Eberhard Lehmann
mirza@snafu.de – www.snafu.de/~mirza

CAS-Zentralabitur Berlin – eine Dokumentation mit

- Einschlägigen Tagungsbeiträgen
- Einigen Aufgabenstellungen
- Hinweisen zur Konstruktion von CAS-Aufgaben
- Hinweisen zur Zeiteinschätzung für die Bearbeitung von CAS-Aufgaben
- Hinweisen zur langfristigen Vorbereitung auf das CAS-Zentralabitur

1. Erfahrungen aus dem CAS-Probeabitur in Berlin

Das Mathematik-Zentralabitur ist inzwischen in fast allen Bundesländern eingeführt oder steht kurz vor dem ersten Durchgang. In Berlin wurde im Oktober 2006 ein „Probeabitur" durchgeführt, an dem u.a. die Schulen teilnahmen, die sich zur speziellen Variante des Mathematik-Zentralabiturs mit Computeralgebra schon vor Monaten angemeldet hatten. Für das Probeabitur gab es CAS-Aufgaben und „nicht-CAS-Aufgaben", zu denen auch knappe Erwartungshorizonte gehörten. Die Aufgaben zum M-Zentralabitur wurden von einem „Entwicklerteam" der Senatsverwaltung entworfen, unten kurz als ET bezeichnet,.
An dem Workshop „Auswertung des zentralen Probeabiturs mit CAS" am 28.11.06 nahmen fast alle an diesem Abitur beteiligten KollegInnen (17, davon 12 mit Voyage 200, 4 mit DERIVE, 1 mit Maple) und weitere Interessenten für die Folgejahre teil.

Nach dem Ausfüllen und Auswerten eines CAS-Probeabitur-Fragebogens wurden in der sehr kritikreichen Diskussion besonders folgende Aspekte hervorgehoben:
1) Erwartungsgemäß gab es Unklarheiten bezüglich der Dokumentation. Das ET muss doch beim Stellen der Aufgaben (egal ob mit oder ohne CAS) eine Vorstellung haben, was dokumentiert werden soll. Denn das ist sehr wichtig für die Einschätzung der zeitlichen Belastung. Mit nur einem oder zwei Sätzen in der ET-Aufgabenstellung kann man dem Problem nicht beikommen. Für eine vernünftige Zeiteinschätzung ist noch großer Handlungsbedarf.

2) Da sich 1) vermutlich nicht allgemeingültig formulieren lässt, können nur 2-3 Beispiele in Form von Musteraufgaben (mit didaktischem Kommentar) Abhilfe schaffen. Man kann darin ja den Lehrern bzgl. der Dokumentation gewisse Toleranzen zugestehen.

3) Der Erwartungshorizont darf nicht zu knapp bemessen sein und soll auf CAS zugeschnitten sein. Übrigens wären hier auch Hinweise zur Dokumentation an konkreten Stellen möglich..

4) Die CAS-Aufgaben müssen sich schon aus Gerechtigkeitsgründen für die Schüler deutlich von den anderen unterscheiden..Ein gemeinsamer Aufgabenkern ist sinnvoll (für den Anfang vielleicht 50% gemeinsam), aber dann deutliche Unterschiede. Hier ist die Phantasie des ET gefragt, diverse Hilfen liegen ja vor. Gleiche Aufgabe für beiden Gruppen sind kaum zu vertreten.

5) Die anwesenden LehrerInnen wollen keinen Rückschritt, sondern ein Berücksichtigen eigener Entwicklungen. Das betrifft sowohl Aufgabenformulierung als auch Aufgabeninhalte. Wo bleibt der Fortschritt? Mit Angst und zu viel Rückgriff auf klassische Aufgabenstellung

sollte man nicht auftreten. Wozu gibt es das Sinus-Projekt, wozu gibt es die schönen Veröffentlichungen zur Aufgabenkultur, insbesondere zur Aufgabenvariation? Hierzu sollte sich das ET sachkundig machen und auch auf andere Bundesländer sehen (z.B. Niedersachsen). Das ET darf durchaus von den vielfältigen Erfahrungen der Kollegen profitieren, die schon seit Jahren in Berlin Abitur mit CAS schreiben. Dazu liegen der Senatsverwaltung zahlreiche ältere Abiturarbeiten mit CAS vor. Man muss sich also nicht alles neu ausdenken. Der Einwand, dass da manches Exotisch und personenbezogen ist stimmt sicher, aber eben nur manches und es bleibt genug übrig, was das ET benutzen - und dabei Zeit sparen - könnte.

6) Man kann auch durchaus schon anfangen, offene T E I Laufgaben einzubauern. Hier hat sich bewährt, eine ungefähre Arbeitszeit dafür anzugeben, die dann auch die relative Bewertung zu anderen Aufgabenteilen ermöglicht.

7) Falls nun das Argument kommt, dass das ET nicht so viel Zeit hat, kann man nur sagen: Wenn ein Zentralabitur gewünscht wird, muss man dafür auch die Ressourcen zur Verfügung stellen.

8) Die vorgelegten Arbeiten sind recht erfolgreich bearbeitet worden – mit CAS schneller als die gleiche Aufgabe ohne CAS - , so dass sich die Schüler überwiegend positiv zu den Aufgaben äußerten. Möglicherweise haben sie nach dem vorhergehenden Unterricht schwerere Aufgaben erwartet. Auch von der Aufgabenauswahl durch die Schüler wurden keine besonderen Probleme geäußert. Das könnte an den übersichtlichen, weitgehend auf Mathematiktext basierenden Aufgabenstellungen liegen.

Weitere Äußerungen zur Tagung finden Sie auf der Homepage www.snafu.de/~mirza

2. Ein Fragebogen nach dem CAS-Zentral-Probeabitur

Dr. Eberhard Lehmann, mirza@snafu.de INSGESAMT

Fragebogen zum Probe-Zentralabitur mit CAS-Aufgaben –
differenzieren Sie ggf. zwischen LK und GK.

1. Schule, Lehrer:
LK *GK* *Verwendetes CAS*

2. Ihre zwei wichtigsten Feststellungen / Wünsche nach dem Probeabitur - ggf. auf Rückseite:

3. Ausfall der Arbeiten

	1	2	3	4	5	6
GK						
LK						

---

4. Wie passten die Aufgaben zu Ihrem Unterricht?

.	*1*	*2*	*3*	*4*	*5*	*6*
Aufgabennummern →						
GK – LK →						

5. Wie beurteilen Sie den Schwierigkeitsgrad der Aufgaben?

.	*Schwer*	*mittel*	*leicht*
Aufgabennummern →			
GK – LK →			

6. Wie beurteilen Sie die vorgelegten Erwartungshorizonte / Bewertungen der Aufgaben?

.	*gut passend*	*akzeptabel*	*daneben*
Aufgabennummern →			
GK – LK →			

---

7. Als wie hoch empfanden Sie die CAS-Anteile bei den einzelnen Aufgaben?

	Zu hoch	*richtig*	*zu gering*
Aufgabennummern →			
GK – LK →			

8. Wie empfanden Sie den „nicht-CAS-Anteil“ in den CAS-Aufgaben?

	Zu hoch	*richtig*	*zu gering*
Aufgabennummern →			
GK – LK →			

---

9. Ihre Anmerkungen zum Aufgaben-Auswahlverhalten der Schüler

10. Ihre Bemerkungen zu den Dokumentationsanforderungen

---

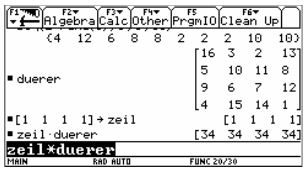
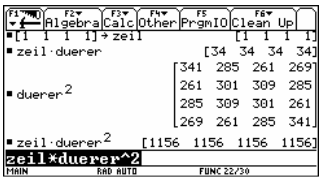
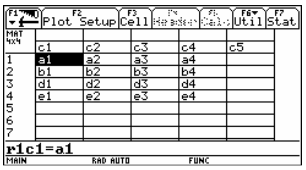
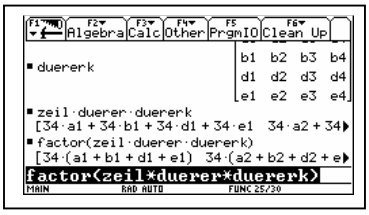
11. Welche besonderen CAS-spezifischen Probleme tauchten während der Arbeit auf ?

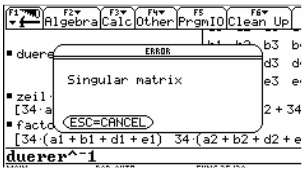
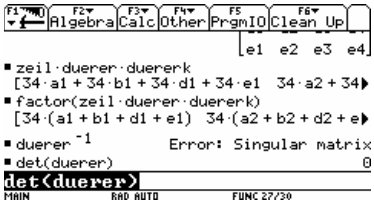
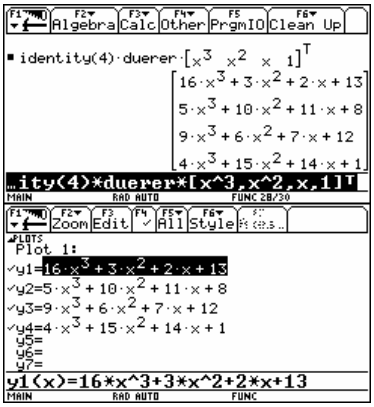
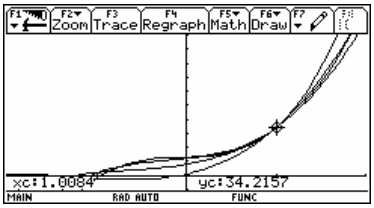
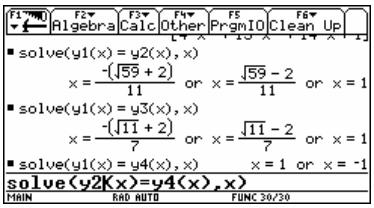
12. Stimmigkeit der Probeabitur-Note mit den sonstigen Leistungen

Verbessert	*stimmig*	*verschlechtert*

3. Leistungskurs – Beispielaufgabe aus der linearen Algebra

***– Computereinsatz unabdingbar**

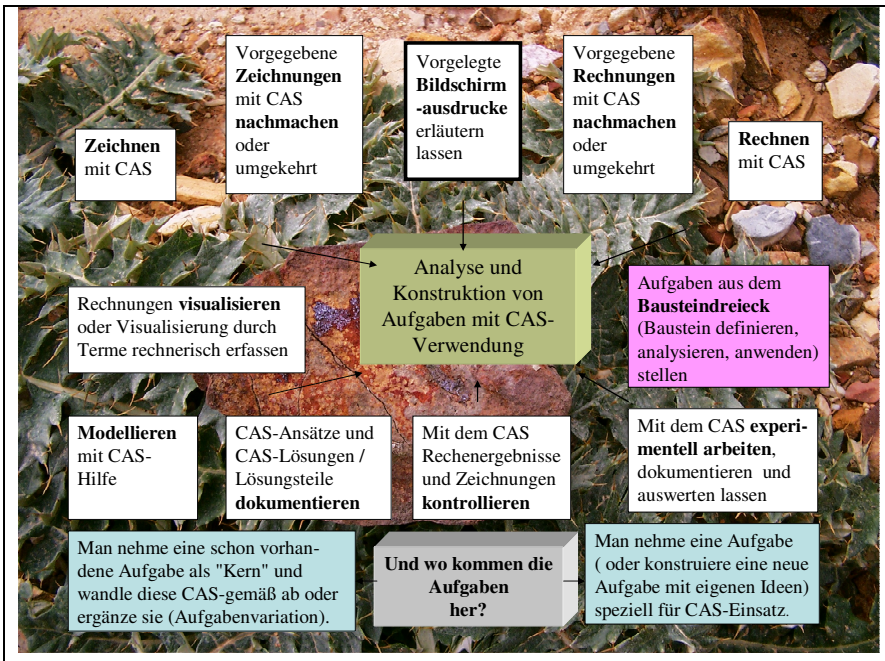
Aufgabentext, Teilaufgaben **Entwurf: Dr. Eberhard Lehmann, Berlin, März 2006**	**Benötigte CAS-Anweisungen, Abbildungen**	**Immer noch benötigte manuelle Fertigkeiten, Abgrenzung gegen ausführliche Handrechnungen**
Albrecht Dürer verwendet in seinem Kupferstich „Melancholie“ das magische „Dürerquadrat“ (gleiche Zeilensummen, gleiche Diagonalsummen, gleiche Spaltensummen, Summenzahl = 34, Zahlen von 1 bis 16 (Eigenschaft #) a) Zeigen Sie unter Benutzung des Matrizenkalküls, dass die Spaltensummen tatsächlich 34 sind.	Eingabe des Dürerquadrats über den Matrizeneditor (Abb.)  Mit Hilfe des Vektors *zeil* werden die Spaltensummen geprüft.	Anmerkung: Zu dieser Aufgabe sollte man eine Abbildung der Kupferstichs vorlegen.
b) Zeigen Sie, dass auch D^2 ein magisches Quadrat ist – allerdings unter Verlust von (#). Hinweis 1: Das Zeigen der Spaltensummen reicht, ermitteln Sie diese m.H. von Matrizenrechnung	 	Schon das wäre angesichts der notwendigen Berechnung von 16 Skalarprodukten ein langwierige (und sich wiederholende gleichartige und langweilige) Handrechnung (##).
c) Beweisen Sie: Auch D^n, n aus N, ist magisch, siehe Hinweis 1.	Eingabe von D^k allgemein über Matrizeneditor. Berechnung von *zeil*D*D^k*   	Beweis durch vollständige Induktion. Induktionsverankerung in Teil b). Induktionsvoraussetzung: D^k ist magisch mit der Summenzahl sk. Handrechnung mit den Termen in *zeil*D*D^k* wäre sehr aufwendig. . Geschickt ausklammern und Benutzung von a1+ b1+c1+d1 = sk (nach Induktionsvoraussetzung. Die Summenzahl von D^(k+1) ist also 34*sk, die Matrix also magisch. Die Aussage gilt also für alle n aus N.
d) Ist auch die Inverse D^(-1) magisch? Begründen Sie das Ergebnis!	Rechnung zu D^(-1), singuläre Matrix oder auch det(D)=0.	Inverse einer (4,4)-Matrix wäre mit Handrechnung viel zu zeitraubend und sehr fehleranfällig. Begründung für die Nichtexistenz durch die Rechnerausgaben.

	 	
e) Mit E(4,4)*D*[x^3,x^2,x,1]´ entstehen die 4 „Dürerpolynome“. Stellen Sie diese zeichnerisch dar (y-Einheit = 10) und bestätigen Sie, dass alle vier Graphen einen gemeinsamen Punkt P haben.	Erzeugung der Dürerpolynome, Zeichnungen, Lösung von 6 Polynomgleichungen   	Hier wird ein sicherer Umgang mit dem Matrizenkalkül benötigt. Die Bestimmung der Polynome muss man auch von Hand durchführen können. Alle folgenden Rechnungen und Zeichnung sind von Hand sehr aufwendig. Insbesondere die Lösungen der Gleichungen y1(x)=y2(x) usw. ist von Hand nicht zumutbar – es sind Gleichungen dritten Grades. Wahl eines passenden Darstellungsbereichs, siehe angegebenen Punkt xc,yc. Insgesamt sind 6 Gleichungen zu lösen.
f) Begründen Sie die Aussage: „Das Ergebnis für P kann eigentlich nicht überraschen!“		Text zu P(1,34): Bildet man für jedes Polynom p(1), so muss sich 34 ergeben, da ja die Koeffizienten der Polynome gerade die Zahlen der Zeilen von D sind und deren Summe ist 34.

Zusammenfassung – benötigt werden folgende

a) Rechnerkompetenzen: Matrizeneingabe über Matrizeneditor und im Home-Bereich
Matrizenkalkül: A*B, A^2, A^-1, A´, Erzeugung von Einheitsmatrizen – Umgang mit dem y-Editor und den Zeichenfenstern, Verwendung von SOLVE – Dokumentationskompetenzen, Umgang mit Fehlermeldungen.
b) Hand- und Kopfkompetenzen: Erkennen der notwendigen mathematischen Ansätze. Eigene Rechenfertigkeiten hier kaum gefordert, aber Verständnis für die Ansätze und Auswertung der Ergebnisse.
c) Fachliche Kompetenzen

4. Ein Arbeitshilfe zur Konstruktion von CAS-Teilaufgaben



Diese Folie greift die Gedanken zur Aufgabenanalyse von der Aufgaben-konstruktion her auf. Man wird fest-stellen, dass in CAS-Aufgaben immer wieder auch die hier genannten Ansätze verwendet werden. Dem Leh-rer dienen diese Ansätze zur Aufga-benanalyse und zur Kon-struktion eige-ner Aufgaben für Unter-richt und Klausuren.

5. Zeiteinschätzung für die Bearbeitung von CAS-Aufgaben

Anmerkungen zur Zeiteinschätzung bei der Bearbeitung von CAS-Aufgaben in Abitur- und anderen Klausuren und in Klassenarbeiten (gilt in übertragenem Sinn auch für den Unterricht mit CAS)

Vor einer Unterschätzung des Zeitaufwands von Rechnungen und Zeichnungen mit CAS muss gewarnt werden - u.a. aus folgenden Gründen:

Auf die Bedeutung der Zeiteinteilung für die Aufgaben-erstellung und Auf-gabenanalyse wurde bereits oben hinge-wiesen. Hierzu wer-den nun im Folgen-den einige Zeitpara-meter vor-getragen.

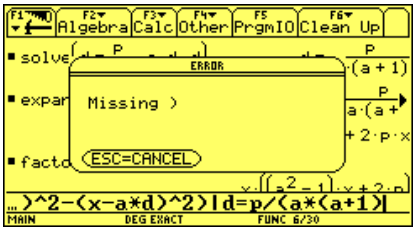
1. Eingaben können Syntaxfehler aufweisen und müssen ggf. korrigiert werden Das ist gerade bei komplexeren Termen nicht selten nötig.

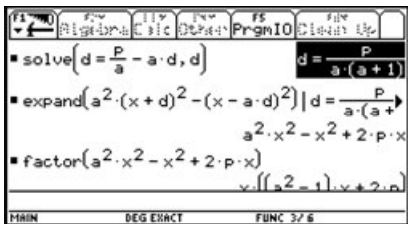
2. Bei Semantikfehlern muss neu überlegt und neu eingegeben werden.

3. Ein- und Ausgaben müssen je nach Aufgabenstellung dokumentiert werden.

4. Dabei muss ggf. zwischen wichtigen und nebensächlichen Zeilen unterschieden werden. Überflüssige (falsche) Zeilen müssen aussortiert werden.

5. Ausgaben sind u. U. unhandlich und müssen ggf. umgeschrieben werden.





Die hier aufgezählten Probleme sind vermutlich jedem mit CAS unterrichtendem Lehrer begegnet. Dennoch zeigen die Erfahrungen, dass die Zeitparameter oft nicht genügend berücksichtigt werden. Dadurch entstehen immer wieder zu umfangreiche Klausuren.

6. Bei komplexen Termen / Zeichnungen vergeht Rechenzeit (Voyage 200), insbesondere ist das der Fall bei Kurvenscharen.

7. Bei Zeichnungen muss die passende Window-Einstellung gefunden werden.

8. Bei Rechnungen und Zeichnungen kommt es häufig auf die richtige modus-Einstellung und andere Einstellungen (rad-degree, exact-approx, Nachkommastellen, line usw.) an.

9. Da es häufig mehrere Bearbeitungsmöglichkeiten mit CAS gibt, benötigt der S die Kompetenz, sich für einen Weg zu entscheiden. Das erfordert gezielte und kompetente Auswahl der CAS-Befehle.

10. Die Rechnerarbeit kann von den S sehr unterschiedlich geleistet werden. Das reicht von ungeschickter Bearbeitung bis hin zu sehr eleganter Bearbeitung, z.B. durch passende Abkürzungen von Funktionen oder Datenmengen und deren Mehrfachverwendung.

11. Experimentelles Arbeiten kostet besonders viel Zeit - hierauf treffen alle obigen Aspekte zu. 12. Rechnereinsatz muss vom Benutzer geplant werden! Bei komplexeren Bearbeitungen entspricht das dem Entwurf eines kleinen Programms. Alle genannten Aspekte sind typisch für die Arbeit mit CAS und müssen beim Zeitansatz für die Teilaufgaben berücksichtigt werden. Das bedeutet u.a., dass eine komplexere Rechenaufgabe oder Zeichnung nicht einfach mit einem oder wenigen Knopfdrücken erledigt ist!	Man beachte: Für die Zuordnung von Bewertungs-einheiten ist auch bei CAS-Aufgaben die für eine Teilauf-gabe benötigte Zeit entscheidend.

Grundlage einer realistischen Zeiteinschätzung sind: **a) Eine sorgfältige Aufgabenanalyse** b) Die Bearbeitung der Aufgabe durch den Lehrer, der dabei die Schülersicht einnimmt! **Ein erster sehr hilfreicher Tipp für die Zeiteinschätzung:** Man stelle alle bei der eigenen Lösung verwendeten Computerbildschirme zusammen und markiere das, was der S dokumentieren soll. Beides vermeidet eine Unterschätzung des benötigten Zeitaufwands! Beispiel >>>	

6. Hinweise zur langfristigen Vorbereitung auf das CAS-Zentralabitur

siehe Homepage www.snafu.de/~mirza
unter Tagungen 2006, Vortrag MNU-Berlin