



Dr. Eberhard Lehmann, mirza@snafu.de, www.snafu.de/~mirza,

Zeiteinschätzung bei Abitur- und anderen Aufgaben mit Verwendung von Verwendung von Computeralgebra

Abstract

In vielen Bundesländern sind Überlegungen im Gange, wie man den im Unterricht nun schon weit verbreiteten Einsatz von Computeralgebrasystemen (CAS) auch im (Zentral-) Abitur sichern kann. Für die Abituraufgaben-Konstrukteure ist es schwierig den Zeitbedarf für CAS-Aufgaben angemessen einzuschätzen. Vor dem gleichen Problem steht jede Lehrperson bei Kurs- oder Klassenarbeiten und auch im Unterricht mit CAS. In dem Vortrag werden Variablen genannt, die den Zeitbedarf bestimmen und an Beispielen für Aufgaben ohne und mit Computereinsatz präzisiert.

Anmerkungen zur Zeiteinschätzung bei der Bearbeitung von CAS-Aufgaben in Abitur- und anderen Klausuren und in Klassenarbeiten
(gilt in übertragenem Sinn auch für den Unterricht mit CAS)

Vor einer Unterschätzung des Zeitaufwands von Rechnungen und Zeichnungen mit CAS muss gewarnt werden - u.a. aus folgenden Gründen:

1. Eingaben können **Syntaxfehler** aufweisen und müssen ggf. korrigiert werden
Das ist gerade bei komplexeren Termen nicht selten nötig.
2. Bei **Semantikfehlern** muss neu überlegt und neu eingegeben werden.
3. Ein- und Ausgaben müssen je nach Aufgabenstellung **dokumentiert** werden.
4. Dabei muss ggf. zwischen **wichtigen und nebensächlichen Zeilen** unterschieden werden. Überflüssige (falsche) Zeilen müssen aussortiert werden.
5. **Ausgaben** sind u. U. unhandlich und müssen ggf. umgeschrieben werden.

Calculator screen showing a syntax error. The error message is "Missing)" and "Missing)". The user is in the solve function menu.

Calculator screen showing the solution steps for the algebraic problem. The steps are:

- $\text{solve}\left(d = \frac{P}{a} - a \cdot d, d\right)$ resulting in $d = \frac{P}{a \cdot (a+1)}$
- $\text{expand}\left(a^2 \cdot (x+d)^2 - (x-a \cdot d)^2\right) \mid d = \frac{P}{a \cdot (a+1)}$ resulting in $a^2 \cdot x^2 - x^2 + 2 \cdot p \cdot x$
- $\text{factor}\left(a^2 \cdot x^2 - x^2 + 2 \cdot p \cdot x\right)$ resulting in $x \cdot ((a^2 - 1) \cdot x + 2 \cdot p)$

6. Bei komplexen Termen / Zeichnungen **vergeht Rechenzeit** (Voyage 200), insbesondere ist das der Fall bei Kurvenscharen.
7. Bei Zeichnungen muss die **passende Window-Einstellung** gefunden werden.
8. Bei Rechnungen und Zeichnungen kommt es häufig auf die **richtige modus-Einstellung und andere Einstellungen** (rad-degree, exact-approx, Nachkommastellen, line usw.) an.
9. Da es häufig mehrere Bearbeitungsmöglichkeiten mit CAS gibt, benötigt der S die Kompetenz, sich für einen Weg zu entscheiden. Das erfordert **gezielte und kompetente Auswahl der CAS-Befehle**.
10. Die Rechnerarbeit kann von den S sehr unterschiedlich geleistet werden. Das reicht von **ungeschickter Bearbeitung bis hin zu sehr eleganter Bearbeitung**, z.B. durch passende Abkürzungen von Funktionen oder Datenmengen und deren Mehrfachverwendung.

11. Experimentelles Arbeiten kostet besonders viel Zeit -
hierauf treffen alle obigen Aspekte zu.

12. Rechnereinsatz muss vom Benutzer geplant werden! Bei komplexeren Bearbeitungen entspricht das dem Entwurf eines kleinen Programms.

Alle genannten Aspekte sind typisch für die Arbeit mit CAS und müssen beim Zeitansatz für die Teilaufgaben berücksichtigt werden. Das bedeutet u.a., dass eine komplexere Rechenaufgabe oder Zeichnung nicht einfach mit einem oder wenigen Knopfdrücken erledigt ist!

Grundlage einer realistischen Zeiteinschätzung sind:

- a) Eine sorgfältige Aufgabenanalyse
- b) Die Bearbeitung der Aufgabe durch den Lehrer, der dabei die Schülersicht einnimmt!

Ein erster sehr hilfreicher Tipp für die Zeiteinschätzung:

Man stelle alle bei der eigenen Lösung verwendeten Computerbildschirme zusammen und markiere das, was der S dokumentieren soll. Beides vermeidet eine Unterschätzung des benötigten Zeitaufwands!

Beispiel >>>

Aus einer Klausuraufgabe (Leistungskurs)



Wichtiger Hinweis: TI-Eingaben und TI-Ausgaben sind mit Erläuterung übersichtlich zu dokumentieren

Gegeben ist der Zykloiden-Baustein

$$a \cdot t - b \cdot \sin(t) \quad \rightarrow \text{zykx}(t, a, b)$$

$$a - b \cdot \cos(t) \quad \rightarrow \text{zyky}(t, a, b)$$

Speichern Sie den Bausteinaufruf

$$\text{zykx}(t, 1, 2)$$

$$\text{zyky}(t, 1, 2)$$

im Grafik-Editor unter $x1(t)$ und $y1(t)$.

Aufgabe a) Skizzieren Sie den Graphen von $x1(t)$, $y1(t)$ für t Werte aus dem Intervall $I = [0, 4\pi]$, maßstabsgetreu auf kariertes Papier. Benutzen Sie ZoomSqr. Beachten Sie dabei charakteristische Punkte.

Aufgabe b) Bestimmen Sie die t Werte des Punktes, der im Intervall $I = [0, 4\pi]$, zweimal durchlaufen wird. Geben Sie auch den x - und y -Wert des Punktes an.

Aufgabe c) Erläutern Sie Zusammenhänge zwischen den Rollbewegungen des abgebildeten Fahrrad-Vorderrads für verschiedene Lagen von Punkten (nicht nur auf dem Reifen) und geeigneten Bausteinaufrufen. Fertigen Sie Skizzen an.

Beachten Sie auch Sonderfälle. –

Vorgesehene Arbeitszeit etwa 30 Minuten.

Aufgabe d) Bestimmen Sie die Ableitung dy / dx (allgemein) mit dem Taschencomputer TI-92 (Weg notieren) und danach ausführlich durch Handrechnung. Was ergibt sich für $a = b$?

Aufgabe e) Bekanntlich kann man mit $(t, y_1(t))$ die Funktion $y_1(t)$ im gleichen Koordinatensystem darstellen wie die Parameterdarstellung $(x_1(t), y_1(t))$? Führen Sie die Darstellung durch, und skizzieren Sie den Graphen von $y_1(t)$ andersfarbig in das Koordinatensystem von Aufgabe a.

Aufgabe f) Berechnen Sie den Flächeninhalt der Fläche zwischen den Graphen von $(x_1(t), y_1(t))$ und $y_1(t)$ für t aus $[0, \pi]$ (fragliche Fläche schraffieren!).



Wichtiger Hinweis: TI-Eingaben und TI-Ausgaben sind mit Erläuterung übersichtlich zu dokumentieren

Gegeben ist der Zykloiden-Baustein

$$a \cdot t - b \cdot \sin(t) \quad \rightarrow \text{zykx}(t,a,b)$$

$$a - b \cdot \cos(t) \quad \rightarrow \text{zyky}(t,a,b)$$

Speichern Sie den Bausteinaufruf

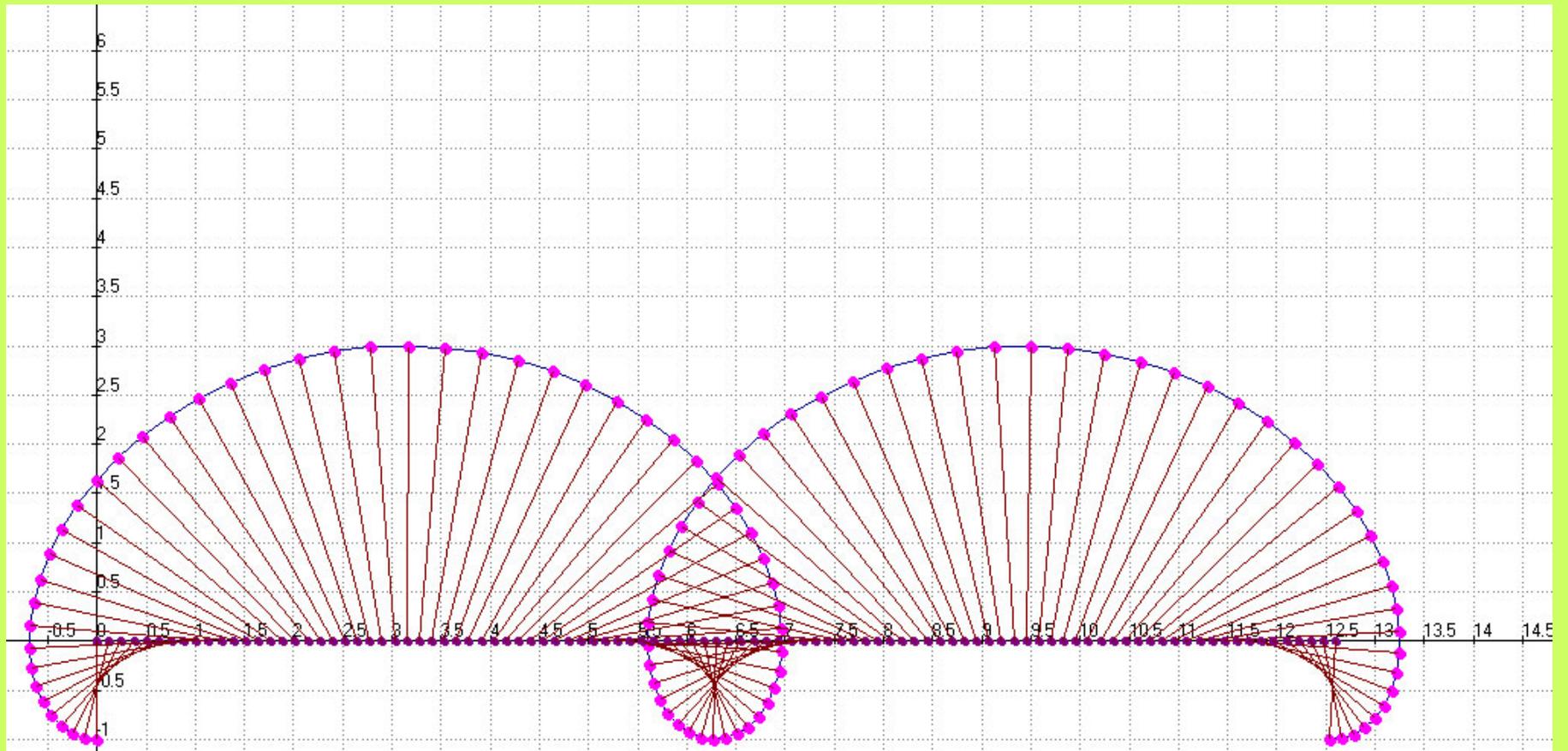
$$\text{zykx}(t,1,2)$$

$$\text{zyky}(t,1,2)$$

im Grafik-Editor unter $x1(t)$ und $y1(t)$.

Aufgabe a) Skizzieren Sie den Graphen von $x1(t)$, $y1(t)$ für t Werte aus dem Intervall $I = [0, 4\pi]$, maßstabsgetreu auf kariertes Papier. Benutzen Sie ZoomSqr. Beachten Sie dabei charakteristische Punkte.

Aufgabe b) Bestimmen Sie die t Werte des Punktes, der im Intervall $I = [0, 4\pi]$, zweimal durchlaufen wird. Geben Sie auch den x - und y -Wert des Punktes an.



Zykloiden-Demo

f1: $a*t-b*\sin(t)$ = $x(t,a,b)$ Zykloidenbaustein

f2: $a-b*\cos(t)$ = $y(t,a,b)$

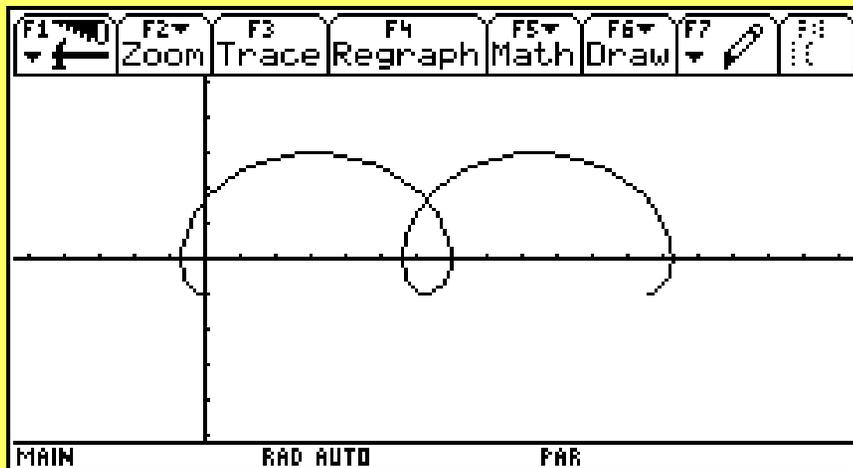
f3: $f1(1,2), f2(1,2)$ $1*t-2*\sin(t), 1-2*\cos(t)$, die Zykloide

f4: $t, 0$ so läuft t , wenn $f3$ erzeugt wird

f5: $t, 0, f1(1,2), f2(1,2)$ Verbindungsstrecken $(t, 0)$ zu den Zykloidenpunkten

Aufgabenanalyse zu a) und b)

- Eingabe des Bausteins in den Home-Editor
- Eingabe der Aufrufe in den Parameter-Editor
- Erzeugung der Zeichnung in passendem Fenster
- Übernahme der Zeichnung auf kariertes Papier unter Beachtung charakteristischer Punkte.
- *Leicht, aber zeitaufwendig*



Dieses Bild ist von den Schülern zu übernehmen und angemessen zu beschriften.

```
F1 Algebra F2 Calc F3 Other F4 PrgmIO F5 Clean Up
■ a · t - b · sin(t) → zyky(t, a, b) Done
■ a - b · cos(t) → zyky(t, a, b) Done
■ zyky(2 · π, 1, 2) 2 · π
■ zyky(2 · π, 1, 2) -1
■ solve(zyky(t, 1, 2) = 2 · π, t)
  t = 8.17868 or t = 6.28319 or t = 4.38769
■ zyky(8.17868, 1, 2) 1.63805
■ zyky(4.38769, 1, 2) 1.63805
MAIN RAD AUTO PAR 7/30
```

b) Situation erkennen!

Gleichungsansatz

3 Lösungen

die richtigen Lösungen herausfinden

y-Wert berechnen

Hinweis: Die Schüler ist die Arbeit mit Bausteinen und ihren Parametern bekannt. Der Computer wird bei dieser Aufgabe fast durchgängig verwendet- für Rechnungen und Zeichnungen. Bei d) ist auch eine Handrechnung vorgesehen.

| Erwartungshorizont | | | | |
|--|--|-----|-----|------------|
| Erwartete Teilleistungen, Erläuterungen | Anforderungsbereiche mit Bewertungseinheiten, ungefähre Bearbeitungszeit | | | |
| | AB 1 | AB2 | AB3 | Zeit, etwa |
| a) Baustein eingeben, Eingabe der Parameterdarstellung, Erzeugung der Zeichnung in passendem TI-Fenster, Übernahme der Zeichnung auf Papier unter Beachtung charakteristischer Werte (leicht, aber zeitaufwendig) | 8 | 0 | 0 | 20´ |
| b) Lösungen sind $t = 4.38769$ und $t = 8.17868$; $x(t) = 2\pi$, $y(t) = 1.638$ (Vermutlich denken die Schüler $\text{zyky}(2\pi,1,2)$ liefert den richtigen Wert, auf den Ansatz $\text{Solve}(\text{zykx}(t,1,2)=2\pi,t)$ muss man erst einmal kommen.) | 0 | 0 | 4 | 10´ |

Für die Zuordnung von Bewertungseinheiten ist weiterhin (wie bisher) die für eine Teilaufgabe benötigte Zeit entscheidend. In diese gehen indirekt die abgefragten Kompetenzen mit ein!

Bei den vorgestellten Teilaufgaben wirkt die Rechner als Zeichen- und Rechenhilfsmittel. Ohne CAS müsste die Aufgabe anders formuliert werden.

Andere Beispiele für notwendigen CAS-Einsatz wären u.a.: Lösen eines umfangreichen LGS, Integration / Differentiation schwieriger Funktionen, Erstellen von Zeichnungen mit komplizierten Funktionen usw.

Beispiel 2: Zeichne den Graphen der Funktion $A(x) = \sqrt{(4-x)^2 + (3-\sin(x))^2}$ und bilde die Ableitung $A'(x)$. - Leistungskurs.

| Von Hand | Mit dem Rechner |
|---|---|
| Sinnvolle x-Werte einsetzen und A(x)-Werte berechnen, in Wertetafel setzen 8' | Term eingeben in y-Editor, z.B. in y1(x), dabei auf Syntax achten, ggf. Term korrigieren |
| Kosy wählen und Punkte eintragen 5' | Zeichnen lassen |
| | Ggf. Fenster besser wählen, auf richtige Einstellung achten (mode), z.B. bei x (Bogenmaß) |
| | Bild auf Papier übernehmen 13' |
| A(x)´Ableitung bilden, beachten von Wurzelregel, mehrmals innere Ableitung und äußere Ableitung, Term vereinfachen 8' | A(x) eingeben (oder in Zusammenhang mit Zeichnung y1(x) nehmen),Ableitung aufrufen, dokumentieren (z.B. Regeln aufschreiben), Term ggf. anders schreiben 5' |
| Einschätzung: Zeitaufwand ist hier etwa gleich Handarbeit fehleranfällig | Einschätzung: CAS-Arbeit: Weit weniger fehleranfällig |

Zeichnen
von Hand

Zeichnen
mit CAS

Vorgegebene
Zeichnungen
mit CAS
nachmachen
oder
umgekehrt

Vorgelegte
**Bildschirm-
ausdrucke**
erläutern
lassen

Vorgegebene
Rechnungen
mit CAS
nachmachen
oder
umgekehrt

Rechnen
von Hand

Rechnen
mit CAS

Rechnungen **visualisieren**
oder Visualisierung durch
Terme rechnerisch erfassen

Konstruktion von
Aufgaben mit CAS-
Verwendung

Aufgaben aus dem
Bausteindreieck
(Baustein definieren,
analysieren, anwenden)
stellen

Modellieren
mit CAS-
Hilfe

CAS-Ansätze und
CAS-Lösungen /
Lösungsteile
dokumentieren

Mit dem CAS
Rechenergebnisse
und Zeichnungen
kontrollieren

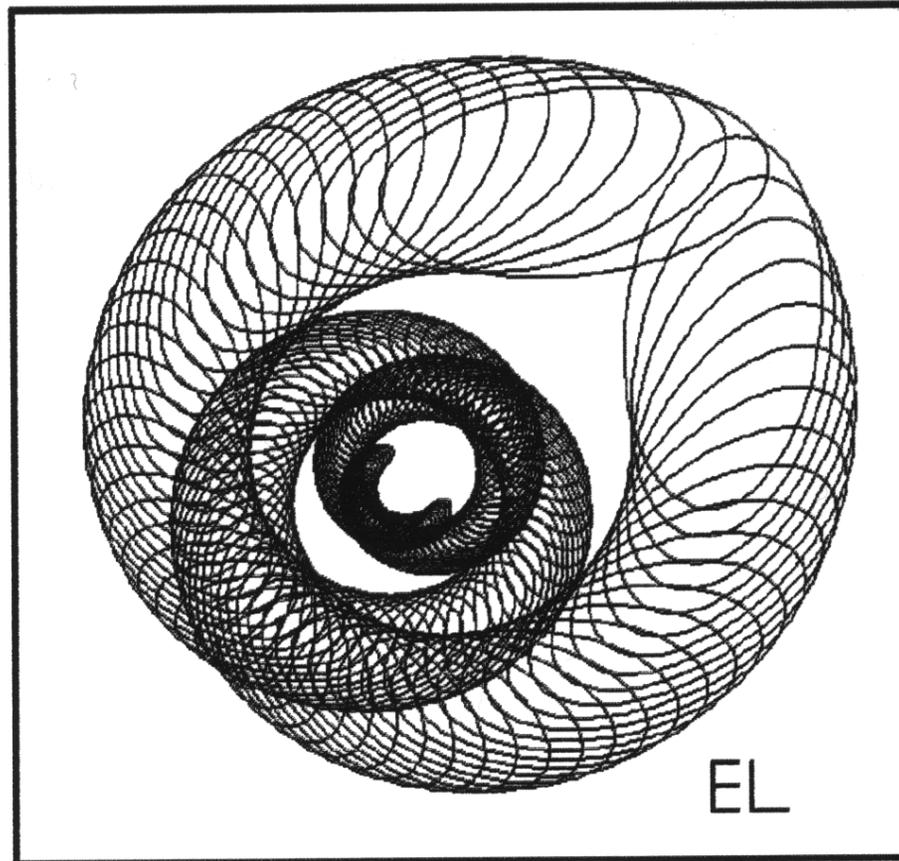
Mit dem CAS **experimentell** arbeiten,
dokumentieren und
auswerten lassen

Man nehme eine schon vorhandene Aufgabe als "Kern" und wandle diese CAS-gemäß ab oder ergänze sie (Aufgabenvariation).

**Und wo kommen
die Aufgaben
her?**

Man konstruiere eine neue Aufgabe mit eigenen Ideen für CAS-Einsatz.

Danke!



Dr. Eberhard Lehmann, mirza@snaflu.de www.snaflu.de/~mirza