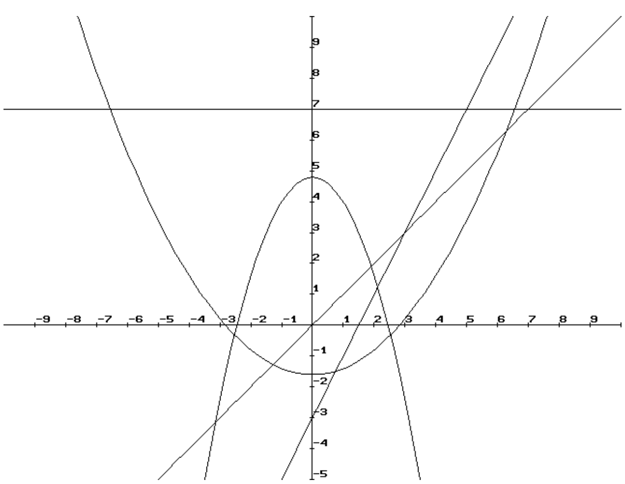


Abb.1: Viele Schnittpunkte - viele Gleichungen - ein Gleichungsprojekt!

Das Gemeinsame:
- Immer werden Schnittpunkte bestimmt, also führt immer der gleiche Ansatz zum Ziel.
- Stets geht es darum, bei gegebener Grundmenge Werte für x zu finden, die die Gleichung erfüllen.
- Stets hilft das CAS mit dem Befehl SOLVE oder mit Wertetafeln.
- Je nach Situation gibt es keine Lösung, endlich viele oder unendlich viele Lösungen.
- Immer kann das Problem grafisch veranschaulicht werden.

Das Unterschiedliche:
Der Gleichungstyp ändert sich und damit auch Aufwand und Methode der (Hand-) Rechnung (der Algorithmus). Hier muss die jeweilige Klassenstufe beachtet werden.

- Vermutlich werden die speziellen Lösungsmethoden (Algorithmen) für die einzelnen Gleichungstypen angesichts der leicht verfügbaren SOLVE-Anweisung an Bedeutung verlieren.

- Als ein weiteres universell einsetzbares Verfahren kann man mit dem CAS leicht Wertetabellen herstellen und damit Gleichungen durch passende Verfeinerung (näherungsweise) lösen.

- So entsteht die Frage:
  Brauchen wir überhaupt noch spezielle Methoden? Benötigen wir z. B. die (p,q)-Formel? Benötigen wir Formeln zur Berechnung der Lösung linearer Gleichungssysteme?

  Wir stellen uns die Frage:

Was bleibt wichtig? Was wird wichtiger als bisher? Was ist neu?

Die Überlegungen werden unten in einer Tabelle zusammengefasst, die fünf Spalten enthält:

Welche Teilgebiete werden weiterhin behandelt?	Was wird stärker, was wird *schwächer* betont?	Wie hilft das CAS dabei?	*Was kann wegfallen?*	Was soll neu eingeplant werden?

Worauf kommt es bei Gleichungen an – wenn man sie erst einmal hat?

- Stets geht es um Grundmengen wie $\mathbb{N}$, $\mathbb{Q}$, $\mathbb{R}$ oder Teilmengen davon und um Lösungsmengen (eine, zwei, endlich viele, unendlich viele, keine Lösung). Dabei ist die Frage wichtig: Warum kommt gerade diese Lösungsmannigfaltigkeit heraus?

- Außerdem geht es um das Erkennenkönnen des jeweiligen Gleichungstyps in Zusammenhang mit dem Ausgangsproblem. Wir benötigen also Überblickswissen über die verschiedenen Gleichungstypen und wie man sie bearbeitet (Struktur-Erkennungskompetenz).

- Veranschaulichungen erleichtern uns die Situation und können zu ungefähren Lösungen führen.

- Die von Hand ermittelten oder vom CAS angebotenen Ergebnisse des Gleichunglösens muss man mathematisch und im Sinn der Aufgabenstellung auswerten können! Dabei sind auch Proben wichtig.

- Allgemeine Lösungen der einzelnen Gleichungstypen bleiben wichtig, um Fallunterscheidungen durchführen und strukturieren zu können. Die allgemeinen Lösungen kann uns auch das CAS liefern! Die Fallunterscheidungen können durch Auswahl einiger Exemplare veranschaulicht werden.

- Die schnelle Lösung von Gleichungen mit CAS wirft die Frage nach den im Rechner versteckten Lösungsmethoden auf. Hier entsteht die Motivation, Gleichungen auch ohne CAS lösen zu können. Wichtig ist dabei das Verständnis für den Lösungsweg und dafür reichen einfach strukturierte Beispiele. Zur Vermeidung von Rechenfehlern kann man auch bei diesem schrittweisen Vorgehen das CAS benutzen.

- Hierbei wird nun auch die Frage nach den Äquivalenzumformungen relevant. Lösungsmethoden verstehen heisst auch, über die erlaubten Äquivalenzumformungen Bescheid zu wissen.

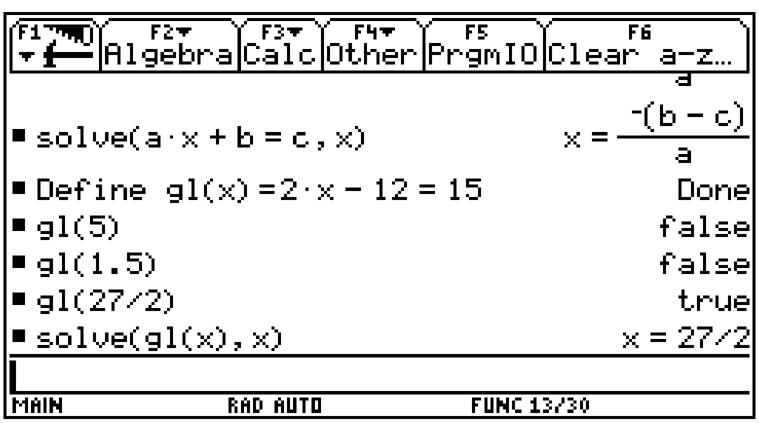
- Erläuterungen von Rechnerbildschirm-Abdrucken sind gut geeignet, um das Verständnis für die Vorgänge zu üben oder zu überprüfen.

Wie geht man mit der Anweisung SOLVE(...) um?

Beispiel: Der Befehl SOLVE(3x+7 = –5, x) ergibt x = –4, löst also die Gleichung ohne sichtbare Zwischenrechnungen und ist bei den Schülerinnen und Schülern selbstverständlich sehr beliebt. Der Zeitpunkt der Freigabe dieses Befehls für den nachfolgenden Unterricht ist von verschiedenen Faktoren abhängig:

- Welche Vorstellungen hat die Lehrperson vom Mathematikunterricht, welche längerfristigen Intentionen verfolgt er?
- Welche Rahmenbedingungen für die Mathematik muss die Lehrperson berücksichtigen (Lehrplan, Beschlüsse der Fachkonferenz,...)
- Steht das CAS auf längere Sicht (immer) oder nur eine gewisse Zeit lang zur Verfügung?
- Wie ist der Leistungsstand der Lerngruppe?
- Sind genügend charakteristische Beispielgleichungen von Hand gelöst worden?
- Haben die Lernenden den Algorithmus des Lösungsverfahrens prinzipiell verstanden?
- Wurden die möglichen auftretenden Lösungsfälle schon berücksichtigt oder soll gerade hier der Rechner helfen?
- Welchen Umfang nimmt die Lösung derartiger Gleichungen bei komplexeren Aufgaben zu dem betrachteten Gebiet oder später ein?

SOLVE gibt uns auch die Möglichkeit, zum Beispiel die Gleichung ax = b allgemein zu lösen. Außerdem zeigt der nächste Bildschirmabdruck, wie man die Technik des „Abkürzens“ bzw. Definierens von Termen oder Gleichungen ausnutzen kann, um kurz und problemangepasst formulieren zu können.



Der Rechner berücksichtigt nicht von allein, dass für a = 0 ein Sonderfall eintritt.

gl(5), gl(1.5): Lösung einer Gleichung durch Probieren. Dieser Ansatz kann für die Lösung von Gleichungen immer benutzt werden.

Die Definition der Gleichung 2x–12 = 15 als g1(x) kann beim TI-92 auf zwei Arten erfolgen:
Define g1(x) = (2x-12=15) oder 2x-12=15→ g1(x).

Handrechnung und SOLVE

Wir halten fest:

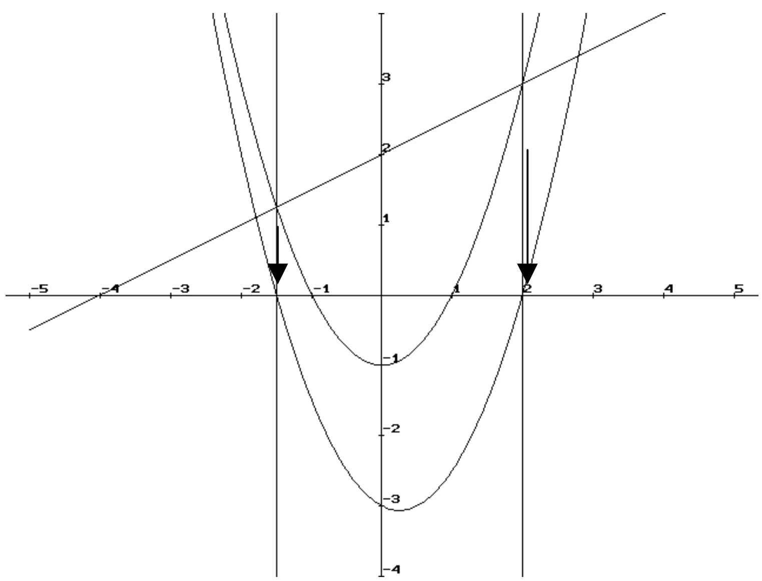
In der White Box-Phase geht es darum, das jeweilige Lösungsverfahren zu verstehen.

Einfache Gleichungen eines Typs sollen in der Anfangsphase und gelegentlich auch später noch mit Handrechnung gelöst werden können (White-Box). Ansonsten wird der Befehl SOLVE verwendet (Black-Box)

Gleichungen und Gleichungsumformungen veranschaulichen – ein bislang vernachlässigter Aspekt

Gleichungsumformungen können veranschaulicht werden; man merkt daran, wie die Gleichung immer einfacher/kürzer wird und wie sich das in der Veranschaulichung ausdrückt. So kann man z. B. die Lösungen bequem auf der x-Achse ablesen.

Beispiel:
Interpretiere die Gleichung $x^2 - 1 = 0.5x + 2$ graphisch und veranschauliche die Umformung
$x^2 - 1 = 0.5x + 2$ // $-0.5x - 2$, d. h.
$x^2 - 0.5x - 1 - 2 = 0$ im Koordinatensystem.



In ähnlicher Weise lassen sich alle Äquivalenzumformungen graphisch veranschaulichen.

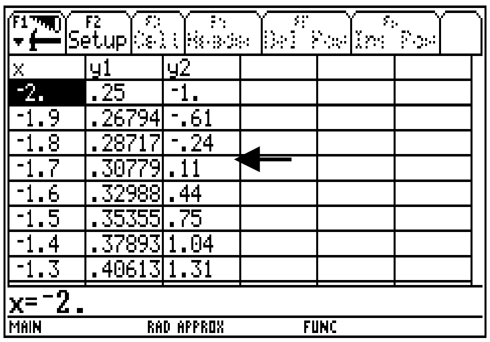
Die angegebene Äquivalenzumformung sorgt dafür, dass die x-Werte der Schnittpunkte schließlich direkt auf der x-Achse abgelesen werden können. Das entspricht der Lösung der Gleichung $x^2 - 0.5x - 3 = 0$.

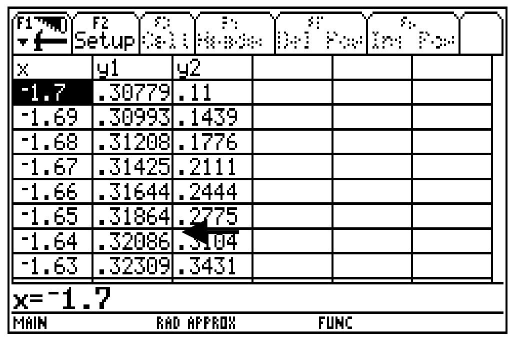
Die Veranschaulichung von Gleichungen läuft stets darauf hinaus, Schnittpunkte zwischen zwei Graphen zu markieren und zu berechnen.

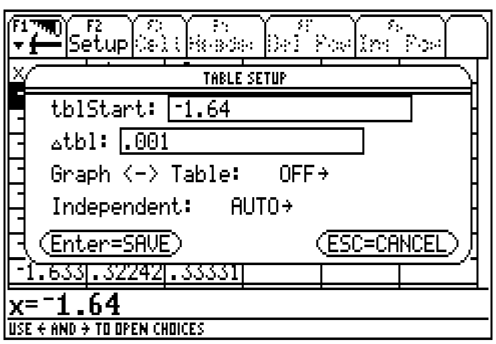
Handrechnung und Wertetafeln

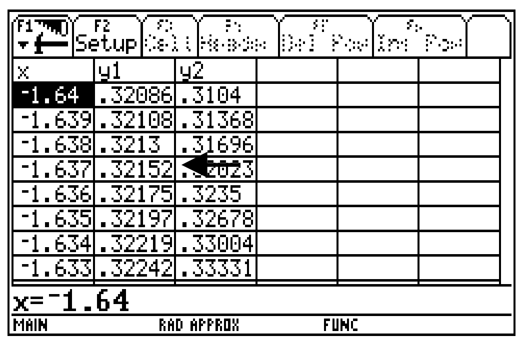
Bei der Erstellung von Wertetafeln ist höchstens noch die Berechnung einiger Werte von Hand sinnvoll, z. B. auch zur Bestätigung eines Rechnerergebnisses und zur Kontrolle der Schülerfertigkeiten.

Wertetafeln betonen den Aspekt der **Suche** nach Lösungen, Werte links von der Lösung, Werte rechts von der Lösung. Wertetafeln vermitteln damit die unmittelbare Verbindung zum Ablesen der Lösung aus der grafischen Darstellung.









Die Einstellungen des TI-92 für die Tabellenausgabe erfolgen in TblSetup, die Ausgabe der Tabellen mit Table.

Die Erstellung von Wertetafeln – linke Seite der Gleichung, rechte Seite der Gleichung – ist eine elementare Methode, die für jede Art von Gleichung verwendbar ist und daher schon frühzeitig Verwendung finden kann.

Ein Überblick: Gleichungen in neuer Sicht

Welche Teilgebiete werden weiterhin behandelt?	**Was wird stärker, was wird *schwächer* betont?**	**Wie hilft das CAS dabei?**	***Was kann wegfallen?***	**Was soll neu eingeplant werden?**
Situationen modellieren	Viel mehr Beispiele mit Anwendungen (inner/außermathematische), mehr Veranschaulichungen	Ansätze auf Stimmigkeit mit Zahlenwerten überprüfen oder Ansätze graphisch untersuchen	*Überprüfung des Sinns einer eingekleideten Aufgabe (anwendungsrelevant, innermathematisch relevant?) , diese ggf. streichen*	Schüler suchen in ihrem Umfeld nach (eingekleideten) Problemen mit Gleichungen
Gleichungen und Gleichungssysteme ausrechnen	*Weit weniger Handrechnung*	Der Befehl SOLVE löst fast jede Gleichung	*Ausführliche Handrechnung wird überflüssig,. Aufgabenkaskaden streichen*	Automatisches Lösen von Gleichungen (SOLVE)
				Selbst Texte zu Gleichungen erfinden
Grundmengen und Lösungsmengen	Auswertung von Ergebnissen mehr üben, Plausibilitätsprüfungen	Lösungsmengen unter bestimmten Bedingungen (z. B. | a={1,2,3}) errechnen lassen, probieren, kontrollieren		Parameter in Gleichungen, Problemstellungen damit variieren
Begriffsbildung: Grundmenge, Lösungsmenge, Äquivalenzumformung	Bedeutung von Grundmenge und Lösungsmenge, entstehende Strukturen	Aufgabenstellungen mit CAS, die Begriffsbildung fördern (z.B. SOLVE auf äquivalente Gleichungen anwenden)	*Trockene Begriffsdefinitionen unterlassen*	Veranschaulichung von Lösungsmengen, Gleichungen aus vorgegebenen Lösungsmengen aufstellen lassen
Grundlegende Algorithmen an einfachen Beispielen durch Handrechnung	Das Schwergewicht liegt auf dem Verstehen der Algorithmen.	CAS zur Kontrolle benutzen B und: "Wie macht das CAS das?"	*Handrechnung bei komplexeren Beispielen*	
Äquivalenzumformungen an einfachen Gleichungen		FACTOR, EXPAND B mit Handrechnung nachvollziehen	*Längeres Üben von Äquivalenzumformungen*	
Allgemeine Lösungen	Fallunterscheidungen, Lösungen strukturieren, Darstellungen für Algorithmen	Formeln im CAS, CAS-Bausteine für allgemeine Lösungen definieren	*Ausführliche Herleitungen von Hand unterlassen.* Statt dessen Rechnungsschritte mit CAS durchführen.	Veranschaulichung von Lösungsfällen durch Grafiken, z. B. im Koordinatensystem
		Hierzu sind auch Rechnungen am CAS möglich.		Berücksichtigung andersartiger Gleichungen, z. B. ggT(x,45)=9
		Anlegen von Wertetafeln, Verfeinerung von Wertetafeln		Lösen von Gleichungen durch Wertetafeln
		Lösen im Grafikbildschirm, mehrfache Anwendung von SOLVE(f(x) = g(x),x)		**Gleichzeitige Betrachtung verschiedener Gleichungstypen,** z. B. Schnittpunkte von Geraden, Parabeln und Hyperbeln im Kosy (siehe Arbeitsbogen)

Schnittpunkte Arbeitsbogen A1

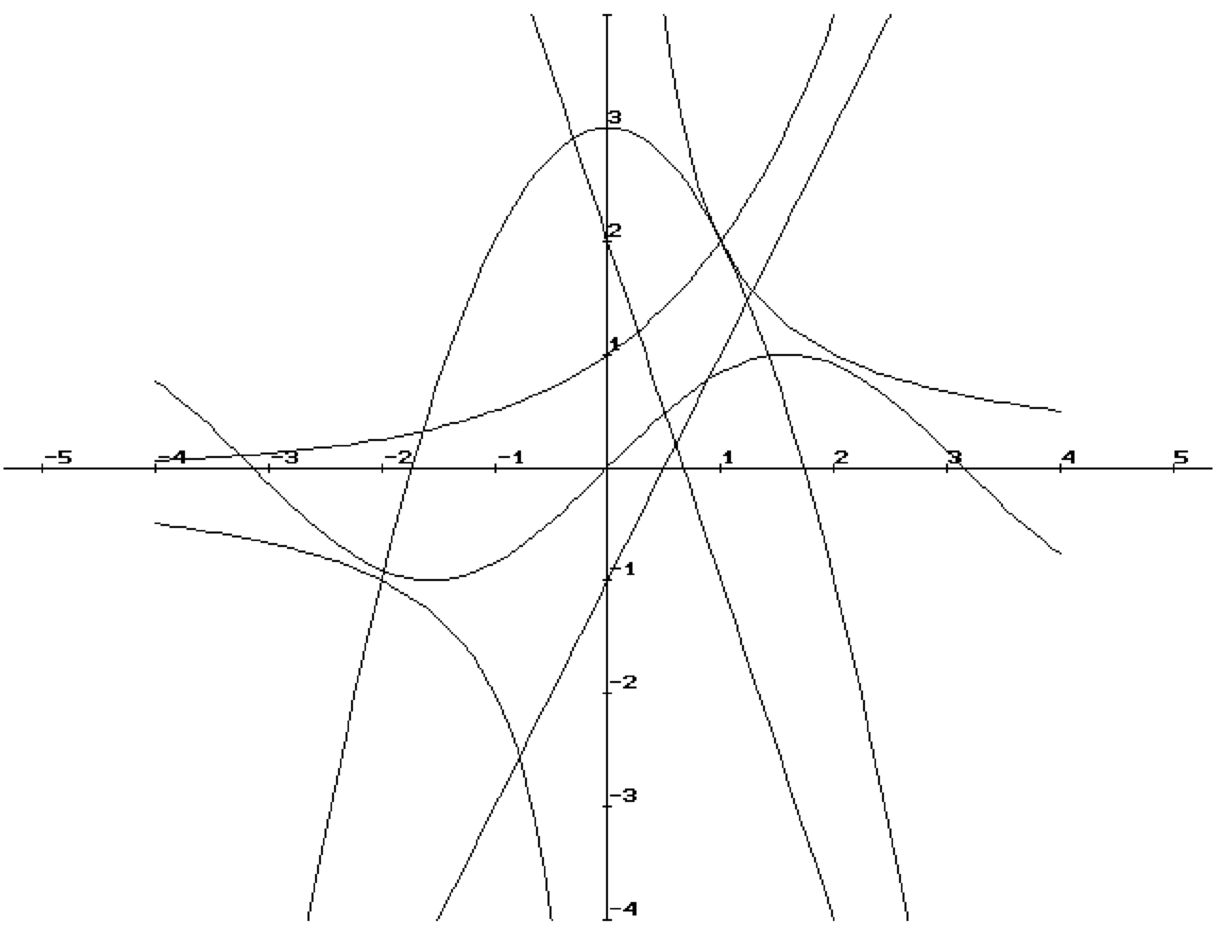
Eine Zeichnung – viele Graphen, viele Gleichungstypen

Aufgabe 1:
In der Abbildung sind zahlreiche Funktionsgraphen zu sehen. Diese schneiden sich in mehreren Punkten. Folgende Aufgaben sollen (am besten in Gruppenarbeit) gelöst werden.

1.1 Füllt die beigefügten Tabellen aus, soweit es euch möglich ist. Stelle für jedes Kästchen eine passende Taschenrechner-Zeichnung her.

Hinweise:

- Für die zu lösenden Gleichungen kann der SOLVE-Befehl verwendet werden.
- Es soll in der Abbildung jeweils markiert werden, welcher Schnittpunkt berechnet wurde. Dazu ist es zweckmäßig, sich auf eine sinnvolle Bezeichnung der Schnittpunkte in einer vernünftigen Reihenfolge zu einigen.



Trage die Gleichung und die Art der Gleichung ein

Graph zu zu	$f(x) = 2x-1$	$g(x) = -3x+2$	$h(x) = -x^2+3$	$i(x) = 2/x$	$j(x) = 2^x$	$k(x) = \sin(x)$
$f(x) = 2x-1$		$2x-1= -3x+2$ lineare Gleichung				
$g(x) = -3x+2$						
$h(x) = -x^2+3$						
$i(x) = 2/x$						
$j(x) = 2^x$						
$k(x) = \sin(x)$						

Trage die zugehörige Grundmenge G und die Lösungsmenge L ein

Graph zu zu	$f(x) = 2x-1$	$g(x) = -3x+2$	$h(x) = -x^2+3$	$i(x) = 2/x$	$j(x) = 2^x$	$k(x) = \sin(x)$
$f(x) = 2x-1$	G=Q, unendlich viele Lösungen, z. B. (1,1), (4,7)					
$g(x) = -3x+2$						
$h(x) = -x^2+3$						
$i(x) = 2/x$						
$j(x) = 2^x$			x = 1 oder x = –1.63658			
$k(x) = \sin(x)$						

Aufgabe 2:
Erläutere die folgenden TI-92-Eingaben und -Ausgaben

```
2^x                → a(x)          done
–x^2+3             → b(x)          done
SOLVE(a(x) = b(x),x)               x=1 or x= –1.63658
```

Aufgabe 3:
Legt weitere Tabellen an, um nun die Schnittpunkte jeder Kurve mit den Koordinatenachsen zu berechnen.