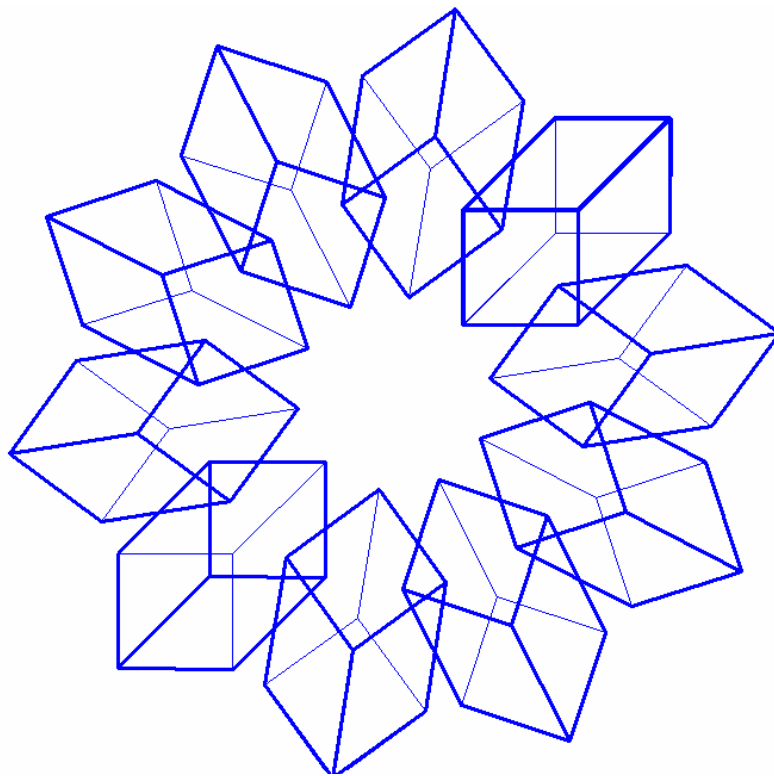


Parameterdarstellungen [$x(t)$, $y(t)$]

Innovative Materialien zur Analytischen Geometrie



Eberhard Lehmann
Berlin 2008

Leh-Soft, mirza@snafu.de, home.snafu.de/mirza

Innovative Materialien zur Analytischen Geometrie

AG 1 - Andere Wege in die Analytische Geometrie	5
Das Konzept	6
Objekte der Analytischen Geometrie in 11 Bildtafeln (Auswahl)	7
AG 1.0 Einige Anmerkungen zur gegenwärtigen Analytischen Geometrie in der Schule	18
AG 1.1 Parameterdarstellungen	20
AG 1.1.1 Unerlässlich für moderne Analytische Geometrie-Kurse	20
AG 1.1.2 Einheitskreis - Einführungsbeispiel für Parameterdarstellungen	25
AG 1.1.3 Computergrafik – ein Schwerpunkt für die Analytische Geometrie	27
Bilder auf den Kopf stellen - der Kurs beginnt	31
AG 1.2 Bilder auf den Kopf stellen	31
AG 1.3 Spiegeln einer Landschaft	33
AG 1.4 Geometrische Objekte mit Matrizen an Achsen spiegeln – ein Einstieg in die Analytische Geometrie	34
AG 1.5 Die Matrix $A_{(2,2)} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ - Computergrafik und Analytische Geometrie	35
AG 1.5.1 Translation / Verschiebung	37
AG 1.5.2 Realisierung linearer (2,2)-Abbildungen mit dem CAS, Punkte und Bildpunkte	38
AG 1.5.3 Zentrische Streckung, Skalierung	40
AG 1.5.4 Drehungen	42
AG 1.5.5 Achsenspiegelungen	46
AG 1.6 Abbildungen umkehren mit inversen Matrizen	51
AG 2 Abbildungsmatrizen, Schrägbilder und Transformationen	54
AG 2.1 Vom R^3 zum R^2 mit Abbildungsmatrizen – Schrägbilder	55
AG 2.2 Abbilden mit (3,3)-Matrizen	61
Vom Kreis zur Banane – mit Polarkoordinaten	63
Transformationen mit dem Computer leicht gemacht	
AG 2.3 Koordinatentransformationen visualisieren	63
AG 2.3.1 Transformieren von Koordinatensystemen	63
AG 2.3.2 Transformieren eines Quader-Schrägbilds	67
AG 2.3.3 Der schiefe Turm von Frankfurt – Transformationen eines Zylinders	68
AG 2.3.4 Vom Kreis zur Banane – Polarkoordinaten	69
AG 3 Mehrfach abbilden – Abbildungsfolgen	77
AG 3.1 – Smily-Folgen	77
AG 3.2 – Folgen von Drehstreckungen - Animation von Ellipsen	79
AG 3.3 - Mehrfache Abbildung eines Objekts mit einer stochastischen Matrix, Matrixpotenzen	83
Projekte	
AG 4 – Projekte mit Objekten der Analytischen Geometrie	89
LOGOS, Kreise, Kugeln, Povray-Kugeln, Netze, Teilverhältnisse, Landschaften abbilden	
AG 4.1 Analytische Geometrie mit LOGOS – fachübergreifend	90
AG 4.2 Viele Kreise durch einen Punkt – Kreis \rightarrow Ellipse – Ellipsenstapel	97
AG 4.3 Kugeln, die uns umgeben – Zylinder – Kegel	102
AG 4.4: Programmieren: POVRAY-Kugeln und andere Objekte	109
AG 4.5 Netze, Maschen, Muster	115
AG 4.6 Teilverhältnisse auf Dreiecksseiten – Rekursion	119

AG 4.7	Abbildung mathematischer Landschaften	126
AG 4.8	Ebenen – Ebenenausschnitte	130
AG 4.8.1	Ebenen mit DERIVE	130
AG 4.8.2	Strukturierung von Ebenen – Lagerhaus Barcelona	133
AG 4.8.3	Strukturierung von Ebenen – Modellierung eines Kunstwerkes – Ebenenteile	135
AG 4.9	Analytische Geometrie am Würfel	137

CAS-Hilfen – für die Analytische Geometrie der Kerncurricula

AG 5	Ein Kapitel zum Nachschlagen für die Arbeit mit CAS - Punkte, Vektoren, Geraden, Ebenen – die Standardobjekte der Analytischen Geometrie in der Schule	141
AG 5.1	Bausteine / Module in der Analytischen Geometrie	141
AG 5.1.1	Vordefinierte Bausteine und ihre mathematischen Grundlagen	141
AG 5.1.2	Geraden, Ebenen in verschiedenen Darstellungen	143
AG 5.1.3	Selbstdefinierte Bausteine und ihre mathematischen Grundlagen	148
AG 5.1.4	Viel zu rechnen: Schnitt zweier Ebenen und Umwandlungen von Gleichungsformen mit einem CAS	152
AG 5.1.5	Abstände, Winkel	155
AG 5.2	Viele Punkte, viele Geraden	158
AG 5.3	Ein Buch aufblättern - das Ebenenbüschel $u \cdot x + u \cdot y = z(x, y, u)$	159
AG 5.4	Auf der Suche nach dem Schnittpunkt der Geraden – ein ungewohnter Lösungsweg	161

ANIMATO – Visualisieren - Animieren – Hintergrundbilder – avi-Filme

Dokumentation	162
---------------	-----

Sachverzeichnis 174

AVI-Dateien – kleine Filme zur Analytischen Geometrie

- Bananenmenge.avi
- Barcelona-Lagerhaus-modelliert.avi
- Toyota-Logo-mit-Hintergrund.avi
- Figuren auf Wanderschaft.avi
- 3d-Punkte.avi
- Kosy-3d-Quader-1-Drehungen.avi
- Kosy-3d-Ebene mit Teilmenge.avi
- Geradenbüschel im R3.avi
- Achsenspiegelung mit Matrix.avi

CD's

CD 1: CD mit Animationen, die als „Filme“ mit ANIMATO erstellt wurden und dann als AVI-Dateien zur Verfügung stehen, ohne dass ANIMATO benötigt wird. Außerdem einige jpg-Dateien mit Bildern zur Analytischen Geometrie.

10 Euro

CD 2: Wie CD 1, aber nun noch mit dem Programm ANIMATO und diversen pl2-Beispieldateien, die teilweise auch im Buch bei Abbildungen genannt werden. Diese Beispieldateien dienen als Muster zum Kennenlernen des Programms (Datei starten und ggf. ändern) und als Lösungsentwürfe diverser mathematischer Probleme aus Analysis, Stochastik, analytischer Geometrie

40 Euro (ANIMATO als Einzellizenz), 200 Euro (ANIMATO als Schullizenz)

Buch: 20 Euro + Versandkosten

AG 1. Andere Wege in die Analytische Geometrie



Diese Abbildung ist Ausgangspunkt für zeitgemäße Kurse zur Linearen Algebra und Analytischen Geometrie. Selbstverständlich lassen diese Ansätze Schulunterricht in unterschiedlicher Ausgestaltung zu.

In dem vorliegenden Buch können nicht alle Aspekte berücksichtigt werden, im Kern stehen innovative Themen zur analytischen Geometrie. Es geht hier auch nicht um Lineare Algebra, aufgebaut mit dem Matrizenkalkül und den vielen möglichen Anwendungen. Hierzu wird verwiesen auf das immer noch aktuelle Buch

*Lehmann, E.: Lineare Algebra mit Vektoren und Matrizen, Schülerbuch, Metzler-Verlag 1990
 (vergriffen, aber beim Autor als Kopie erhältlich, siehe www.snaflu.de/~mirza)*

Eine Ergänzung dieses Buches mit weiteren Anwendungen von Matrizen ist in Vorbereitung. Außerdem ist ein Beiheft mit durchgehendem Einsatz des Computers, insbesondere CAS in Arbeit.

Das Konzept

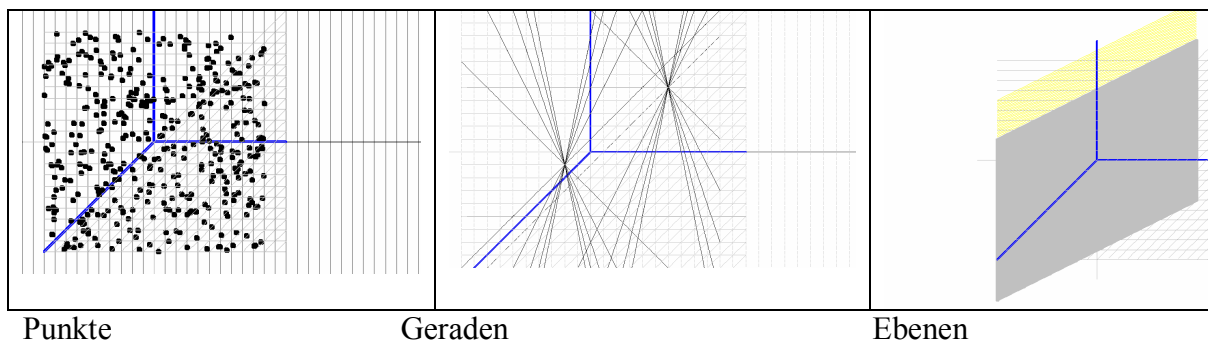
Wichtige Hinweise:

1) Auf eine vollständige Darstellung der Analytischen Geometrie nach einem der Bundesländer-Lehrpläne wird hier verzichtet. Es geht in erster Linie um neue – oft computerbedingte – Ansätze, die den Standardunterricht über dieses Gebiet wesentlich verändern, abwechslungsreicher und interessanter machen können. Dabei werden auch immer wieder Querverbindungen zur Analysis deutlich.

2) **Aus den vielen Vorschlägen können Sie gezielt auswählen, in Ergänzung des Standardkurses, den Sie vermutlich unterrichten müssen. Aber der CAS-Einsatz schafft Ihnen für ein solches Vorgehen Freiräume. Betrachten Sie das ein oder andere Angebot als Übung zu ihrem Standardkurs oder entwickeln Sie den Standardkurs teilweise aus hier dargestellten Themen.**

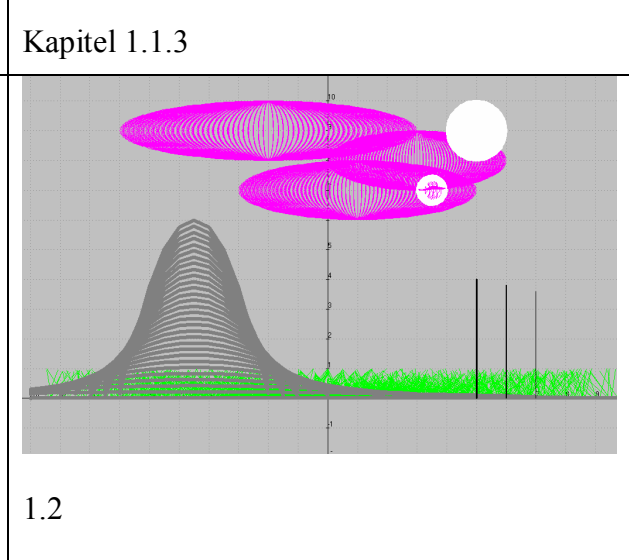
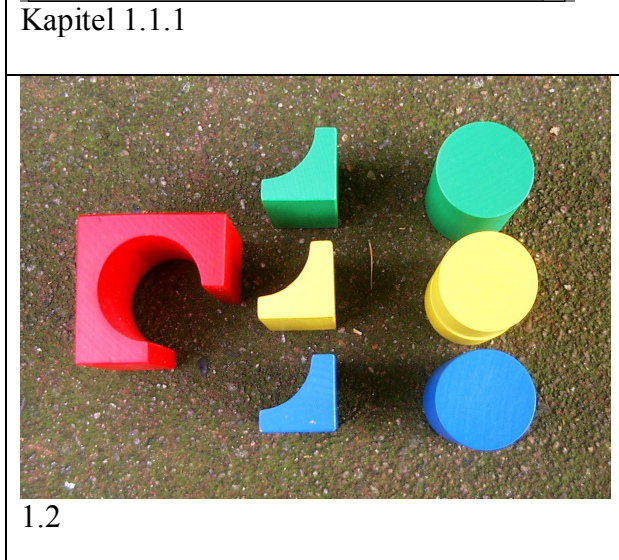
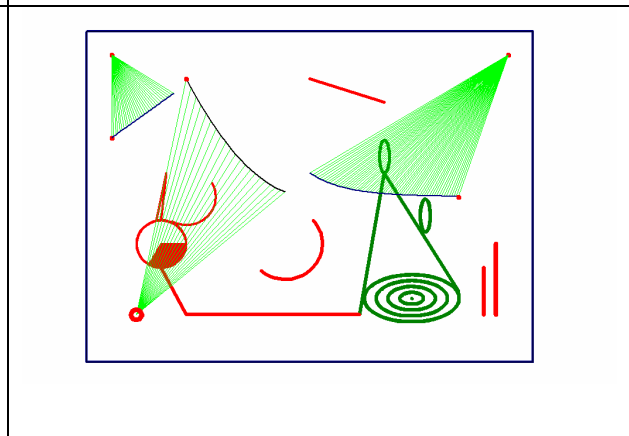
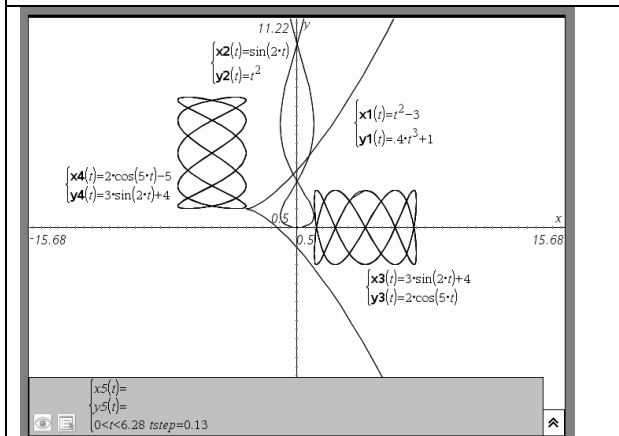
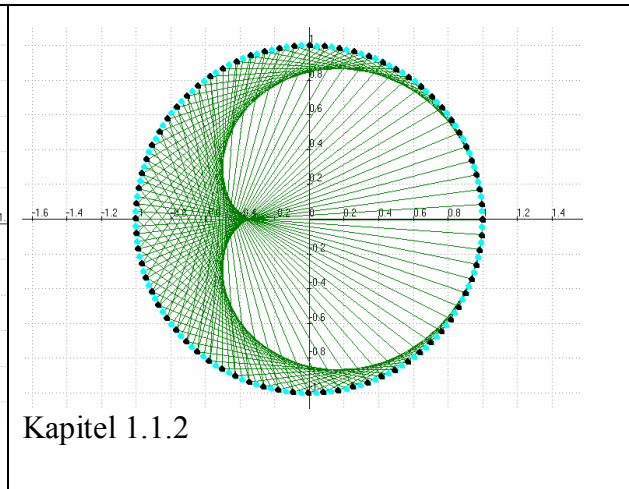
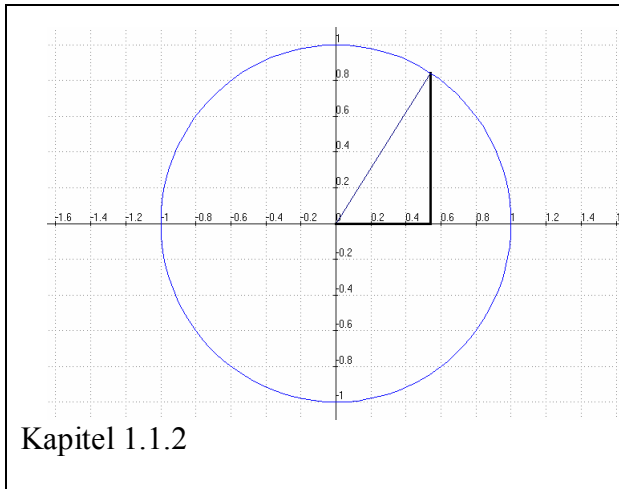
3) Die Kenntnis des Matrizenkalküls wird im Rahmen dieses Konzepts zur Analytischen Geometrie vorausgesetzt – entsprechend der Gesamtkonzeption dieses Buches. Grundlegendes zur Matrizenrechnung und ihren Anwendungen werden hier nicht dargestellt. Sie können allerdings hier teilweise auch ohne Matrizen arbeiten, indem Sie z.B. die Abbildungsgleichungen ohne Matrizen formulieren. Außerdem ist bei etlichen Beiträgen keine Matrizenrechnung nötig.

Die Standardobjekte der Analytischen Geometrie der Schule sind



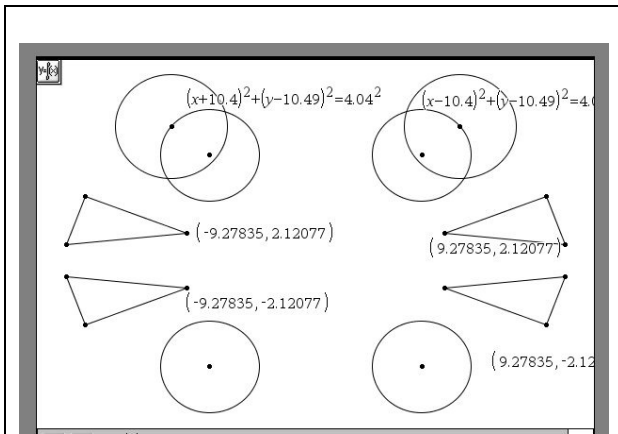
Darüber hinaus gibt es viele andere Objekte mit denen man analytische Geometrie betreiben kann. Eine Auswahl der in diesem Buch betrachteten Objekte sehen Sie auf den folgenden Seiten (Tafeln 1-11).

Einige meiner Objekte der Analytischen Geometrie (Auswahl)

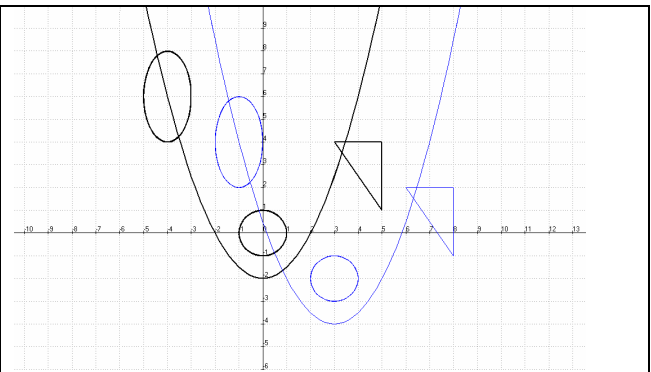


Tafel 1

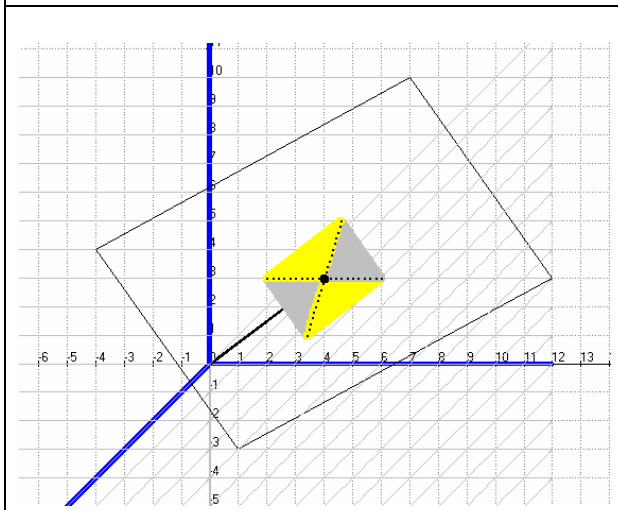
Vielseitige Objekte



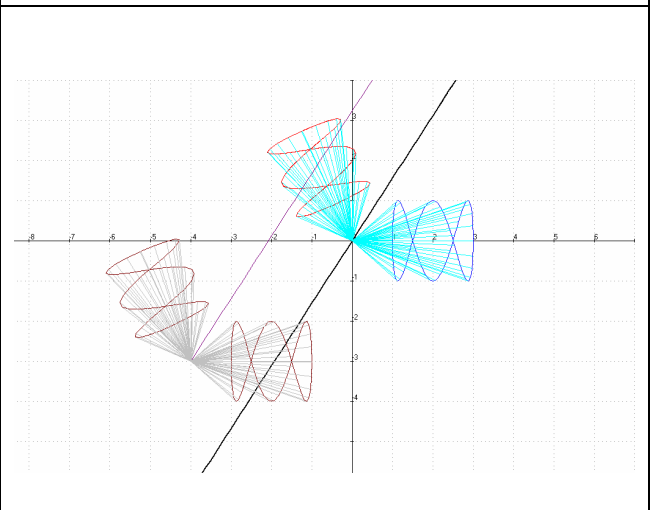
1.4



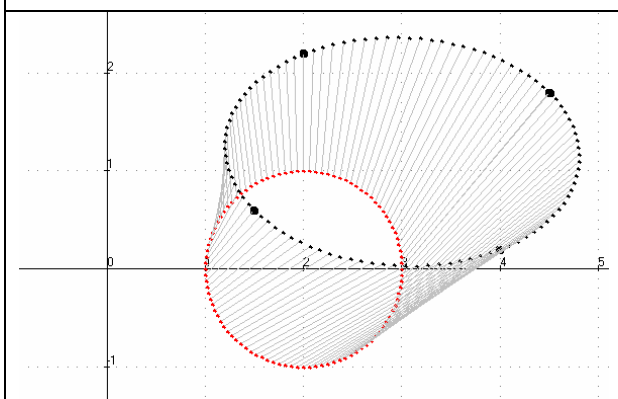
1.5.1



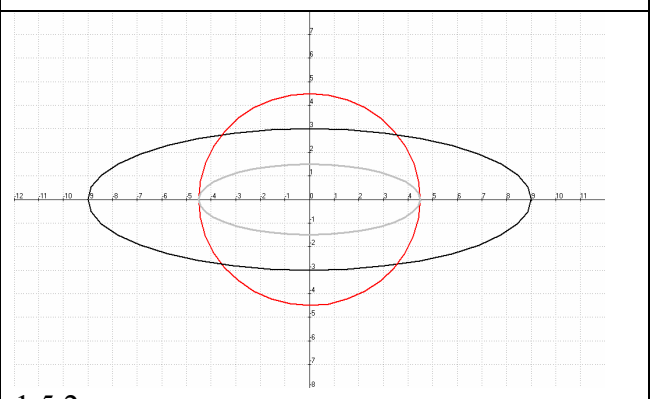
4.8



1.5.2

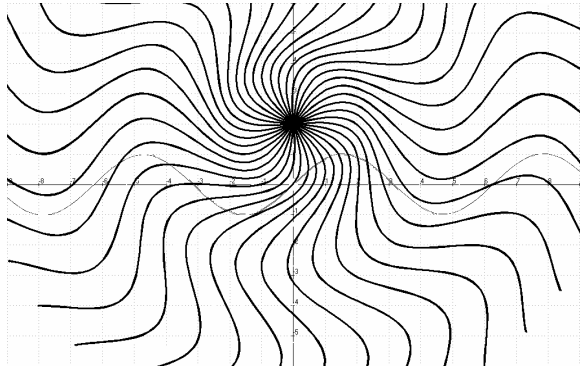
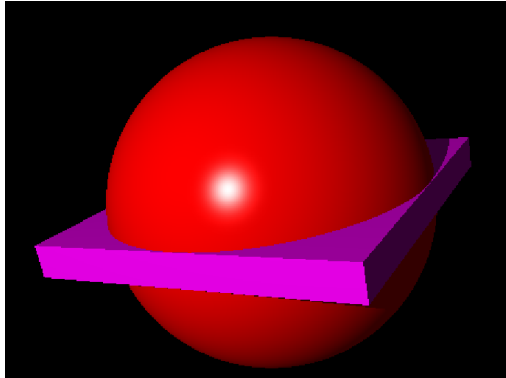
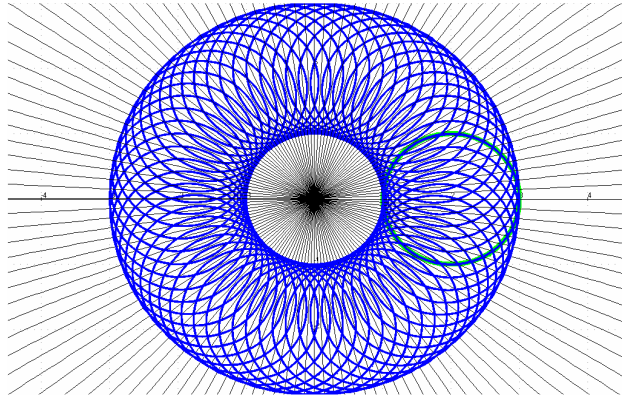
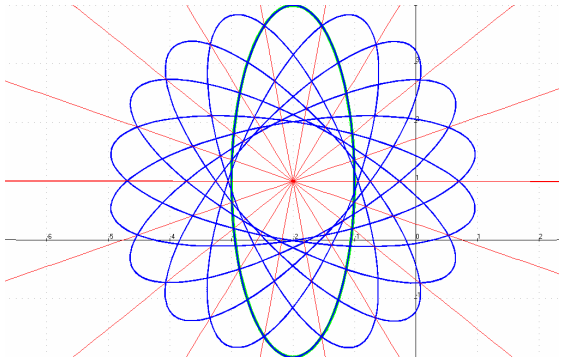
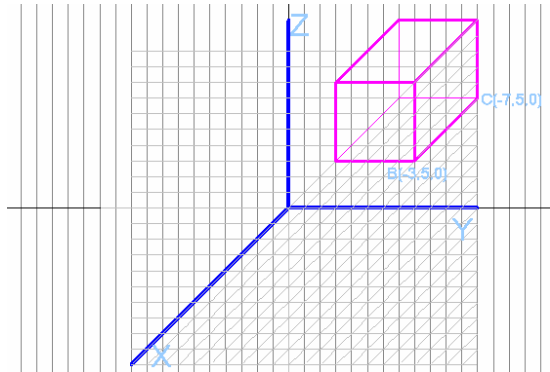
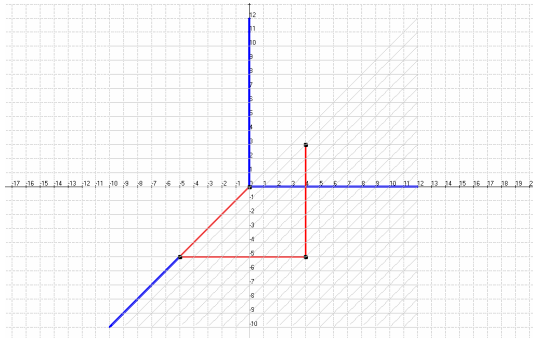


1.5.2

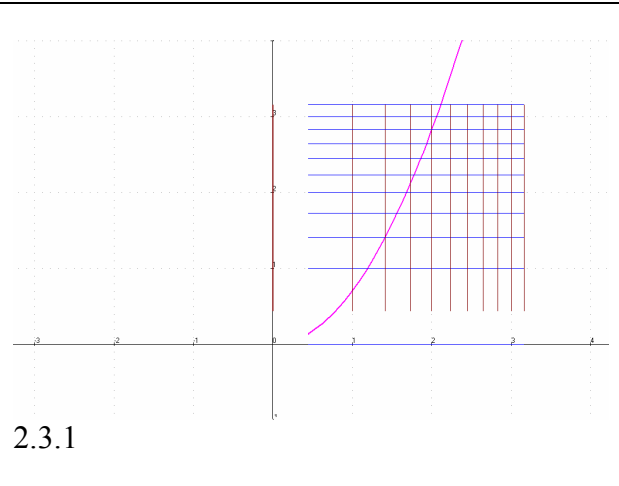
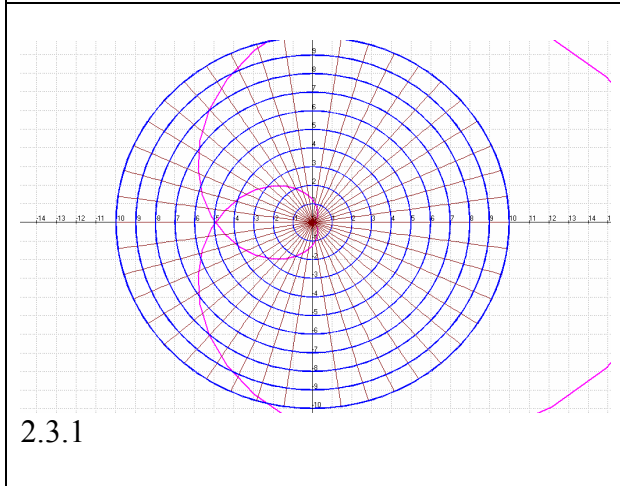
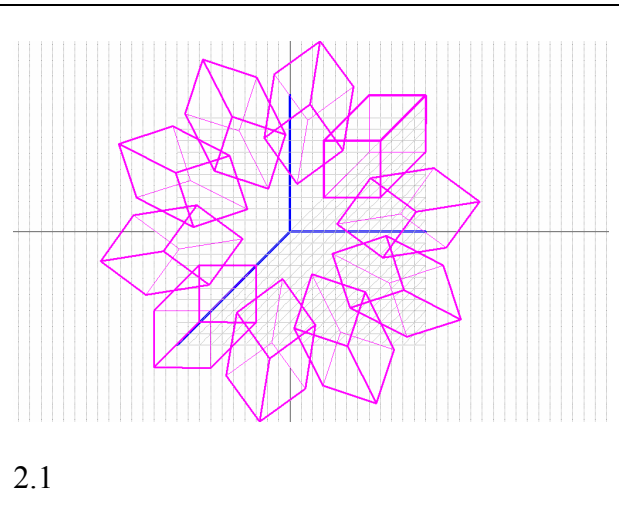
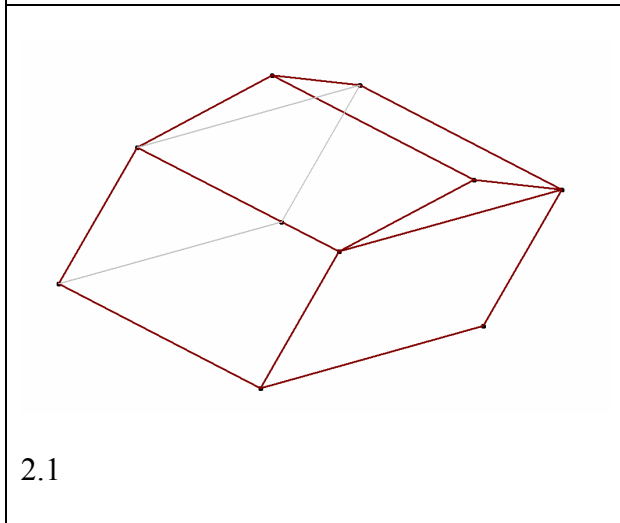
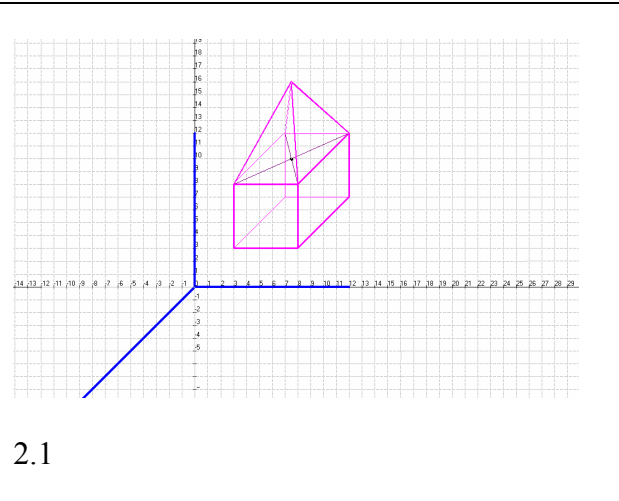
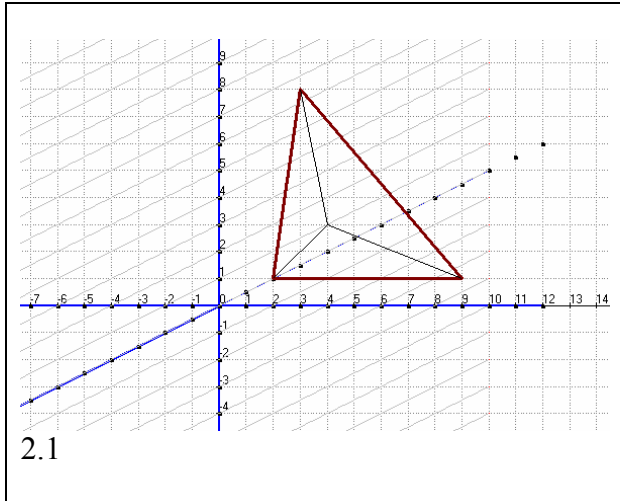


1.5.2

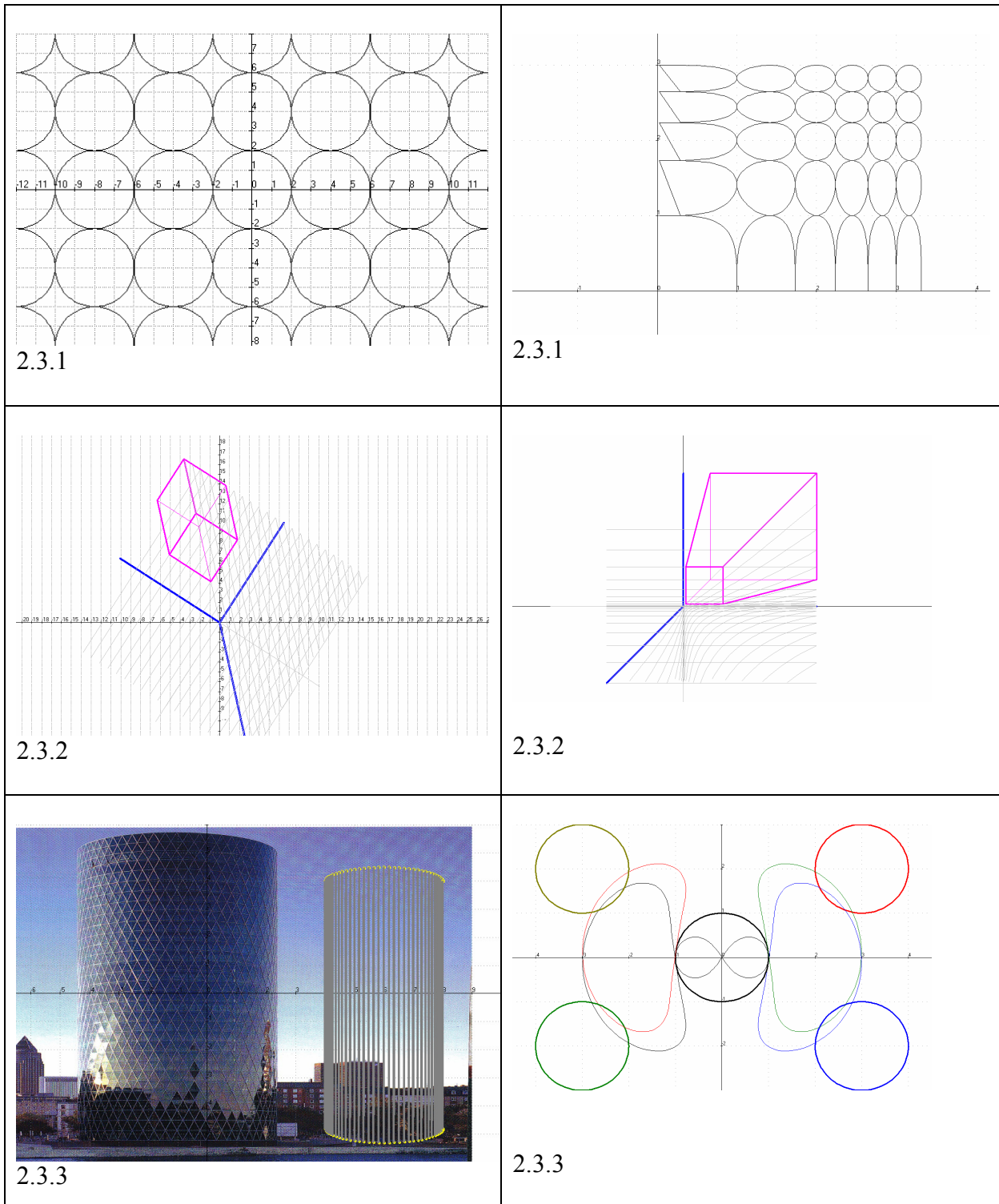
Tafel 2

 <p>1.5.4</p>	 <p>4.4</p>
 <p>1.5.5</p>	 <p>1.5.5</p>
 <p>2.1</p>	 <p>2.1</p>

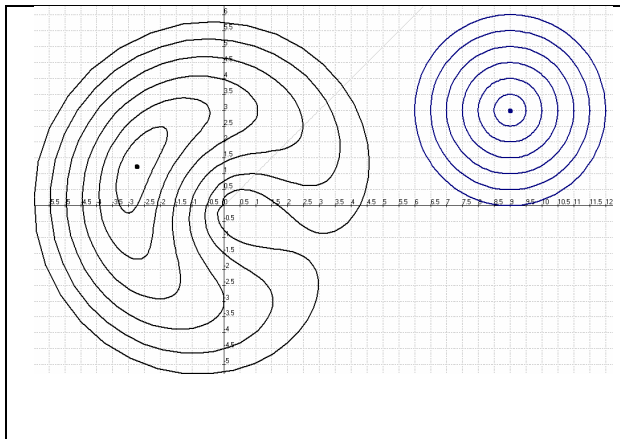
Tafel 3



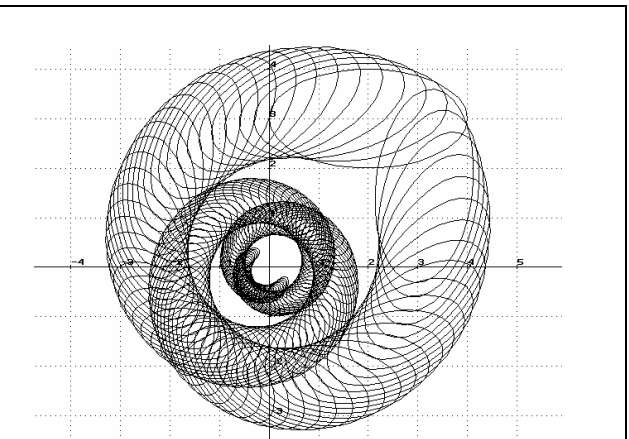
Tafel 4



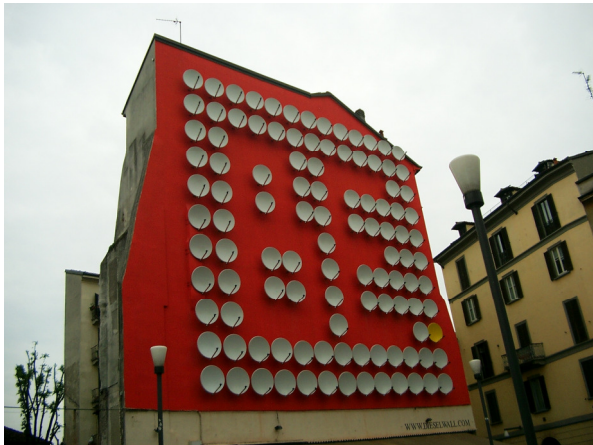
Tafel 5



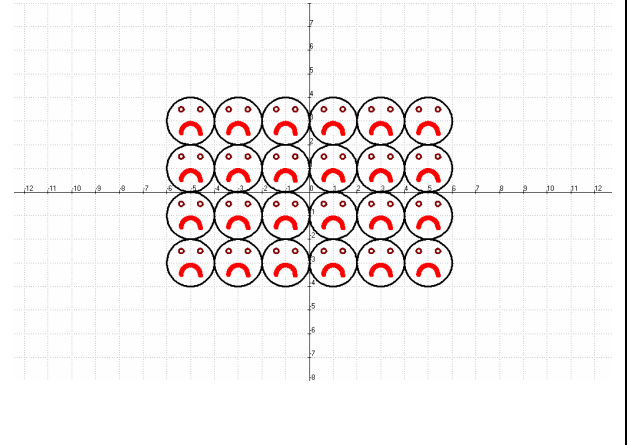
2.3.4



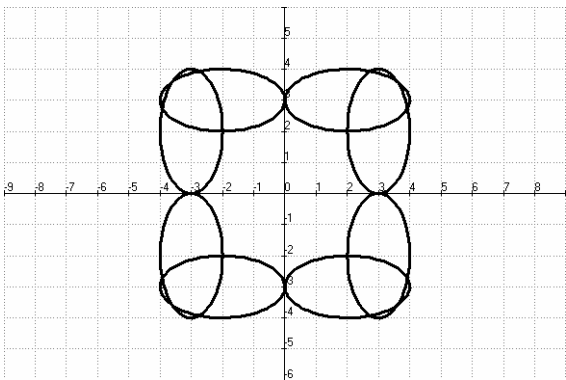
3.2



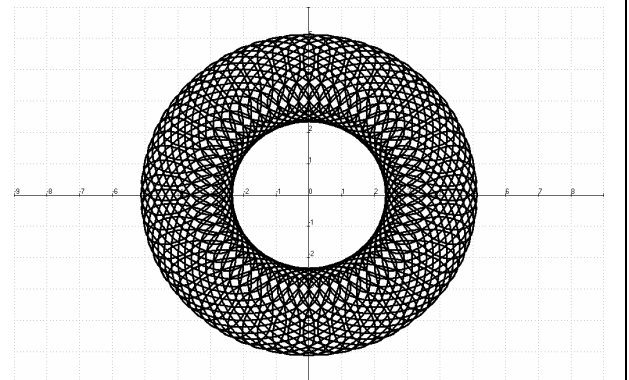
3.1



3.1

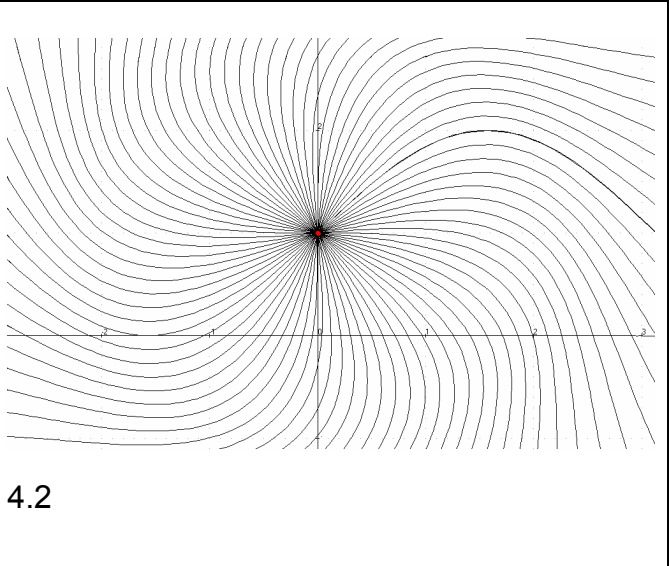
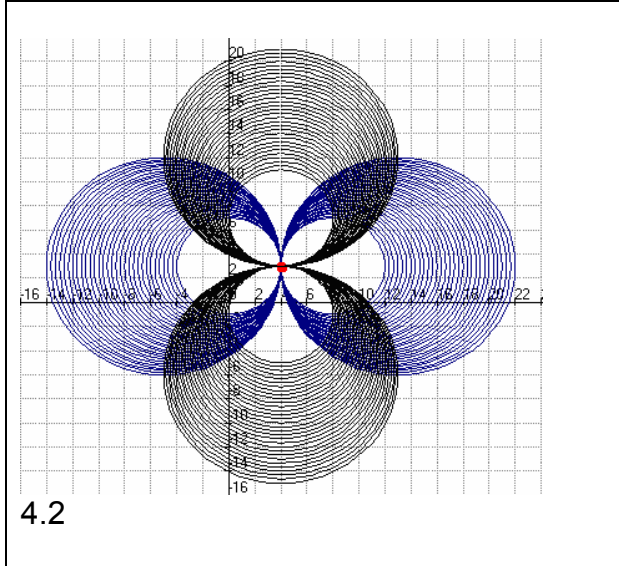
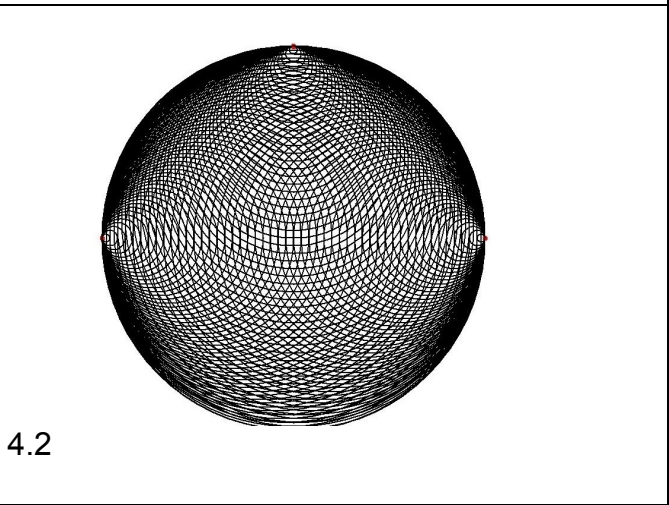
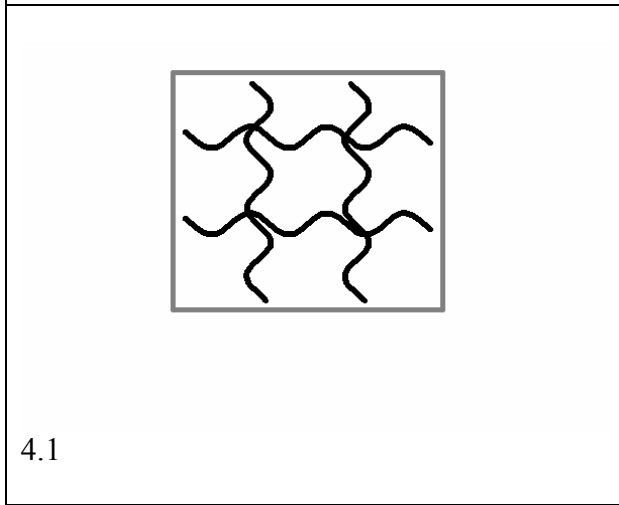
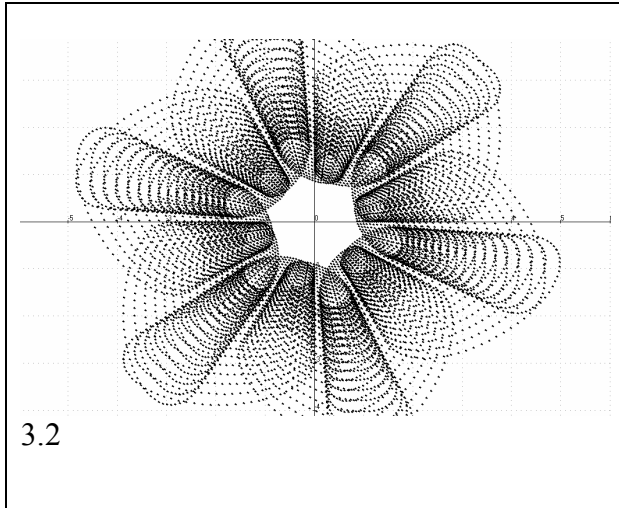


3.2

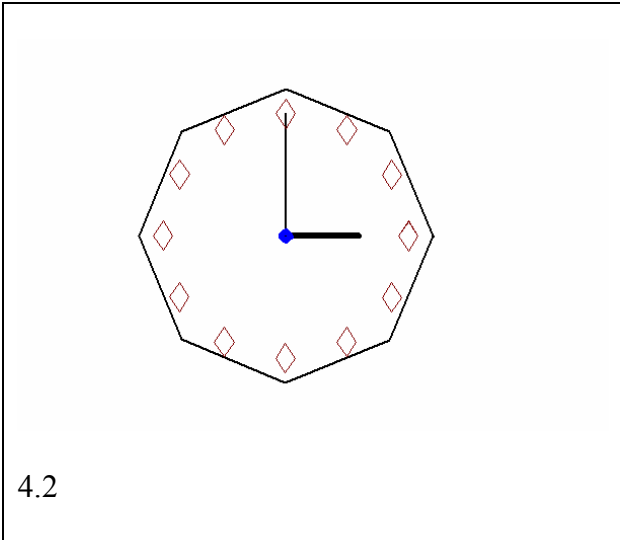


3.2

Tafel 6



Tafel 7



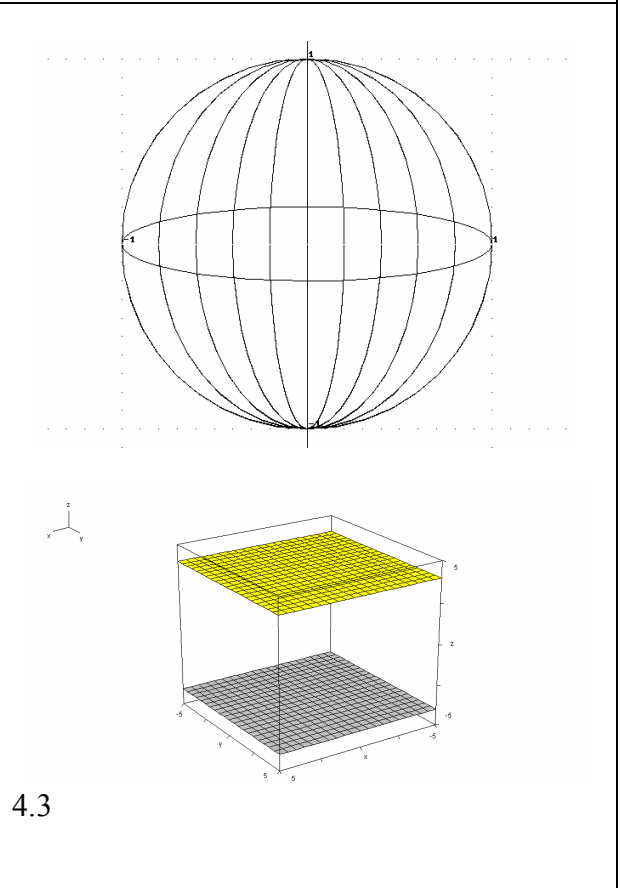
4.2



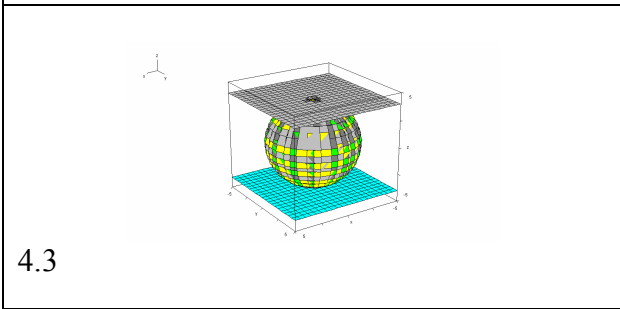
4.3



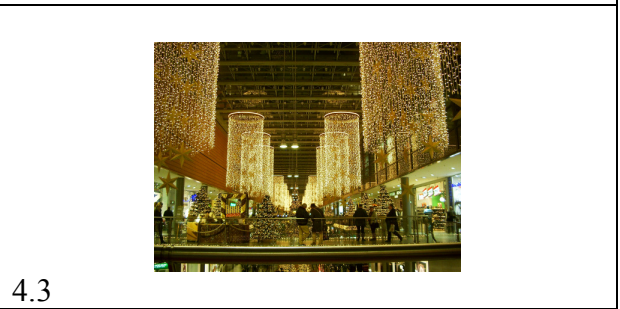
4.3



4.3

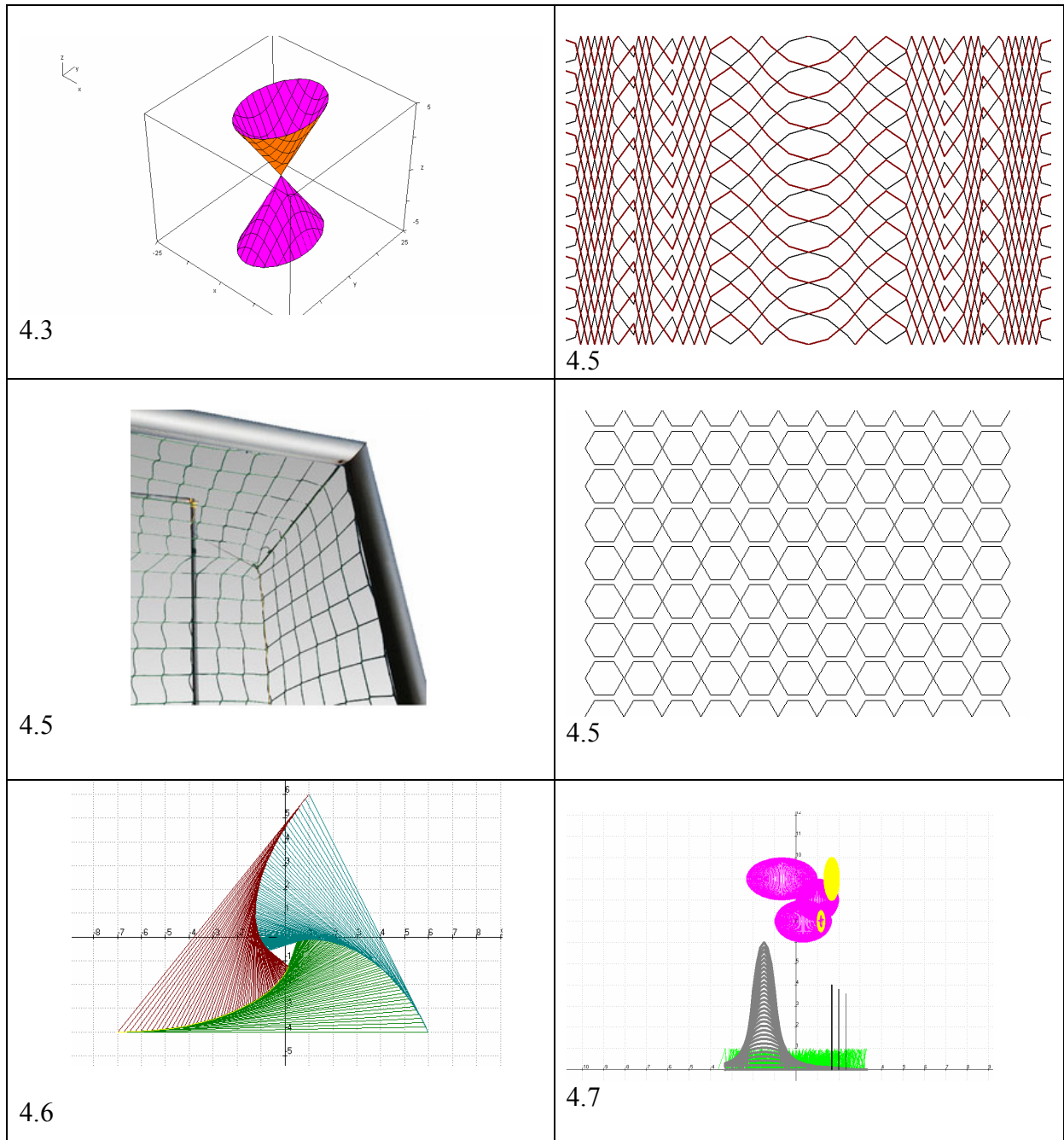


4.3

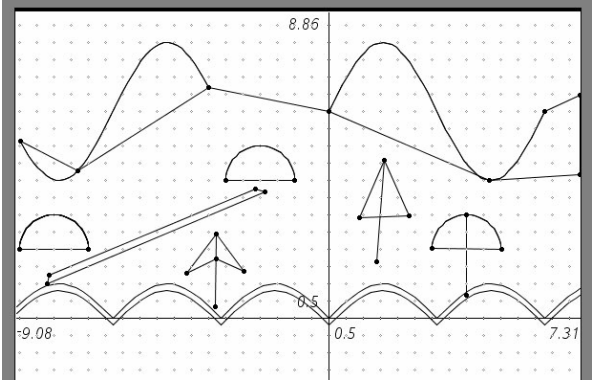
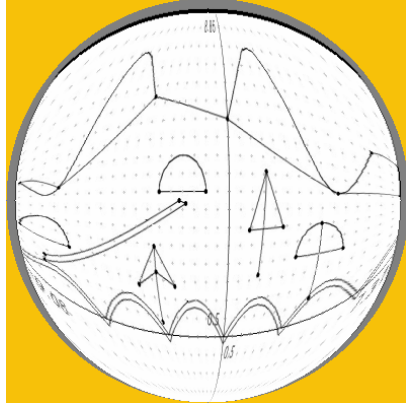
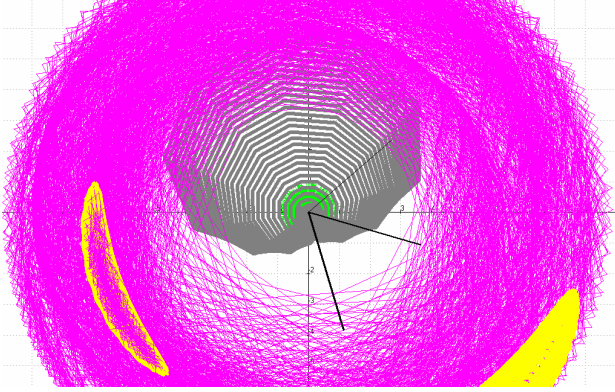
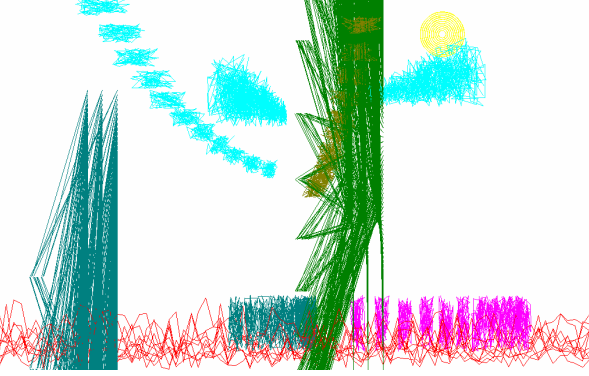
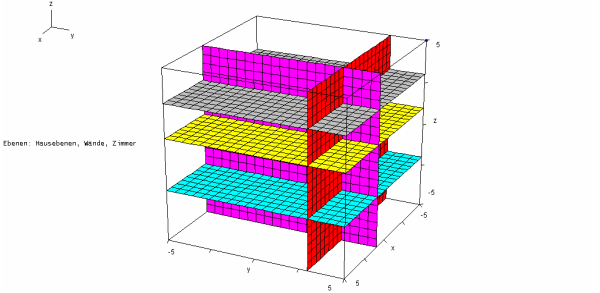
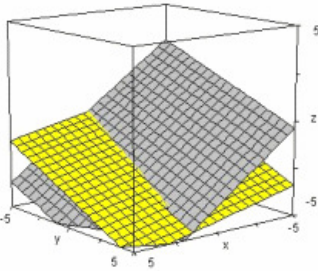


4.3

Tafel 8



Tafel 9

 <p>4.7</p>	 <p>4.7</p>
 <p>4.7</p>	 <p>4.7</p>
 <p>4.8</p>	 <p>5.1.2</p>

Tafel 10

<p>A 3D coordinate system with x, y, and z axes. A cube is drawn with vertices at $(-11, 0, 0)$, $(-6, 5, 0)$, $(-11, 5, 5)$, and $(-10, 3.5, 5)$. A point $(-7, 1.5, 5)$ is also marked. Lines connect the origin to the vertices, and other lines connect vertices to each other.</p>	<p>Two yellow dice with black pips, one showing a 1 and the other showing a 2.</p>
<p>A 3D coordinate system with x, y, and z axes. A cube is drawn with vertices at $(-11, 0, 0)$, $(-6, 5, 0)$, $(-11, 5, 5)$, and $(-10, 3.5, 5)$. A point $(-7, 1.5, 5)$ is also marked. Lines connect the origin to the vertices, and other lines connect vertices to each other.</p>	<p>A photograph of a gallery wall with several black geometric shapes (squares, triangles) and letters (A, Z, H) mounted on it. The wall is lit by spotlights.</p> <p>4.8</p>
<p>A photograph of a building facade with a grid pattern of blue and white squares. A cyan square is highlighted in the grid. The building has "NORTH W" visible on it.</p> <p>4.8</p>	<p>A photograph of a gallery wall with a large black and white geometric pattern. The pattern consists of various shapes and lines. The wall is lit by spotlights.</p> <p>4.8</p>

Tafel 11

AG 1.0 Anmerkungen zur Analytischen Geometrie in der Schule

Was ist Analytische Geometrie?

In den Beispielen von Kapitel AG 1.2 und AG 1.3 erkennt man wesentliche Elemente, die in der Analytischen Geometrie eine Rolle spielen. So sieht man z.B. in dem Schülerinnenbild (AG 1.3, Bild a) allerlei **geometrische Objekte** wie Kreise, Ellipsen, Parabeln, Strecken. Diese wurden aber nicht nur in ihren geometrischen Eigenschaften erfasst, sondern auch von einer Schülerin zu einem phantasievollen und ansehnlichen Bild kombiniert – durch Mehrfachverwendung, Farbgestaltung usw.. Benötigt wurden dazu **algebraische Terme**, siehe dort f1 bis f10. Das gespiegelte Bild b entsteht durch eine lineare **Abbildung** mittels der Zuordnungen

$f_x \rightarrow f_x$ (die x-Werte bleiben fest),

$f_y \rightarrow -f_y$ (die y-Werte ändern ihr Vorzeichen).

Lineare Abbildungen können auch mit Matrizen erfasst werden, wie man an dem folgenden Beispiel der Abbildung des Punktes P(3,4) bei Spiegelung an der x-Achse sieht.

$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} * \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ -4 \end{pmatrix}$. Es ergibt sich der Bildpunkt P'(3,-4).

Geometrische Objekte (viel umfassender als sonst in Kursen zur Analytischen Geometrie!)	Erfassung durch Terme (viel umfassender als sonst in Kursen zur Analytischen Geometrie!)	Abbildungen, erfassbar durch Matrizen und Matrizenmultiplikationen
Im \mathbb{R}^2 Punkte, Strecken, Geraden, Parabeln, Kreise, Ellipsen, Sinuskurven usw.	z.B. Punkt P(3,4) Kreis K $x(t)=\cos(t)$, $y(t)=\sin(t)$ Sinuskurve $f(x) = \sin(x)$ usw.	z.B. Spiegelung an der x-Achse $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$, denn $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} * \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ -4 \end{pmatrix}$
Im \mathbb{R}^3 Punkte, Strecken, Geraden, Ebenen, Kugeln, Ellipsoide, Zylinder, Kegel, Raumkurven, Schrägbilder usw.	z.B. Punkt Q(1,2,3) Ebene E $r(t,s) = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} + t * \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 5 \end{pmatrix} + s * \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$	z.B. mit der Matrix $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, Projektion auf die y,z-Ebene

Bild 2

Das vorliegende Buch ist für Lehrerinnen und Lehrer (aber auch Lehrplanmachern) gedacht, die sich nicht dem Lehrplanjoch von Punkten, Geraden, Ebenen und ihren diversen Lagemöglichkeiten unterwerfen, sondern ihren Schülerinnen und Schülern vielseitige Objekte und mathematische Methoden erlauben und damit Spaß an der Mathematik vermitteln wollen. Die Aneignung von Kenntnissen erfolgt mit spannenden Themen weit erfolgreicher als an den traditionellen Themen der Analytischen Geometrie.

Der in Kapitel AG-1.2 eingeleitete Weg in die Analytische Geometrie verlässt konsequent die unzeitgemäße dominierende Ausrichtung des Kurses auf Punkte, Geraden, Ebenen und ihre Inzidenzeigenschaften. Diese Ansätze kommen hier zwar auch vor, spielen aber eine völlig untergeordnete Rolle.

Die Materialien sind hier gekennzeichnet durch

- Einbeziehung des Matrizenkalküls,
- Nutzung anderer Koordinatensysteme (Parameterdarstellung $x(t)$, $y(t)$)
- vielseitige Computernutzung,
- **Computergrafik mit Verwendung von**
 - **Abbildungsgeometrie mit Matrizen**
 - **Bausteinen beim geometrischen Modellieren, u.a. im Programm POVRAY**
- Berücksichtigung vielfältiger Objekte des \mathbb{R}^2 und \mathbb{R}^3
- Mehrfachverwendung von Objekten in „Objekt-Landschaften“
- Häufige Verwendung offener Fragestellungen
- Nutzung von Aufgabenvariationen
- Wechselwirkungen zwischen Analytischer Geometrie und Analysis

Kapitel AG 1.2 stellt gleich umfangreiche komplexe Abbildungen „auf den Kopf“. Nicht das einzelne Objekt dominiert, vielmehr wird eine ganze „Objekt-Family“ betrachtet – **ein ganzheitlicher Ansatz**, der später an vielen Stellen vertieft wird .

Kapitel AG 1.3 setzt diese Ansätze mit der Spiegelung von Landschaften fort. Die Modellierung einer Landschaft durch eine Schülerin dient hier als Ausgangspunkt der Betrachtungen. Kapitel AG 1.4 geht von der Software TI-Nspire-CAS aus. Es werden zunächst gleich mehrere Objekte geometrisch erzeugt (Kreise, Punkte, Dreiecke), dann werden durch Einbettung in das Koordinatensystem analytisch Gleichungen aus dem CAS heraus aufgerufen und die Objekte auf verschiedene Arten gespiegelt. Damit ergibt sich gleich zu Beginn der Analytischen Geometrie ein Feld offener Problemstellungen, die in verschiedenen Unterrichtsformen bearbeitet werden können.

Ab AG 1.5 werden die wichtigsten Abbildungen unter Nutzung des Matrizenkalküls entwickelt und wieder mit dem Prinzip der Mehrfachanwendung zu komplexen Bildern zusammengeführt.

Kapitel AG 2 widmet sich Schrägbildern und deren Erfassung und Bearbeitung durch Matrizen. In Kapitel AG 3 geht es um Abbildungsfolgen. Nicht das einzelne Objekt steht im Vordergrund, sondern Objekt-Landschaften und ihre Erzeugung mittels passender Terme und Laufbereiche. Kapitel AG 4 bietet diverse Fragestellungen in Projekten zur Analytischen Geometrie (mit Bezügen zu anderen mathematischen Gebieten) an.

Kapitel AG 5 stellt CAS-Hilfsmittel für die Schul-Standardkurse zur Analytischen Geometrie bereit. Die Nutzung dieser Hilfsmittel schafft Raum für Themen, wie sie in den Kapiteln 1-4 dargestellt werden.

AG 1.1 Parameterdarstellungen, Bausteine für wichtige Objekte

AG 1.1.1 Unerlässlich für moderne Analytische Geometrie-Kurse

Leider benutzt die Mathematik der Sekundarstufe 1 bei der Visualisierung von Termen fast überall ausschließlich das x,y-Koordinatensystem, siehe z.B. die Bilder b1, c1. Neuere Schulbücher fangen an, auch andere Darstellungsarten von Funktionstermen einzubeziehen. In der Regel aber tauchen Geraden (erst recht andere Objekte) in Parameterdarstellung erstmals in der Analytischen Geometrie auf, siehe Bilder b2, c2..

In einem modernen Analytische Geometrie-Unterricht mit Computereinsatz – wie hier propagiert - erweitern jedoch gerade Parameterdarstellungen das Feld betrachteter Objekte und ihrer Mathematik ungemein. **Deshalb werden Parameterdarstellungen in diesem Buch sehr häufig benutzt.**

Ein Vergleich zwischen zwei Visualisierungsarten von Gerade, Parabel, Ellipse

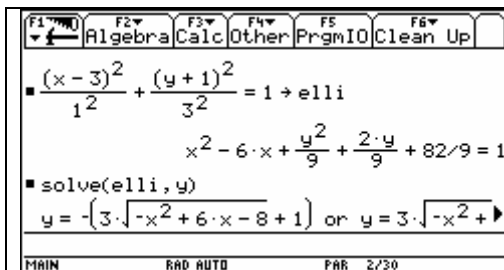


Bild a

Ein Vergleich zwischen zwei Visualisierungsarten von Gerade, Parabel, Ellipse

Gegeben sind die Gerade mit $y = 0.5x + 2$, die Parabel mit $y = 0.5 \cdot (x - 2)^2$ und die Ellipse mit

$$\frac{(x - 3)^2}{1^2} + \frac{(y + 1)^2}{3^2} = 1. \text{ Zeichnen Sie die drei Graphen}$$

(hier mit dem Voyage 200). Schwierigkeiten macht die Gleichung der Ellipse, die erst nach y umgeformt werden muss und nun aus zwei Teilen besteht.

y abhängig von x

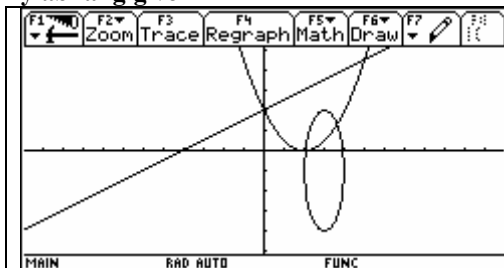


Bild b1, mit Voyage 200

x(t), y(t), Terme abhängig von t, Parameterdarstellung

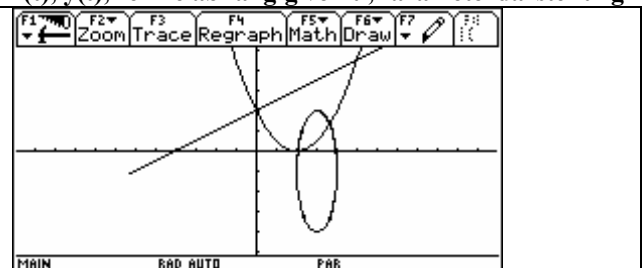


Bild b2, mit Voyage, aber Parameterdarstellung x(t),y(t)

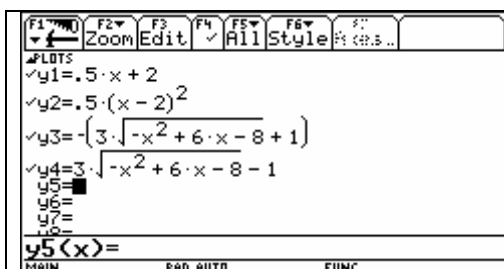


Bild c1 (zu Bild b1)

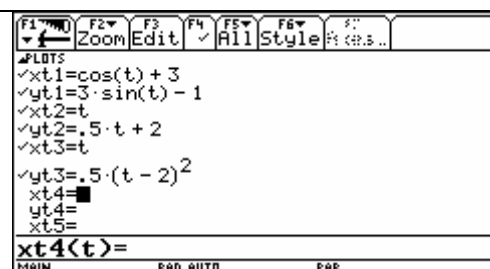
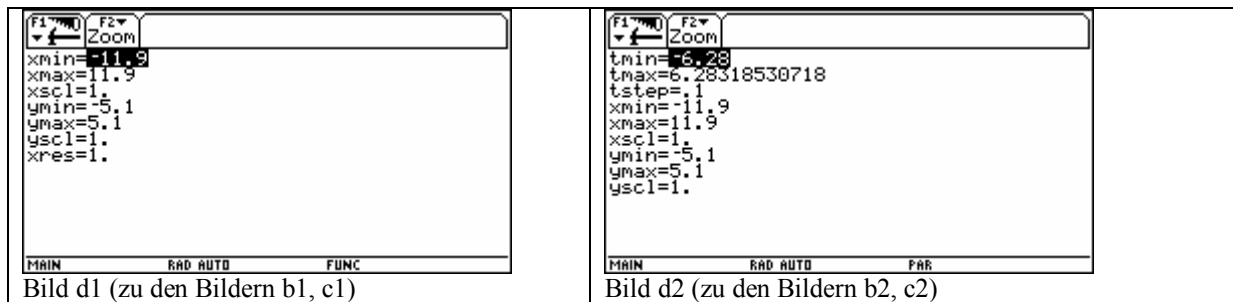
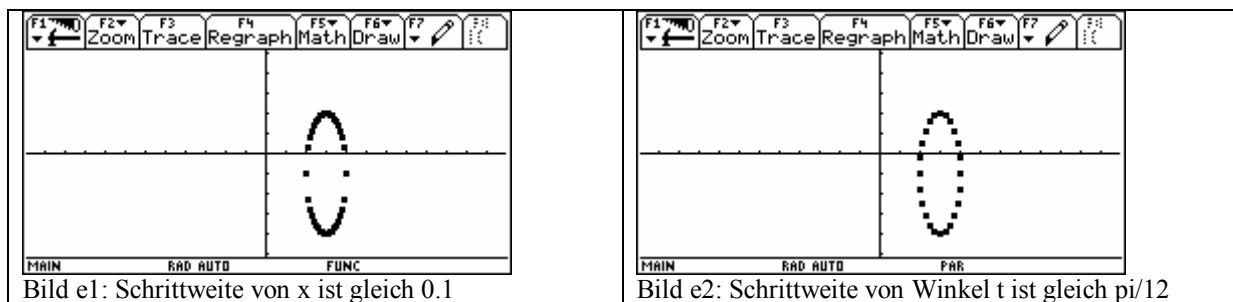


Bild c2 (zu Bild b2)



Beim Vergleich beachten Sie bitte die verwendeten Terme in Bild c1 und c2 und die Computerfenster-Einstellungen. Insbesondere ist in Bild d1 wichtig, dass $x_{res}=1$ gesetzt wurde. Besonders unhandlich sind in der x,y -Darstellung die Wurzel Darstellungen für die Ellipse, die hier auch noch erst aus $\frac{(x-3)^2}{1^2} + \frac{(y+1)^2}{3^2} = 1$ berechnet werden müssen. Zudem dauert das Zeichnen recht lange und die Ellipsenteile werden getrennt gezeichnet.

In der Parameterdarstellung $x(t) = \cos(t)-3$, $y(t) = 3*\sin(t)-1$ durchläuft t Winkelwerte vom Mittelpunkt der Ellipse aus im Gegenuhrzeigersinn. Damit ist für eine gleichmäßige Verteilung der Punkte gesorgt und auch für die Zeichnung der Ellipse in einem Zug beginnend mit dem Bogen $t = 0$ bzw. dem Winkel $t = 0^\circ$. Die beiden folgenden Abbildungen zeigen noch einmal den Unterschied bei den entstehenden Ellipsenpunkten.



Darstellungsprobleme gibt es in Bild e1 (x,y -Darstellung) an den Stellen, an denen der Graph eine große Steigung hat. In der Parameterdarstellung mit Bogenmaß oder Winkel t sind diese Probleme nicht vorhanden.

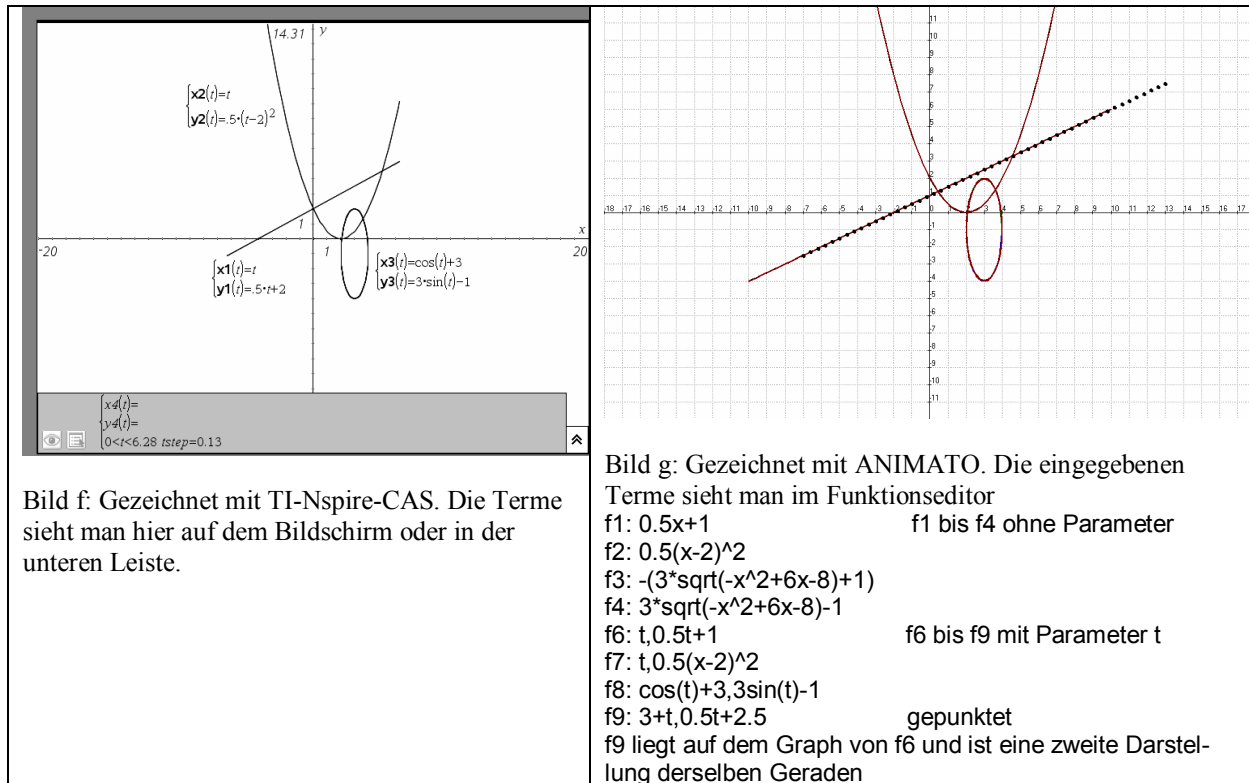
Weitere Erläuterungen zu den obigen Bildern

Umwandlung $y=0.5x+1$ in Parameterdarstellung.

a) t , $0.5t+1$ oder als Vektorgleichung

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} t \\ 0.5t+1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} + t * \begin{pmatrix} 1 \\ 0.5 \end{pmatrix} \text{ mit } (0,1) \text{ als Punkt auf der Geraden. Aber auch}$$

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 2.5 \end{pmatrix} + t * \begin{pmatrix} 1 \\ 0.5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3+t \\ 2.5+0.5t \end{pmatrix} \text{ stellt dieselbe Geraden dar (siehe Bild g, gepunktet) mit } (3, 3.5) \text{ als Punkt auf Geraden.}$$



Man kann festhalten

- Man kann alle in der Schule gebräuchlichen Funktionen / Graphen der Form $y = f(x)$ auch in der Form $x(t) = t$ und $y(t) = f(t)$ und damit in Parameterdarstellung in Abhängigkeit von t betrachten.

- Darüber hinaus erschließen sich weitere Relationen, die nur in Parameterform erzeugt werden können.

Also: Man beginne so früh wie möglich (das kann schon ab Klasse 7/8 sein) mit Parameterdarstellungen!

In neueren Schulbüchern, z.B. „Neue Wege“ (Schroedel-Verlag, Ausgabe Berlin 2007, Band 8), wird gezeigt, wie man mit Parameterdarstellungen von Geraden schon in der achten Klasse beginnen kann. In den Folgebänden wird dann auch dargestellt, wie man das Konzept weiter ausbauen kann zugunsten einer vielfältigen Graphenwelt. Eine Andeutung der daraus resultierenden graphischen Möglichkeiten finden Sie in der folgenden Abbildung.

Geraden und Ebenen in Vektordarstellung bzw. Matrizendarstellung, siehe auch Kapitel 5.1.2

Die Geraden in der Analytischen Geometrie der Schule erscheinen u.a. in der Punktrichtungsform

$$\vec{r} = \vec{r}_1 + t \cdot \vec{u} \quad \text{bzw.} \quad \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \\ z_1 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} u_x \\ u_y \\ u_z \end{pmatrix}. \quad \text{In dieser – in Schulbüchern häufig praktizierten Schreibweise-}$$

wird nicht deutlich, dass hier bereits die Abhängigkeit von einem Parameter vorliegt. Besser sollte man schreiben:

$$\vec{r}(t) = \vec{r}_1 + t \cdot \vec{u} \quad \text{bzw.} \quad \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \\ z(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \\ z_1 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} u_x \\ u_y \\ u_z \end{pmatrix}. \quad \text{Dann kann man auch in Anlehnung an die sonst}$$

übliche Funktionsschreibweise (mit z.B. $f(7)$) auch schreiben $\vec{r}(3)$, was dann den Vektor $\vec{r}(3) = \vec{r}_1 + 3 \cdot \vec{u}$ ergibt. Für die vektorielle Ebenengleichung gilt Entsprechendes mit zwei Parametern.

In einem CAS sieht das dann so aus:

$r(t) := \begin{pmatrix} x1 \\ y1 \\ z1 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} ux \\ uy \\ uz \end{pmatrix}$	Fertig
$r(3)$	$\begin{pmatrix} 3 \cdot ux + x1 \\ 3 \cdot uy + y1 \\ 3 \cdot uz + z1 \end{pmatrix}$
$s(t) := \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} -5 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$	Fertig
$s(4) - s(2)$	$\begin{pmatrix} -10 \\ 4 \\ 6 \end{pmatrix}$
<input checked="" type="radio"/> Ein Richtungsvektor auf der Geraden	Fertig
$s(0)$	$\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix}$
$5 \cdot s(t)$	$\begin{pmatrix} -5 \cdot (5 \cdot t - 1) \\ 10 \cdot (t + 1) \\ 5 \cdot (3 \cdot t + 4) \end{pmatrix}$

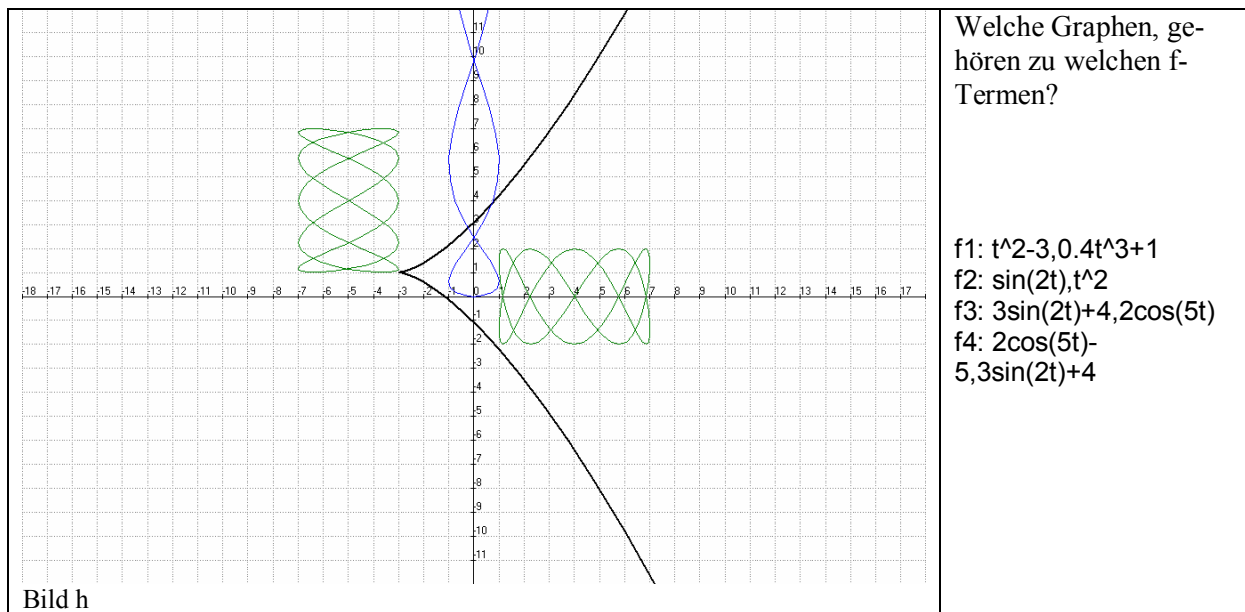
Damit schließt sich die Schreibweise von Objekten der Analytischen Geometrie an die aus der Sekundarstufe 1 bekannte Funktionsschreibweise an. – Also gibt es diesbezüglich keine Schwierigkeiten.

Für Ebenen erkennt man die Vorteile des Mitführens von Parametern an den Beispielen der folgenden Bilder.

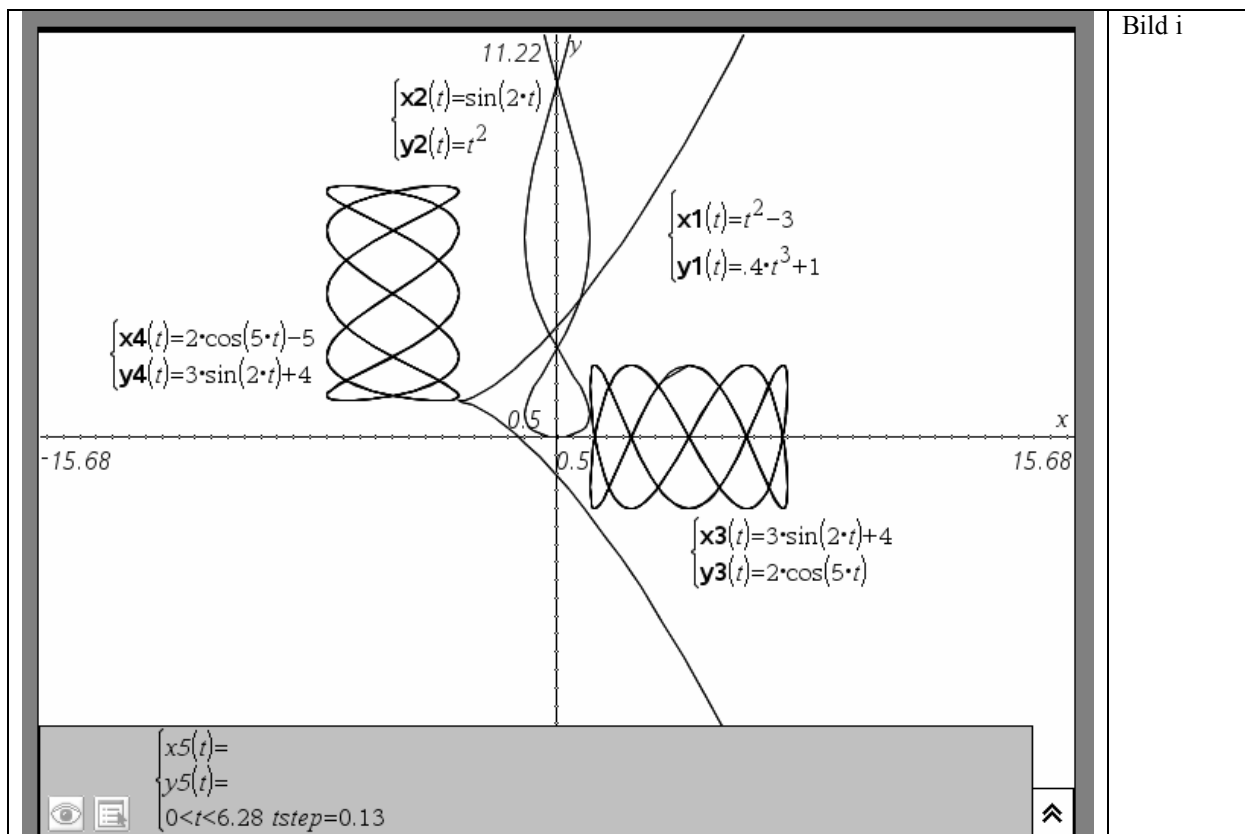
$\begin{bmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix} + r \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix} + s \cdot \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} \rightarrow \text{ebene}(r, s)$	Done
$\text{ebene}(0, 1)$	$\begin{pmatrix} 5 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix}$
$\text{ebene}(r, r)$	$\begin{pmatrix} r + 5 \\ 3 - r \\ r + 2 \end{pmatrix}$
$\text{ebene}(r, r)$	$\begin{pmatrix} 3 \cdot r + 3 \\ 2 \\ 2 \cdot r + 1 \end{pmatrix}$

In Kapitel 5 wird gezeigt, wie man die Standardobjekte mit einem CAS unter Verwendung der Bausteintechnik (Modulkompetenz!) bearbeiten kann.

Beispiel für die Erweiterung der Graphenwelt in der Analytischen Geometrie



Bei der Beantwortung der Frage hilft das folgende TI-Nspire-Bild.



An diesem Beispiel zeigt sich schon, wie sich die Welt der Graphen mittels Parameterdarstellung vergrößert.

AG 1.1.2 Einheitskreis - Einführungsbeispiel für Parameterdarstellungen

In diesem Abschnitt wird ein bisher wenig beachtetes Feld für den Trigonometrie-Unterricht in Klasse 10 erschlossen. Es geht um die Parameterdarstellung von Kreisen. Auf Grund der Beziehungen $x(t) = \cos(t)$, $y(t) = \sin(t)$ für den Einheitskreis ist der Bezug zur Trigonometrie sehr einsichtig. Die Begründung dieser Gleichungen folgt sofort aus dem gängigen Unterricht, wenn man nur herausstellt, dass sich jeder Punkt auf dem Einheitskreises in der Form $P(\cos(t), \sin(t))$ darstellen lässt, siehe Abbildung 1.

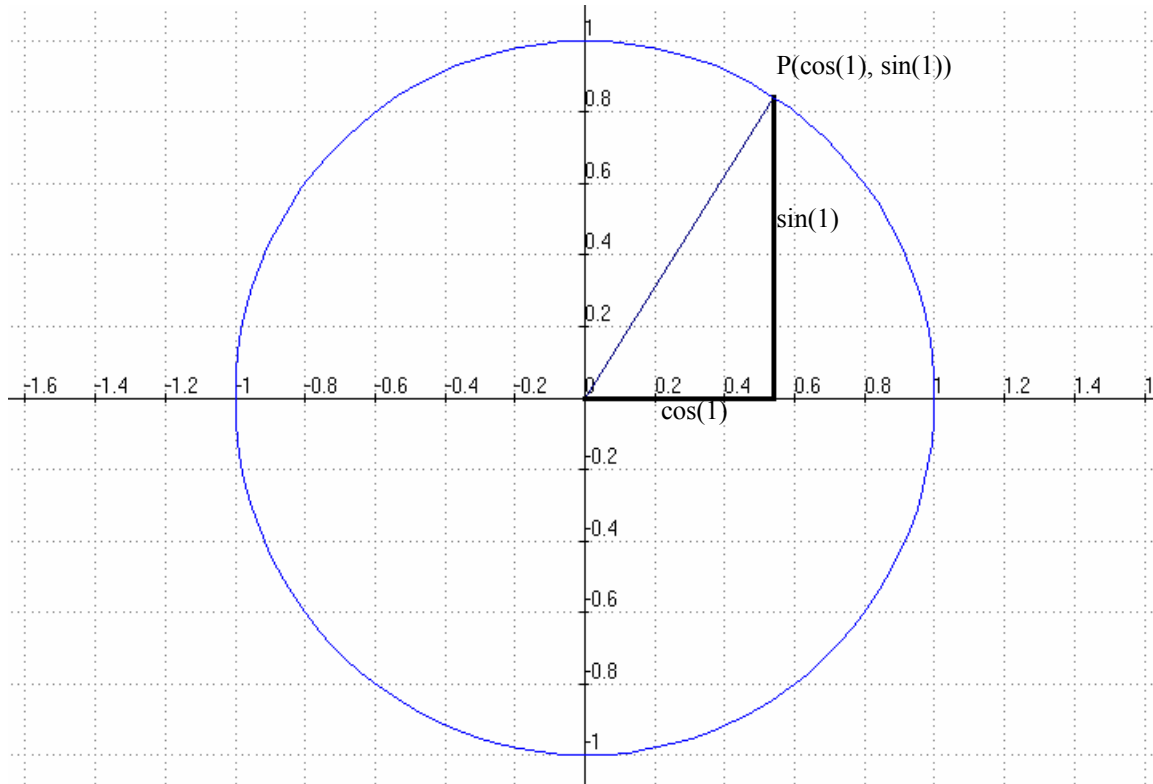


Bild 1: Kreis in Parameterdarstellung, gezeichnet mit dem Programm ANIMATO

ANIMATO-Eingaben:

f1: $\cos(t), \sin(t)$	/ Einheitskreis für t aus $[0, 6.28]$
f2: $0,0,\cos(1),\sin(1)$	/ Strecke OP
f3: $\cos(1),0,\cos(1),\sin(1)$	/ Strecke von $(\cos(1), 0)$ zu $((\cos(1), \sin(1)))$
f4: $0,0,\cos(1),0$	/ Strecke von O zum Punkt $((\cos(1), 0)$

Kreise mit dem Mittelpunkt $(0,0)$ und dem Radius r kann man bekanntlich durch $x^2+y^2 = r^2$, bzw. $y = \pm\sqrt{r^2 - x^2}$ definieren. Diese Darstellung ist allerdings für Zeichnungen mit dem Computer nicht besonders geeignet, da die errechneten Kreispunkte recht ungleich auf dem Kreis verteilt sind. Viel besser eignet sich die Parameterdarstellung von Kreisen. Für alle Kreise um $(0,0)$ mit dem Radius r gilt $x(t) = r*\cos(t)$, $y(t) = r*\sin(t)$.

Die Zeichnung mit dem Taschencomputer ergibt sich aus den folgenden Eingaben.

```

F1 F2 F3 F4 F5 F6 F7
  Zoom Edit All Style
▲PLOTS
✓xt1=cos(t)
✓yt1=sin(t)
✓xt2=cos(t)
✓yt2=sin(3·t)
✓xt3=cos(3·t)
✓yt3=sin(t)
xt4=
yt4=
xt5=
yt5=
xt4(t)=
MAIN RAD AUTO PAR
    
```

Die Darstellung des Einheitskreises lädt geradezu zum Experimentieren ein. Zwei Ansätze sieht man unter xt2, yt2 und xt3, yt3.

Bild 2: Voyage 200 / TI-92-Eingaben

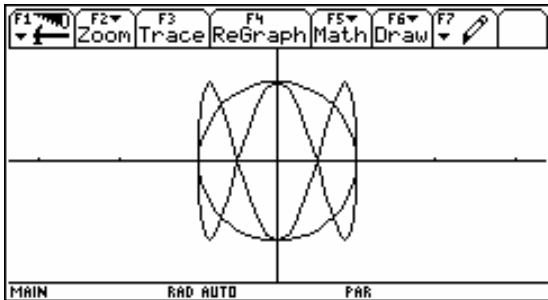


Bild.3: Einheitskreis und $x(t) = \cos(t)$, $y(t) = \sin(3t)$

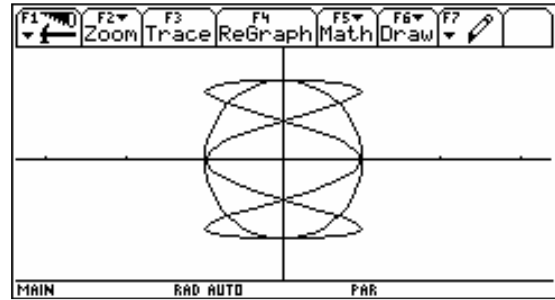


Bild 4: Einheitskreis und $x(t) = \cos(3t)$, $y(t) = \sin(t)$

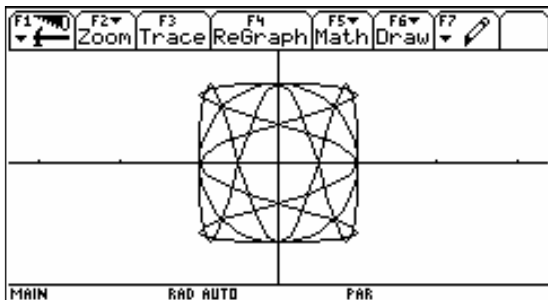


Bild. 5

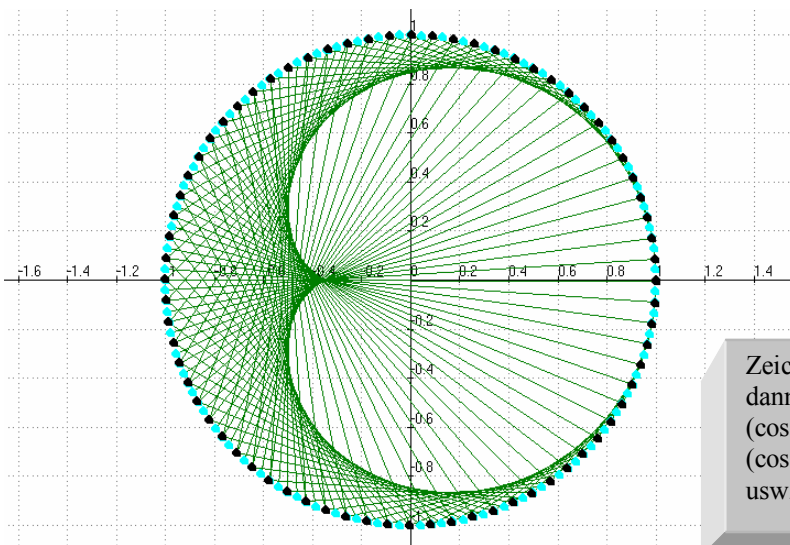
$$x(t) = \cos(t), y(t) = \sin(t)$$

$$x(t) = \cos(t), y(t) = \sin(3t) \quad (*)$$

$$x(t) = \cos(3t), y(t) = \sin(t) \quad (*)$$

Das sind motivierende Abbildungen!

Die Beispiele zeigen, dass die obigen Parameterdarstellungen und ihre Fortsetzungen zu spannenden neuen Fragestellungen führen.



Zeichne einen Einheitskreis. Verbinde dann jeweils die Punkte $(\cos 10^\circ, \sin 10^\circ)$ mit $(\cos 20^\circ, \sin 20^\circ)$ $(\cos 20^\circ, \sin 20^\circ)$ mit $(\cos 40^\circ, \sin 40^\circ)$ usw. immer das Doppelte.

1.1.3 Computergrafik – ein Schwerpunkt für die Analytische Geometrie

Die Computergrafik ist heutzutage unverzichtbarer Bestandteil eines Computersystems. Ihre Anwendung wird sofort sichtbar bei Computerspielen, bei der Flugsimulation, im CAD (computer aided design), in der Computerkunst, in Animationen usw.. Insofern liegt es nahe, Computergrafik zu einem Schwerpunkt in der Analytischen Geometrie zu machen – was leider bislang von den Lehrplanmachern ignoriert wird. In diesem Kapitel sollen einige Ansätze dargestellt werden, Weiteres findet der Leser vor allem in den Kapiteln 4.3 und 4.4.

Wie kann man eine dreidimensionale Szene wie in vorliegendem Tischbild – die Tischebene sind Zylinder - auf einem Computer abspeichern?

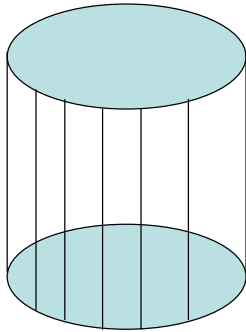
Zugänge

Zugang A – geometrisches Modellieren (Constructive Solid Geometry, CSG)

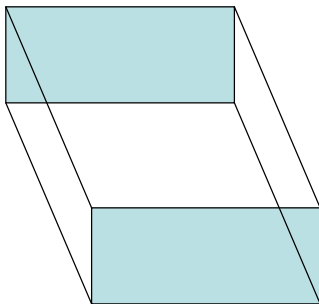
Eine Möglichkeit ist es den Tisch in Bauteile zu zerlegen (beim Kauf eines Bausatzes für einen Tisch ist genau das geschehen). Die folgende Liste ist unvollständig, aber die Probleme werden auch an der genannten Auswahl deutlich.



Will man diese Szene in ein räumliches Koordinatensystem bringen, so müssen die Bauteile mathematisch beschrieben werden. Dazu kann man zum Beispiel kennzeichnende Größen nehmen, wie in dem folgenden Fall vorgeführt.

**zylinder(u, o, r):**

Dabei ist u der Mittelpunkt des unteren Kreises (3 Koordinaten x_u, y_u, z_u), dabei ist o der Mittelpunkt des oberen Kreises (3 Koordinaten x_o, y_o, z_o) und r der Radius der Kreise. - Der Baustein „zylinder“ hat also 3 Parameter.

**quader(u, s1, s2, s3):**

u ist der untere vordere Eckpunkt des Quaders mit den Koordinaten x_u, y_u, z_u
s1, s2, s3 sind die 3 Kantenlängen des Quaders in festgelegter Reihenfolge

In dem Raytracing-Programm POV-Ray – Näheres in Kapitel 4.4 - erfolgt die Darstellung ähnlich der in Zugang A.

```
cylinder{<2,0,5>,<8,14,5>,0.05  
pigment {Magenta}}
```

Die beiden Zylinderpunkte sind (2,0,5) und (8,14,5), der Radius ist $r=0.05$. Es handelt sich also um einen sehr schmalen Zylinder.

Der Tisch setzt sich also aus lauter derartigen Bausteinen zusammen. Diese kann man dann mathematisch mit Mengenoperationen wie Vereinigung, Durchschnitt und Differenz zusammensetzen. Dieses Verfahren nennt sich „**Constructive Solid Geometry**“.

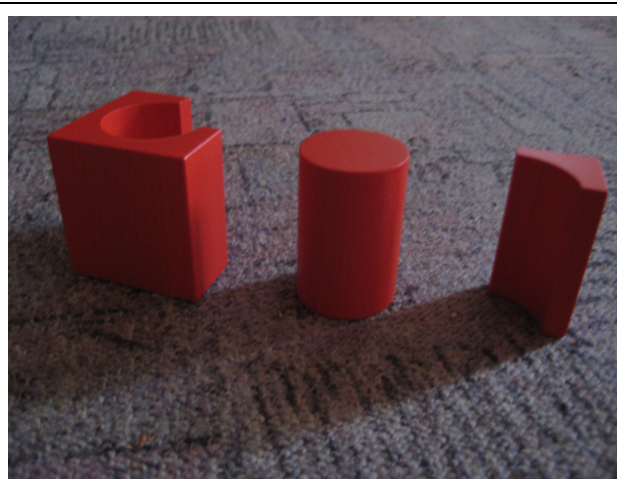
Constructive Solid Geometry

aus Wikipedia, der freien Enzyklopädie - http://de.wikipedia.org/wiki/Constructive_Solid_Geometry,
kopiert am 30.5.2008

Constructive Solid Geometry (CSG) oder Konstruktive Festkörpergeometrie ist eine Technik zum Modellieren von Körpern, die u. a. in der [3D-Computergrafik](#) und bei [CAD-Programmen](#) genutzt wird. Constructive Solid Geometry ermöglicht einem Designer komplexe Oberflächen und Körper zu erzeugen, indem er [boolesche Operatoren](#) benutzt, um Objekte zu kombinieren. Aus der CSG hervorgegangene Körper wirken oft sehr komplex, sind aber in Wirklichkeit nichts anderes als geschickt verknüpfte Objekte.

Die Basisobjekte, aus denen CSG-Körper hervorgehen, nennt man *Primitive* (vgl. [Grafisches Primitiv](#)). Typischerweise handelt es sich dabei um Körper, deren Oberfläche mittels einer relativ einfachen mathematischen Formel beschrieben werden kann, wie z. B. [Würfel](#), [Zylinder](#), [Prismen](#), [Pyramiden](#), [Kugeln](#) oder [Ringe](#). Die Menge der möglichen Primitive wird gewöhnlich von der verwendeten Software begrenzt. Einige Software-Pakete erlauben CSG auf gekrümmten Objekten (prozedurale oder parametrische Oberflächen), während andere nur auf polygonalen Meshes (Dreiecksnetze) arbeiten. Der prozedurale oder parametrische Ansatz erlaubt eine mathematisch exakte Berechnung und Repräsentation der Körper, während Meshes immer nur eine mehr oder weniger ungenaue Annäherung an die Wirklichkeit sind.

Wie bereits erwähnt, wird ein komplexer Körper von Primitiven erzeugt, die durch Operationen verknüpft sind. Gewöhnlich handelt es sich dabei um [boolesche Operationen](#) auf Mengen: [Vereinigung](#) (Union, \cup), [Differenz](#) (Difference, $-$) und [Schnitt](#) (Intersection, \cap).



Bei diesem Spielzeug wird ein Würfel aus drei Bauteilen zusammengesetzt (Vereinigung bilden)

Weiter Wikipedia:

CSG ist unter Designern sehr beliebt, da man mit einer Anzahl relativ einfacher Körper komplexe Geometrien formen kann. Der Designer kann (bei den meisten Programmen) die Geometrie auch im Nachhinein noch ändern, indem er die Position (bzw. Transformation) der einzelnen Objekte oder den booleschen Operator ändert, mit dem die Objekte verbunden sind. Der Designer kann also sein Modell interaktiv und intuitiv, durch Versuch-und-Irrtum, kreieren.

CSG wird aber auch von diversen Programmen "unter der Haube" benutzt, d. h. ohne dass der Benutzer etwas von der Existenz der CSG-Operationen mitbekommt.

Zugang B – Über Gleichungen

Zylinderfläche 1

$$z^2 = (4-x^2), y \text{ beliebig}$$

$$z = \text{SQRT}(4-x^2)$$

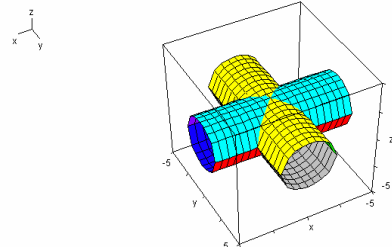
$$z = -\text{SQRT}(4-x^2)$$

Zylinderfläche 2

$$z^2 = (4-y^2), x \text{ beliebig}$$

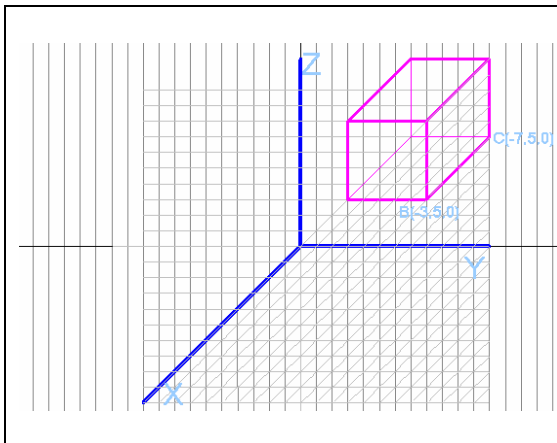
$$z = \text{SQRT}(4-y^2)$$

$$z = -\text{SQRT}(4-y^2)$$



Zwei Zylinder, gezeichnet mit DERIVE.
Die Terme stehen links.

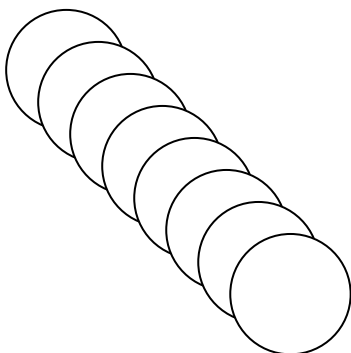
Zugang C: Über Schrägbilder



Über die Darstellung mit Hilfe von Schrägbildern können Sie in Kapitel 2.1 nachlesen.

Zugang D: Mit Abbildungsgeometrie

Die Möglichkeiten der Abbildungsgeometrie werden schon ab Kapitel 1.2 deutlich und dann häufig verfolgt.



Verschieben eines Kreises

Der Kurs beginnt!

AG 1.2 - Bilder auf den Kopf stellen

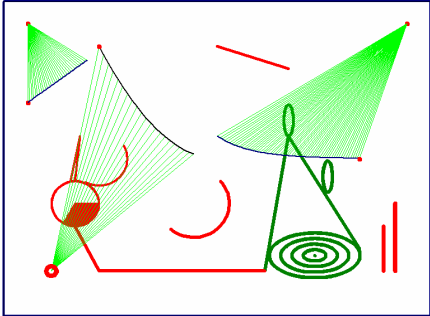
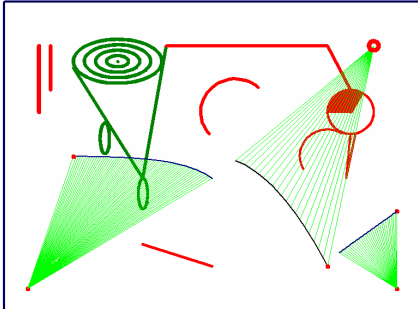
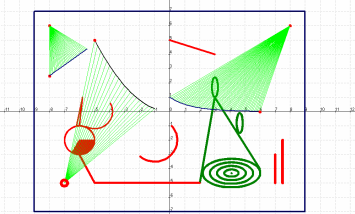
Die Idee: Manche Künstler stellen ihre Bilder gern „auf den Kopf“ und erreichen damit gelegentlich überraschende Eindrücke. – Warum nicht auch der Mathematiker?

Aus einer Ausstellungsankündigung (Bonn 2004):

Auf den Kopf gestellte Motive, also „Bilder, die den Kopf verdrehen“, sind es, die sein Werk seit 1969 unverwechselbar machen. Auf diesen Wiedererkennungswert allein lässt sich Georg Baselitz allerdings nicht reduzieren. Wie facettenreich sich der 1938 in Deutschbaselitz/Sachsen geborene Künstler im Laufe der vergangenen 40 Jahre entwickelt hat, zeigt die umfassende Schau in Bonn.

Baselitz sagt: "Die Bilder hängen fest am Haken, was herunterhängt, zeugt von Schwerkraft. Was drauf ist auf dem Bild, das an der Wand hängt, und wenn es noch dazu verkehrt herum drauf ist, fällt nicht runter, es fällt nur mehr auf und springt mehr ins Auge."

Mit dem Programm ANIMATO kann man das auch leicht für mathematische Objekte bewerkstelligen.

	<p>Aufgabe: Durch welche Abbildung bzw. Abbildungsmatrix lässt sich das Bild links oben in das Bild rechts unten überführen? Beachten Sie dabei Bild a1.</p> <p>Bild a Bildnachweis: Eberhard Lehmann, Berlin 2003, erstellt mit ANIMATO</p>
<p>Ergebnis:</p> <p>Die gesuchte Matrix ist $\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$, denn</p> $\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} * \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -x \\ -y \end{pmatrix}.$ <p>Es handelt sich um eine Drehung um (0,0) um 180°. Ohne Matrizen geschrieben: $x' = -x$ $y' = -y$</p>	 <p>Bild b: Auf den Kopf gestellt</p>
<p>Dabei ist die Lage des Koordinatensystems wie in Bild a1.</p>	 <p>Bild a1, Datei Lehmann-miro.pl2</p>

Welche Art von Abbildung liegt bei den folgenden Bildern vor?

$\text{ref}\left(\text{augment}\left(\begin{matrix} \text{skat} \\ 155 \\ 210 \\ -365 \end{matrix}\right)\right)$	$\begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 & 155 \\ & 2 & 2 & 2 \\ & & & 575 \\ 0 & 1 & -1 & 3 \\ & & & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$	$\text{ref}\left(\text{augment}\left(\begin{matrix} \text{skat,skatspiele} \\ -408 \\ -2280 \\ 2688 \end{matrix}\right)\right)$	$\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & -1032 \\ & 0 & 1 & -1656 \\ & & & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ & & & 520 \\ & & & 3 \\ & & & 575 \\ & & & 3 \\ & & & 0 \\ & & & 0 \\ & & & 0 \end{pmatrix}$
$\text{ref}\left(\text{augment}\left(\begin{matrix} \text{skat} \\ 155 \\ 210 \\ -365 \end{matrix}\right)\right)$	$\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & -1032 \\ & 0 & 1 & -1656 \\ & & & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ & & & 520 \\ & & & 3 \\ & & & 575 \\ & & & 3 \\ & & & 0 \\ & & & 0 \\ & & & 0 \end{pmatrix}$	$\text{ref}\left(\text{augment}\left(\begin{matrix} \text{skat} \\ 155 \\ 210 \\ -365 \end{matrix}\right)\right)$	$\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & -1032 \\ & 0 & 1 & -1656 \\ & & & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ & & & 520 \\ & & & 3 \\ & & & 575 \\ & & & 3 \\ & & & 0 \\ & & & 0 \\ & & & 0 \end{pmatrix}$
$\text{ref}\left(\text{augment}\left(\begin{matrix} \text{skat} \\ -408 \\ -2280 \\ 2688 \end{matrix}\right)\right)$	$\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & -1032 \\ & 0 & 1 & -1656 \\ & & & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ & & & 520 \\ & & & 3 \\ & & & 575 \\ & & & 3 \\ & & & 0 \\ & & & 0 \\ & & & 0 \end{pmatrix}$	$\text{ref}\left(\text{augment}\left(\begin{matrix} \text{skat,skatspiele} \\ -365 \\ 210 \\ 155 \end{matrix}\right)\right)$	$\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & -1032 \\ & 0 & 1 & -1656 \\ & & & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ & & & 520 \\ & & & 3 \\ & & & 575 \\ & & & 3 \\ & & & 0 \\ & & & 0 \\ & & & 0 \end{pmatrix}$
$\text{ref}\left(\text{augment}\left(\text{skat,skatspiele}\right)\right)$	$\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & -1032 & 304 & 200 & 502 & -625 & -558 \\ & 0 & 1 & -1 & -1656 & 410 & 96 & 122 & -880 \\ & & & & & & & & & 808 \\ & & & & & & & & & -808 \\ & & & & & & & & & 0 \\ & & & & & & & & & 0 \end{pmatrix}$	$\text{ref}\left(\text{augment}\left(\text{skat,skatspiele}\right)\right)$	$\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & -1032 & 304 & 200 & 502 & -625 & -558 \\ & 0 & 1 & -1 & -1656 & 410 & 96 & 122 & -880 \\ & & & & & & & & & 808 \\ & & & & & & & & & -808 \\ & & & & & & & & & 0 \\ & & & & & & & & & 0 \end{pmatrix}$

Bild c mit dem Programm Paint-Shop gewendet zu Bild d

Bild d

Aufgabe: Finden Sie eine Abbildungsmatrix von Bild c zu Bild d



Bild e



Bild f

Aufgabe: Finden Sie eine Abbildungsmatrix von Bild e nach Bild f und umgekehrt!

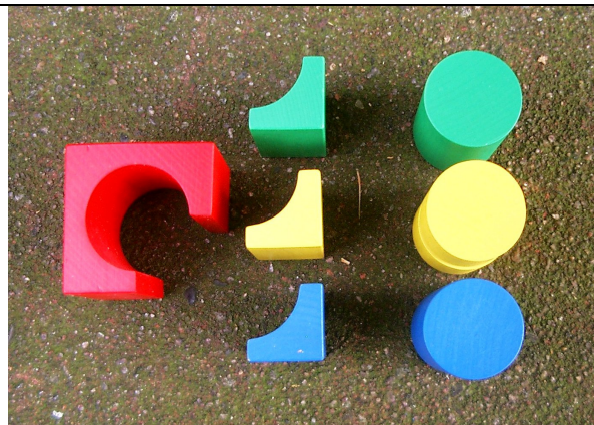


Bild g

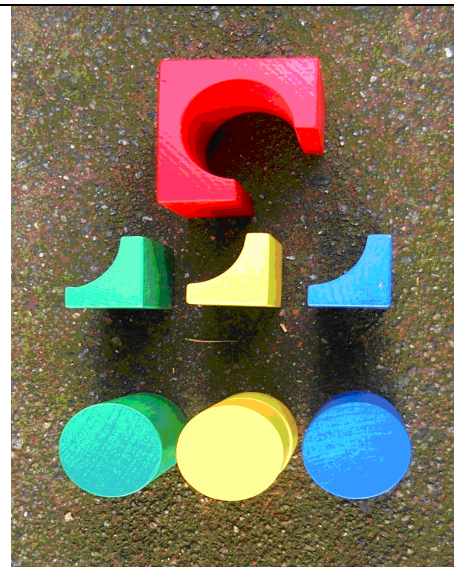


Bild h

Aufgabe: Finden Sie eine Abbildungsmatrix von Bild g nach Bild h und umgekehrt!

AG 1.3 - Spiegeln einer Landschaft

In einem Kurs „Mathematik und Kunst mit mathematischen Funktionen“ hat eine Schülerin aus Klasse 12 das farbige Bild a erstellt (Programm ANIMATO). Sie schrieb dazu

Das Bild LAND1 stellt eine Landschaft bei Nacht dar, welches durch den relativ dunklen Hintergrund bewirkt werden soll. Zusätzlich werden zwei Monde dargestellt, auch die pinken Wolken sollen darauf hinweisen, daß wir uns auf einem Planeten befinden, der unserem von der Atmosphäre ähnlich ist, jedoch zwei Monde als Trabanten besitzt.

f 1: Wiese (grün);
f 2: großer Mond (weiß);
f 3: Berg (dunkelgrau);

f 4,f 5,f 6: Wolken (pink);
f 7: kleiner Mond (weiß)

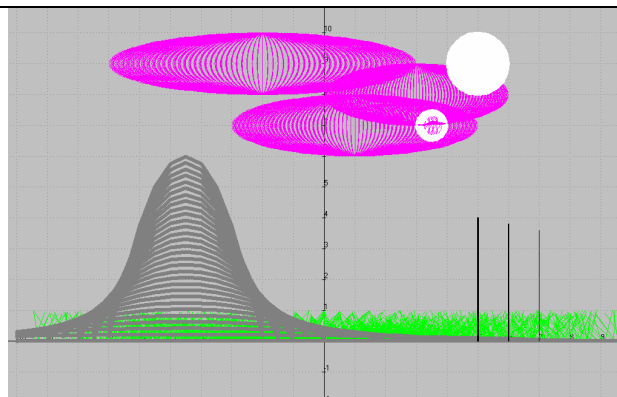


Bild a

Die Terme für Bild 5.2a

f1: rand*x,rand,rand*x+u,0 // Wiese, Zufallspunkte
f2: $u*\cos(t)+5,u*\sin(t)+9$ // ausgefüllter Kreis
f3: $\{-(x*u+4.5*u)^2+6*u<0; \text{undef:}$
 $-(x*u+4.5*u)^2+6*u\}$ // der Berg, Parabeln
f4: $u*3*\cos(t)+3,\sin(t)+8$ // Wolke
f5: $u*4*\cos(t)+1,\sin(t)+7$ // Wolke
f6: $u*5*\cos(t)-2,\sin(t)+9$ // Wolke
f7: $0.5*u*\cos(t)+3.5,0.5*u*\sin(t)+7$ // Kreis
f8: 5,0,5,4 // Mast, Strecke
f9: 6,0,6,3.8 // Mast, Strecke
f10: 7,0,7,3.6 // Mast, Strecke

u aus dem Intervall [-1, 1], Schrittweite 0.03

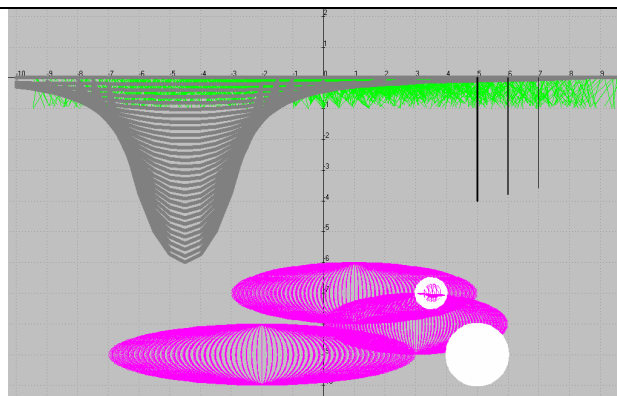


Bild b

Hier wurde die gesamte Abbildung an der x-Achse gespiegelt. Das geschieht, indem alle Terme gleichzeitig der Transformation (Abbildung)

$f_x \rightarrow f_x, f_y \rightarrow -f_y$ unterworfen wurden
(f_x bedeutet: alle ersten Terme einer Zeile f
 f_y bedeutet: alle zweiten Terme der Zeile f).
Das ist eine Spiegelung an der x-Achse.

Zum Beispiel wird damit aus der Strecke
f8: 5,0, 5,4
die Bildstrecke
f8': 5,-0, 5,-4

Aus der Sekundarstufe 1 kennt man das Spiegeln einzelner Objekte an der x-Achse. Hier wird gleich eine ganze „Family“ von Objekten, die zusammen das Bild ausmachen, gespiegelt. In Matrixschreibweise (vergleiche oben) gilt hier

Die gesuchte Matrix ist $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$, denn $\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} * \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ -y \end{pmatrix}$.

AG 1.4 - Geometrische Objekte mit Matrizen an Achsen spiegeln, ein Einstieg in die Analytische Geometrie mit dem TI-Nspire-CAS

Das hier folgende komplexe Beispiel nutzt spezielle Möglichkeiten des Taschencomputers TI-Nspire bzw. des TI-Nspire-CAS für den PC. Wir finden hier Optionen zum schnellen Zeichnen geometrischer Objekte, die auch in der Analytischen Geometrie auftreten, u.a. Punkte, Kreise, Dreiecke, Polygone.

Mit dieser Software kann man Objekte auch leicht an Achsen spiegeln und Zusammenhänge zwischen Geometrie und analytischer Erfassung durch Gleichungen herstellen, jedenfalls wenn es sich um Objekte handelt, die das Programm analytisch erfassen kann.

Gegeben ist das folgende Bild:

	<p>Aufgaben</p> <ol style="list-style-type: none"> 1) Beschreibe Bild a. 2) Wie könnte das Bild entstanden sein? 3) Sie können das Bild laden; ergänzen Sie es durch eine Parabel und deren Abbildung. 4) Wie kommt es zu den angegebenen Kreisgleichungen? 5) Durch welche Matrizen kann man die angezeigten Punkte auseinander entstehen lassen? Runden Sie vorher die Punktkoordinaten auf zwei Nachkommastellen. <p>Zusammenstellung der Matrizen: ...</p>
<p>Bild a: Von der Beschreibung und Interpretation zur eigenständigen Arbeit bis hin zu speziellen Abbildungsmatrizen.</p>	

Ein Vorteil dieser Bildinterpretation liegt darin, dass gleich mehrere Objekte abgebildet werden, so dass die Schüler auf Grund der offenen Fragestellung mit unterschiedlichen Ansätzen und auch in Gruppen arbeiten können. Die Angabe eines Teilergebnisses leitet zu den zugehörigen Abbildungsmatrizen über.

Ein Teilergebnis von Aufgabe 4:

$$\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} * \begin{pmatrix} 9.28 \\ 2.12 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -9.28 \\ 2.12 \end{pmatrix}.$$

Hinweise zur Herstellung von Bild a mit dem TI-Nspire CAS

- 1) Man wähle zunächst G&G (mit dem Koordinatensystem)
- 2) Mit *Formen* zeichnet man (z.B.) die Kreise und das Dreieck im 2. Quadranten
- 3) Dann spiegelt man die Objekte an x-Achse und y-Achse mit *Abbildung*, *Achsen Spiegelung*
- 4) Mit *Extras*, *Koord. und Glch* bestimmt man die Terme zu den Objekten (siehe Bild a)

Durch Ziehen an Objekten des obigen Bildes ergeben sich diverse „Forschungsaufgaben“.

AG 1.5 Die Matrix $A(2,2) = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ - Computergrafik –

die Verwendung von (2,2)-Abbildungsmatrizen in der Analytischen Geometrie

Nach den obigen Beispielen mit dem Aufstellen der Abbildungsmatrizen bzw. Abbildungsgleichungen ist es an der Zeit, häufiger verwendete (2,2)-Abbildungsmatrizen zusammenzustellen, um sie ab jetzt immer verfügbar zu haben.

Erfahrungsgemäß hat Computergrafik einen hohen Motivationswert für die Schüler. Bei vielen Anwendungen sieht der Schüler graphische Abbildungen, Bilder entstehen, werden überlagert von anderen, Animationen diverser Art führen Schüler durch Spielprogramme, usw.

Damit entstehen auch für die Analytische Geometrie neue Möglichkeiten, eben durch Computergrafik und insbesondere durch die Werkzeuge der Abbildungsgeometrie. Wie fast jedes Buch zur Computergrafik zeigt, ist die Matrizenrechnung für dieses Gebiet ein wichtiges mathematisches Hilfsmittel. Damit wird eine Brücke geschlagen zur Matrizenrechnung in der linearen Algebra und damit verbunden zu vielfältigen außergeometrischen Anwendungen. Im Zweidimensionalen ist es die oben genannte Matrix $A(2,2)$ mit ihren vier Parametern a, b, c, d , die eine Fülle von Experimentiermöglichkeiten zulassen.

Was hat eine Unterrichtsreihe "Abbildungsgeometrie im R^2 (R^3) mit Matrizen" für Vorteile im Rahmen eines Analytische Geometrie- Kurses?

- Abwechslungsreiche Arbeitsmöglichkeiten mit Grundelementen der Analytischen Geometrie (weg von den vielen sich wiederholenden und einseitigen „Hieb- und Stichaufgaben“)
- Geometrische und rechnerische Betrachtungen befruchten sich gegenseitig
- Kennenlernen von Grundelementen der Computergrafik, auch mehrfache Abbildungen sind möglich
- Abbildungsvorgänge können animiert werden – Animation ist ein auch mathematisch sehr interessantes Thema, weil hier ein durchdachter Entwurf und dessen Realisierung wichtig sind und damit diverse Kompetenzen entwickelt werden.
- Vorbereitung auf andere Anwendungen von Matrizen
- Wiederholung diverser Inhalte der Sekundarstufe 1

Gut geeignet zum Entdecken - die Matrix $A(2,2) = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$

Mit $\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = A * \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ und $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$, bzw. $(x' \ y') = (x \ y) * A^T$, bzw.

$$x' = a*x + b*y$$

$$y' = c*x + d*y$$

Für die Taschencomputer TI-92, Voyage 200 oder das TI-Nspire-CAS kann man zum Beispiel die Abbildungsmatrix A als Baustein so definieren :

Define linabb(a,b,c,d) = [[a,b] [c,d]] .

Dieser Baustein erspart dem Benutzer die sonst nicht so handliche Eingabe der Matrixelemente.

Nachdem an einem Beispiel einmal erkannt ist, dass A auf eine Ausgangsfigur verändernd wirkt, bietet sich ein weites Experimentierfeld an, indem für die Variablen a, b, c, d diverse Werte eingesetzt werden.

Das kann durchaus mit Prinzip erfolgen, denn natürlich wird man sich zunächst den bekannten Abbildungen wie Spiegelung an der Geraden $y = x$, an der x -Achse, y -Achse oder Drehung um 90° , Punktspiegelung an $(0,0)$ usw. zuwenden – siehe die vorhergehenden Kapitel! Die Schüler merken dabei schnell, dass die Elemente der jeweiligen $(2,2)$ - Matrix in der Regel gewisse Symmetrien aufweisen.

Die besonders interessierenden Abbildungen sind:

- Spiegelung an der x -Achse, bzw. der y -Achse
- Spiegelung an den Geraden $y = x$ bzw. $y = -x$
- Punktspiegelung an $(0,0)$;
- Drehung um 90°
- Zentrische Streckung
- Skalierung: Streckung in x -Richtung und y -Richtung
- Spiegelung an einer Geraden $y = m \cdot x + n$
- Punktspiegelung an $S(x_S, y_S)$
- Scherung in Richtung der x - bzw. y -Achse
- Drehung um $(0,0)$ um einen beliebigen Winkel t
- Drehstreckungen (komplexe Zahlen)

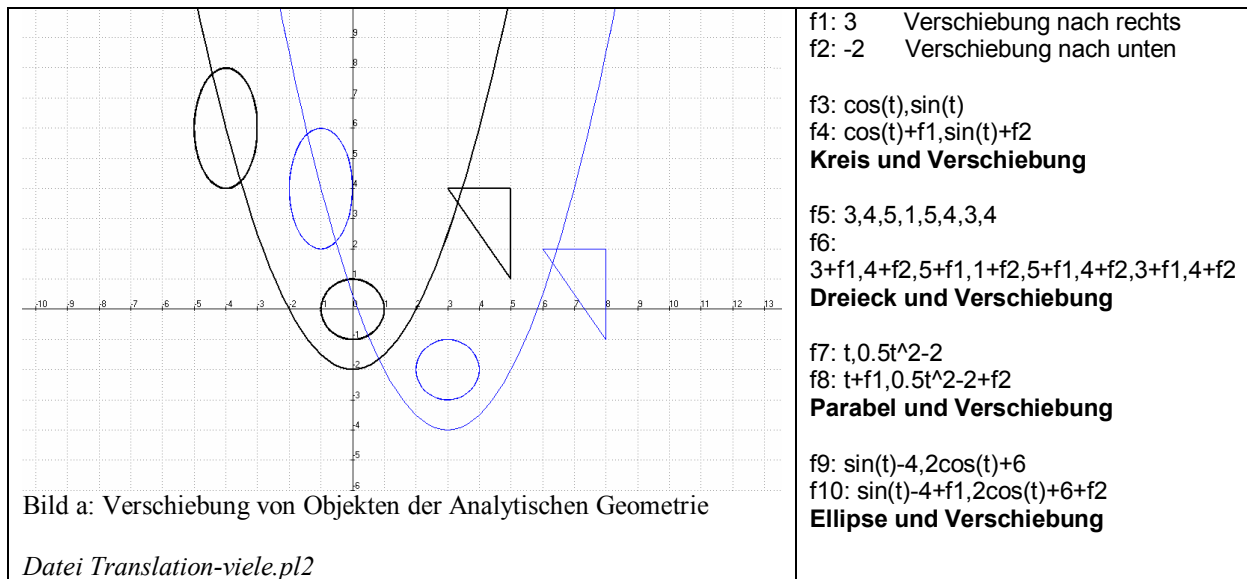
Für die Unterrichtspraxis sollten aber von Anfang an auch Verschiebungen eingearbeitet werden, so dass die Abbildungsgleichung die Form

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} * \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} v_x \\ v_y \end{pmatrix} \text{ erhält.}$$

Daher soll hier zunächst die Abbildung durch Verschiebung (Translation) besprochen werden. Es ist nämlich eine häufig zu verwendende Strategie, Abbildungen zunächst in einer Position durchzuführen bzw. in Form einer Gleichung herzuleiten, in der der Nullpunkt $(0,0)$ des Koordinatensystems der zentrale Punkt ist, um dann anschließend das ganze Bild einer Verschiebung zu unterwerfen. So wird es später auch hier, z.B. bei Drehungen (erst um den Punkt $(0,0)$, dann um den Punkt (a,b)) oder Achsenspiegelungen (erst an einer Geraden durch $(0,0)$, dann an anderen Geraden) praktiziert.

AG 1.5.1 Verschiebung (Translation)

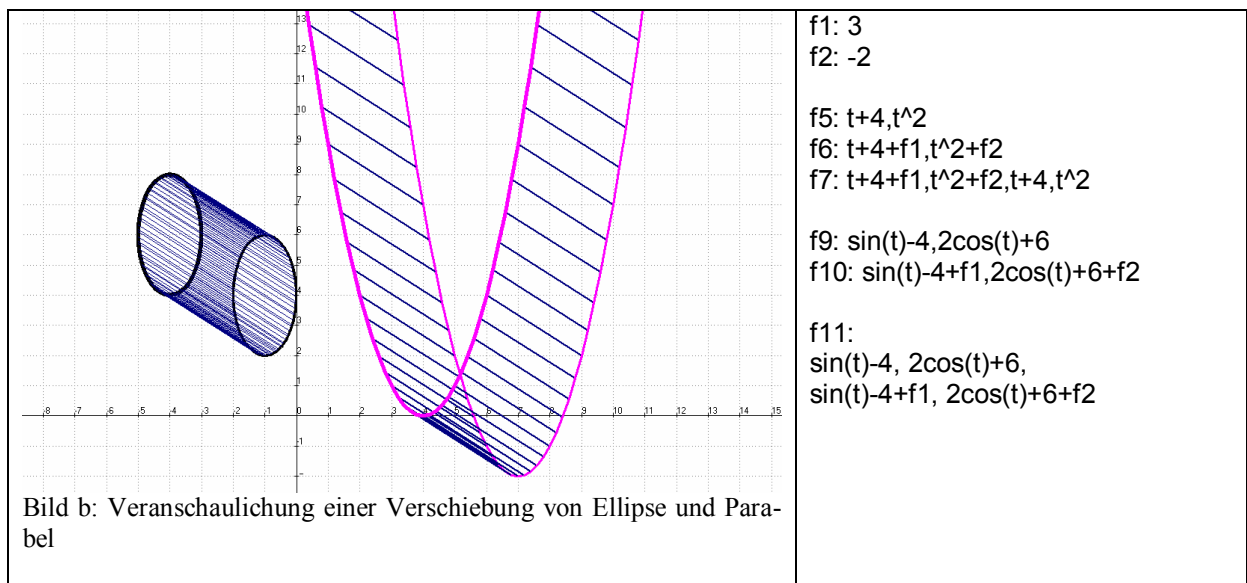
Aufgabe: Erläutern Sie Bild a.



Alle Objekte wurden um den Vektor $\begin{pmatrix} 3 \\ -2 \end{pmatrix}$ verschoben. Beispielsweise gilt für die Parabel

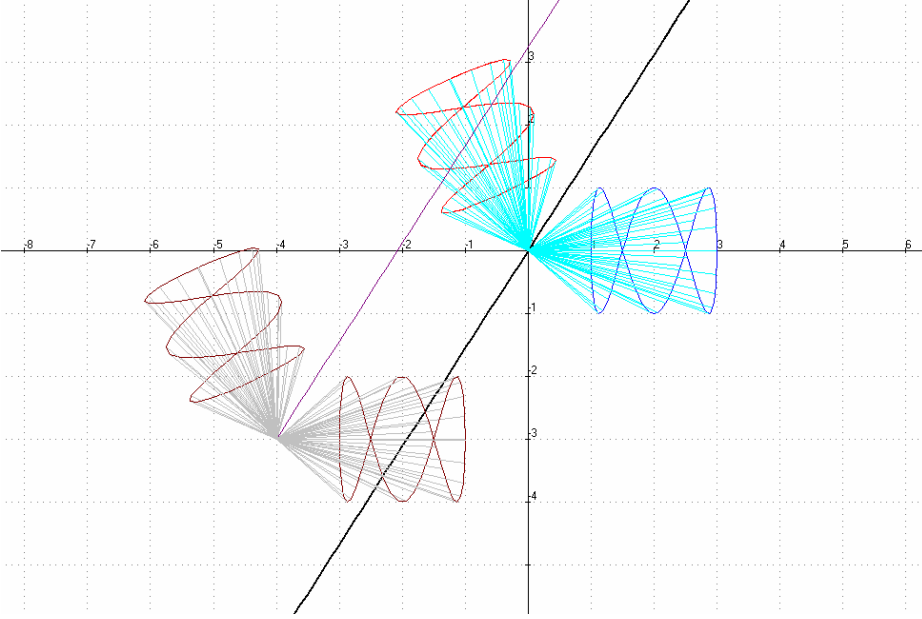
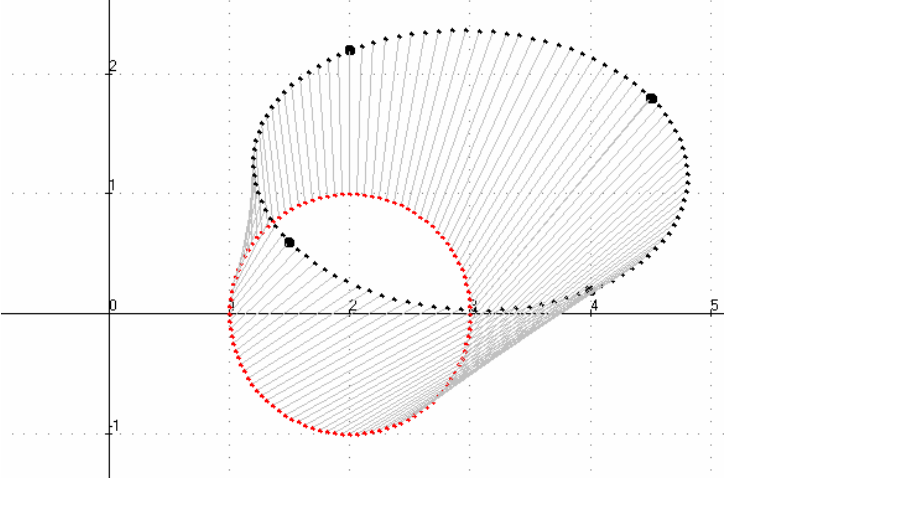
$\begin{pmatrix} t \\ 0.5t^2 - 2 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} t \\ 0.5t^2 - 2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \end{pmatrix}$. Entsprechende Überlegungen gelten für Verschiebungen im dreidimensionalen Raum.

Bild b veranschaulicht die Verschiebung eines Objektes noch genauer, indem die Bilder aller Punkte eingezeichnet werden.



Das Verständnis von Transformationen wird wesentlich gefördert, wenn man veranschaulicht, wie die einzelnen Punkte des Urbilds abgebildet werden. Das kann durch Strecken erfolgen, die alle oder einige Urbildpunkte und Bildpunkte miteinander verbinden. Diese Idee wird bereits hier unterbreitet, um sie dann später immer wieder anwenden zu können. Die beiden folgenden Beispiele werden möglicherweise erst später voll verständlich – Bild a beim Thema „Achsen spieg elung“.

Beispiele:

<p>Achsen spieg elung einer Lissajous-Figur</p> <p>Erst an einer Achse durch (0,0), dann an einer anderen Geraden, Verbindung der Urbildpunkte mit den Bildpunkten durch Strecken</p> <p>Abbildungsmatrix $\begin{pmatrix} \cos(2) & \sin(2) \\ \sin(2) & -\cos(2) \end{pmatrix}$</p> <p>Steigung der Achsen $\tan(1)$</p>	 <p>Bild a <i>Datei Achsen spieg elung mit Matrix.pl2</i></p>
<p>Kreis → Ellipse</p> <p>Abbildung mit der Matrix $\begin{pmatrix} 1.5 & -1 \\ 0.6 & 1 \end{pmatrix}$</p> <p>f1: $\cos(t)+2$ f2: $\sin(t)$</p> <p>f3: $1.5*f1-1*f2, 0.6*f1+1*f2,$ f1, f2</p> <p>f4: f1, f2 f5: $1.5*f1-1*f2, 0.6*f1+1*f2$</p>	 <p>Bild b <i>Datei Abb.-mit-Matrizen-1.pl2</i></p>

AG 1.5.3 – Zentrische Streckung, Skalierung

Zentrische Streckung

Erinnern Sie sich an die Strahlensätze – dann werden die folgenden Abbildungen schnell verständlich! Hier ist das Streckzentrum $S(1,2)$ und die Streckzahl $u=3$.

<p>Aufgabe: Gegeben ist das Dreieck A, B, C mit $A(1,2)$, $B(2,4)$, $C(3,2)$. Streckzentrum sei A, die Streckzahl ist hier $u=3$.</p> <p>Erläutern Sie die Abbildung a.</p> <p>Bild a, Datei <i>Streckung-zentrisch-0.pl2</i></p>	<p>Streckzahl $u=3$ $AB' = 3 \cdot AB$ $AC' = 3 \cdot AC$ $A(1,2)$ Streckzentrum $B(2,4)$, $B'(4,8)$ $C(3,2)$, $C'(7,2)$</p> <p> $B' = A + 3AB$ $B' = (1,2) + 3 \cdot (1,2)$ $B' = (4,8)$ </p>
--	---

Hier ist leicht zu erkennen, dass sich eine Streckzahl u bei zentrischer Streckung (das Streckzentrum Z ist hier der Punkt $A(1,2)$) auf das Urbild folgendermaßen auswirkt:

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_Z \\ y_Z \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} u \cdot x \\ u \cdot y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_Z \\ y_Z \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} u & 0 \\ 0 & u \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}, \quad u \text{ je nach Wahl, oben } u = 3.$$

bzw. ohne Matrixschreibweise:

$$x'(u) = x_Z + u \cdot x$$

$$y'(u) = y_Z + u \cdot y.$$

Als Matrix einer Streckung (Stauchung) u ergibt sich also $S = \begin{pmatrix} u & 0 \\ 0 & u \end{pmatrix}$.

Aufgabe:

Gegeben ist das Dreieck A, B, C mit $A(1,2)$, $B(2,4)$, $C(3,2)$. Streckzentrum sei A , die Streckzahl ist u , hier aus $[-4,4]$, Schrittweite 0.5 Fertigen Sie eine Zeichnung für die entstehenden Bild Dreiecke an.

Lösung:

Überlegungen für die Zeichnung:

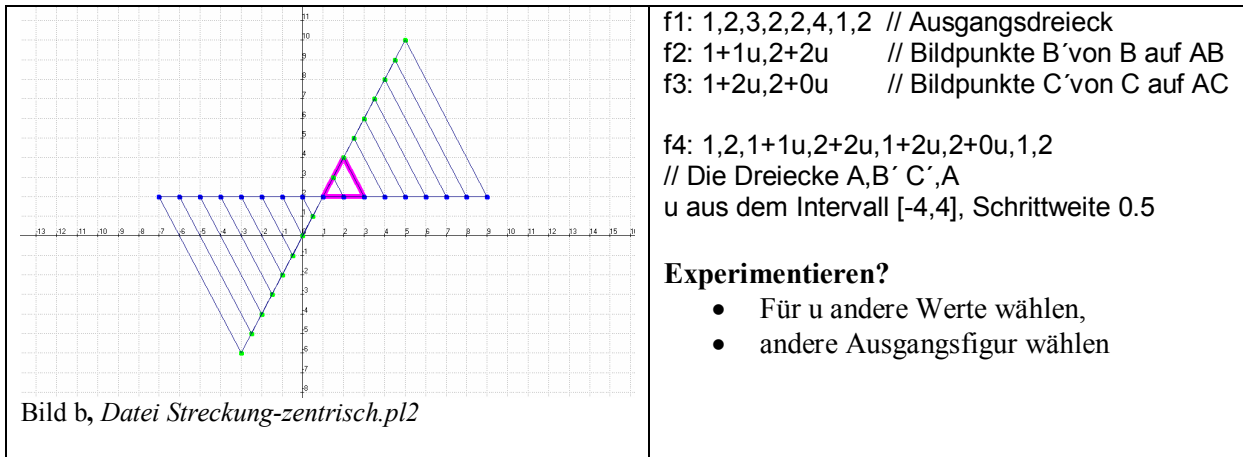
1) Richtungsvektor $AB = [2,4] - [1,2] = [1,2]$

Richtungsvektor $AC = [3,2] - [1,2] = [2,0]$

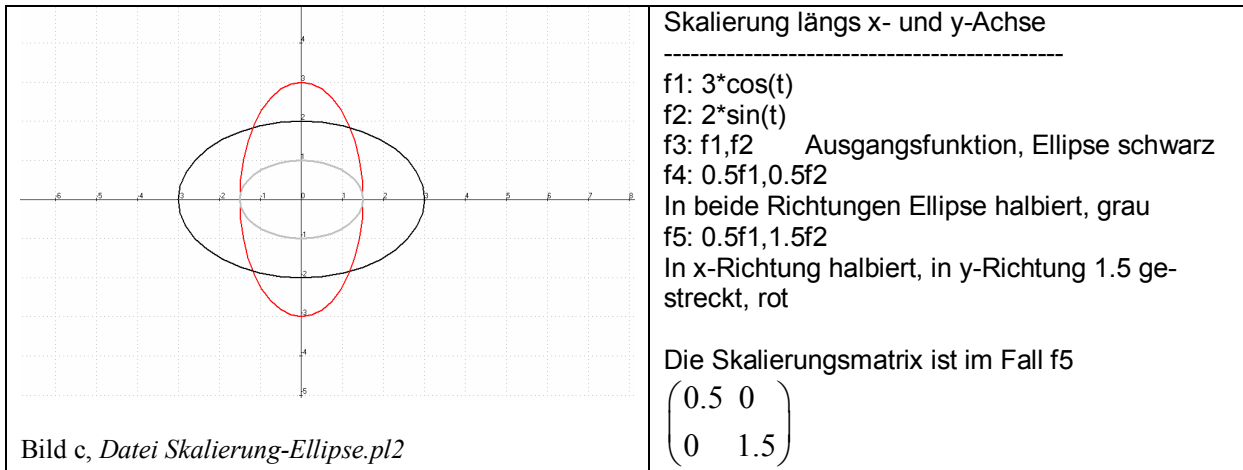
2) Gerade durch A und B : $[x,y] = [1,2] + u \cdot [1,2]$

Gerade durch A und C : $[x,y] = [1,2] + v \cdot [2,0]$

3) Bei gleicher Streckzahl ist $v = u$

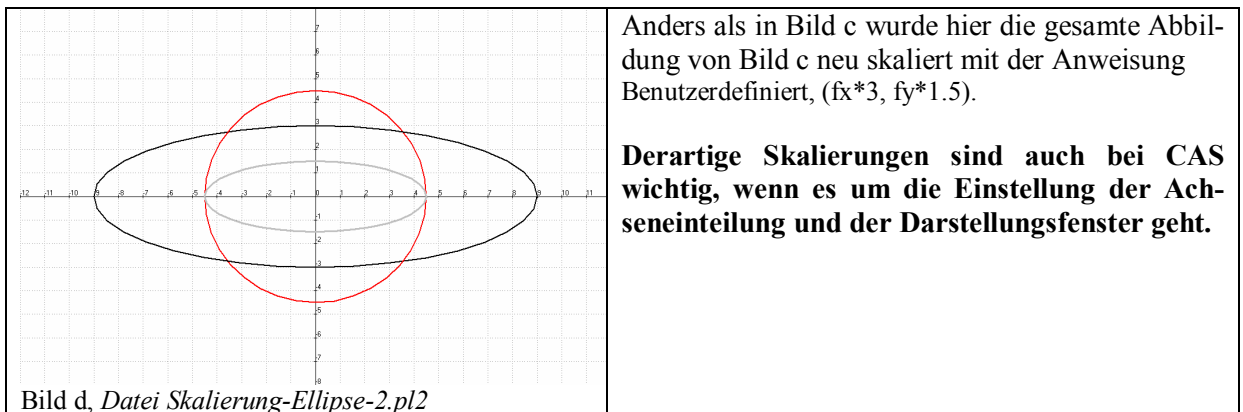


Skalierung - Streckung in x-Richtung und y-Richtung



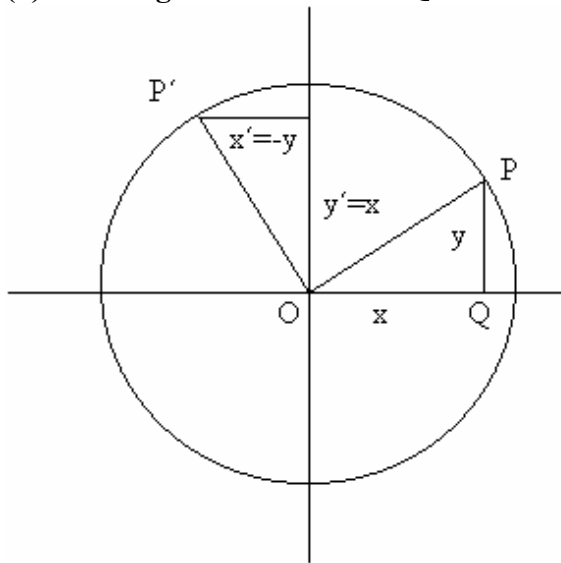
Streckt man also die x-Werte mit k1 (unten u), die y-Werte mit k2 (unten 2u) erhält man die Abbildungsgleichung

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} k1 * x \\ k2 * y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} k1 & 0 \\ 0 & k2 \end{pmatrix} * \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \cdot \quad \text{Skalierungsmatrix} \begin{pmatrix} k1 & 0 \\ 0 & k2 \end{pmatrix}$$



AG - 1.5.4 Drehungen

(1) Drehung eines Dreiecks OQP' um 90°



$(x' \ y') = (x \ y) \cdot B$. Noch ist B unbekannt. Die Zeichnung zeigt, dass $(x' \ y') = (-y \ x)$ ist. Also gilt $(-y \ x) = (x \ y) \cdot B$. Die Elemente von B sind leicht ausprobiert.

$$\text{Es ist } B = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Bild a

Also: $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$ vermittelt eine Drehung um 90° im Gegenuhrzeigersinn.

(2) Drehung um 180° um (0,0)

Für die Drehung um 180° um (0,0) gilt nach Symmetrieüberlegungen offenbar

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \text{ oder rechnerisch (zwei Drehungen um } 90^\circ\text{): } \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} * \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

(3) Beliebige Drehungen um (0,0) - ohne Verwendung von sin bzw. cos

Beispielsweise kann der Lehrer zunächst geeignete Abbildungsmatrizen vorgeben und sie benutzen lassen, z.B.

$$\begin{pmatrix} 0.9396 & -0.3420 \\ 0.3420 & 0.9396 \end{pmatrix} \text{ oder } \begin{pmatrix} 0.7071 & -0.7071 \\ 0.7071 & 0.7071 \end{pmatrix}, \sin(30^\circ) = 0.7071. \text{ Der Schüler wird erkennen,}$$

dass es sich um Drehungen um 20° bzw. 30° handelt. Er wird auch die Symmetrie bemerken und fragen:

"Wie kommt man zu geeigneten Matrizen?"

Wir betrachten einen Einheitskreis und Drehungen um O(0,0):

Die Lage eines durch Drehung des Punktes R um den Winkel w entstandenen Punktes P ist offenbar auch durch das Streckenlängenpaar (a, b) beschreibbar. Dieses wiederum reicht zur Durchführung der Drehung. Man kann z.B. den Winkel w vorgeben und dann a und b aus einer Zeichnung ablesen (oder umgekehrt).

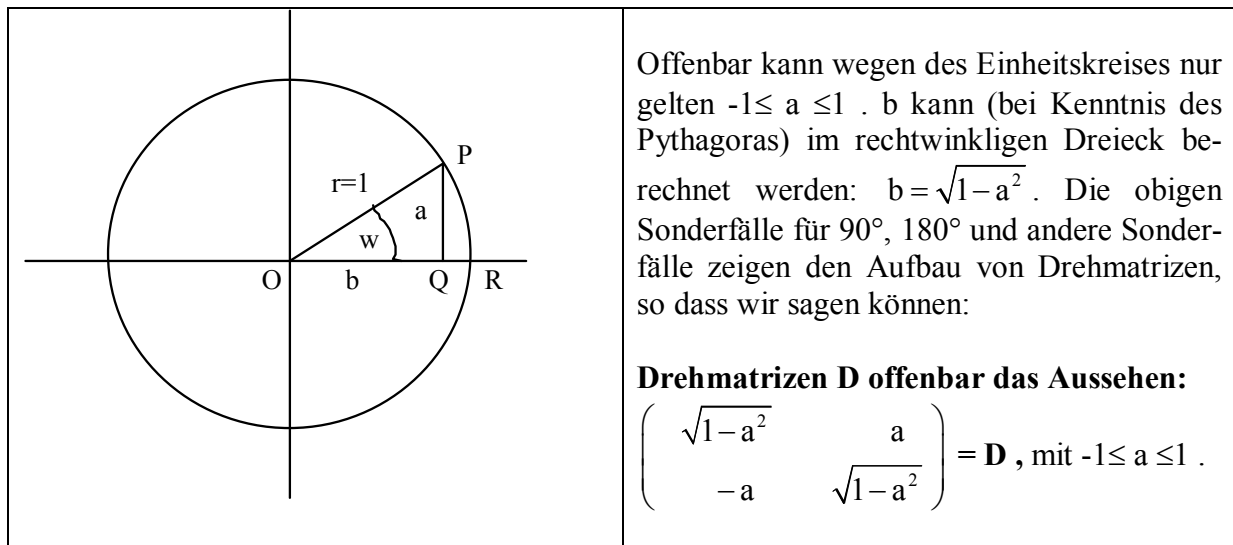


Bild b

Offenbar kann wegen des Einheitskreises nur gelten $-1 \leq a \leq 1$. b kann (bei Kenntnis des Pythagoras) im rechtwinkligen Dreieck berechnet werden: $b = \sqrt{1 - a^2}$. Die obigen Sonderfälle für 90° , 180° und andere Sonderfälle zeigen den Aufbau von Drehmatrizen, so dass wir sagen können:

Drehmatrizen D offenbar das Aussehen:

$$\begin{pmatrix} \sqrt{1-a^2} & a \\ -a & \sqrt{1-a^2} \end{pmatrix} = \mathbf{D}, \text{ mit } -1 \leq a \leq 1.$$

(4) Beliebige Drehungen um (0,0) - mit Benutzung von sin bzw. cos

Wenn die Winkelfunktionen bekannt sind, kann man die Drehmatrix exakt herleiten.

Es ergibt sich: **Drehmatrizen D mit Winkelfunktionen** $\mathbf{D} = \begin{pmatrix} \cos(t) & -\sin(t) \\ \sin(t) & \cos(t) \end{pmatrix}$

Die Herleitung entnehmen Sie bitte der folgenden Abbildung.

Herleitung der Abbildungsmatrix für die Drehung um (0,0)

(1) Betrachten Sie Abbildung 2.5!

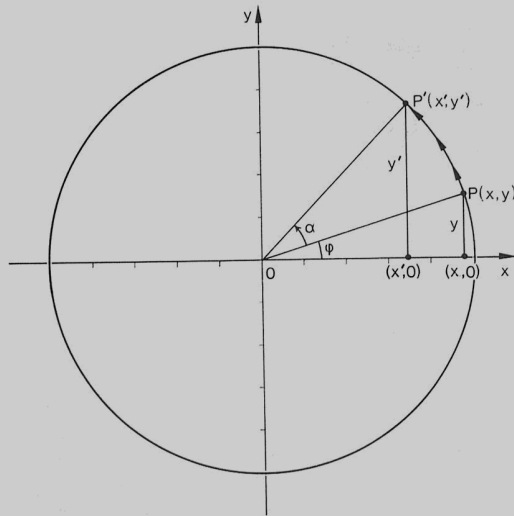


Abb. 2.5: Drehung von \overline{OP} um O mit dem Winkel α

Gegeben sei der Punkt $P(x, y)$. Wir suchen die Koordinaten x' und y' seines Bildpunktes $P'(x', y')$. Er ist durch Drehung von \overline{OP} um $O(0, 0)$ entstanden. Der Drehwinkel sei α .

(2) Die Abbildung zeigt, daß

$$(a) \quad \begin{matrix} x = OP \cos(\Phi) \\ y = OP \sin(\Phi) \end{matrix} \quad \text{und} \quad \begin{matrix} x' = OP \cos(\Phi + \alpha) \\ y' = OP \sin(\Phi + \alpha) \end{matrix}$$

Wir verfolgen zunächst die Rechnung für x' :

$$\begin{aligned} x' &= OP \cos(\Phi + \alpha) \\ x' &= OP(\cos(\Phi) \cos(\alpha) - \sin(\Phi) \sin(\alpha)) \quad [\text{cos-Additionstheorem}] \\ x' &= OP(\cos(\Phi) \cos(\alpha) - OP \sin(\Phi) \sin(\alpha)) \\ x' &= x \cos(\alpha) - y \sin(\alpha) \quad [\text{siehe Gleichungen (a)}] \end{aligned}$$

Entsprechend folgt $y' = x \sin(\alpha) + y \cos(\alpha)$.

Faßt man nun die Ergebnisse für x' und y' in Matrixschreibweise zusammen, so ergibt sich, wie oben behauptet

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos(\alpha) & -\sin(\alpha) \\ \sin(\alpha) & \cos(\alpha) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

Drehung einer Geraden im \mathbb{R}^2

Es soll eine Gerade um den Punkt $(2, 3)$ gedreht werden.

a) Berechnen Sie das Bild der Geraden $y = 0,5x$ bei Drehung um 20° um den Koordinatenursprung. Kontrollieren Sie das Ergebnis durch eine Zeichnung.

b) Die Drehung der Geraden um 20° soll nun um den Punkt $(2, 3)$ erfolgen!

a)

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} \cos(20^\circ) & -\sin(20^\circ) \\ \sin(20^\circ) & \cos(20^\circ) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ 0,5x \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 0,9397 & -0,3420 \\ 0,3420 & 0,9397 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ 0,5x \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Also $x' = 0,9397x - 0,3420 \cdot 0,5x = 0,7687x \Rightarrow x = 1,3009x'$
 und $y' = 0,3420x + 0,9397 \cdot 0,5x = 0,8119x = 0,8119 \cdot 1,3009x' = 1,0562x'$, d.h.

$y' = 1,0562x'$ (Bildgerade von $y = 0,5x$; näherungsweise).

Bild c

Drehung mit dem TI-Nspire, wenn das Objekt in Parameterdarstellung vorliegt.

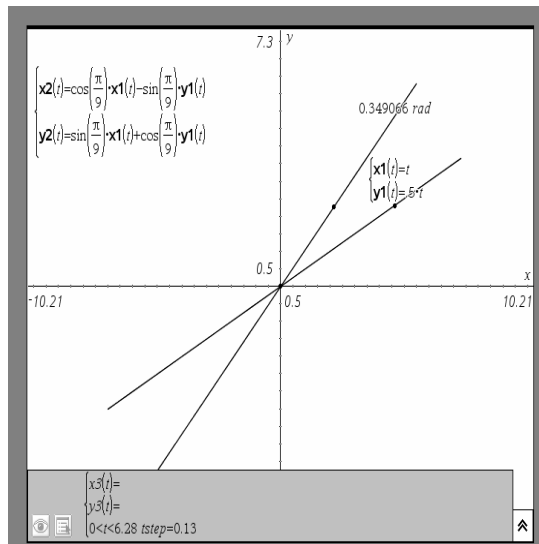


Bild d

Übrigens:

$$\begin{aligned} \tan(\beta) = 0,5 &\Rightarrow \beta = 26,57^\circ \quad \text{und} \\ \tan(\beta') = 1,0562 &\Rightarrow \beta' = 46,07^\circ = 26,57^\circ + 20^\circ. \end{aligned}$$

b) Drehung um $D(2, 3)$! Beachten Sie Abbildung 2.6.

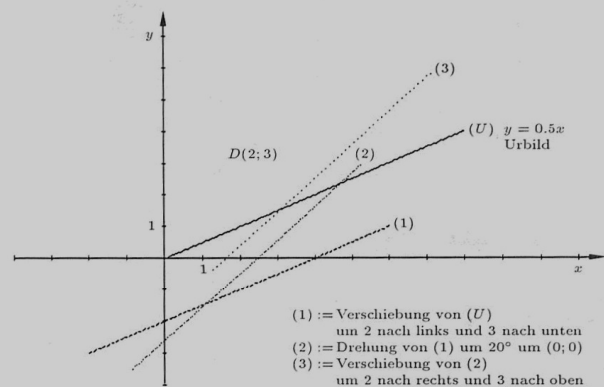


Abb. 2.6: Drehung der Strecke $y = 0,5x, x \in [0; 8]$ um $D(2, 3)$

Da die obige Matrix für die Drehung um $(0, 0)$ gilt, bewegen wir den Drehpunkt D und die Gerade um 2 Einheiten nach links und drei Einheiten nach unten, so daß

$$\begin{aligned} D(2, 3) &\rightarrow E(0, 0) \\ g: y = 0,5x &\rightarrow h: y + 3 = 0,5(x + 2) \Rightarrow h: y = 0,5x - 2. \end{aligned}$$

Nun wird h mit der bekannten Matrix abgebildet nach h' . Anschließend wird E wieder auf D bewegt (2 nach rechts und 3 nach oben). Entsprechend wird mit h' verfahren, so daß aus h' nun endlich das gesuchte g' entsteht.

Auf entsprechende Weise sind nun Drehungen für einzelne Punkte und andere Punktmenge im \mathbb{R}^2 , wie z.B. Parabeln, Kreise usw. möglich.

Erzeugen von Büscheln durch mehrfaches Drehen

Aufgabe: Zeichne sehr viele Parabeln, die alle den Punkt $P(0,2)$ gemeinsam haben.

Die graphische Darstellung erzeugen wir in experimenteller Arbeit; ein möglicher Weg wäre:

- 1) Wir zeichnen zuerst eine Parabel durch P , z.B. mit der Gleichung $y = x^2$.
- 2) Da die Drehmatrix für Drehungen um $(0,0)$ gilt, führen wir zunächst solche Drehungen aus und erhalten ein Parabelbüschel, Bild a
- 3) Danach verschieben wir den Drehpunkt und damit das ganze Büschel auf $(0,2)$.

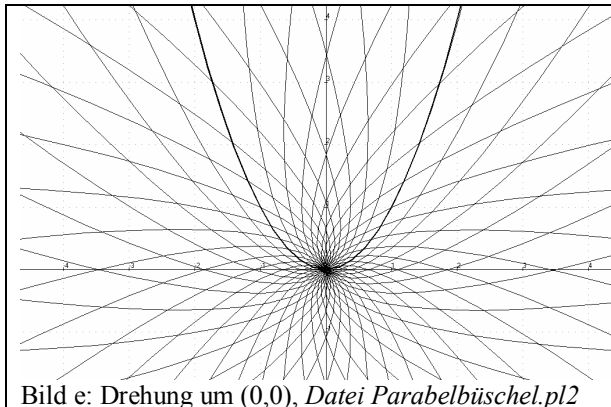


Bild e: Drehung um $(0,0)$, Datei Parabelbüschel.pl2

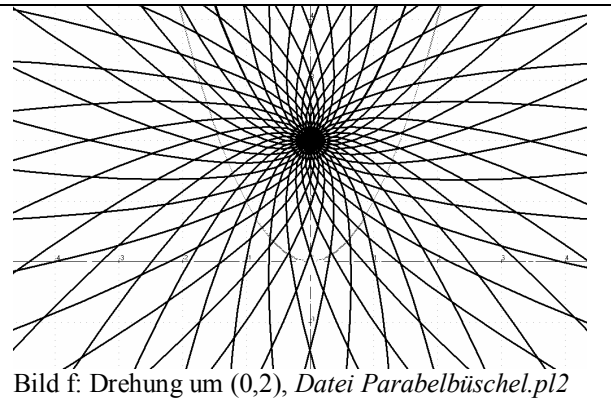


Bild f: Drehung um $(0,2)$, Datei Parabelbüschel.pl2

Die Realisierung der Idee erfolgt hier mit ANIMATO

f1: t

f2: t^2

f3: $\cos(u)*f1 - \sin(u)*f2, \sin(u)*f1 + \cos(u)*f2 + 0$

f4: $\cos(u)*f1 - \sin(u)*f2, \sin(u)*f1 + \cos(u)*f2 + 2$

Ausgangsgraph

Drehung um $(0,0)$

Drehung von f1,f2 um $(0,2)$

Für u wurde gewählt $u \in [0, 6.28]$, 36 Werte.

Eine Änderung lediglich bei f2 führt zu anderen Ausgangsgraphen, Änderungen bei den Verschiebungen um 0 bzw. 2 führen zu anderen Büschelzentren. Damit ist gleich eine ganze Klasse von Aufgaben gelöst.

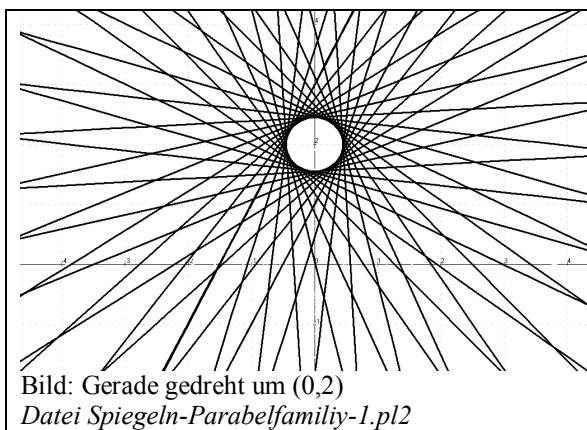


Bild: Gerade gedreht um $(0,2)$
Datei Spiegeln-Parabelfamily-1.pl2

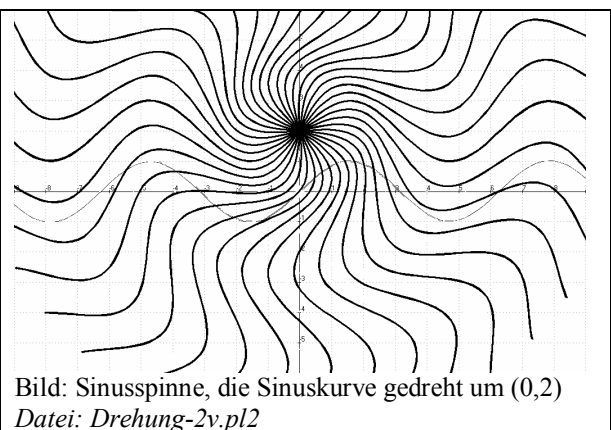


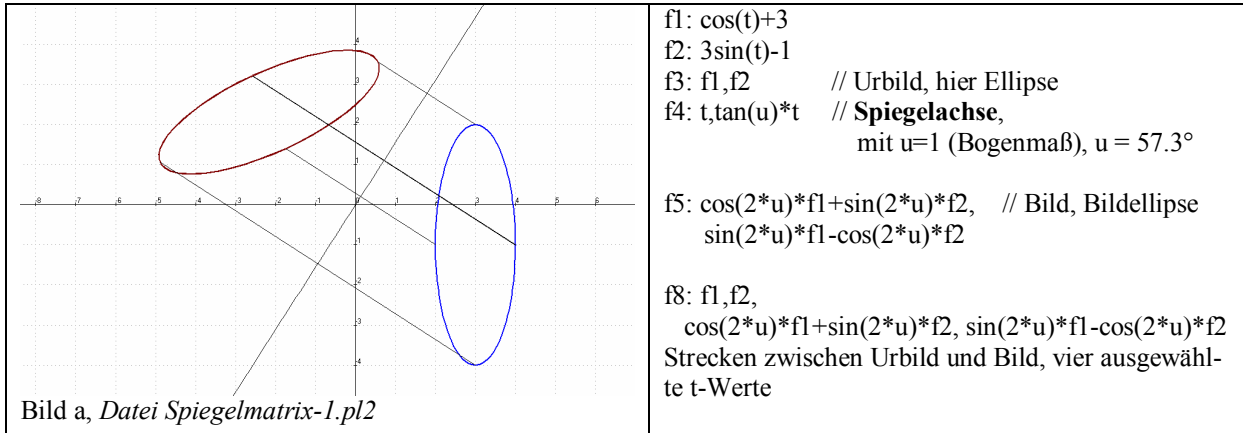
Bild: Sinusspinne, die Sinuskurve gedreht um $(0,2)$
Datei: Drehung-2v.pl2

Mit der obigen Aufgabenstellung ergibt sich ein weites Feld von Visualisierungen, bis hin zu künstlerischen, die SchülerInnen sehr motivierenden Darstellungen.

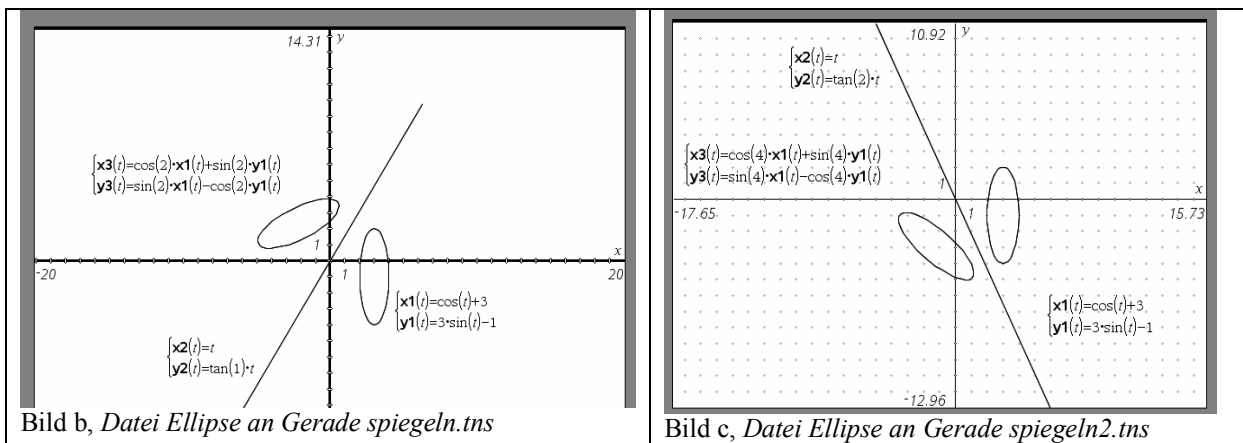
AG - 1.5.5 Achsenspiegelungen

Die Spiegelmatrix ist $S = \begin{pmatrix} \cos(2u) & \sin(2u) \\ \sin(2u) & -\cos(2u) \end{pmatrix}$, die Spiegelachse hat die Steigung u .

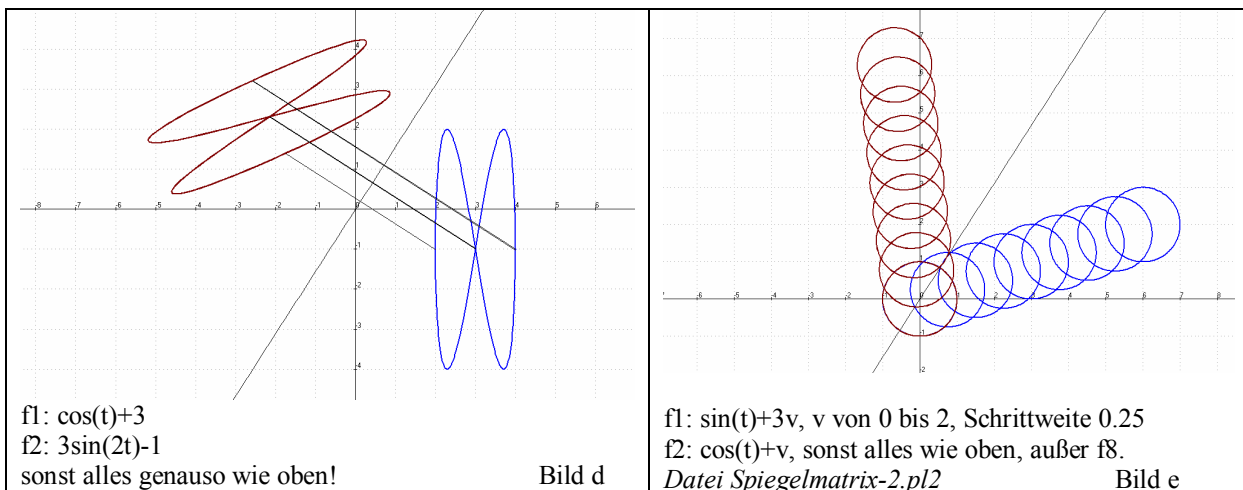
Eine Herleitung von S folgt weiter unten.



Bei Benutzung des TI-Nspire:



Und nun die Kenntnisse gleich auf andere Objekte anwenden!



Herleitung der Spiegelmatrix

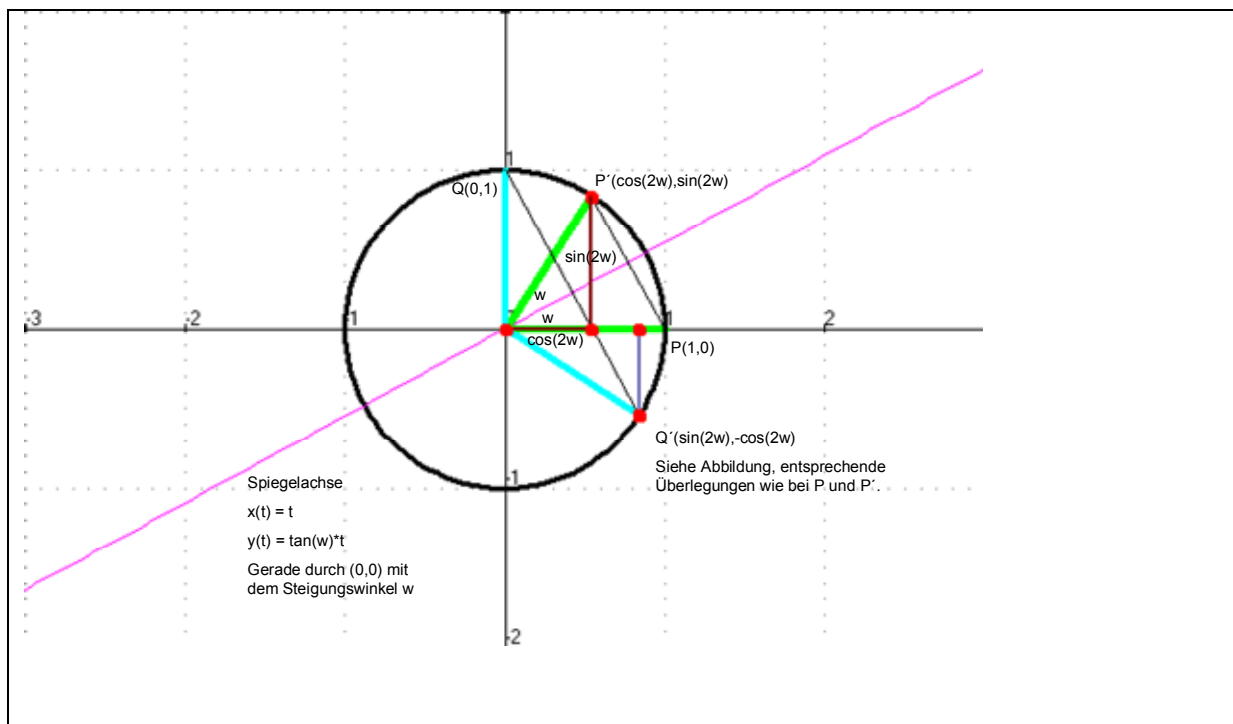
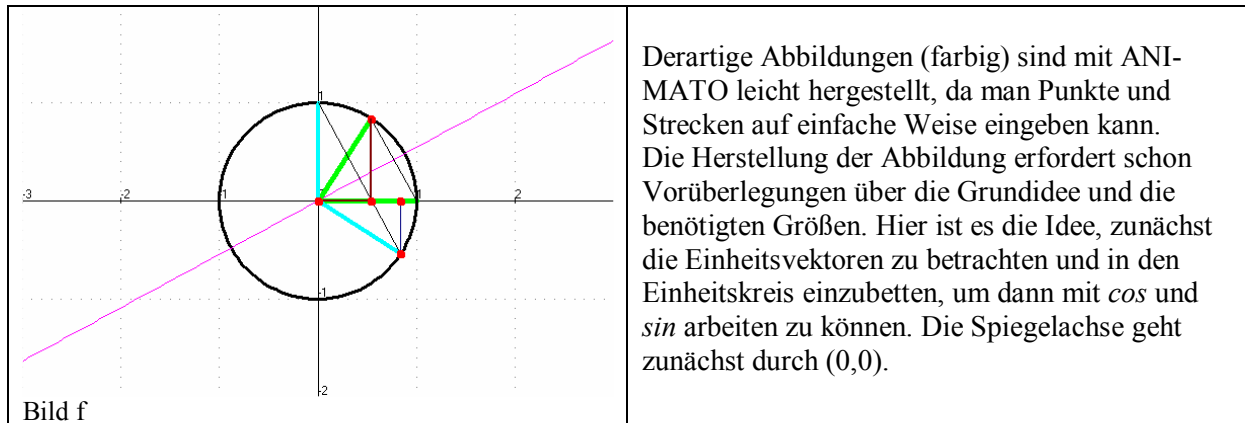


Bild g (Bild mit ANIMATO erstellt und in Power-Point durch Text ergänzt)

Für die Beschriftung der Abbildung kann man z.B. Power-Point gut verwenden. Das Verständnis der Darstellung wird durch die Farben unterstützt.

(0) Gesucht ist eine Matrix der Form $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$, so dass sie Objekte im \mathbb{R}^2 spiegelt.

(1) Zunächst wird der Punkt $P(1,0)$ abgebildet, die Abbildung sagt aus: Der Bildpunkt ist $P'(\cos(2w), \sin(2w))$. Dabei ist w der Steigungswinkel der Spiegelachse, die für die Herleitung zunächst durch $(0,0)$ gelegt wird.

(2) Entsprechende Überlegungen mit $Q(0,1)$ zeigen, dass $Q'(\sin(2w), -\cos(2w))$. Wieder hilft dabei die Abbildung.

(3) Damit sind genug Daten vorhanden, um die Spiegelmatrix zu bestimmen.

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} * \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos(2w) \\ \sin(2w) \end{pmatrix}, \text{ also } a = \cos(2w) \text{ und } c = \sin(2w),$$

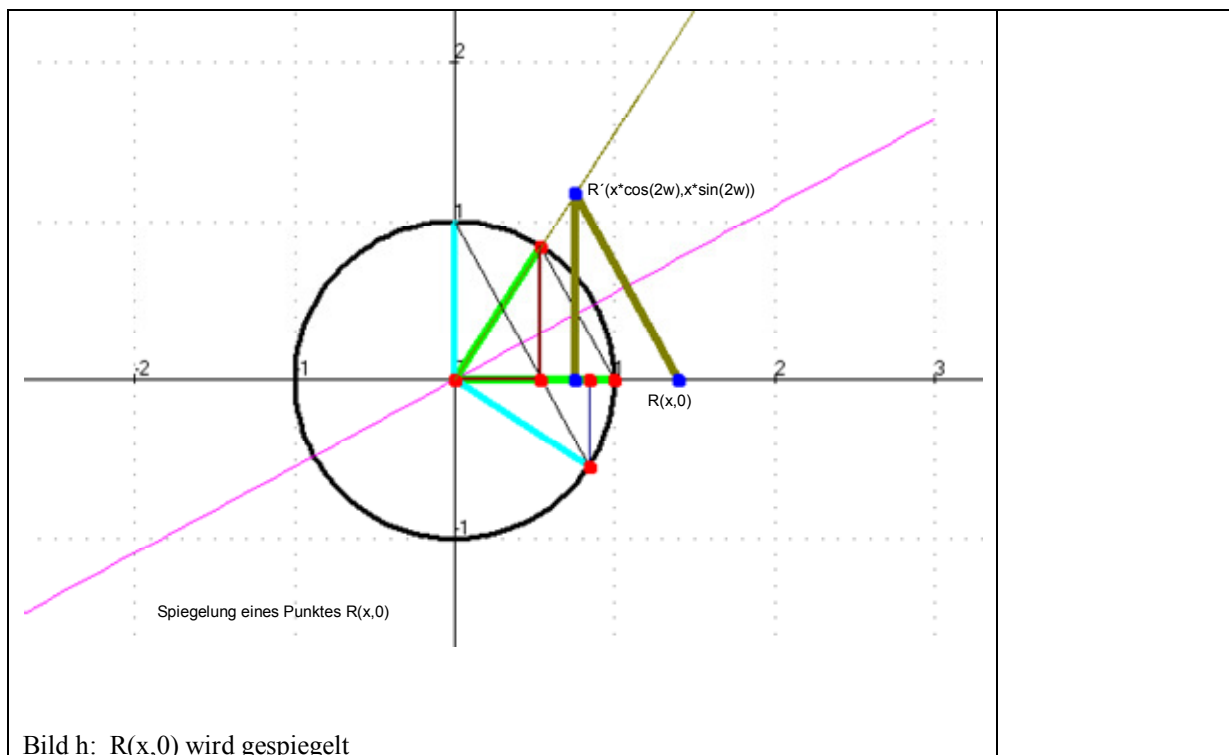
$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} * \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sin(2w) \\ -\cos(2w) \end{pmatrix}, \text{ also } b = \sin(2w) \text{ und } d = -\cos(2w). \text{ Daraus folgt dann insgesamt}$$

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos(2w) & \sin(2w) \\ \sin(2w) & -\cos(2w) \end{pmatrix}, \text{ die gesuchte Spiegelmatrix.}$$

Die Punkte und ihre Bildpunkte zu Abbildung ... sind also:

$$\begin{aligned} P(1,0) &\rightarrow P'(\cos(2w), \sin(2w)) \text{ und} \\ Q(0,1) &\rightarrow Q'(\sin(2w), -\cos(2w)). \end{aligned}$$

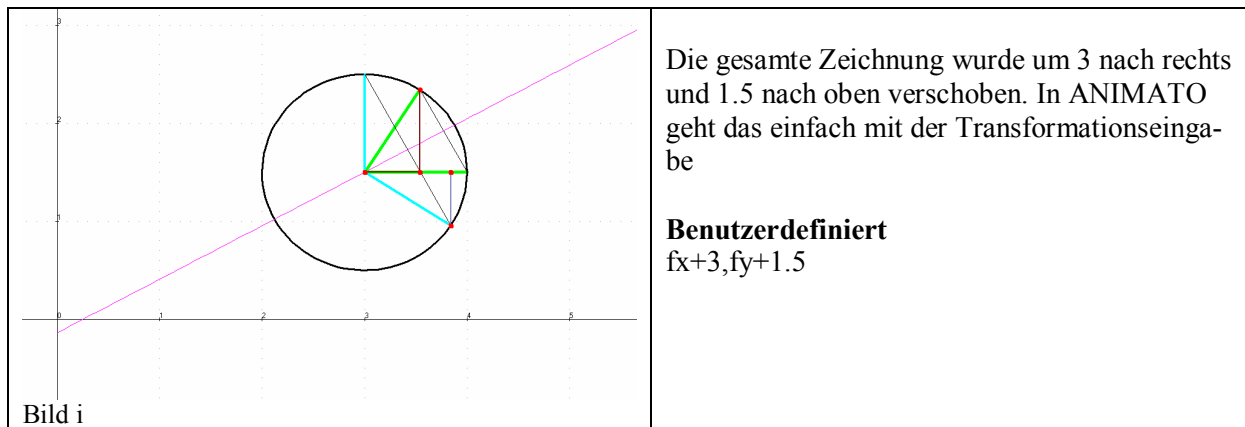
Was ist, wenn wir nicht gerade von den Einheitsvektoren ausgehen, sondern von einem Punkt $R(x, 0)$ bzw. $S(0, y)$ bei Beibehaltung der Spiegelachse durch $(0,0)$?



Die Abbildung zeigt, dass folgende Veränderungen gegenüber P und Q stattfinden:

$$\begin{aligned} R(x,0) &\rightarrow R'(x*\cos(2w), x*\sin(2w)) \text{ und} \\ S(0,y) &\rightarrow S'(y*\sin(2w), -y*\cos(2w)). \end{aligned}$$

Wie ist es, wenn die Spiegelachse nicht durch (0,0) verläuft, sondern z.B. durch (3, 1.5)?

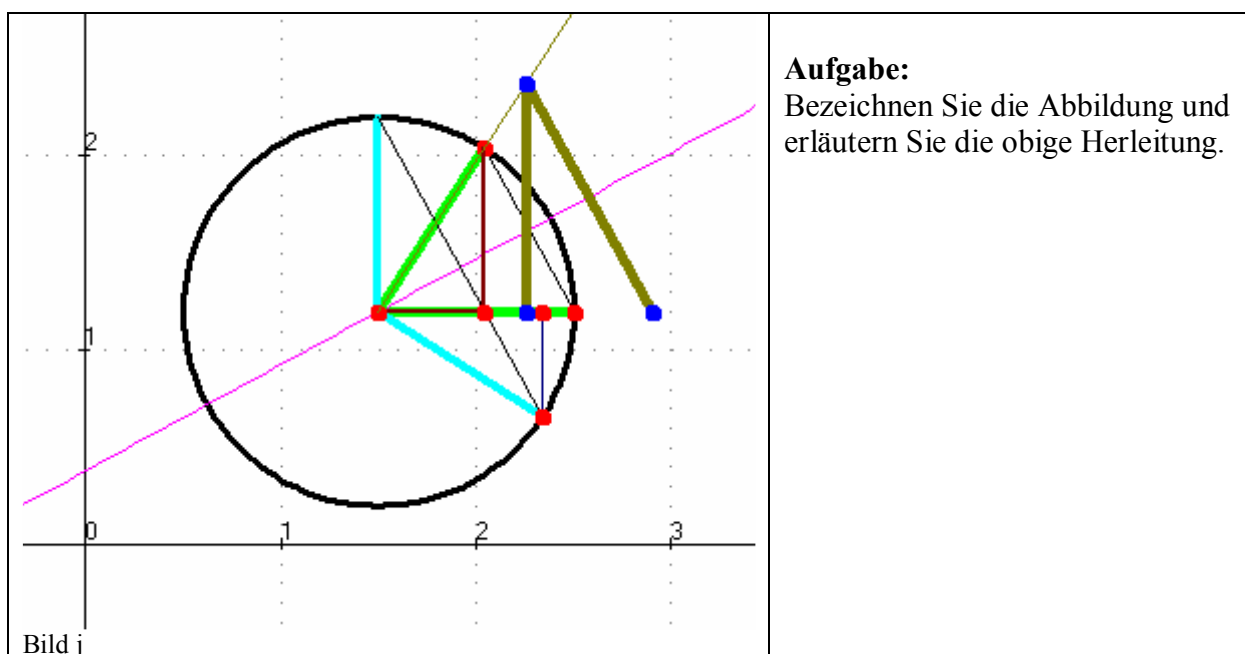


Wir haben also in der Abbildungsgleichung lediglich den Verschiebungsvektor, hier

$$\begin{pmatrix} v1 \\ v2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 1.5 \end{pmatrix}, \text{ zu addieren.}$$

Für die Bilder (x', y') von Punkten (x, y) bei Spiegelung an der Achse mit der Steigung u durch den Punkt (x_1, y_1) ergibt sich:

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \cos(2u) & \sin(2u) \\ \sin(2u) & -\cos(2u) \end{pmatrix} * \begin{pmatrix} x - x_1 \\ y - y_1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} v1 \\ v2 \end{pmatrix}.$$



Einige Anwendungen

Nachdem eine einzelne Achsenspiegelung beherrscht wird, können mehrfache Spiegelungen durchgeführt werden, so dass ganze „Spiegel-Scharen von Objekten“ entstehen. Damit ist man in einem Bereich angelangt, in dem die SchülerInnen ihrer Kreativität freien Lauf lassen können.

Höhepunkt einer Unterrichtssequenz zur Achsenspiegelung und gleichzeitig ein anspruchsvoller mathematischer Endpunkt ist eine allgemeine Lösung, die es ermöglicht schnell

- **unterschiedliche Achsen - unterschiedliche Graphen - mehrfache Spiegelungen miteinander zu kombinieren.**

Der Lohn sind dann leicht erstellte eindrucksvolle (Kunst-) Bilder, wie z.B. in den Bildern k und l.

Reifen

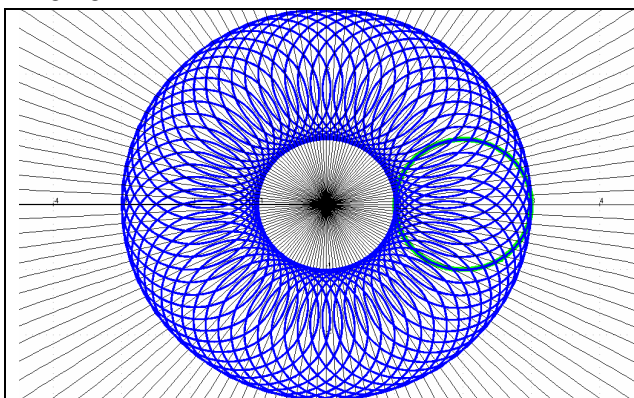


Bild k: Datei Reifen.pl2

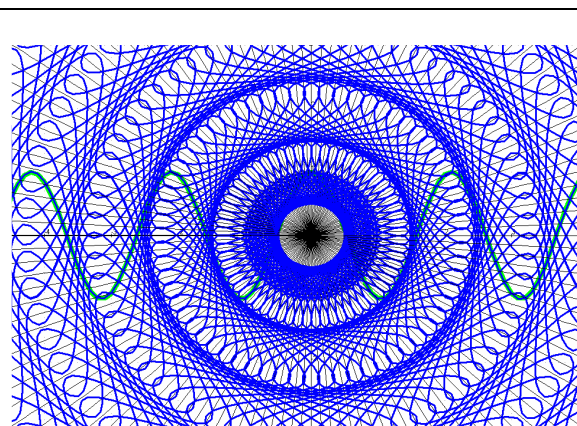


Bild l: Ausgangsgraph $(x(t) = t, y(t) = \cos(3t))$

Eine allgemeine Lösung

Spiegelung von Graphen an einer beliebigen Geraden mit dem Winkel v der Geraden gegen die x-Achse

f1: t // f1, f2 Ausgangsfunktion

f2: $0.5t^2$

f3: $\cos(2f8)*f1 + \sin(2f8)*f2 + f6, \sin(2f8)*f1 - \cos(2f8)*f2 + f7$

f4: $f1 + f6, f2 + f7$

f5: $t + f6, t * \tan(f8) + f7$

f6: -2 // Verschiebung x-Richtung

f7: 1 // Verschiebung y-Richtung

f8: v // Winkel der Achse gegen die x-Achse, v kann auch Laufbereich haben

Variationsmöglichkeiten in Rot kursiv

Bilder, in Matrizenform:

$$\begin{pmatrix} \cos(2 * f8) & \sin(2 * f8) \\ \sin(2 * f8) & -\cos(2 * f8) \end{pmatrix} * \begin{pmatrix} f1 \\ f2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} f6 \\ f7 \end{pmatrix}$$

Ausgangsfunktion mit Verschiebung gemäß $f6, f7$

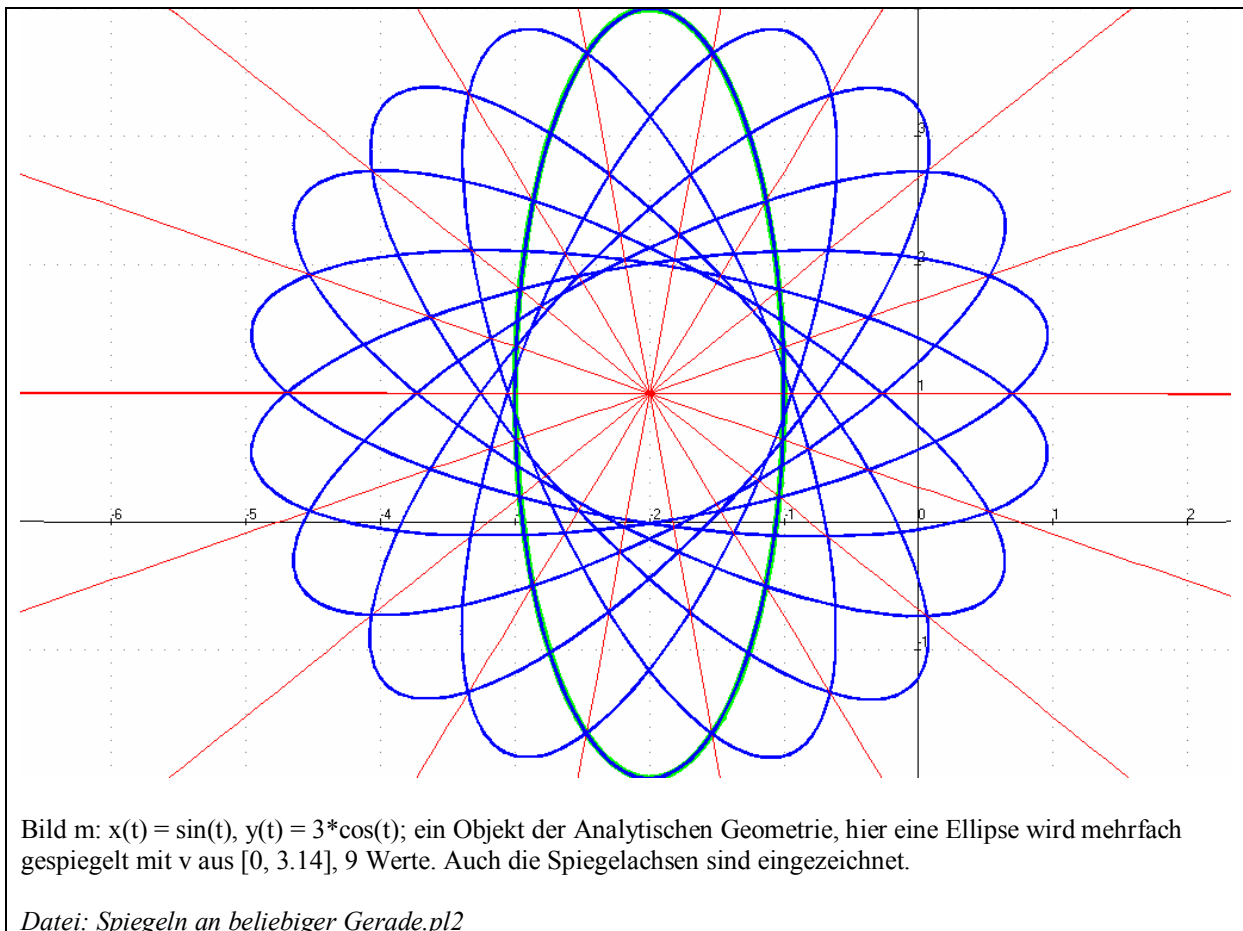
// Spiegelgerade mit Verschiebung laut $f6, f7$ und Achsenwinkel $f8$

Verschieben

Winkel zwischen Spiegelachse und x-Achse

Was hier im Endergebnis und in der Kürze einfach aussieht, ist erwächst im Unterricht aus einer längeren experimentellen Arbeit.

Mehrfache Spiegelung einer Ellipse



AG 1.5.6 Abbildungen umkehren mit inversen Matrizen

Gelegentlich wird man Abbildungen rückgängig machen wollen. Für solche Vorgänge benötigt man die inversen Matrizen, denn

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = A * \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}, \text{ auf beiden Seiten von links mit } A^{-1} \text{ multiplizieren}$$

$$A^{-1} * \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = A^{-1} * A * \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = E * \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}, \text{ sofern } A^{-1} \text{ existiert.}$$

$$\text{Also } \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = A^{-1} * \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}.$$

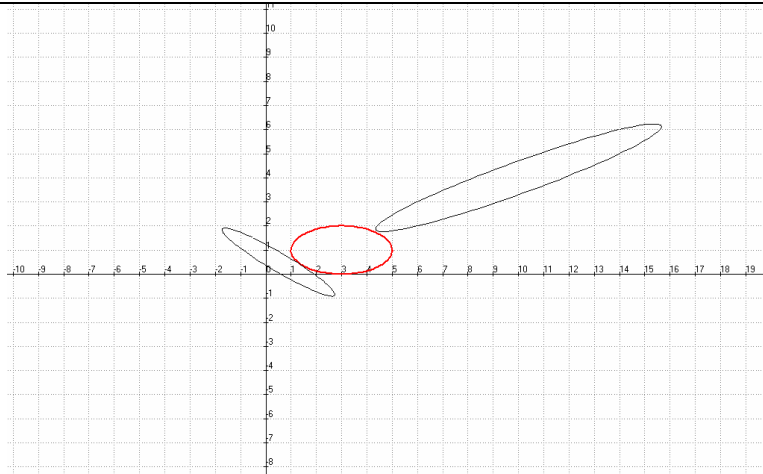
<p>Inverse Abbildungen - Abbildungsmatrizen umkehren Fertig</p> $\begin{bmatrix} \cos(u) & -\sin(u) \\ \sin(u) & \cos(u) \end{bmatrix}^{-1}$ $\begin{bmatrix} \cos(u) & \sin(u) \\ -\sin(u) & \cos(u) \end{bmatrix}$	Rechnung mit der Drehmatrix
<p>Zurückdrehen Fertig</p> $\begin{bmatrix} \cos(u) & -\sin(u) \\ \sin(u) & \cos(u) \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \cos(u) & \sin(u) \\ -\sin(u) & \cos(u) \end{bmatrix}$ $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$	
<p>Zurückdrehen Fertig</p> $\begin{bmatrix} \cos(2\cdot u) & \sin(2\cdot u) \\ \sin(2\cdot u) & -\cos(2\cdot u) \end{bmatrix}^{-1}$ $\begin{bmatrix} \cos(2\cdot u) & \sin(2\cdot u) \\ \sin(2\cdot u) & -\cos(2\cdot u) \end{bmatrix}$	Rechnung mit der Spiegelmatrix
<p>Zurückspiegeln Fertig</p> $\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}^{-1}$ $\begin{bmatrix} d & -b \\ a-d-b\cdot c & a-d-b\cdot c \\ -c & a \\ a-d-b\cdot c & a-d-b\cdot c \end{bmatrix}$	Rechnung allgemein. Vorsicht! Es gibt Fälle, bei denen das nicht geht!
<p>Inverse der Abbildungsmatrix allgemein, wann existiert die Inverse nicht? Fertig</p> <p> </p> <p style="text-align:right">10/99</p>	

Bild a: Abbildungen rückgängig machen

Aufgaben

- 1) Nennen Sie Fälle, bei denen eine Umkehrung der Abbildung nicht möglich ist. Beachten Sie dabei auch die geometrische Bedeutung.
- 2) Ihr Nachbar gibt Ihnen eine Abbildung (Matrix und Bild). Konstruieren Sie das Urbild.
- 3) Kann man Scherungen rückgängig machen?
- 4) Bei mehrfachen Abbildungen mit der gleichen Matrix müsste das entstehende Bild beim Rückgängigmachen „rückwärts laufen“. Erproben Sie das (z.B. mit Bild m in 1.5.5). Für Animationen mit Computergrafik wäre das eine schöne Darstellungsvariante.

Abbildung einer Ellipse und dann die inverse Abbildung

 <p>Bild b, Datei Abbilden mit Matrizen.pl2</p>	<p>Aufgabe:</p> <p>In Bild b wird die Ellipse mit dem Mittelpunkt (3,1) mit einer Matrix M abgebildet – und außerdem mit der Inversen von M.</p> <p>Welches Bild gehört zu welcher Matrix? Erläutern Sie dazu auch Bild c.</p> <p>Wie kann die beiden Abbildungen rückgängig machen?</p>
--	---

<p>f1: $2\cos(t)+3$ f2: $\sin(t)+1$ f3: f1,f2 // Urbild f5: 2 // Abbildungsmatrix 2,4 ; 1,1 f6: 4 f7: 1 f8: 1 f9: $f5*f1+f6*f2,f7*f1+f8*f2$ // Urbild mit Matrix f5,f6 ; f7,f8 abbilden</p> <p>Bild c</p>	<p>f11: $f8/(f5*f8-f6*f7)$ // Inverse Matrix zeile 1: f11,f12; zeile 2: f13,f14 f12: $-f6/(f5*f8-f6*f7)$ f13: $-f7/(f5*f8-f6*f7)$ f14: $f5/(f5*f8-f6*f7)$ f16: $f11*f1+f12*f2,f13*f1+f14*f2$ // Urbild mit inverser Matrix abbilden</p>
--	--

Zusammenfassung

Abbildungsgeometrie stellt wesentliche Grundlagen für weitere (tiefergehende) Anwendungen in der Computergrafik bereit. Die zur Beherrschung solcher Abbildungen nötigen Kompetenzen resultieren sich aus:

- 1) Dem Umgang mit Standard-Abbildungen wie *drehen, spiegeln, scheren, verschieben, strecken, drehstrecken* unter dem einheitlichen Konzept der Matrizenrechnung.
- 2) Dem Verständnis für Computer-Animationen durch die Aspekte *Hintereinanderausführung von Abbildungen* (mehrfache Matrizenmultiplikation), *sich wiederholende Abbildungen* (Matrizenpotenzen) und *Rückgängigmachen von Abbildungen* (Inverse Matrizen). Auch hierbei leistet also Matrizenrechnung entscheidende Hilfestellung.
- 3) Da Abbildungsmatrizen häufig spezielle Formen haben, können die n-ten Potenzen nicht selten auch explizit angegeben werden. Wo das nicht möglich ist (und auch sonst), kann mit Rekursion gearbeitet werden - und *Rekursion* ist ein weiteres wesentliches Hilfsmittel für Computergrafik!
- 4) Die mit Hilfe von Matrizen hier im \mathbb{R}^2 durchgeführten Überlegungen (weil für Schüler leichter nachzuvollziehen und wegen der Anknüpfung an die Geometriekenntnisse aus der Sekundarstufe 1) können auf den \mathbb{R}^3 übertragen werden, indem man passende (3,3)-Matrizen benutzt, siehe Kapitel AG 2.

AG 2 - Abbildungsmatrizen, Schrägbilder, Transformationen

Bei der Darstellung von Figuren in 3D als Schrägbilder im zweidimensionalen Koordinatensystemen am Computer benötigt man eine Projektion vom \mathbb{R}^3 zum \mathbb{R}^2 . Diese kann mit geeigneten Matrizen erfolgen.

Hierbei sind als Situationen denkbar:

Gegeben	Gesucht	Hilfsmittel zur Bearbeitung
A Abbildungsmatrix Punkte im \mathbb{R}^3	Bildpunkte im \mathbb{R}^3	Matrizenmultiplikation
B Spezielle Abbildungsmatrix (Projektionsmatrix) Punkte im \mathbb{R}^3	Bildpunkte im \mathbb{R}^2	Matrizenmultiplikation
C Punkte im \mathbb{R}^3 Bildpunkte im \mathbb{R}^2	Abbildungsmatrix $A_{(3,3)}$	Lineare Gleichungssysteme
D Abbildungsmatrix	Umkehrung, Rückgängigmachen	Inverse Matrix

In den Fällen A und B kennen wir Punkte im \mathbb{R}^3 und die Abbildungsmatrix.

Beispiel 1A

$$\begin{pmatrix} 1 & 5 & 1 \\ 2 & 3 & 1 \\ 0 & 2 & 2 \end{pmatrix} * \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 14 \\ 13 \\ 6 \end{pmatrix}, \text{ Abbildungsmatrix} * \text{Punkt} = \text{Bildpunkt } (14, 13, 6) \text{ im } \mathbb{R}^3$$

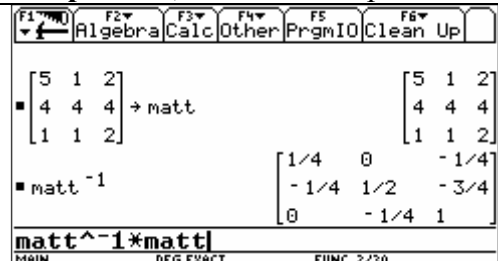
Beispiel 1B

$$\begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} * \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix}, \text{ Abbildungsmatrix} * \text{Punkt} = \text{Bildpunkt } (-1, -2, 0) \text{ im } \mathbb{R}^2 \text{ (x,y-Ebene)}$$

Die Matrix $\begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ projiziert also den Punkt $(3,2,1)$ im \mathbb{R}^3 auf den Punkt $(-1,-2)$ im \mathbb{R}^2 .

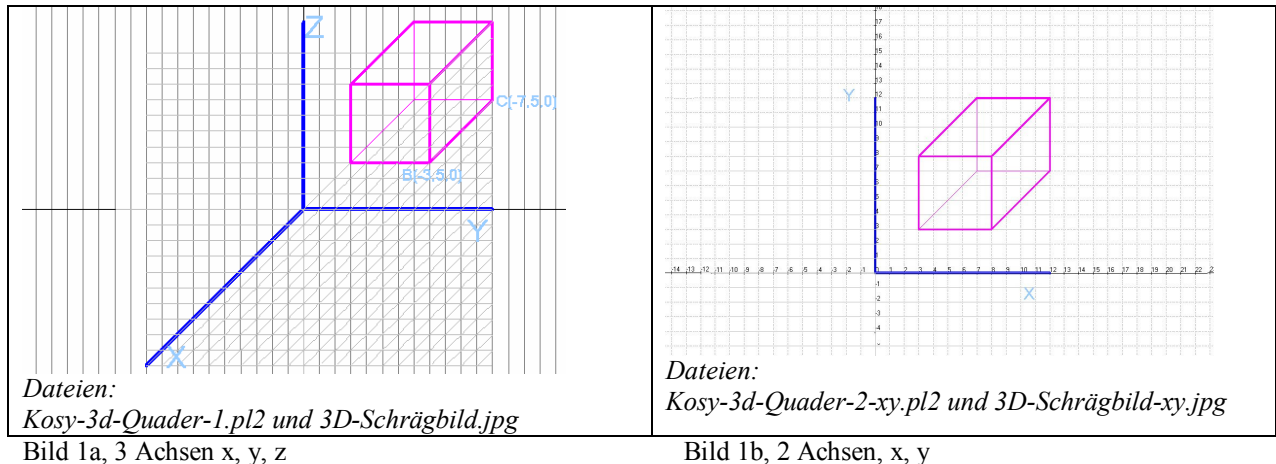
Beispiel 1C folgt in Kapitel 2.1

Beispiel 1D, siehe auch Kapitel 1.5.6

	<p>Matrix speichern</p> <p>Inverse berechnen und Zeit sparen</p> <p>Kontrollrechnung</p> <p>Aufgabe: Eine Matrix ohne Inverse?</p>
---	--

AG 2.1 Schrägbilder - vom \mathbb{R}^3 zum \mathbb{R}^2 mit Abbildungsmatrizen

Beispiel 1C – Schrägbilder



Bekannt sind die 3D-Koordinaten
 A(-3,0,0) B(-3,5,0) C(-7,5,0) D(-7,0,0)
 E(-3,0,5) F(-3,5,5) G(-7,5,5) H(-7,0,5)
 Siehe Bild 1a

Bekannt sind die 2D-Koordinaten
 A'(3,3) B'(12,3) C'(12,7) D'(7,7)
 E'(3,8) F'(8,8) G'(12,12) H'(7,12)
 Siehe Bild 1b

Welche Matrix $A_{(3,3)} = \begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{pmatrix}$ vermittelt die Abbildung von Beispiel C?

Für die Rechnung benutzen wir die drei Punkte G(-7,5,5), H(-7,0,5), F(-3,5,5) und ihre Bilder G'(12,12,0), H'(7,12,0), F'(8,8,0). Die Werte in der Matrix A können dann berechnet werden durch den Ansatz

$$\begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{pmatrix} * \begin{pmatrix} -7 & -7 & -3 \\ 5 & 0 & 5 \\ 5 & 5 & 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 12 & 7 & 8 \\ 12 & 12 & 8 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$A_{(3,3)} \quad G \quad H \quad F \quad G' \quad H' \quad F'$

Daraus ergeben sich die folgenden drei Gleichungssysteme, indem man auf der linken Seite ausmultipliziert und dann entsprechende Matrixelemente gleichsetzt.

<pre>solve(-7*a+5*b+5*c=12 and -7*a+5*c=7 and -3*a+5*b+5*c=8,{a,b,c}) a=-1 and b=1 and c=0</pre>	<p>Für die Variablen a, b, c</p>
<pre>solve(-7*d+5*e+5*f=12 and -7*d+5*f=12 and -3*d+5*e+5*f=8,{d,e,f}) d=-1 and e=0 and f=1</pre>	<p>Für die Variablen d, e, f</p>
<pre>solve(-7*g+5*h+5*i=0 and -7*g+5*i=0 and -3*g+5*h+5*i=0,{g,h,i}) g=0 and h=0 and i=0</pre>	<p>Für die Variablen g, h, i</p>
<pre>m:= [-1 1 0] [-1 0 1] [0 0 0]</pre>	<p>Zusammenstellung der Ergebnisse in der Abbildungsmatrix A, hier m genannt.</p>
<pre>punkte3d:= [-3 -3 -7 -7 -3 -3 -7 -7] [0 5 5 0 0 5 5 0] [0 0 0 0 5 5 5 5]</pre>	<p>Kontrollrechnung: Punktemenge im R3</p>
<pre>m*punkte3d [3 8 12 7 3 8 12 7] [3 3 7 7 8 8 12 12] [0 0 0 0 0 0 0 0]</pre>	<p>Rechnung und Bildpunkte im R2</p>

Software: TI-Nspire-CAS

Bemerkung: Der Rechenaufwand vereinfacht sich noch, wenn man zur Bestimmung der Abbildungsmatrix A von den Einheitsvektoren im R3 und ihren Bildern im R2 ausgeht:

$\begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{pmatrix} * \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ <p style="text-align: center;">e1 e2 e3</p> <p>A-Matrix Einheitsvektoren im R3 deren Bildvektoren</p>	<p>Dann erkennt man:</p> <hr/> <p>Die Bilder der Einheitsvektoren bilden die Abbildungsmatrix A!</p>
---	---

Punkt und Bildpunkt

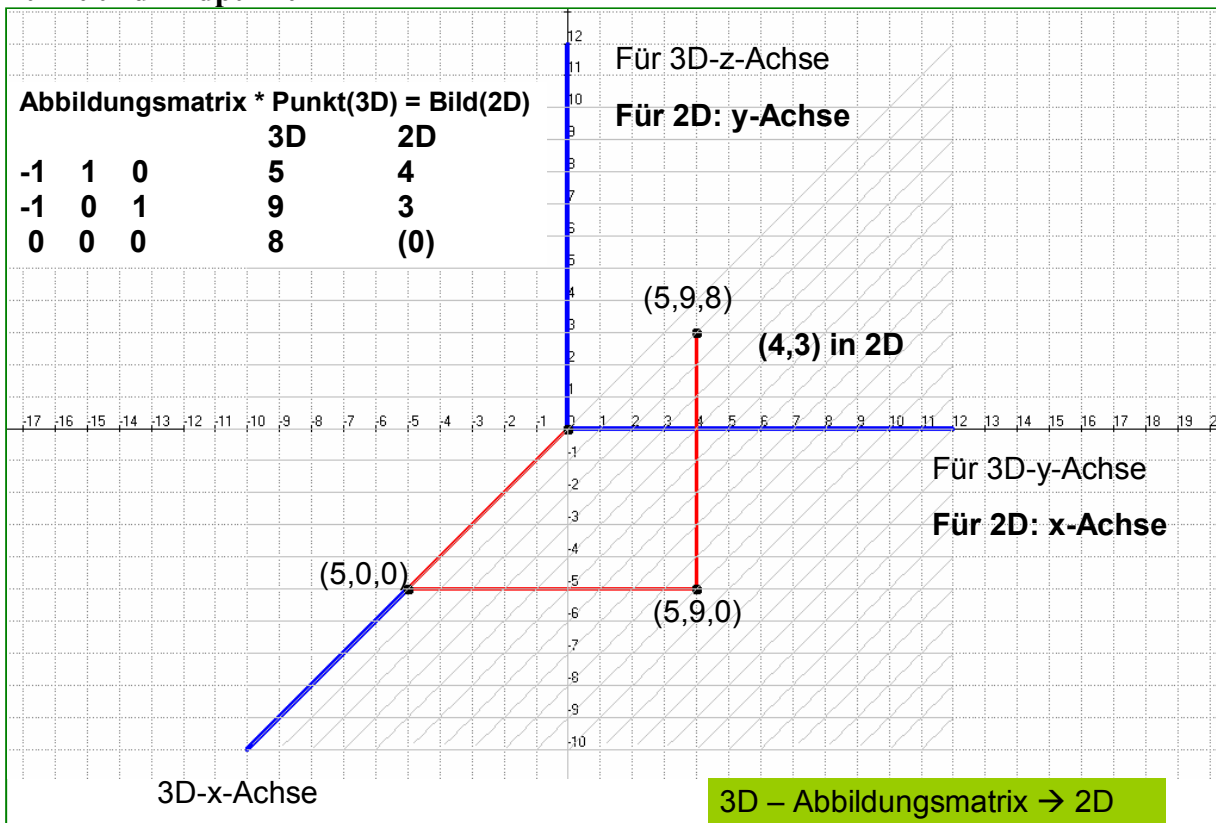


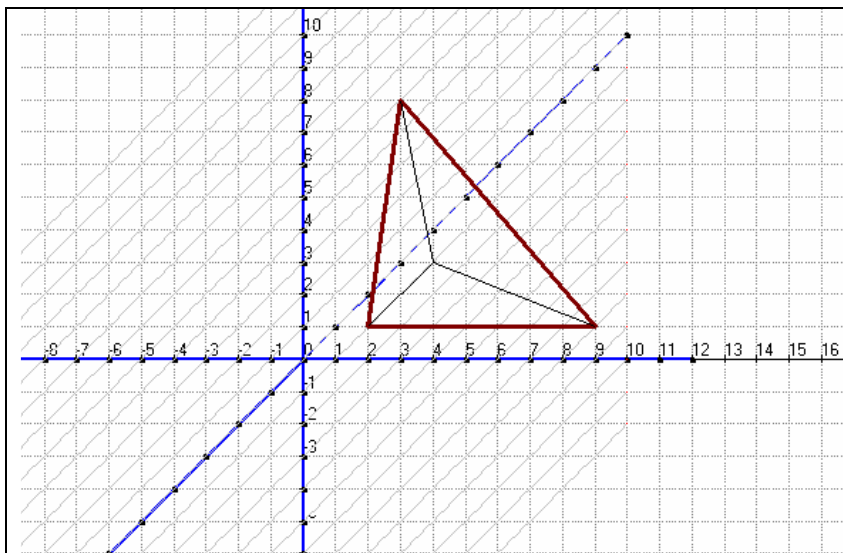
Bild 2: Von 3D nach 2D

Im Programm ANIMATO kann man Punkte direkt eingeben, z.B. zeichnet

- f1: 7,4 den Punkt (7,4)
 f2: 1,2,7,6,4,3,1,2 das Dreieck mit den Eckpunkten (1,2), (7,6), (4,3)
 f3: -4,5,5,5 die Strecke von (-4,5) bis (5,5).

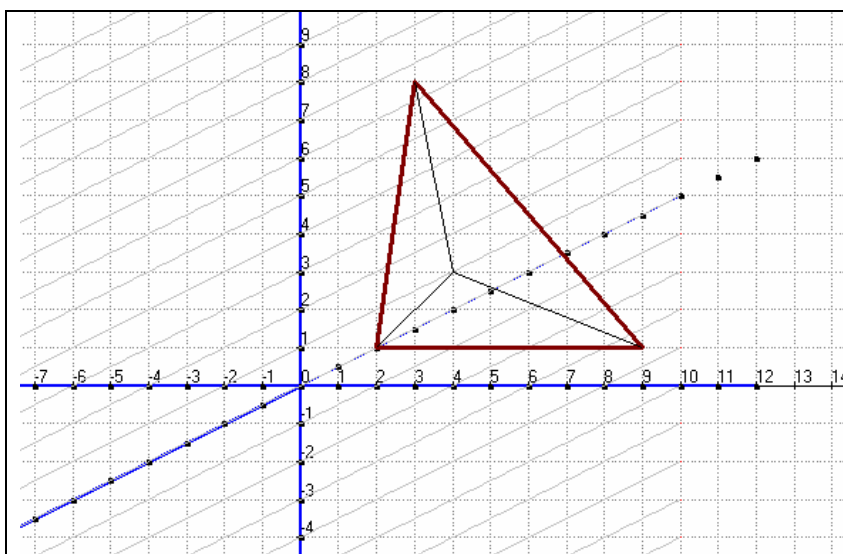
Auf diese Weise lassen sich elementar und schnell geometrische Objekte über die Punkt-koordinaten eingeben (schon in Klasse 7 oder früher). Die Verbindung / Strecke zwischen zwei Punkten kann man in verschiedenen Dicken zeichnen, so dass sich z.B. in Schrägbildern Strecken hervorheben oder in den Hintergrund bringen lassen. **Damit ergibt sich ein einfacher Weg zur Zeichnung von Schrägbildern, wenn man nur die Koordinaten der benötigten Punkte kennt.**

Für die bequeme und schnelle Anfertigung von Schrägbildern liegt auf der ANIMATO-CD eine „Grundfolie“ vor, die man sich mit der *Datei Kosy2-3d-variabel.pl2* laden kann. In dieser kann man die Steigung der Achse x_3 auch selbst wählen.



Für die x_1 -Achse wurde hier die Steigung 1 gewählt.

Bild 3a



Für die x_1 -Achse wurde hier die Steigung 0.5 gewählt.

Bild 3b

Die ANIMATO-„Grundfolie“ für Schrägbilder, Datei Kosy2-3d-variabel.pl2

f1: // Die Funktionen f1 bis f12 sind für das räumliche Kosy belegt - Nicht anders verwenden!

f2: -12,0,12,0 // x1-Achse

f3: 0,-12,0,12 // x2-Achse

*f4: 0,0,-10,-10*f6 // x3-Achse hinten*

*f5: 0,0,10,10*f6 // x3-Achse vorn*

f6: 1 // f6 gibt die Steigung der 3. Achse x3 an, diese ist damit veränderbar

f7: -10,u,12,u // horizontale Geraden

*f8: x, {f6*x-u < -10 : undef:f6*x-u}*

f9: u,0 // Punkte auf der 1. Achse x1

f10: 0,u // Punkte auf der 2. Achse x2

*f11: u,u*f6 // Punkte auf der 3. Achse x3*

f14: 2,1,9,1,3,8,2,1 // Beispielfigur, siehe Bilder 3a und 3b

f15: 4,3,2,1

f16: 4,3,9,1

f17: 4,3,3,8

Weitere Beispiele:

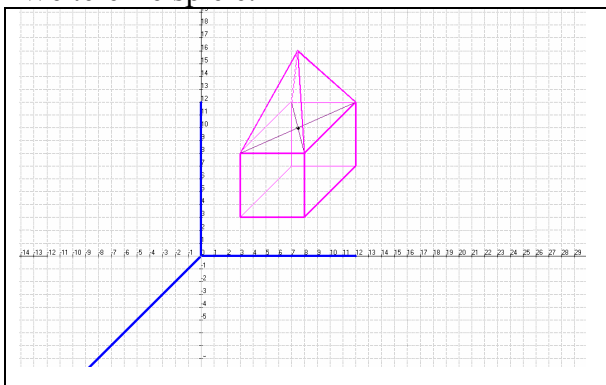


Bild 4a

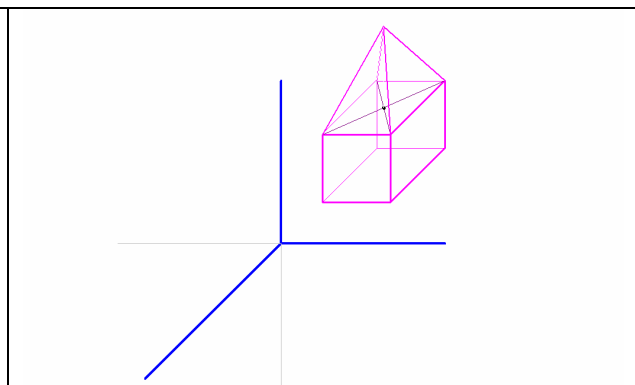


Bild 4b

Aufgaben

Aufgabe 1: Zeichne ein Schrägbild für das Haus - allgemeiner: Um was für einen Körper handelt es sich? - Hinweis: Ggf. kann man auch zumindest für einige Punkte angeben, welche man verbinden sollte.

Bekannt seien die folgenden Punkte

P1(5,7,-5) P2(5,7,5) P3(5,-7,5) P4(5,-7,-5) P5(-5,7,-5)

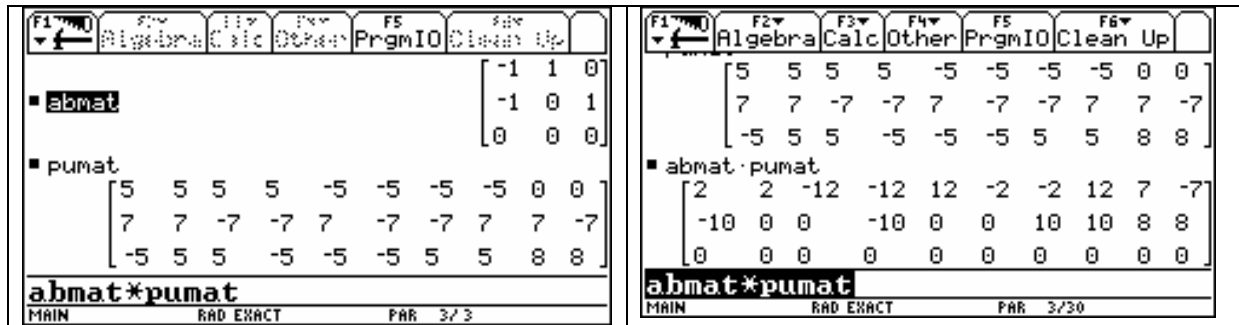
P6(-5,-7,-5) P7(-5,-7,5) P8(-5,7,5) P9(0,7,8) P10(0,-7,8),

zusammengefasst in der Punktematrix $P_{(3,10)}$.

Bearbeitung:

Zur Erstellung eines Schrägbilds benutzen wir die schon oben verwendete Matrix

$A = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ und berechnen die Matrix $A_{(3,3)} * P_{(3,10)}$ bzw. $abmat * pumat$ (siehe unten)



Die gewonnenen Punkte im R2 werden in das Koordinatensystem eingetragen.

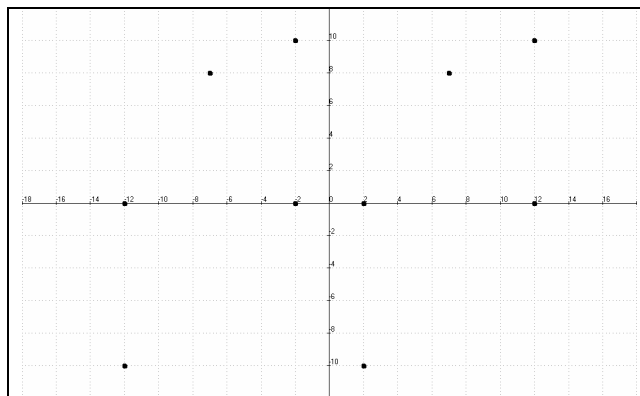


Bild 6

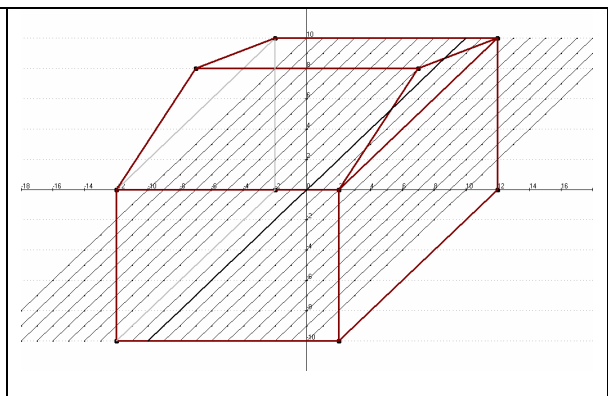


Bild 7

Das wird schwierig! Welche Punkte soll man verbinden? - Mit einiger Mühe (Blick auf eventuelle erkennbare Symmetrien von Punkten und Flächen) könnte man zu Bild kommen – offenbar ein Haus mit Dach. Vielleicht war die Abbildungsmatrix schlecht gewählt? Eine Verbesserung erreicht man aber schon durch Ausblenden des Koordinatensystems. – Und dann etwas nach rechts drehen, z.B. als Transformation in ANIMATO mittels

$$fx \rightarrow fx \cdot \cos(-0.5) - fy \cdot \sin(-0.5),$$

$$fy \rightarrow fx \cdot \sin(-0.5) + fy \cdot \cos(-0.5) \text{ (Drehung um den Bogen } 0.5)$$

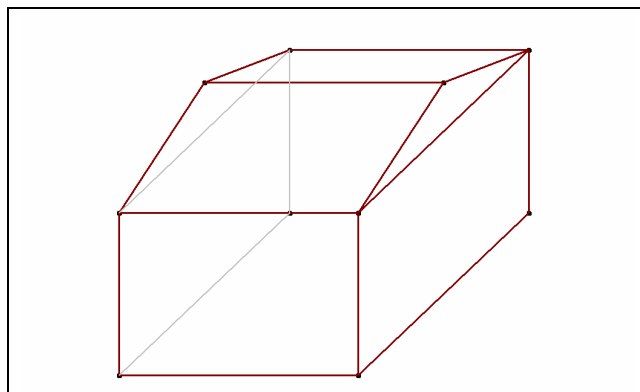


Bild 8

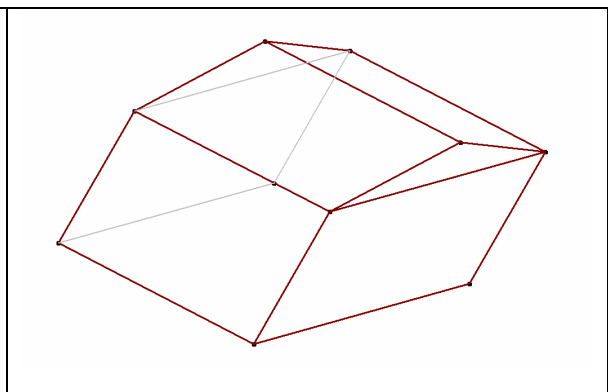


Bild 9

Aufgabe 2

Experimentieren Sie mit den folgenden Abbildungsmatrizen M , indem Sie die Wirkung der Matrizen auf ein Objekt untersuchen, also $Objekt_{neu} = M * Objekt_{alt}$.

$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$	
$\begin{pmatrix} \cos(t) & 0 & -\sin(t) \\ 0 & 1 & 0 \\ \sin(t) & 0 & \cos(t) \end{pmatrix}$ <p>Drehung um die y-Achse</p>	$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos(t) & \sin(t) \\ 0 & -\sin(t) & \cos(t) \end{pmatrix}$ <p>Drehung um die x-Achse</p>	$\begin{pmatrix} \cos(t) & -\sin(t) & 0 \\ \sin(t) & \cos(t) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ <p>Drehung um die z-Achse</p>	

Schrägbilder bewegen**Drehungen des Quaders mit Hilfe einer Drehmatrix**

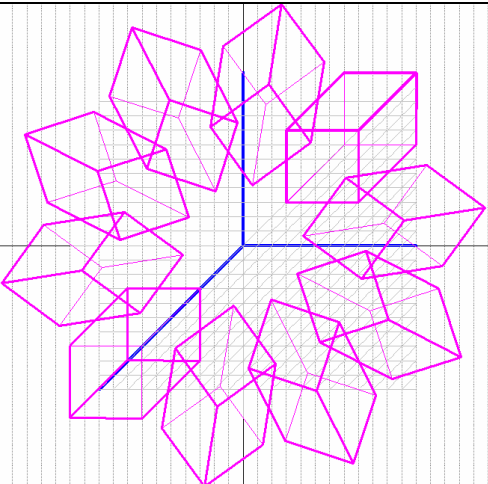
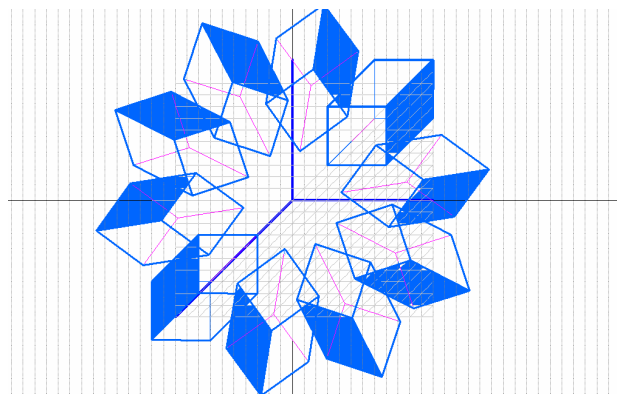
 <p>Software: ANIMATO</p>	<p>Abbildung des obigen Quaders mit Hilfe der Drehmatrizen</p> $\begin{pmatrix} \cos(v) & -\sin(v) \\ \sin(v) & \cos(v) \end{pmatrix}$ <p>mit v aus $[0, 6.28]$, Schrittweite = .628.</p> <p>Tipp für die Animation: Die einzelnen Quader langsam erscheinen lassen!</p> <p><i>Datei</i> <i>Kosy-3d-Quader-1-Drehungen.pl2</i></p>
---	--

Bild 10



AG 2.2 Abbilden mit (3,3)-Matrizen

Das Thema wird hier anhand einer Abitur-Klausuraufgabe angegangen, gestellt 2001 (noch nicht Zentralabitur). In dem Lösungsvorschlag werden auch die Möglichkeiten des Computereinsatzes deutlich.

Thematik: Lineare Algebra / Matrizen, Analytische Geometrie / lineare Abbildung, Fixgerade, Dreiecke

Eine Klausuraufgabe

Gegeben ist die lineare Abbildung $\vec{x}' = M \cdot \vec{x}$ mit $M = \begin{pmatrix} 5 & 2 & 10 \\ 10 & 2 & 21 \\ 2 & -3 & 2 \end{pmatrix}$.

a) Zeigen Sie, dass die Gerade $g: \vec{r} = t \begin{pmatrix} -2 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$ durch M auf sich selbst abgebildet wird.

b) Untersuchen Sie, ob M weitere Fixelemente besitzt.

c) Gegeben ist das Dreieck D mit A(4, 2, -2), B(-10, -5, 5), C(3, 4, -2).

c1) Untersuchen Sie die Lage der Punkte zur Geraden g.

c2) Zeichnen Sie g und D in das beliebige Koordinatensystem.

c3) Zeigen Sie, dass D rechtwinklig bei A ist, und berechnen Sie den Flächeninhalt von D.

d) Gegeben ist das Dreieck D aus Teil c.

d1) Dreieck D wird mit der Matrix M abgebildet. Wie heißen die Koordinaten der Eckpunkte des neuen Dreiecks D'?

Lösungen

Zu a) und b)

The calculator screen shows the matrix M defined as:

$$M = \begin{pmatrix} 5 & 2 & 10 \\ 10 & 2 & 21 \\ 2 & -3 & 2 \end{pmatrix}$$

Below the matrix, the vector r is defined as:

$$r = t \begin{pmatrix} -2 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

The bottom of the screen shows the equation $0 \text{ and } 2*x - 3*y + z = 0, \langle x, y, z \rangle$.

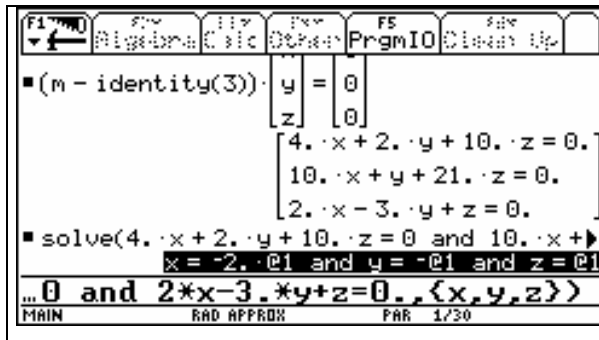
Eingabe von M und Eingabe von r.

The calculator screen shows the result of the matrix multiplication $M \cdot r$:

$$M \cdot r = \begin{pmatrix} -2 \cdot t \\ -t \\ t \end{pmatrix}$$

The bottom of the screen shows the equation $0 \text{ and } 2*x - 3*y + z = 0, \langle x, y, z \rangle$.

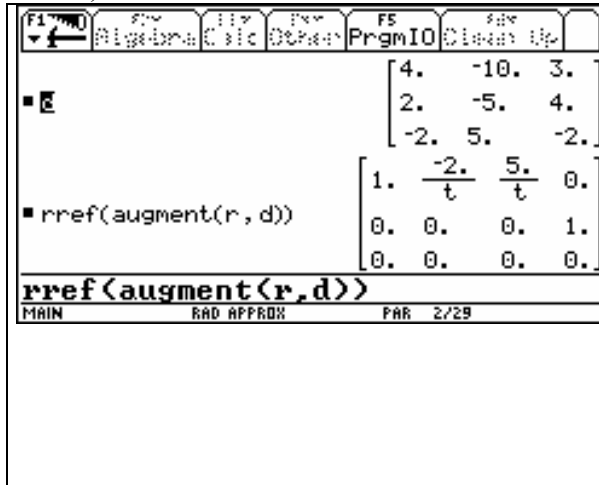
$M \cdot r$ gibt die Antwort, dass r tatsächlich eine Fixgerade ist, da sich ja wieder r ergibt.



Mit dem Ansatz $\vec{x} = M \cdot \vec{x}$ bzw $(M - E) \cdot \vec{x} = \vec{0}$ kann nach weiteren Fixelementen gesucht werden. Das homogene LGS ergibt nur die Lösung

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2t \\ -t \\ t \end{pmatrix} \text{ und das ist gerade wieder nur g.}$$

Zu c1)



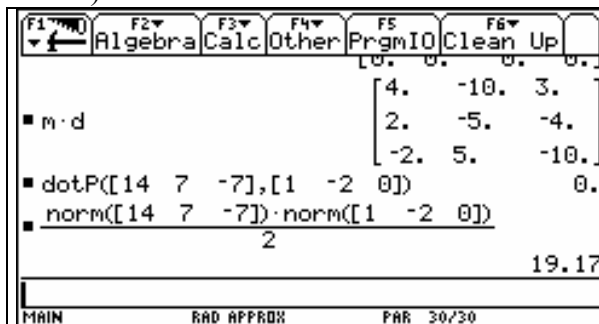
Die Punkte werden als Matrix D eingegeben.

Augment hängt die beiden Matrizen r und D aneinander. Mit rref werden nun drei Gleichungen in t auf einmal bearbeitet, nämlich z.B. für den Punkt A:

$$\begin{pmatrix} -2t \\ -t \\ t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \\ -2 \end{pmatrix} \text{ . Dieses System hat die Lösung}$$

$1 = -2/t$, also $t = -2$, siehe Spalten 1 und 2. A liegt also auf g für den Wert $t = -2$. Entsprechendes gilt für B ($t = 5$). Aber für C gibt es keine Lösung, da $1=0$ bzw. $0=1$ falsche Aussagen sind.

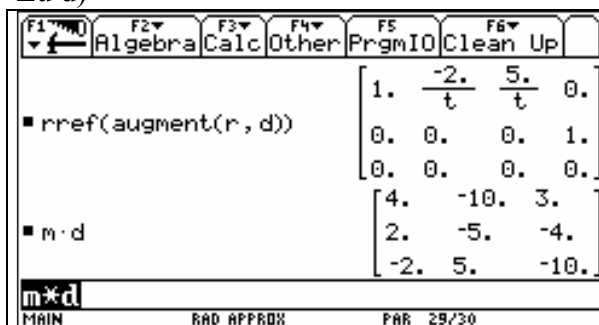
Zu c3)



Hier werden zunächst die Vektoren $\vec{a} - \vec{b}$ und $\vec{a} - \vec{c}$ gebildet.

Daraus können dann das Skalarprodukt (hier = 0, also bei A rechter Winkel) und der Flächeninhalt von D berechnet werden. Dieser beträgt 19.17 Flächeneinheiten.

Zu d)



Zur Berechnung von D' wird M*D gebildet.

Die Ausgabe bestätigt frühere Ergebnisse. A und B bleiben fest, aber das Bild von C liegt nicht auf g.

Vom Kreis zur Banane

AG 2.3 Koordinatentransformationen visualisieren

- **Koordinatensysteme**
- **Transformieren eines Quaderschrägbilds**
- **Der Schiefe Turm von Frankfurt – Transformieren eines Zylinders**
- **Vom Kreis zu Banane – Transformieren mit Polarkoordinaten**
- **und Anderes**

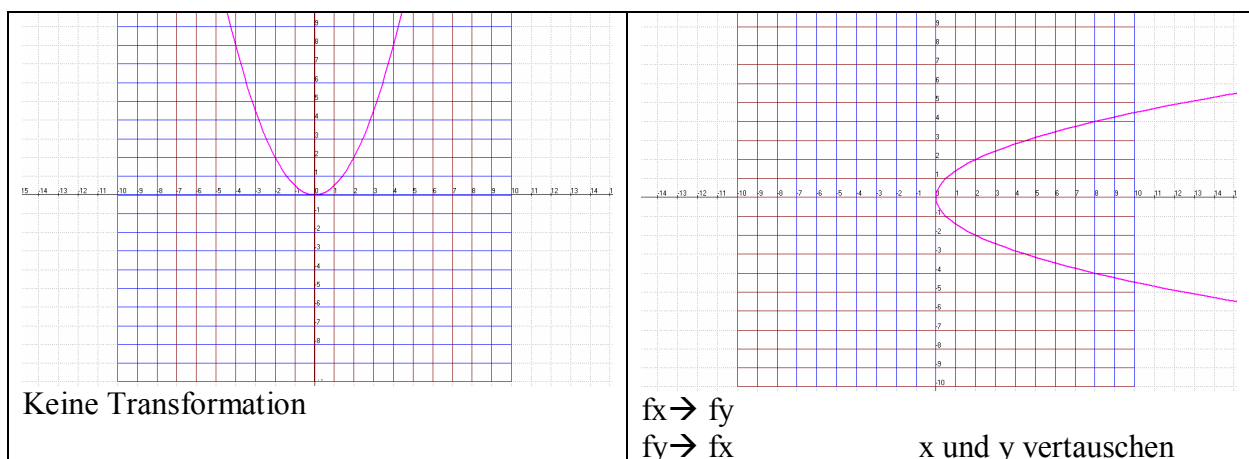
AG 2.3.1 Transformieren, Koordinatensysteme

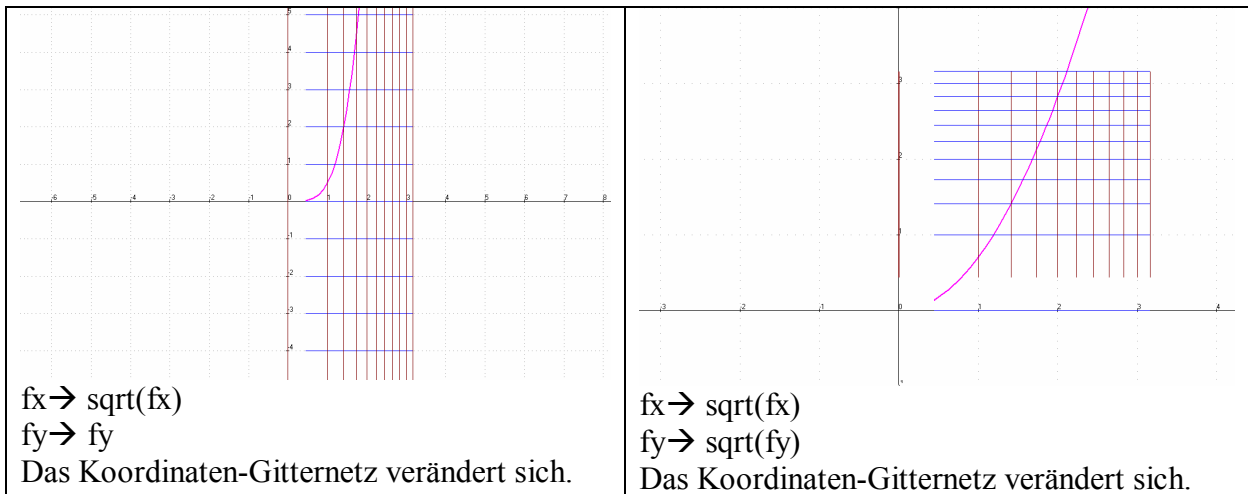
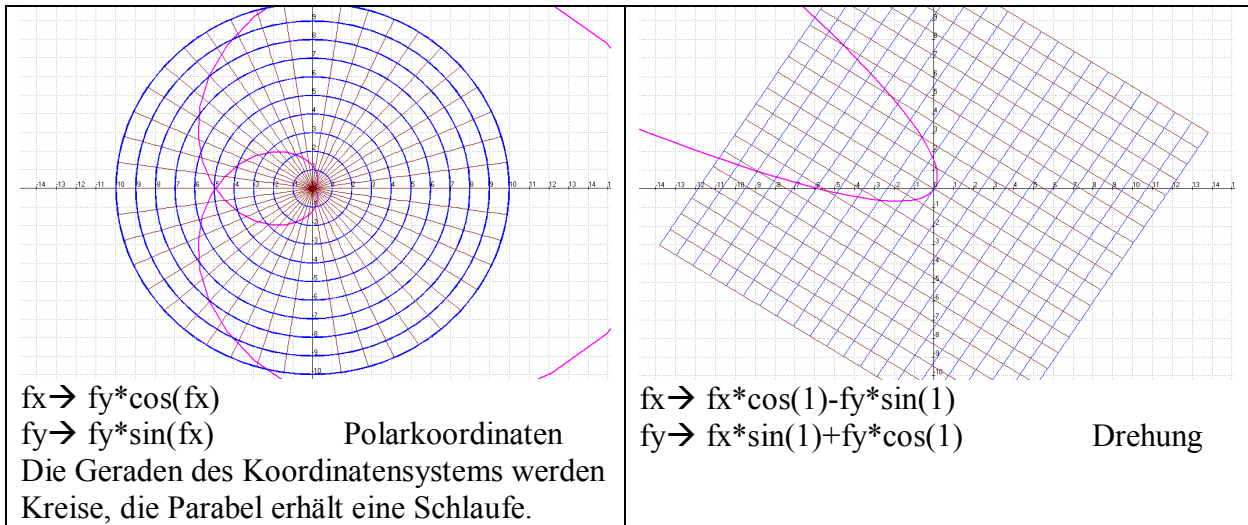
Häufig ist es angebracht, mathematische Objekte zu transformieren (abzubilden), um damit andere Ansichten, ja auch ganz andere Visualisierungen zu erzeugen. Benutzt werden dazu **Transformationsgleichungen**, mit denen man die Koordinaten eines Objektes in Bildkoordinaten umrechnen kann. Da man die Transformationsgleichungen sehr verschieden gestalten kann (ein weites Gebiet auch für Unterrichtsprojekte) erlebt selbst der Mathematiker manche Überraschung – siehe z.B. unten „Vom Kreis zu Banane“. Diesem Problemkreis wollen wir uns jetzt ausführlicher zuwenden. Derartige Transformationen gleich ganzer Objektzusammenstellungen (Families) kann man mit ANIMATO leicht durchführen und visualisieren.

Fachliche Kompetenzen: Transformationen

- **durchführen können, dazu geeignete Transformationsgleichungen benutzen und das Ergebnis analysieren**
- **von Koordinatensystemen durchführen können,**
- **entwerfen können,**

Wie sieht ein Graph aus, wenn wir Transformationen anwenden? Wie verändern sich Koordinatensysteme?





Transformationen bei ANIMATO

Man kann unter der Option „Transformation“ auf der „Einstellungen“-Seite unter drei Unteroptionen, nämlich - Keine – Benutzerdefiniert – Polarkoordinaten auswählen. Dabei werden alle Terme in der Funktionsfolie so transformiert:

- Erster Term einer Eintragung $fx \rightarrow$ Transformationsterm,
- zweiter Term einer Eintragung $fy \rightarrow$ Transformationsterm.

Wenn nur ein Term in der Eintragung vorhanden ist, wird er als fy angenommen. Der nicht sichtbare Term ist dann $fx = x$.

In der Maske „Einstellungen“: Transformation		
Keine	Benutzerdefiniert (selbst definierbar) z.B. für Drehung $fx \cdot \cos(\alpha) - fy \cdot \sin(\alpha)$, $fx \cdot \sin(\alpha) + fy \cdot \cos(\alpha)$ α kann man unter „Funktionen“ definieren	Polarkoordinaten (schon vordefiniert) $fy \cdot \cos(\alpha)$, $fy \cdot \sin(\alpha)$, bedeutet ausführlich $fx \rightarrow fy \cdot \cos(\alpha)$, $fy \rightarrow fy \cdot \sin(\alpha)$

Auch hier ist der Einsatz von Matrizen nützlich, z.B. bedeuten die obigen Terme für die Drehung bzw. für Polarkoordinaten:

$$\begin{pmatrix} \cos(v) & -\sin(v) \\ \sin(v) & \cos(v) \end{pmatrix} * \begin{pmatrix} fx \\ fy \end{pmatrix} \text{ und } \begin{pmatrix} \cos(fx) & 0 \\ \sin(fx) & 0 \end{pmatrix} * \begin{pmatrix} fy \\ fy \end{pmatrix}.$$

Was geschieht bei den Transformationen?

Die Einträge unter „*Funktionen*“ haben bei ANIMATO alle die Form fx , fy . So kann z.B. stehen

$f2: \cos(x), x^2$. In diesem Fall ist dann $fx = \cos(x)$, $fy = x^2$. Sollte nur stehen

$f3: \sin(x)$, so wird automatisch $f3: x, \sin(x)$ angenommen, so dass hier $fx = x$ und $fy = \sin(x)$.

Wählt man nun eine *Transformation*, z.B. **benutzerorientiert** $fx-2, fx+1$, so werden alle Objekte auf der Funktionsseite entsprechend transformiert, also in diesem Fall um 2 nach links und 1 nach oben verschoben, siehe Bilder 1a, 1b.

Wie wirkt sich das bei den Termen aus?

Der Eintrag $f2: x, 0.5x^2$ wurde intern zu

$$f2_{\text{neu}}: x-2, 0.5x^2 + 1.$$

Entsprechend ist es bei der Ellipse und bei der Geraden.

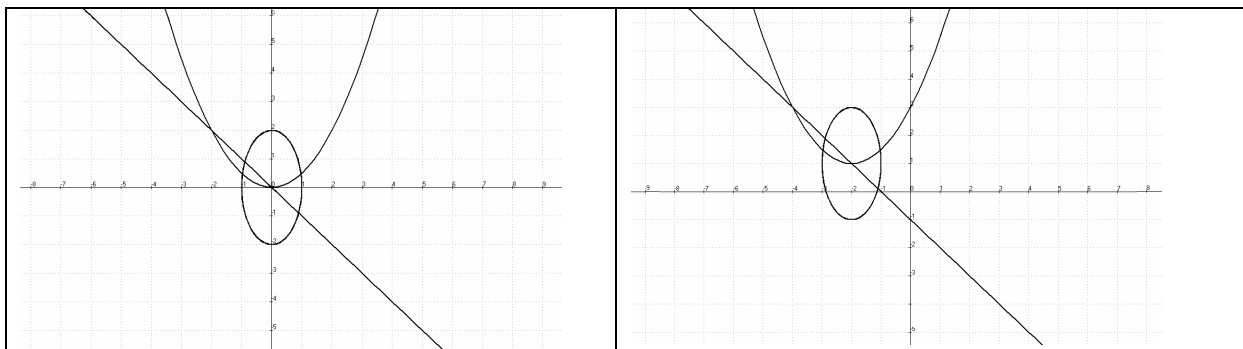
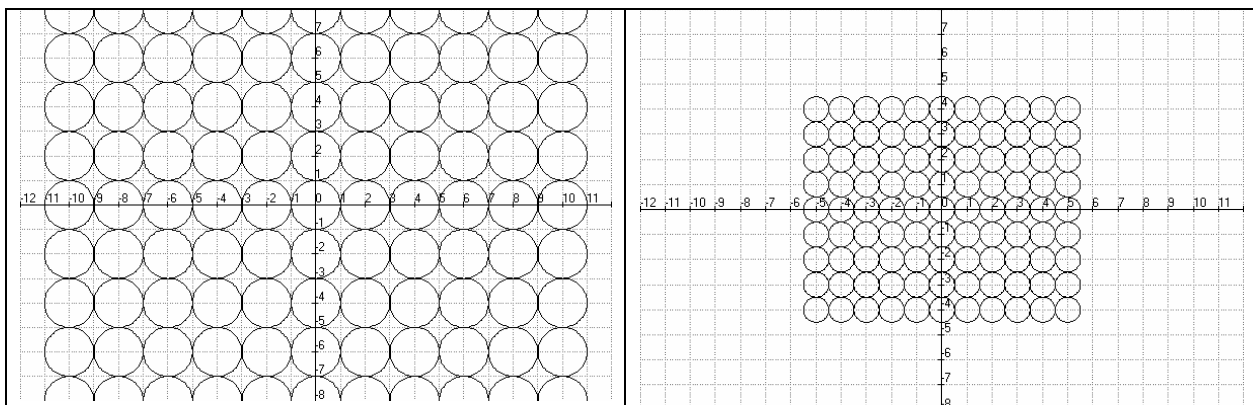


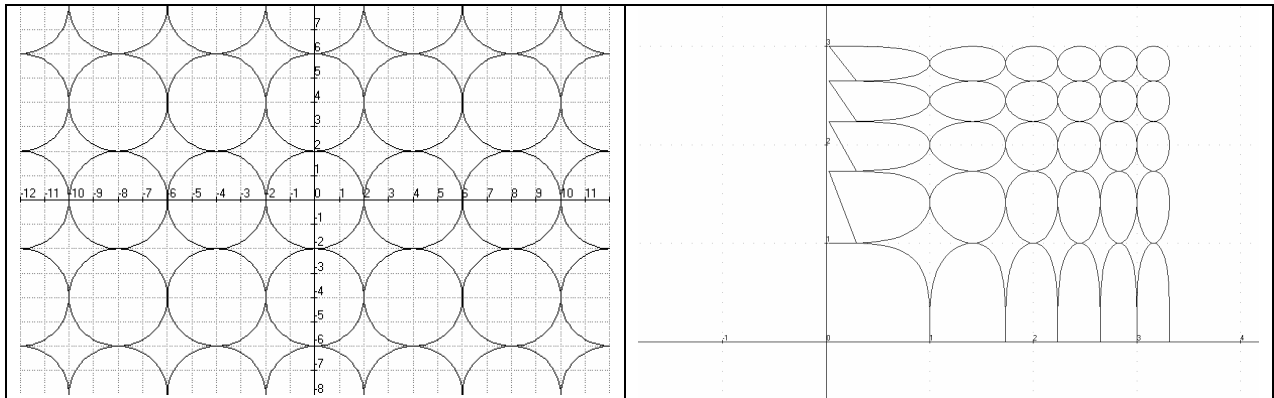
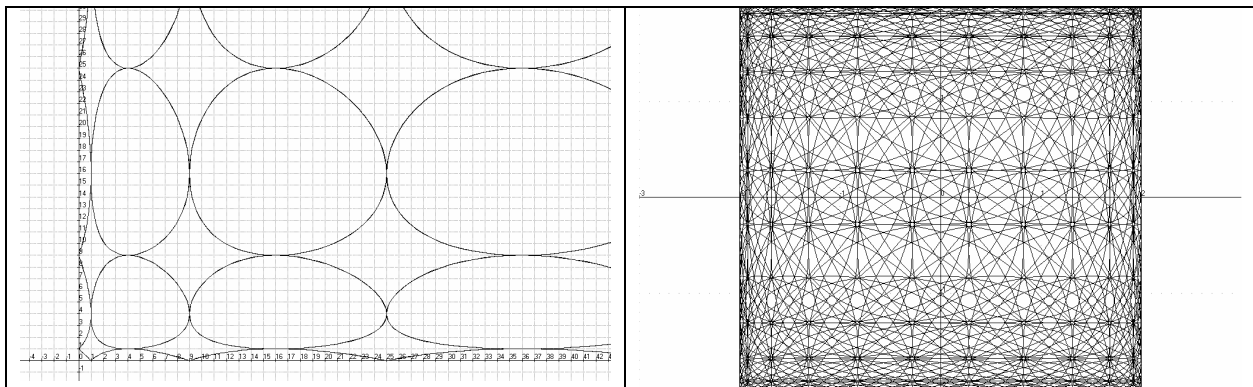
Bild 1a

Bild 1b

Muster Verkleinern – Vergrößern – Radizieren – Quadrieren – und mehr

An Mustern kann man besonders gut die Auswirkungen von Transformationsgleichungen beobachten. Dabei können interessante neuartige Formen entstehen.

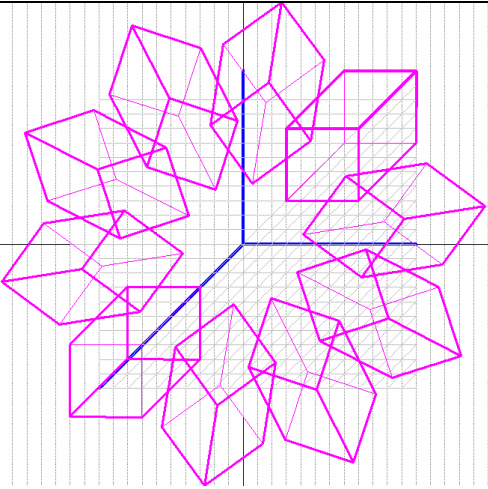
Originalmuster fx, fy Verkleinert $fx/2, fy/2$

Vergrößern $2fx$, $2fy$ Radizieren \sqrt{fx} ; \sqrt{fy} Vergrößern fx^2 , fy^2 $2\sin(fx)$, $2\sin(fy)$

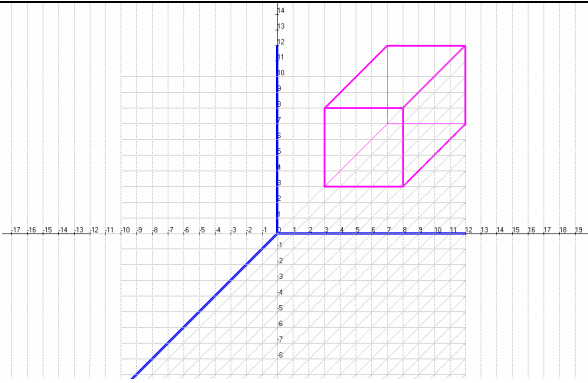
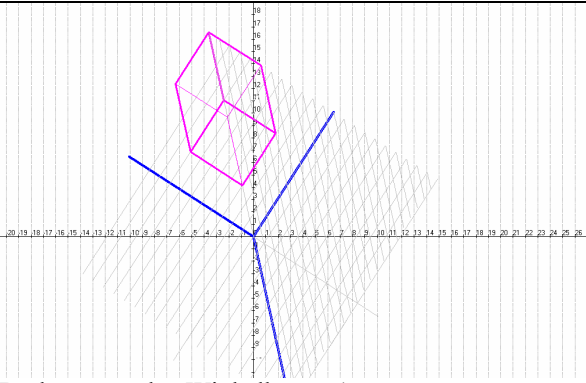
Auf diese Weise lassen sich mit ANIMATO auf sehr einfache Weise (nur durch Angabe der Transformationsgleichungen) alle in der Funktionsmaske notierten Terme gleichzeitig abbilden.

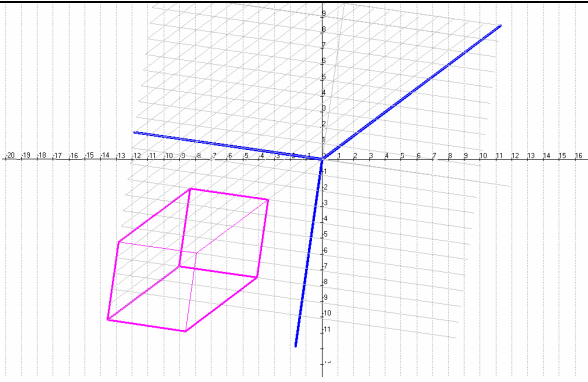
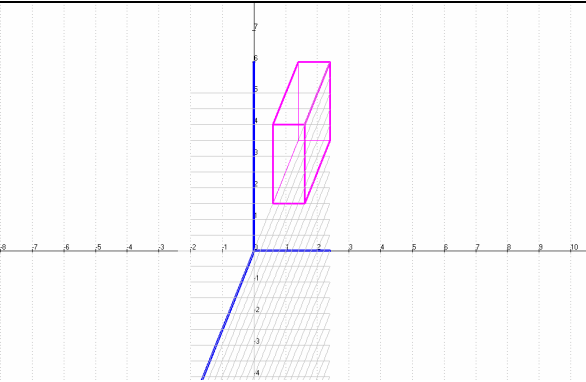
AG 2.3.2 Transformieren eines Quader-Schrägbilds

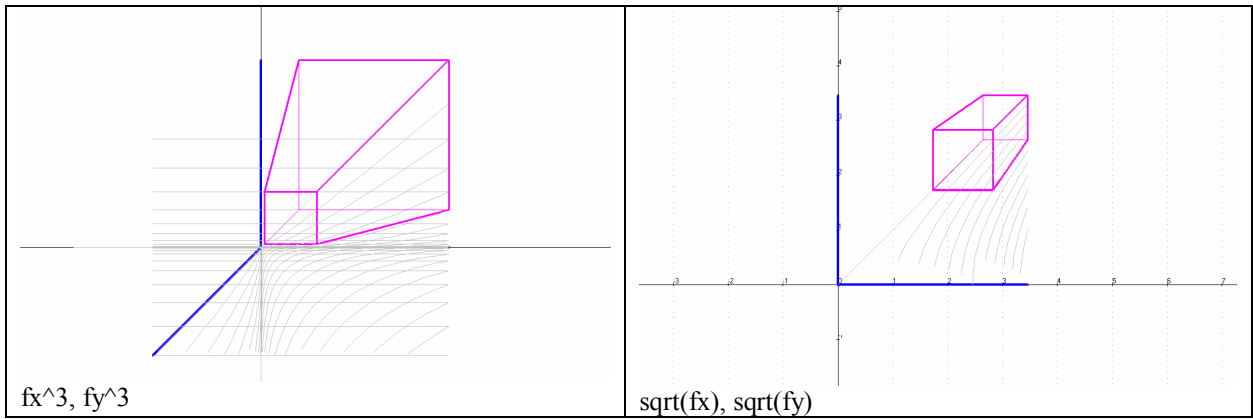
Drehungen

	<p>Abbildung eines Quaders mit Hilfe der Drehmatrizen</p> $\begin{pmatrix} \cos(v) & -\sin(v) \\ \sin(v) & \cos(v) \end{pmatrix}$ <p>mit v aus $[0, 6.28]$, Schrittweite = .628.</p> <p>Tipp zur Animation: Die einzelnen Quader langsam erscheinen lassen!</p> <p><i>Datei</i> <i>Kosy-3d-Quader-1-Drehungen.pl2</i></p>
<p>Software: ANIMATO Bild 2</p>	

Weitere Transformationen eines Quaders / Würfels

 <p>Original</p>	 <p>Drehung um den Winkelbogen 1</p>
---	--

 <p>Drehung um den Winkelbogen 3</p>	 <p>fx/5, fy/2</p>
---	--



AG 2.3.3 Der schiefe Turm von Frankfurt – Transformationen eines Zylinders

Im Bildhintergrund sieht man ein zylindrisches Gebäude in Frankfurt a.M. Hier wird gezeigt, wie man Bilder in den Hintergrund legen und auf diesen arbeiten kann. Hierfür stellt ANIMATO eine leicht zugängliche Option zur Verfügung (Seite *Einstellungen*). Es werden verschiedene Bildformate wie .jpg, .bmp usw. unterstützt (siehe Dokumentation von ANIMATO).

	<p>Die Terme in ANIMATO</p> <p>f1: $2\cos(t)+6,0.5\sin(t)-4.8$ f2: $2\cos(t)+6,0.5\sin(t)+4.0$ f3: $2\cos(t)+6,0.5\sin(t)-4.8, 2\cos(t)+6,0.5\sin(t)+4.0$</p> <p>Die einzelnen Terme werden in der Animation mit unterschiedlichen passenden Laufbereichen von t versehen. f3 zeichnet Verbindungsstrecken zwischen den Ellipsenpunkten, für die eine Anzahl von 36 gewählt wurde.</p>
--	--

Bild 3a: Datei Zylinder und Bruder.pl2 (jpg, avi)

	<p>Die Verschiebung des Zylinders ist leicht bewerkstelligt.</p> <p>→ Transformation: $fx-7, fy$</p> <p>bzw.</p> $\begin{pmatrix} fx \\ fy \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 \\ 0 \end{pmatrix}$
--	---

Bild 3b: Den Zylinder verschieben

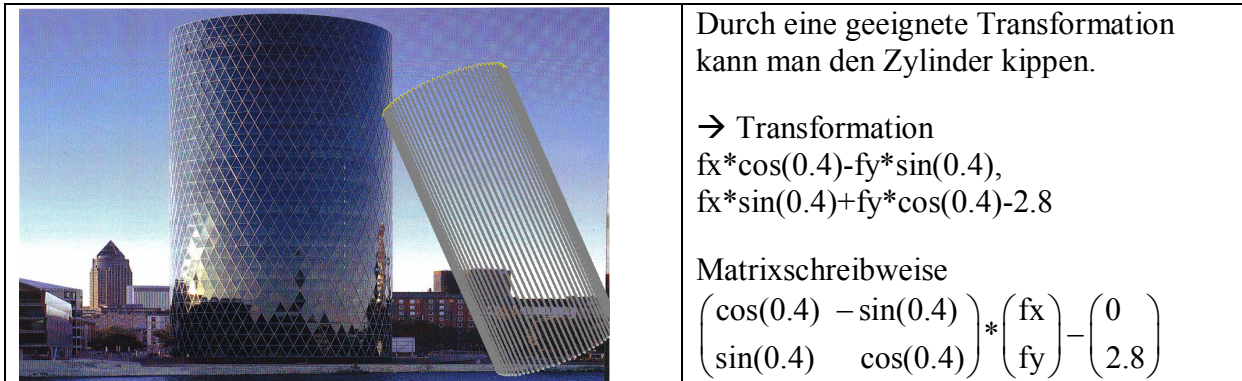
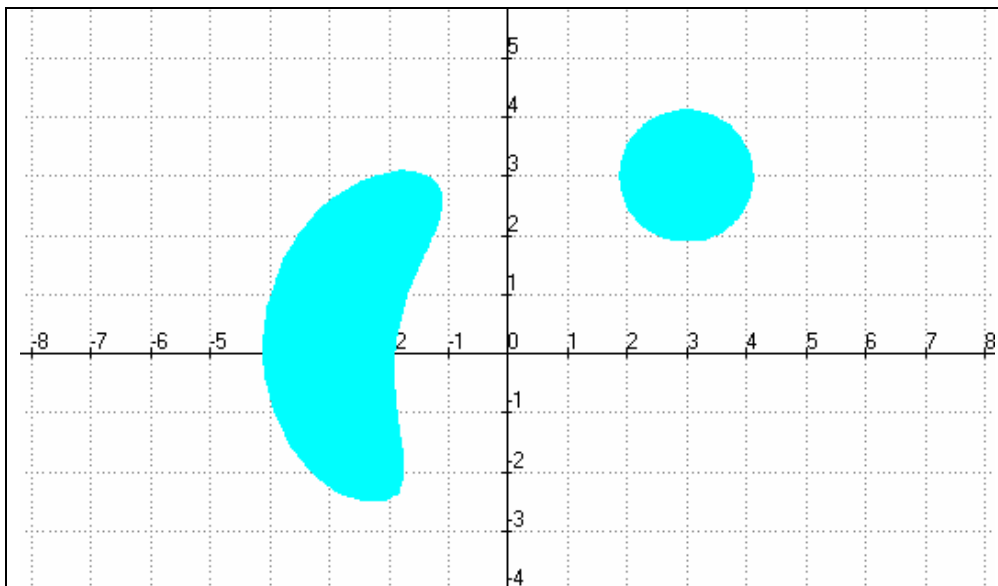


Bild 3c: Den Zylinder kippen

Aufgabe: Erproben Sie weitere Transformationen, u.a. auch „Polarkoordinaten“.

AG 2.3.4 Vom Kreis zur Banane – mit Polarkoordinaten



Vom Kreis zur Banane

Computeralgebrasysteme (CAS) und andere Software haben es möglich gemacht, Visualisierungen nicht nur im gängigen kartesischen Koordinatensystem durchzuführen, sondern beispielsweise auch in Parameterdarstellungen oder Polarkoordinaten. Allerdings werden dabei die Transformationen zwischen den einzelnen Systemen kaum einmal nutzbringend für den Mathematikunterricht eingesetzt. - Oben wurde bereits auf die Transformation mittels Polarkoordinaten hingewiesen. Dieser Vorgang soll nun genauer untersucht werden.

Polarkoordinaten (in ANIMATO schon vordefiniert) $fy \cdot \cos(fx)$, $fy \cdot \sin(fx)$,

d.h. $fx \rightarrow fy \cdot \cos(fx)$ und
 $fy \rightarrow fy \cdot \sin(fx)$.

Bei der Transformation wird also fx als Winkel und fy als Radius betrachtet. fx , fy erhält also die Bedeutung Winkel, Radius, so wie man es bei Polarkoordinaten braucht, siehe Abbildung.

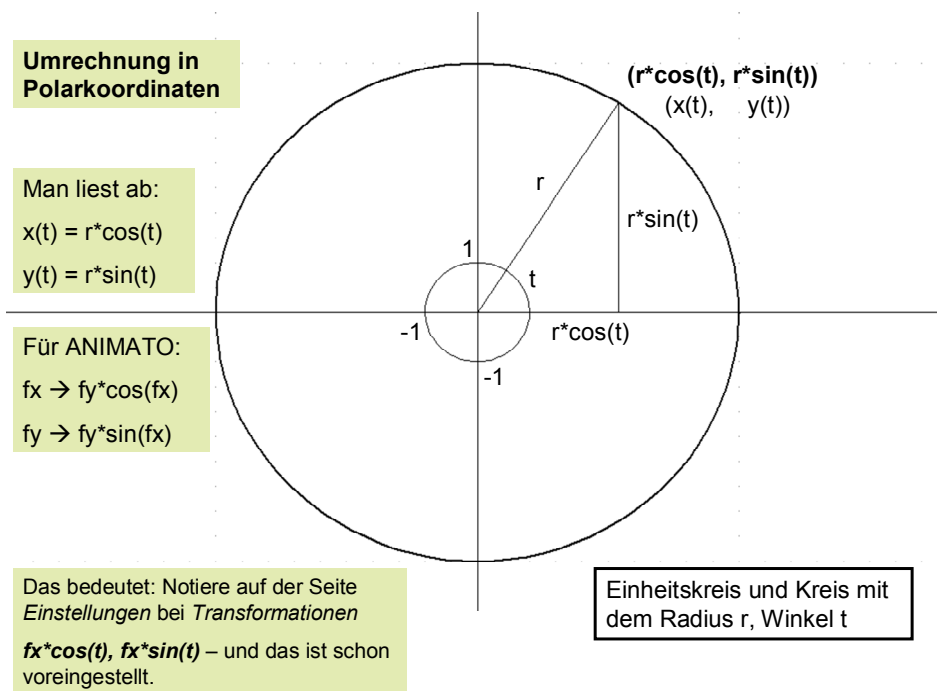


Bild 4: Zusammenhang zwischen kartesischen und Polarkoordinaten

Hinweis:

<p>Das bedeutet: Notiere auf der Seite <i>Einstellungen bei Transformationen</i> $f_y \cdot \cos(f_x)$, $f_y \cdot \sin(f_x)$ – und das ist schon voreingestellt.</p> <p>Durch diese Einstellung werden alle auf der Seite „Funktionen“ eingestellten Paare f_x, f_y transformiert.</p>	<p>Will man dagegen nur ein einzelnes Paar f_x, f_y polar darstellen, so wählt man den folgenden Weg – hier an einem Beispiel:</p> <p>$f_5: t$, 2^t wird ersetzt durch $f_5: 2^t \cdot \cos(t)$, $2^t \cdot \sin(t)$</p>
---	--

Die Kontrolle der Abbildung kann so erfolgen, dass man ohne Benutzung der Transformations-einstellung „Polarkoordinaten“ die Terme von f_5 , f_6 , f_7 eingibt, siehe Bild 5.

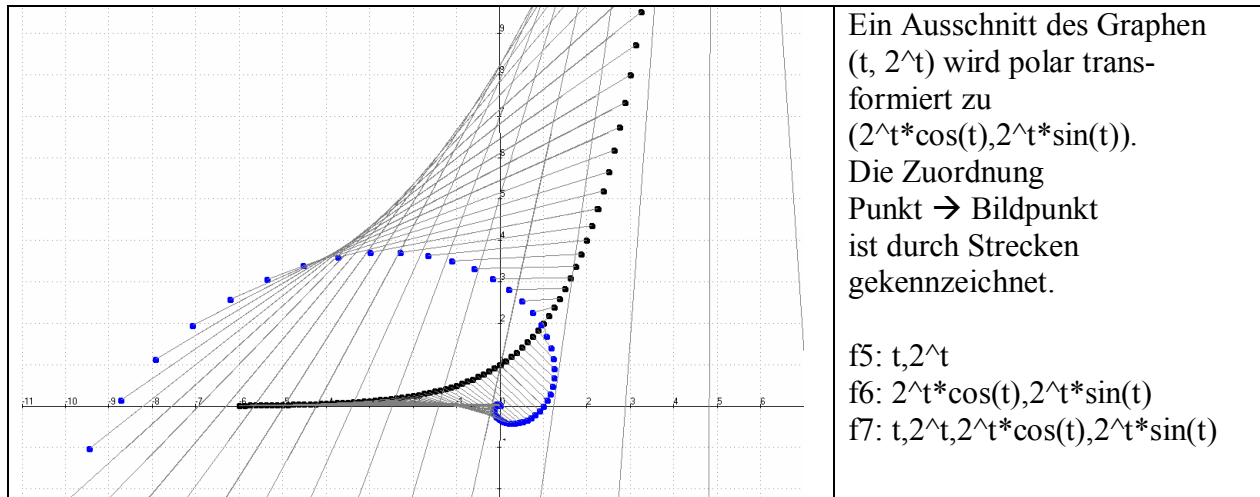


Bild 5

Nun kann die Erforschung von Transformationen in Polarkoordinaten beginnen.

Es wird u.a. den Fragen nachgegangen,

- wie die Visualisierungen von aus dem kartesischen Koordinatensystem gewohnten Termen in anderen Systemen, speziell in Polarkoordinaten erscheinen,
- was wird z.B. aus einer Geraden, was wird aus Kreisen, aus komplexeren Bildern?

Aufgabe 1:

Gegeben sind die Eckpunkte eines im kartesischen Koordinatensystem dargestellten Quadrats: A(-2,-1), B(3,-1), C(3,4), D(-2,4).

Was wird aus dem Quadrat, wenn wir die Werte von A,B,C,D als Polarkoordinaten in der Form (Winkel, Radius) deuten?

Lösung:

Dann wäre z.B. C' (Winkel = 3, Radius = 4) und die Umrechnung würde erfolgen mit:

$$x(t) = r \cdot \cos(t), \text{ also } xC' = 4 \cdot \cos(3) = -3.95\dots$$

$$y(t) = r \cdot \sin(t), \text{ also } yC' = 4 \cdot \sin(3) = 0.56\dots$$

Oder so: C(3, 4) umwandeln in Polarkoordinaten mit Pythagoras

$$r^2 = 3^2 + 4^2 = 25, r = 5$$

$$\tan(d) = y / x, \text{ also } \tan(d) = 4/3, \text{ also } d = \arctan(4/3) = 0.9273 \text{ (Bogenmaß)}, 53.13^\circ \text{ Gradmaß}$$

Kreis mit Radius 5, dann ist d aus 0, 2pi.

Termtafel für Bild 6

Urbildpunkt / Urbild	Bildpunkt / Bildobjekt
f1: -2,-1 A	f2: $-1 \cdot \cos(-2), -1 \cdot \sin(-2)$ A': $x = 0.41\dots$ $y = 0.90\dots$
f3: 3,-1 B	f4: $-1 \cdot \cos(3), -1 \cdot \sin(3)$ B': $x = 0.98\dots$ $y = -0.14\dots$
f5: 3,4 C	f6: $4 \cdot \cos(3), 4 \cdot \sin(3)$ C': $x = -3.95\dots$ $y = 0.56\dots$
f7: -2,4 D	f8: $4 \cdot \cos(-2), 4 \cdot \sin(-2)$ D': $x = -1.66\dots$ $y = -3.63\dots$
f11: $t \cdot 0$ f12: -2,-1,3,-1,3,4,-2,4,-2,-1 Urbild-Strecken zug (Quadrat)	f13: $-1 \cdot \cos(-2), -1 \cdot \sin(-2), -1 \cdot \cos(3), -1 \cdot \sin(3),$ $4 \cdot \cos(3), 4 \cdot \sin(3), 4 \cdot \cos(-2), 4 \cdot \sin(-2),$ $-1 \cdot \cos(-2), -1 \cdot \sin(-2)$ Bild-Strecken zug (kein Quadrat)

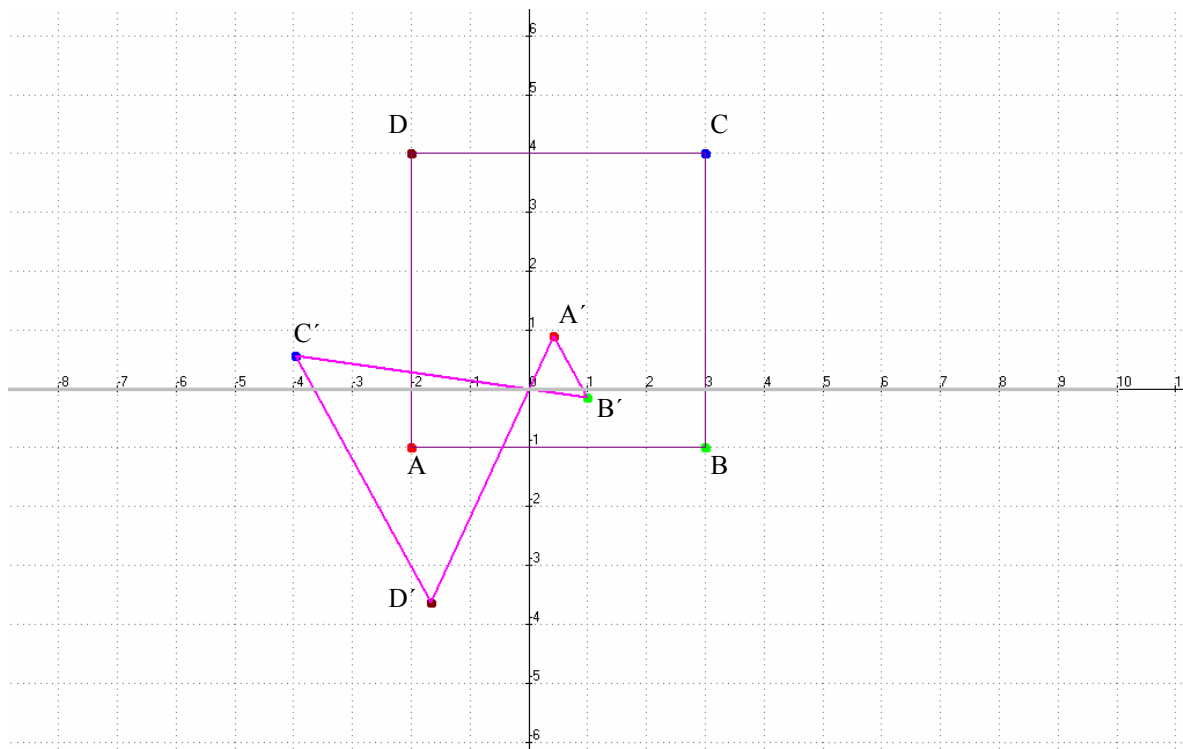


Bild 6: Gleichzeitige Darstellung von Urbild (Quadrat) und Bild (kein Quadrat), Datei: kb1.pl2

Aus den bisherigen Ergebnissen lassen sich bereits einige Abbildungseigenschaften ablesen: Punkt \rightarrow Punkt, Strecke \rightarrow Strecke, Parallelität bleibt nicht erhalten, Winkelgröße bleibt nicht erhalten

Das Notieren und Umrechnen für f2, f4, f6, f8, f13 erweist sich als zeitaufwendig. Wie oben ausgeführt kennt das Programm ANIMATO jedoch eine Einstellung, die die gewünschte Umdeutung und Umrechnung automatisch für alle in der Termtafel notierten Terme durchführt. In diesem Fall sieht die Termtafel wie folgt aus:

<p>Die verkürzte Termtafel für Abbildung 6:</p> <p>f1: -2,-1 Urbild A f3: 3,-1 Urbild B f5: 3,4 Urbild C f7: -2,4 Urbild D f11: t*0 f12: -2,-1,3,-1,3,4,-2,4,-2,-1 Urbild-Strecken- zug (Quadrat)</p>	<p>Und unter <i>Einstellung, Transformation</i> wird gewählt: <i>Polarkoordinaten</i> $[fy*\cos(fx), fy*\sin(fx)]$.</p>
--	---

Dabei steht in den Paaren (fx, fy) der Wert fx für den Winkel und fy für den Radius. Die Festlegung $[fy*\cos(fx), fy*\sin(fx)]$ entspricht der oben notierten Umrechnung $x(t) = r*\cos(t)$, $y(t) = r*\sin(t)$.

Nach dieser Einführung kann man mit anderen Lagen von Punkten experimentieren oder auch gleich zu anderen Objekten übergehen, etwa Geraden, Kreisen, Parabeln usw. Die Experimente werden viele unerwartete Ergebnisse zeitigen.

Wir arbeiten jetzt mit Kreisen weiter. Die Kreise werden nun an verschiedenen Positionen platziert. - Schon das erste Ergebnis lässt spannende Feststellungen erwarten.

Ein Kreis auf Wanderschaft - Planung der Experimente

Einheitskreis

Einheitskreis - verschieben nach rechts und links

Einheitskreis - verschieben nach oben und unten

Einheitskreis - verschieben nach rechts und nach oben

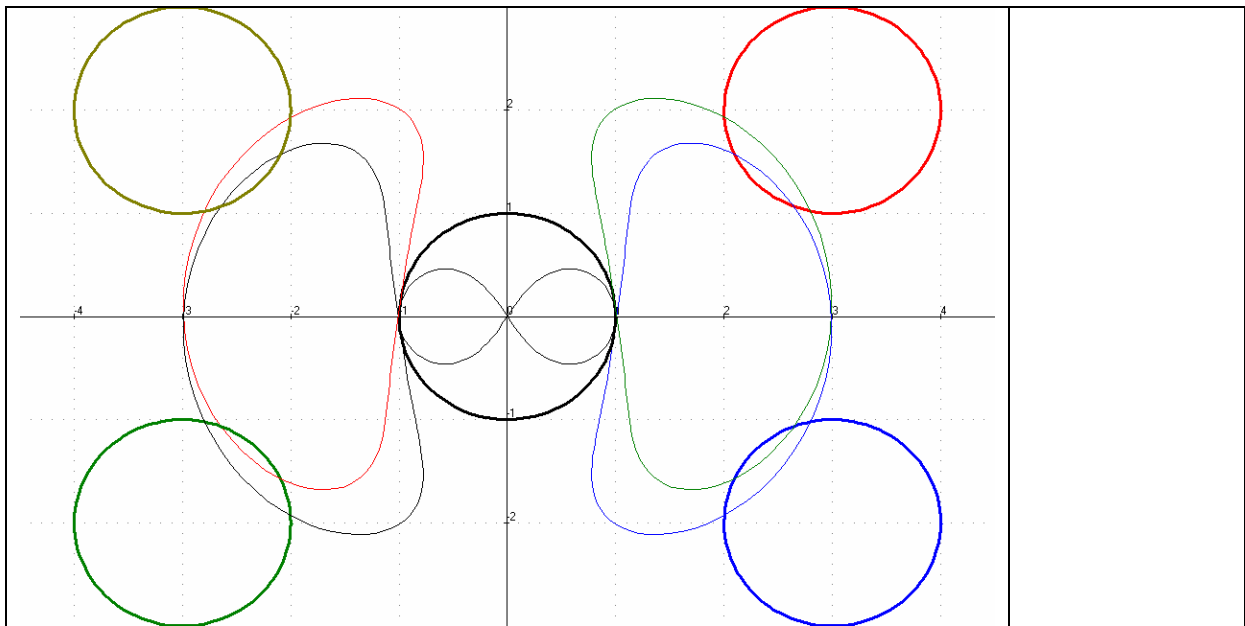
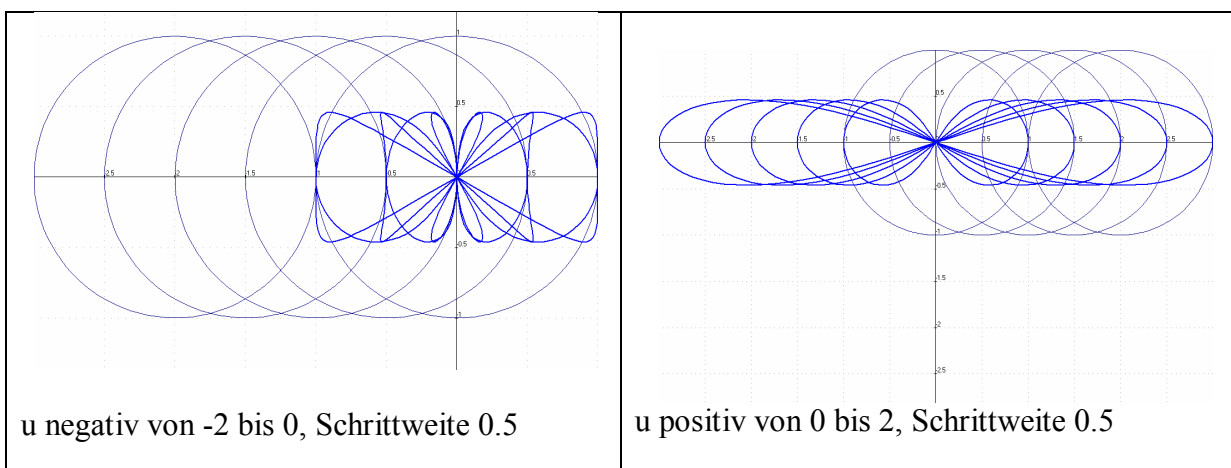


Bild 7

Aufgabe: Welche Graphen sind die Bilder der fünf Kreise? Begründung nicht vergessen!
Lösung siehe Bild 9.

Systematisieren: Kreisscharen auf den Koordinatenachsen - „polarisiert“



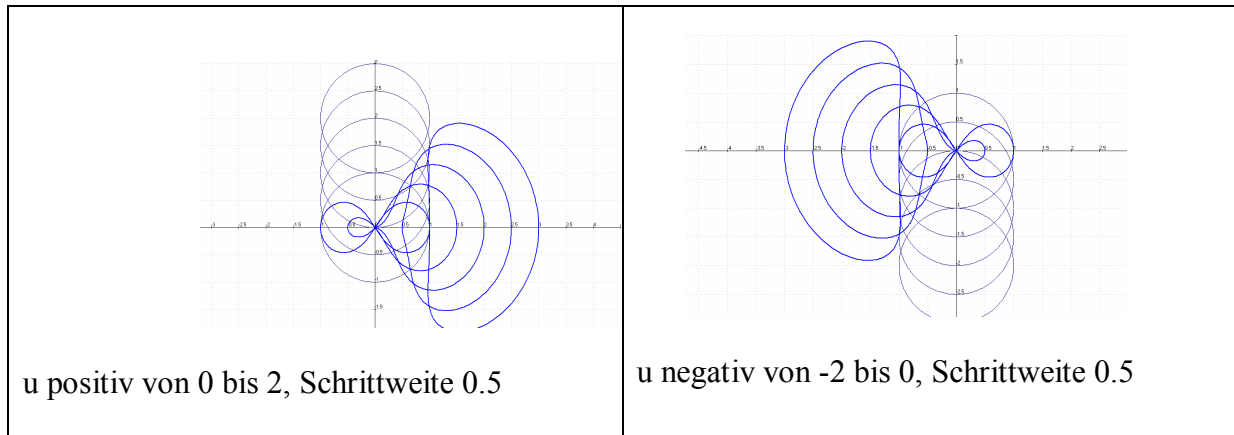


Bild 8

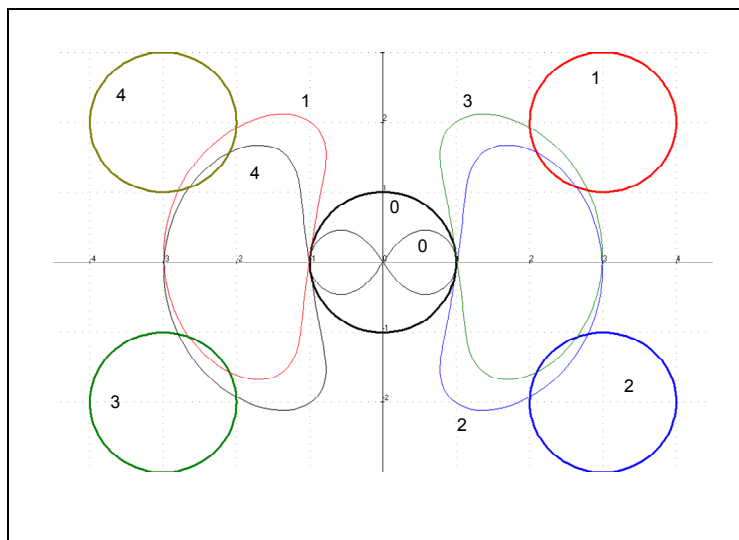


Bild 9: Die Lösung zu Bild 7

Schießscheibe – polar transformiert

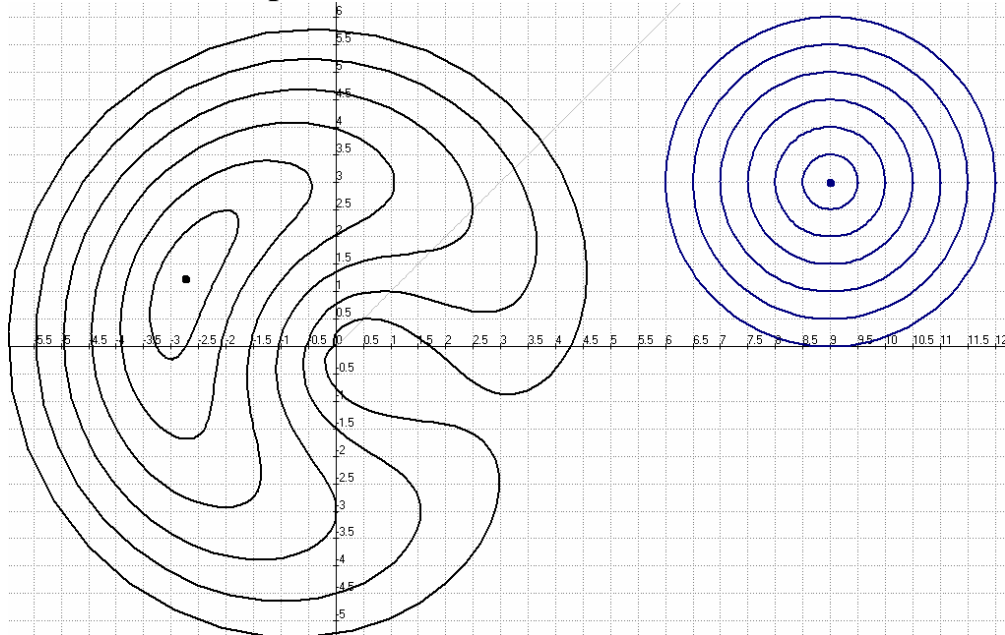


Bild 10: Von der Schießscheibe zur Banane

Auf dem Weg zu mathematischen Kunstwerken

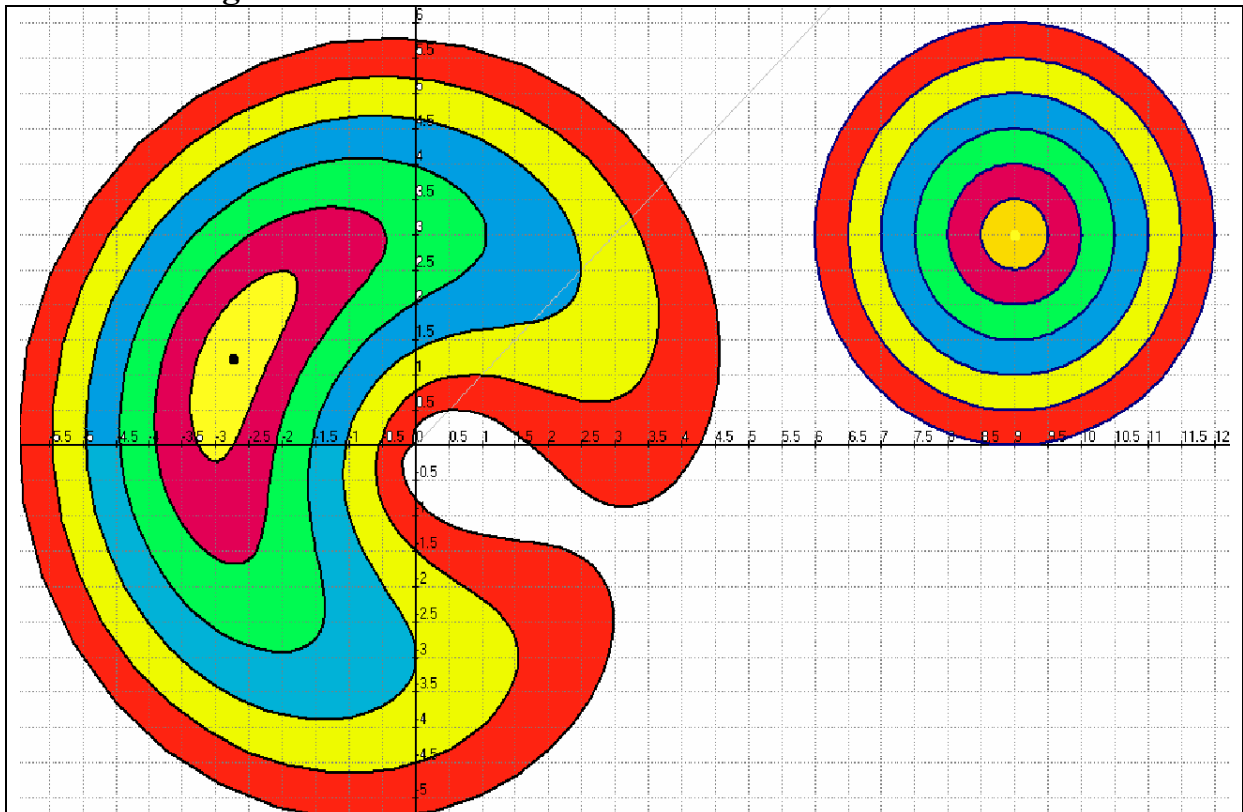


Bild 11: Färben – Kompetenz: Bilder gestalten (Design, Kreativität)

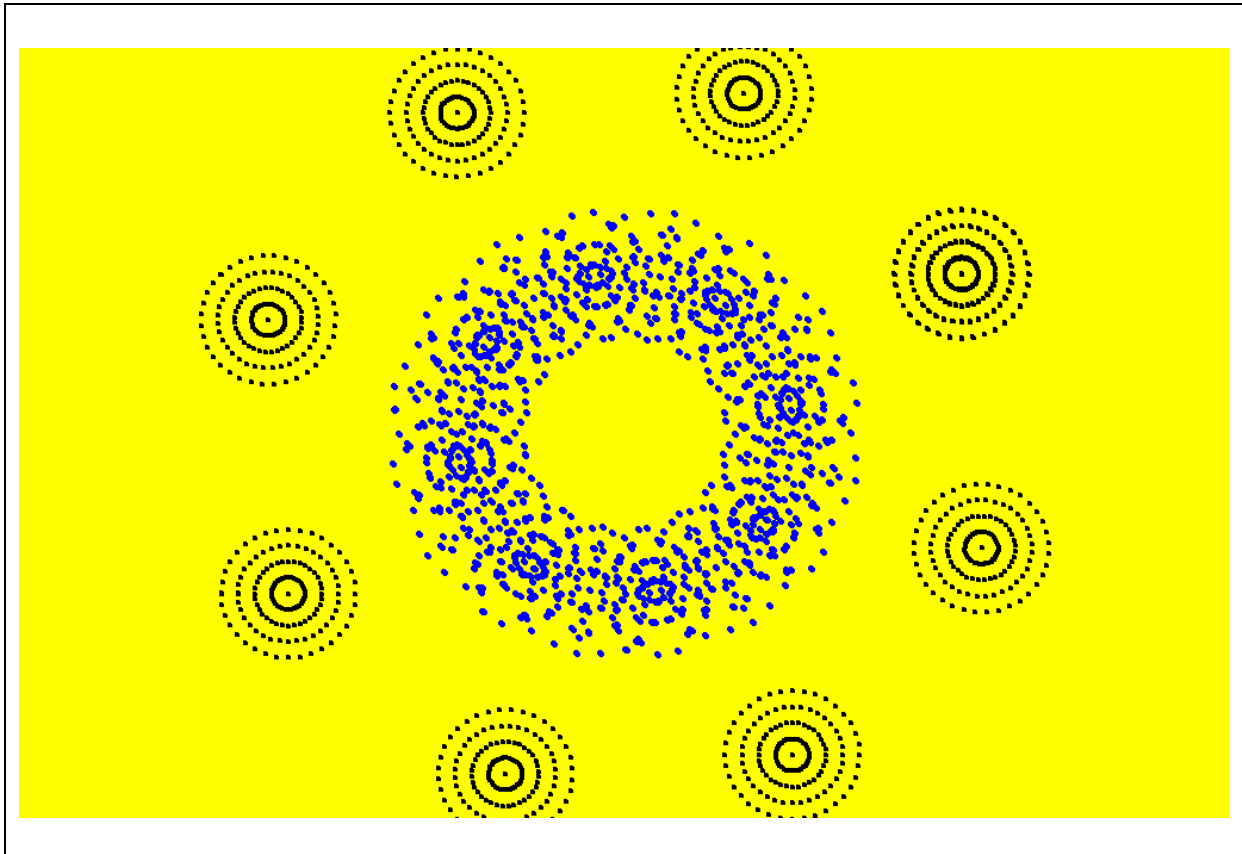


Bild 12: Eine Schießscheibe acht mal drehen und polar transformieren (Punkte nicht verbunden)
 Datei Kreis-Banane-Wanderung3.pl2

Wie ging das anfangs: Kreis in Banane?

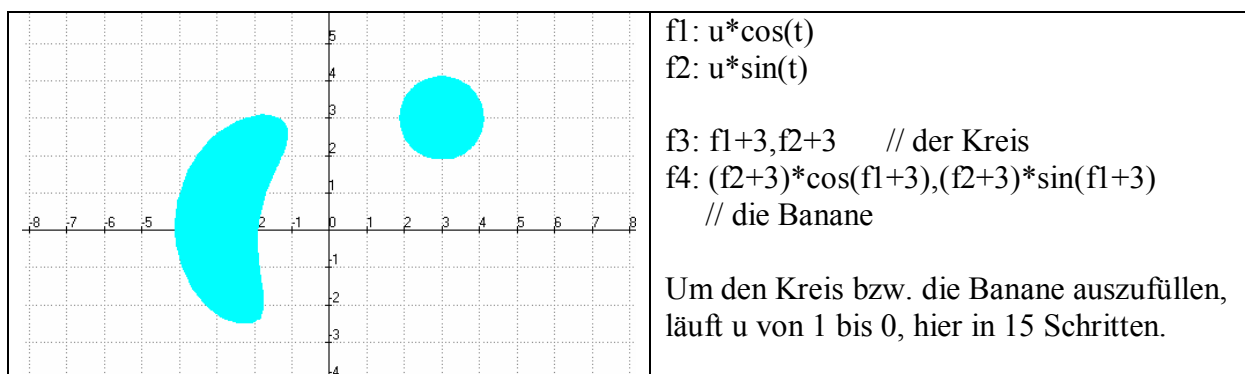


Bild 13

Zielsetzungen:

Das kleine Projekt „Vom Kreis zu Banane“ führt die Schüler in die Verwendung von Polarkoordinaten ein. Die Fallunterscheidungen mit den verschiedenen Kreislagen führen zu überraschenden Ergebnissen und ermöglichen eine Systematisierung. Die Wahl anderer Objekte führt zu weiteren unerwarteten geometrischen Formen, die sich auf andere Weise kaum erzeugen lassen. Damit erhöht sich auch der Vorrat der den Schülern bekannten Gebilde.

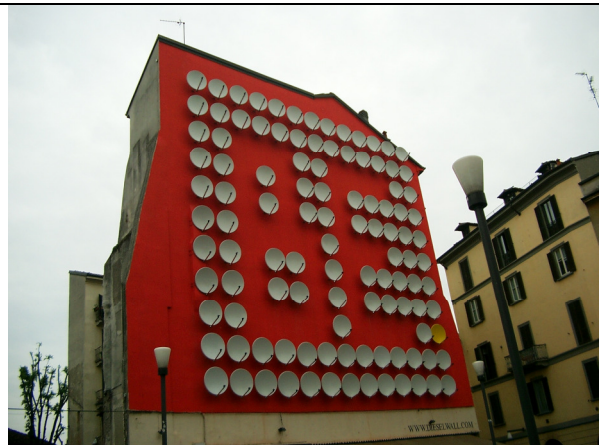
AG 3 – Abbildungsfolgen

AG 3.1 Smily-Folgen,

Wenn man die Abbildung einzelner Objekte beherrscht, kann man leicht zu Abbildungsfolgen übergehen und dabei neue Eindrücke und Erkenntnisse gewinnen. Künstler haben diese Effekte längst erkannt, indem sie oft ganze Scharen von Objekten installieren.



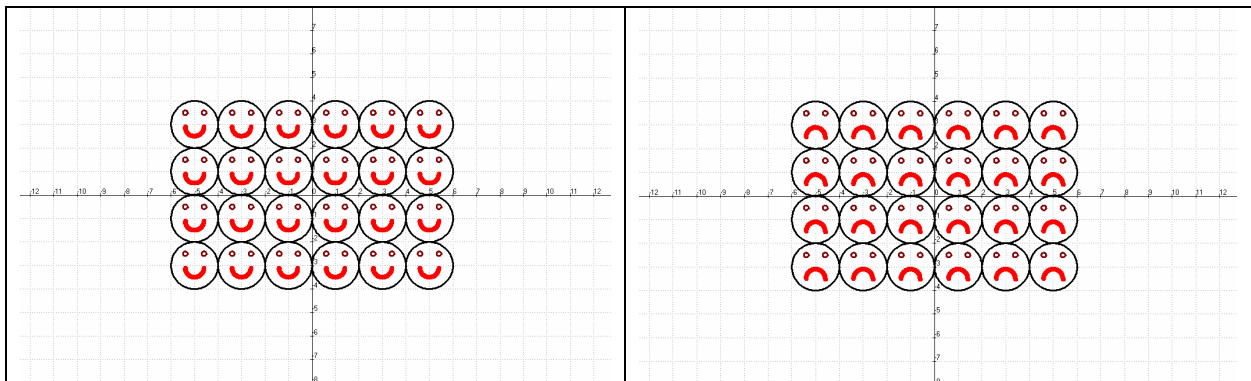
Spatenfeld im Braunkohlengebiet



Hauswand in Mailand

Diese Ausgangsidee wird hier mathematisch mit „Smily-Folgen“ realisiert.

Ein Smily kann man sich aus einigen wenigen Objekten der analytischen Geometrie zusammengesetzt denken: Kreise, Halbkreise, Strecken usw. Passende Laufbereiche führen dann zu „Families“ von Smilies oder anderen Objekten.



Datei smily-Tabelle.pl2

Und so gehts:

$$f1: \cos(t)+u, \sin(t)+v$$

$$f2: 0.1*\cos(t)+0.4+u, 0.1*\sin(t)+0.5+v$$

$$f3: 0.1*\cos(t)-0.4+u, 0.1*\sin(t)+0.5+v$$

$$f4: 0.4*\cos(t)+u, 0.4*\sin(t)-0.1+v$$

$$f5: 0.4*\cos(t)+u, 0.4*\sin(t)-0.5+v$$

Laufbereiche

$$t \quad 0 \quad 6.28 \quad 0.0628 \quad 100$$

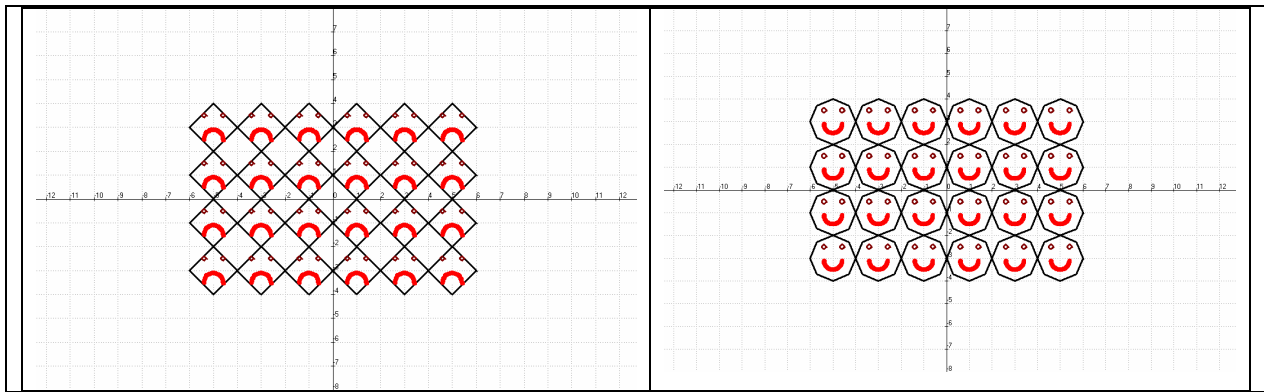
für Augen und Mund kleineres Intervall

$$u \quad -5 \quad 5 \quad 2 \quad 5$$

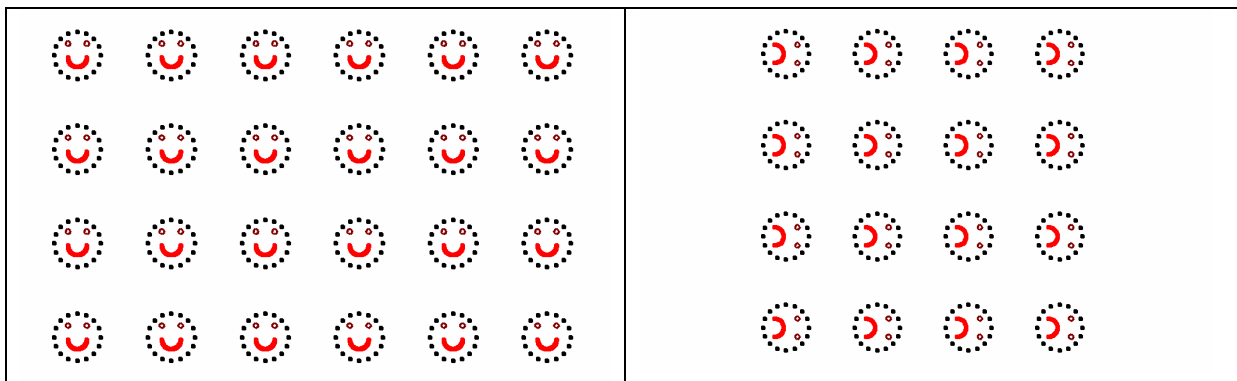
$$v \quad -3 \quad 3 \quad 2 \quad 3$$

Aufgabe:

Erläutern Sie die Terme. Was leisten sie?



Aufgabe: Bildvariation – wie könnte das erfolgt sein?



3.2 Folgen von Drehstreckungen

Das folgende Bild ist mein persönliches LOGO. Abgesehen von seiner häufigen Verwendung in unterschiedlichen Situationen (auf Büchern, Visitenkarten, ...) diente es auch als Grundlage einer Abituraufgabe zur Abbildungsgeometrie – die Problematik kann im Rahmen eines Lineare Algebra - Analytische Geometrie-Kurses behandelt werden.

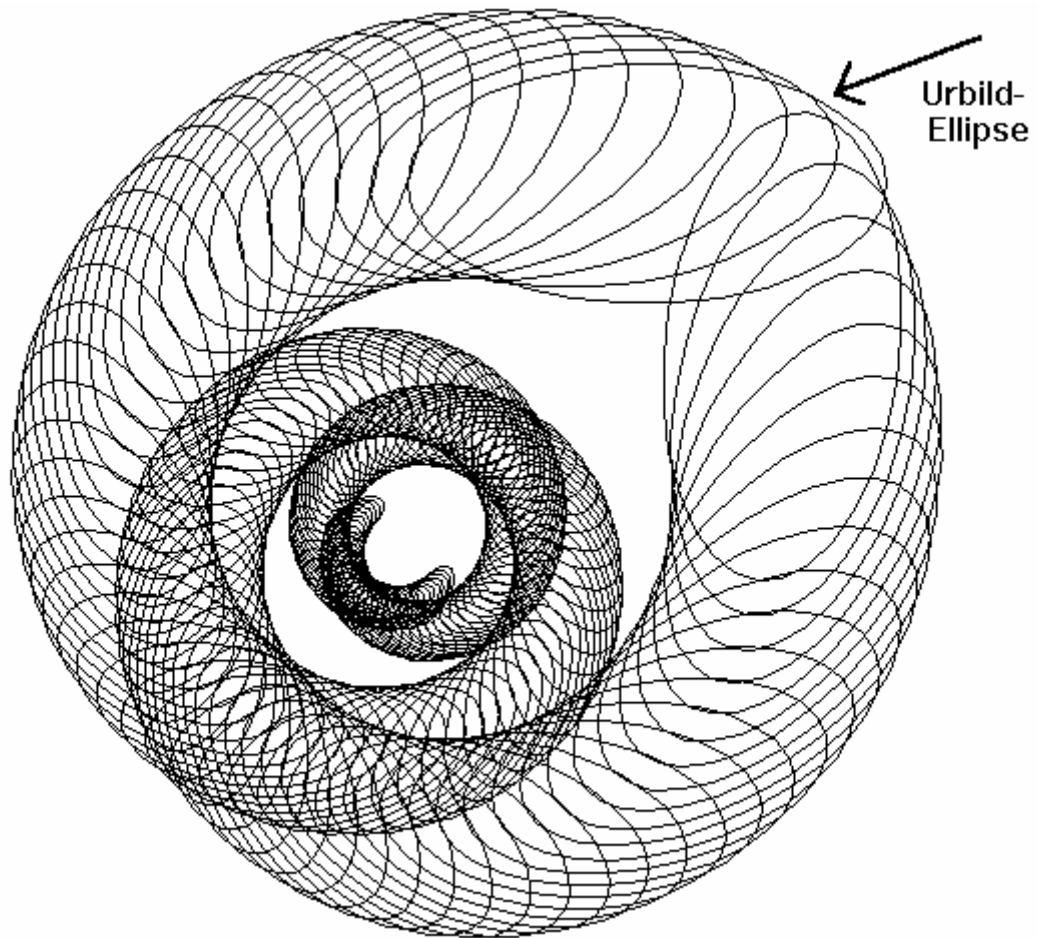


Bild a, gezeichnet mit ANIMATO

Aufgabenstellung:

Die Anlage enthält eine Graphik, erstellt mit dem Ihnen bekannten Funktionenplotter / Animationsprogramm, sowie Daten zur Erstellung der Graphik. - Erläutern Sie die Graphik und ihren Entstehungsprozess unter Aspekten der Abbildungsgeometrie. (ca. 30')

Hinweise:

- Beginnen Sie mit der Beschreibung der Ausgangsellipsen (diese jeweils farblich markieren).
- Notieren Sie in Ihrer Bearbeitung Terme und Bausteine in der üblichen mathematischen Notation (Matrizen usw.).
- Strukturieren Sie Ihre Erläuterungen durch geeignete Nummerierungen der betrachteten Aspekte.

Hinweis: Es wurde nacheinander, also nicht simultan gezeichnet.

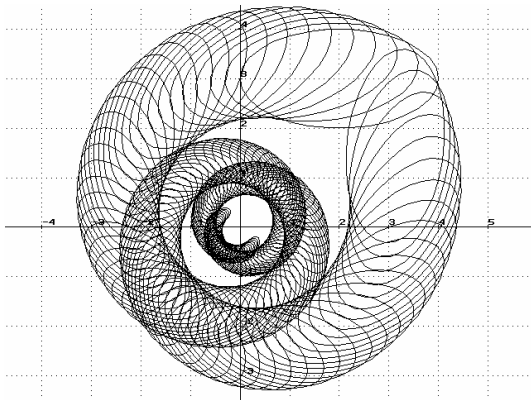


Bild b

f1	0.98	f5	$2\cos(t)+2$
f2	$\pi/30$	f6	$\sin(t)+3$
f3	$f1^n \cdot \cos(n \cdot f2)$	f7	$f5, f6$
f4	$f1^n \cdot \sin(n \cdot f2)$	f8	$f3(u)f5-f4(u)f6, f4(u)f5+f3(u)f6$
		f9	$f4(u)f5+f3(u)f6, f3(u)f5-f4(u)f6$

Die Laufvariablen wurden folgendermaßen gewählt:

t 0 bis 6.28 30 Werte; u bzw. n 1 bis 100 Schrittweite 1

Die Erläuterung der Lösung erfolgt hier durch einen Auszug aus dem Erwartungshorizont der damaligen Abituraufgabe.

Aufgabenteil , Lösungsskizzen, Erwartungen	Bewertungseinheiten, Anforderungsbereiche, Erläuterungen
f1 0.98 <i>Streckfaktor</i>	AB1 AB2 AB3 <i>Für die Erläuterung der Zeichnung sind ca. 30 Minuten vorgesehen. - Es handelt sich um die Drehstreckung einer Ellipse (f7) mit Hilfe der ersten 100 Potenzen der Drehstreckmatrix D $0.98^n \cdot \begin{bmatrix} \cos(n \cdot 6^\circ) & -\sin(n \cdot 6^\circ) \\ \sin(n \cdot 6^\circ) & \cos(n \cdot 6^\circ) \end{bmatrix}$. Die Schüler erkennen das aus dem gegebenen Plot-Programm in Verbindung mit der Abbildung und beschreiben die Auswirkung in Textform unter Benennung der Terme und der Verknüpfung der einzelnen Programmelemente. Hierfür werden insgesamt 12 BE vergeben</i>
f2 $\pi/30$ <i>Drehwinkel 6°</i>	
f3 $f1^n \cdot \cos(n \cdot f2)$ $0.98^n \cdot \cos(n \cdot 6^\circ)$	
f4 $f1^n \cdot \sin(n \cdot f2)$ $0.98^n \cdot \sin(n \cdot 6^\circ)$ <i>Drehstreckmatrix, Elemente (1,1) und (2,1)</i>	
f5 $2\cos(t)+2$ <i>Urbild x-Wert</i>	
f6 $\sin(t)+3$ <i>Urbild y-Wert,</i>	
f7 $f5, f6$ <i>um $v_x=2, v_y=3$ verschobene Ellipse</i>	
f8 $f3(u)f5-f4(u)f6, f4(u)f5+f3(u)f6$	
f9 $f4(u)f5+f3(u)f6, f3(u)f5-f4(u)f6$	
<i>Matrix</i> $D^n \cdot \text{Urbild}, \begin{bmatrix} f3 & -f4 \\ f4 & f3 \end{bmatrix} \cdot \text{Urbild}$	<i>4 BE, AB 1 für Erkennen grundlegender Elemente 5 BE, AB 2 für Erkennen der Zusammenhänge 3 BE, AB 3 für schwierige Zusammenhänge, wie eigenständiges Erkennen, welche Auswahl von f1 bis f9 hier gezeichnet wird, worin sich f9 von f8 unterscheidet, warum die Ellipsen immer kleiner werden</i>

Die folgenden vier Abbildungen dokumentieren den Ablauf der Animation mit einigen Zwischenergebnissen. Schöner ist es natürlich die Entstehung von Bild b zu sehen.

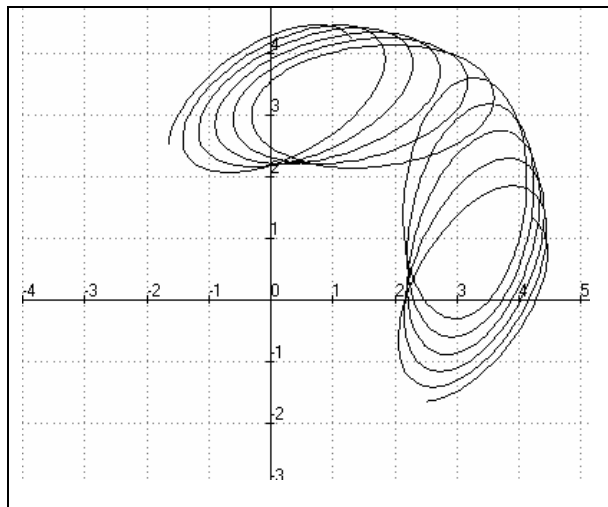


Bild c

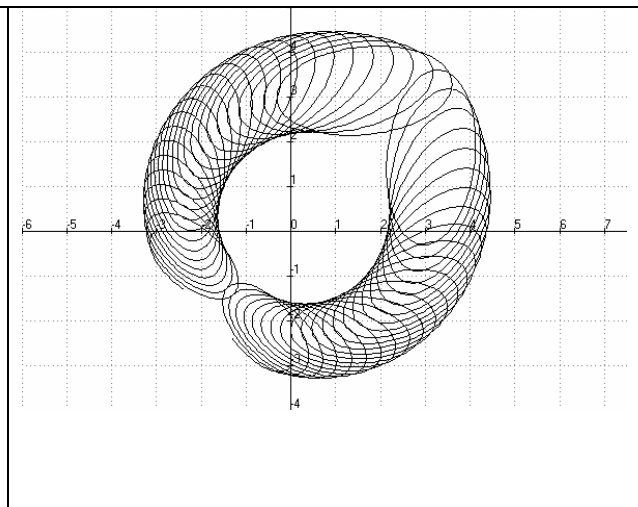


Bild d

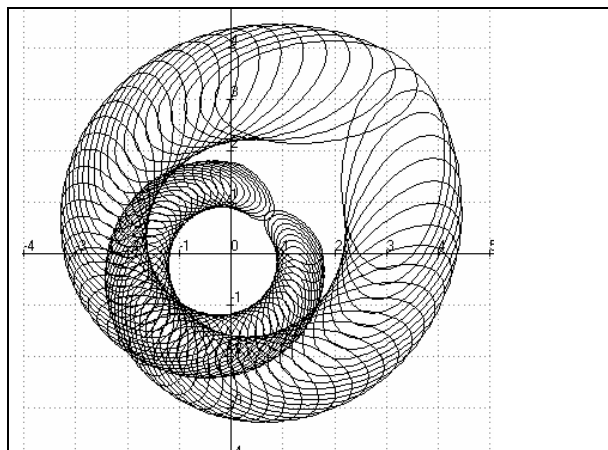


Bild e

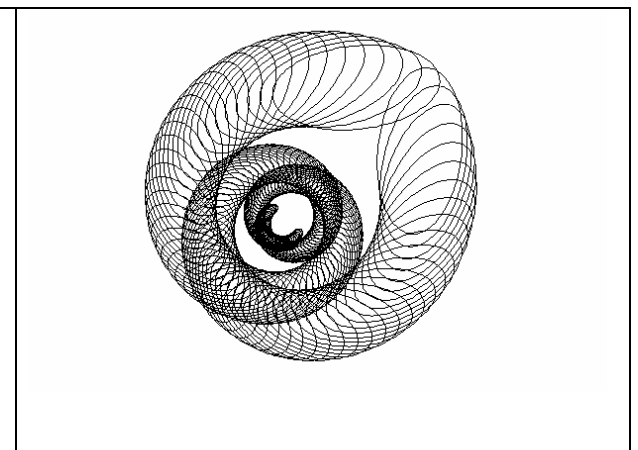


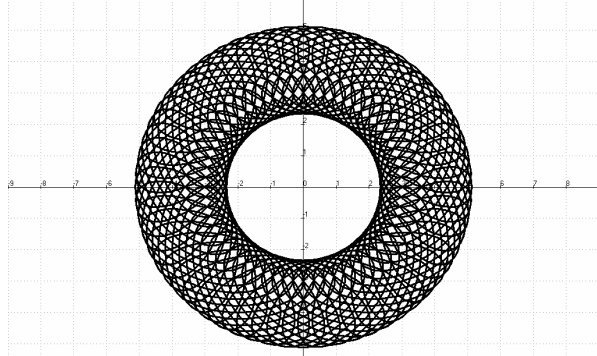
Bild f

Variationen

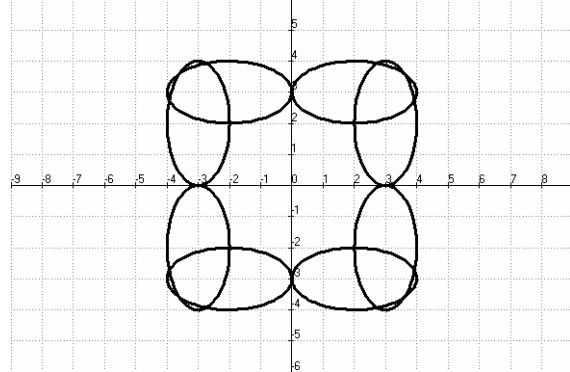
f1	0.98	Streckfaktor	Leichte Änderungsmöglichkeit Leichte Änderungsmöglichkeit
f2	$\pi/30$	Drehwinkel 6°	
f3	$f1^n \cdot \cos(n \cdot f2)$	$0.98^n \cdot \cos(n \cdot 6^\circ)$	
f4	$f1^n \cdot \sin(n \cdot f2)$	$0.98^n \cdot \sin(n \cdot 6^\circ)$	
<i>Drehstreckmatrix, Elemente (1,1) und (2,1)</i>			
f5	$2\cos(t)+2$	Urbild x-Wert	Leichte Änderungsmöglichkeit Leichte Änderungsmöglichkeit
f6	$\sin(t)+3$	Urbild y-Wert,	
f7	f5, f6	um $v_x=2, v_y=3$ verschobene Ellipse	
f8	$f3(u)f5-f4(u)f6, f4(u)f5+f3(u)f6$		
f9	$f4(u)f5+f3(u)f6, f3(u)f5-f4(u)f6$		
<i>Matrix</i>			
$D^n \cdot \text{Urbild}, \begin{bmatrix} f3, -f4 \\ f4, f3 \end{bmatrix} \cdot \text{Urbild}$			

Experimentieren

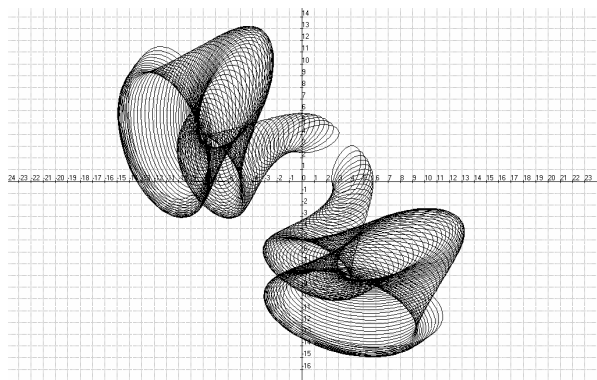
Autoreifen, man setzt f_1 auf 1



Ellipsenviereck, $f_1: 1$, $f_2: \pi/2$



Trompetenfische, siehe f_1 und f_4



$f_1: 1$

$f_2: \pi/30$

$f_3: f_1^n \cdot \cos(n \cdot f_2)$

$f_4: f_1^n \cdot \sqrt{n \cdot f_2}$

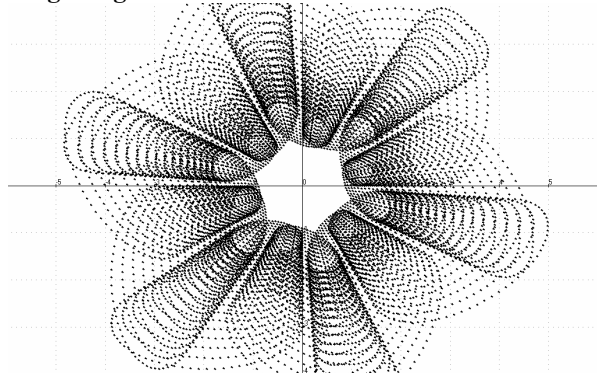
$f_5: 2\cos(t)+2$

$f_6: \sin(t)+3$

$f_8: f_3(u) \cdot f_5 - f_4(u) \cdot f_6, f_4(u) \cdot f_5 + f_3(u) \cdot f_6$

$f_{10}: f_4(u) \cdot f_5 + f_3(u) \cdot f_6, f_3(u) \cdot f_5 - f_4(u) \cdot f_6$

Fingernägel



$f_1: 0.99$

$f_2: \pi/3$

$f_3: f_1^n \cdot \cos(n \cdot f_2)$

$f_4: f_1^n \cdot \sin(n \cdot f_2)$

$f_5: 2\cos(t)+2$

$f_6: \sin(t)+3$

$f_8: f_3(u) \cdot f_5 - f_4(u) \cdot f_6, f_4(u) \cdot f_5 + f_3(u) \cdot f_6$

$f_{10}: f_4(u) \cdot f_5 + f_3(u) \cdot f_6, f_3(u) \cdot f_5 - f_4(u) \cdot f_6$

Forschungsfeld

Wie die Beispiele zeigen ist eine Fülle weiterer Variationen möglich. Damit ist die Thematik bestens für ein Projekt sowohl in der Analytischen Geometrie (speziell Abbildungsgeometrie) als auch in der Analysis (Potenzen von Funktionen) geeignet.

3.3 Mehrfache Abbildung eines Objekts mit einer stochastischen Matrix - Matrizenpotenzen

Stochastische Matrizen haben nur Elemente aus dem Intervall $[0,1]$ und die Summe der Elemente jeder Zeile muss gleich 1 sein. Stochastische Matrizen sind die Grundlage für Markow-Ketten, für die es zahlreiche Anwendungen gibt.

Die Potenzen stochastischer Matrizen sind lohnenswerte Untersuchungsobjekte. Hier soll die Anwendung einer stochastischen (2,2)-Matrix auf geometrische Objekte - in diesem Fall auf den Einheitskreis - untersucht werden.

$$\begin{pmatrix} \cos(t) & \sin(t) \end{pmatrix} * \begin{pmatrix} 0.4 & 0.6 \\ 0.2 & 0.8 \end{pmatrix} = (0,4\cos(t) + 0.2\sin(t) \quad 0.6\cos(t) + 0.8\sin(t))$$

```

F1 F2 F3 F4 F5 F6 F7
┌───┬───┬───┬───┬───┬───┬───┐
│ F1 | F2 | F3 | F4 | F5 | F6 | F7 |
│ ───┴───┴───┴───┴───┴───┴───┘
│ Algebra Calc Oper PrgmIO Clear/Ans...
│
│ [cos(t) sin(t)] → ek          [cos(t) sin(t)]
│
│ [ a  -a+1 ]n → stom(a,b,n)      Done
│ [ b  -b+1 ]
│
│ ek·stom(.4, .2, 1)
│ [.4·cos(t) + .2·sin(t) .6·cos(t) + .8·sin(t)]
│
│ .4·cos(t) + .2·sin(t) → xt2(t)    Done
│
│ .6·cos(t) + .8·sin(t) → yt2(t)    Done
│
└───┬───┬───┬───┬───┬───┬───┘
MAIN          RAD AUTO          SEQ 1/5

```

Definition des Einheitskreises

Definition der n-ten Potenz stochastischer Matrizen

Der Einheitskreis wird mit der stochastischen Matrix

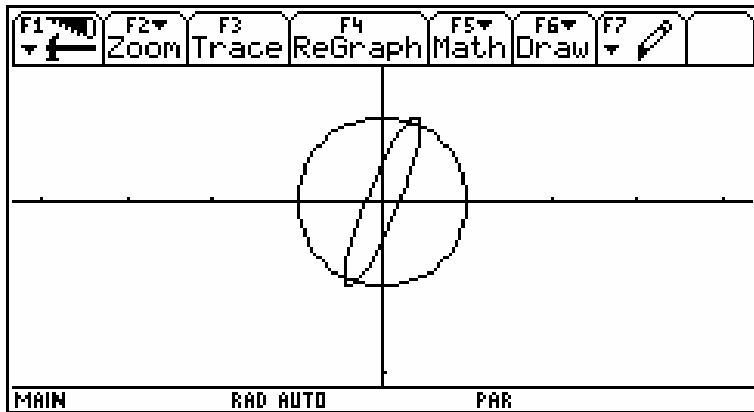
$\begin{pmatrix} 0.4 & 0.6 \\ 0.2 & 0.8 \end{pmatrix}$ abgebildet.

```

F1 F2 F3 F4 F5 F6 F7
┌───┬───┬───┬───┬───┬───┬───┐
│ F1 | F2 | F3 | F4 | F5 | F6 | F7 |
│ ───┴───┴───┴───┴───┴───┴───┘
│ Zoom Edit  ✓ All Style  ⌂
│
│ ▲PLOTS
│ ✓xt1=cos(t)
│ ✓yt1=sin(t)
│ ✓xt2=.4·cos(t) + .2·sin(t)
│ ✓yt2=.6·cos(t) + .8·sin(t)
│ xt3=
│ yt3=
│ xt4=
│ yt4=
│ xt5=
│ yt5=
│
│ xt1(t)=cos(t)
└───┬───┬───┬───┬───┬───┬───┘
MAIN          RAD AUTO          PAR

```

Speichern im y=-Fenster, Einstellung „parametric“



Der Einheitskreis und sein Bild unter Verwendung der Abbildungsgleichung

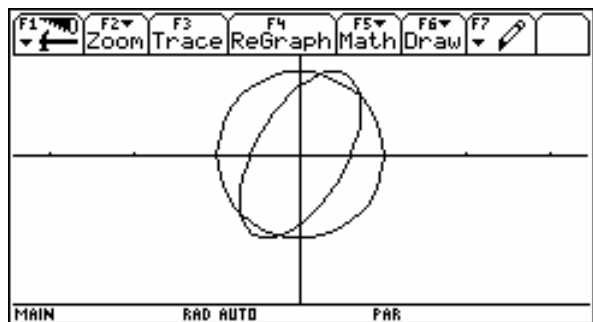
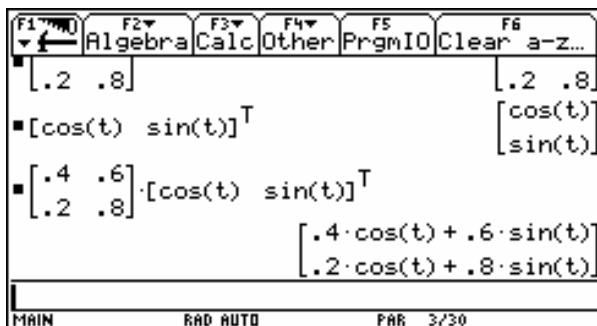
$$(\cos(t) \quad \sin(t)) * \begin{pmatrix} 0.4 & 0.6 \\ 0.2 & 0.8 \end{pmatrix}$$

Aufgabe:

Bilden Sie den Einheitskreis mit der 2. Potenz der stochastischen Matrix $\begin{pmatrix} 0.4 & 0.6 \\ 0.2 & 0.8 \end{pmatrix}$ ab, dann mit der 3.,4. Potenz. Benutzen Sie diesmal die Abbildungsgleichung

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0.4 & 0.6 \\ 0.2 & 0.8 \end{pmatrix} * \begin{pmatrix} \cos(t) \\ \sin(t) \end{pmatrix}, \text{ hier also Matrix * Objekt.}$$

Mit diesem Ansatz ergibt sich zunächst für $\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}$:



Rechnung und Zeichnung für die Potenzen

Das CAS liefert uns die Potenzen der stochastischen Matrix auf folgende Weise: Wir benutzen den oben schon definierten Baustein

$$\begin{pmatrix} a & 1-a \\ b & 1-b \end{pmatrix}^n \text{ bzw. } [[a,1-a][b,1-b]]^n \rightarrow \text{stom}(a,b,n) \text{ und rufen den Baustein für}$$

a = 0.4, b = 0.2, n = 2 (3,4,5,) auf:

```

F1 Algebra F2 Calc F3 Other F4 PrgmIO F5 Clear a-z... F6
[b 1 - b] stom(a, b, n) Done
■ stom(.4, .2, 2) [.28 .72]
                  [.24 .76]
■ stom(.4, .2, 3) [.256 .744]
                  [.248 .752]
■ stom(.4, .2, 4) [.2512 .7488]
                  [.2496 .7504]
stom(0.4,0.2,5)
MAIN RAD AUTO FUNC 4/30
    
```

Berechnung der Matrizenpotenzen von $\begin{pmatrix} 0.4 & 0.6 \\ 0.2 & 0.8 \end{pmatrix}$ mit Hilfe des Bausteins $\text{stom}(a,b,n)$. Hier wurde $n=2,3,4$ gewählt.

```

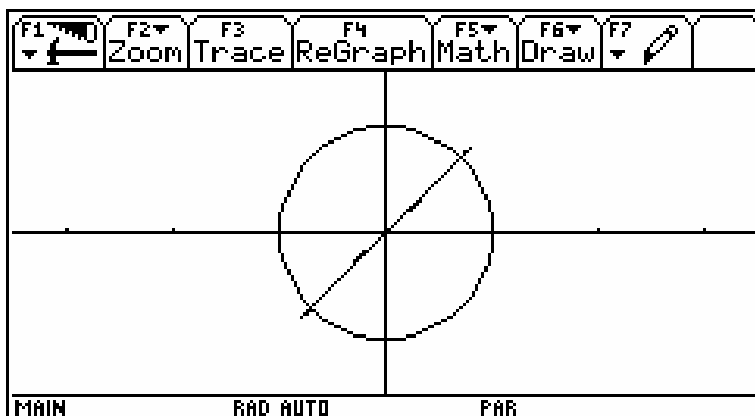
F1 Algebra F2 Calc F3 Other F4 PrgmIO F5 Clear a-z... F6
.2512 .7488 [cos(t) sin(t)]^T
.2496 .7504 [.2512*cos(t) + .7488*sin(t)]
              [.2496*cos(t) + .7504*sin(t)]
■ .2512*cos(t) + .7488*sin(t) → xt1(t) Done
■ .2496*cos(t) + .7504*sin(t) → yt1(t) Done
MAIN RAD AUTO PAR 7/30
    
```

Wir wenden das Ergebnis von $\text{stom}(0.4,0.2,4)$ auf den Einheitskreis $(\cos(t), \sin(t))$, transponiert, an. Die $x(t)$ -Komponente wird in $xt1(t)$ gespeichert, die $y(t)$ -Komponente in $yt1(t)$.

```

F1 Zoom F2 Edit F3 All F4 Style F5 Style F6 Style F7
▲PLOTS
✓xt1=.2512*cos(t) + .7488*sin(t)
✓yt1=.2496*cos(t) + .7504*sin(t)
✓xt2=cos(t)
✓yt2=sin(t)
xt3=
yt3=
xt4=
yt4=
xt5=
yt5=
xt3(t)=
MAIN RAD AUTO PAR
    
```

Die Zeichnung muss durch Umstellung auf parametric vorbereitet werden (\blacklozenge mode, parametric). Links sieht man den Zustand des y= Editors mit den Parameterdarstellungen des Bildes für $n=4$ und des Urbilds, des Einheitskreises.



Ergebnis: Die Bilder werden anscheinend immer mehr zur Strecke!
Kann man diese Hypothese bestätigen?

Zur Bestätigung der Vermutung können wir z.B. noch höhere Potenzen bilden und auf den Einheitskreis wirken lassen. Rechnerisch! Denn eine Zeichnung nutzt nun nicht mehr.

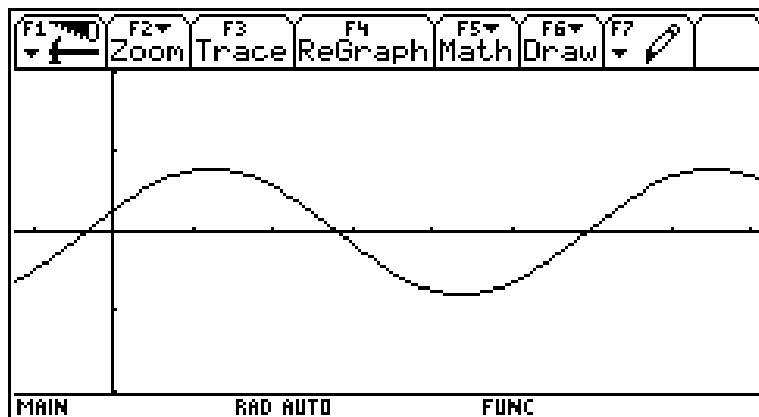
```

F1 Algebra F2 Calc F3 Other F4 PrgmIO F5 Clear a-z... F6 Done
■ stom(.4,.2,20)·[cos(t) sin(t)]T
  [.25·cos(t) + .75·sin(t)]
  [.25·cos(t) + .75·sin(t)]
■ stom(.4,.2,30)·[cos(t) sin(t)]T
  [.25·cos(t) + .75·sin(t)]
  [.25·cos(t) + .75·sin(t)]
MAIN RAD AUTO PAR 9/30

```

Für hohe n Werte ändert sich offenbar kaum noch etwas an den Ergebnissen, was auf einen Grenzzustand hinweist.

Außerdem sind x- und y-Komponente offenbar gleich. Wir haben es also nur noch mit Punkten auf der Winkelhalbierenden $y = x$ des 1./3.Quadranten zu tun.



Die Funktion $x(t) = y(t) = 0.25\cos(t) + 0.75\sin(t)$ wird geplottet. Der Graph interessiert uns im Intervall $[0, 2\pi]$, denn wir suchen Minimum und Maximum, um die Begrenzung der vermuteten Strecke zu finden.

Für den Einheitskreis läuft der Winkel t von 0 bis 2π .

```

F1 Algebra F2 Calc F3 Other F4 PrgmIO F5 Clear a-z... F6 Done
■ .25·cos(t) + .75·sin(t) → f(t) Done
■ d/dt(f(t)) .75·cos(t) - .25·sin(t)
■ d/dt(f(t)) → f1(t) Done
■ solve(f1(t)=0, t | 0 ≤ t and t ≤ 2·π)
  ◀ t = 4.39064 or t = 1.24905 or t = -1.89 ▶
■ f(1.24905) 790569
MAIN RAD AUTO PAR 6/15

```

Bestimmung der Extremwerte von $x(t)$ bzw. $y(t)$ mit den Hilfsmitteln der Differentialrechnung.

Berechnung der t-Werte der Extremwertkandidaten.

F1	F2	F3	F4	F5	F6
Algebra	Calc	Other	PrgmIO	Clear	a-z...
■	f(1.24905)				0.790569
■	f(4.39064)				-0.790569
■	$\frac{d^2}{dt^2}(f(t))$			$-.25 \cdot \cos(t) - .75 \cdot \sin(t)$	
■	$\frac{d^2}{dt^2}(f(t)) \rightarrow f2(t)$				Done
■	f2(1.24905)				0.790569
■	f2(4.39064)				-0.790569
MAIN RAD AUTO PAR 6/19					

Wir lesen ab:

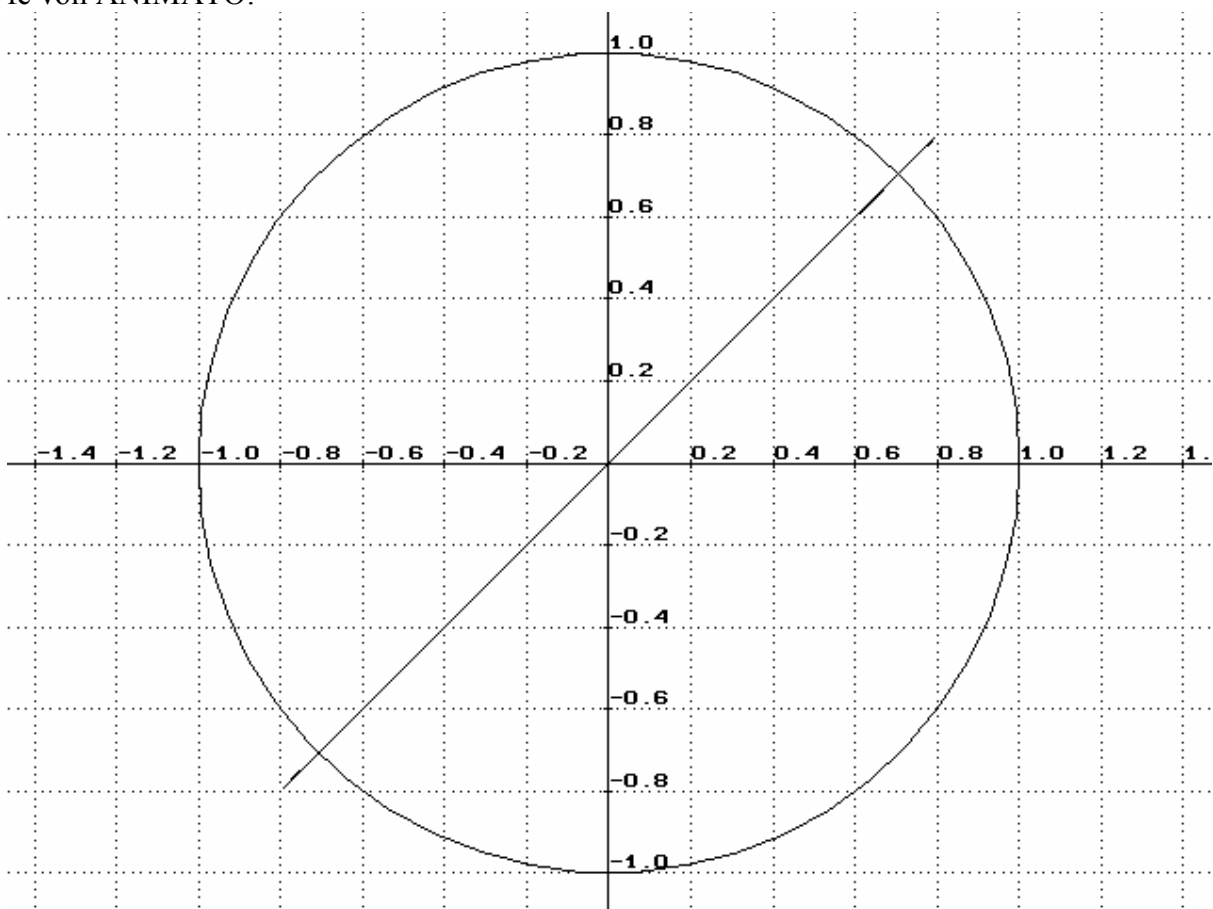
Für $t=1.24905$ ergibt sich der maximale Wert $f(t)=0.790569$, für $t=4.39064$ hat $f(t)$ ein Minimum, nämlich -0.790569 .

Die Ergebnisse stimmen gut mit den Zeichnungen überein.

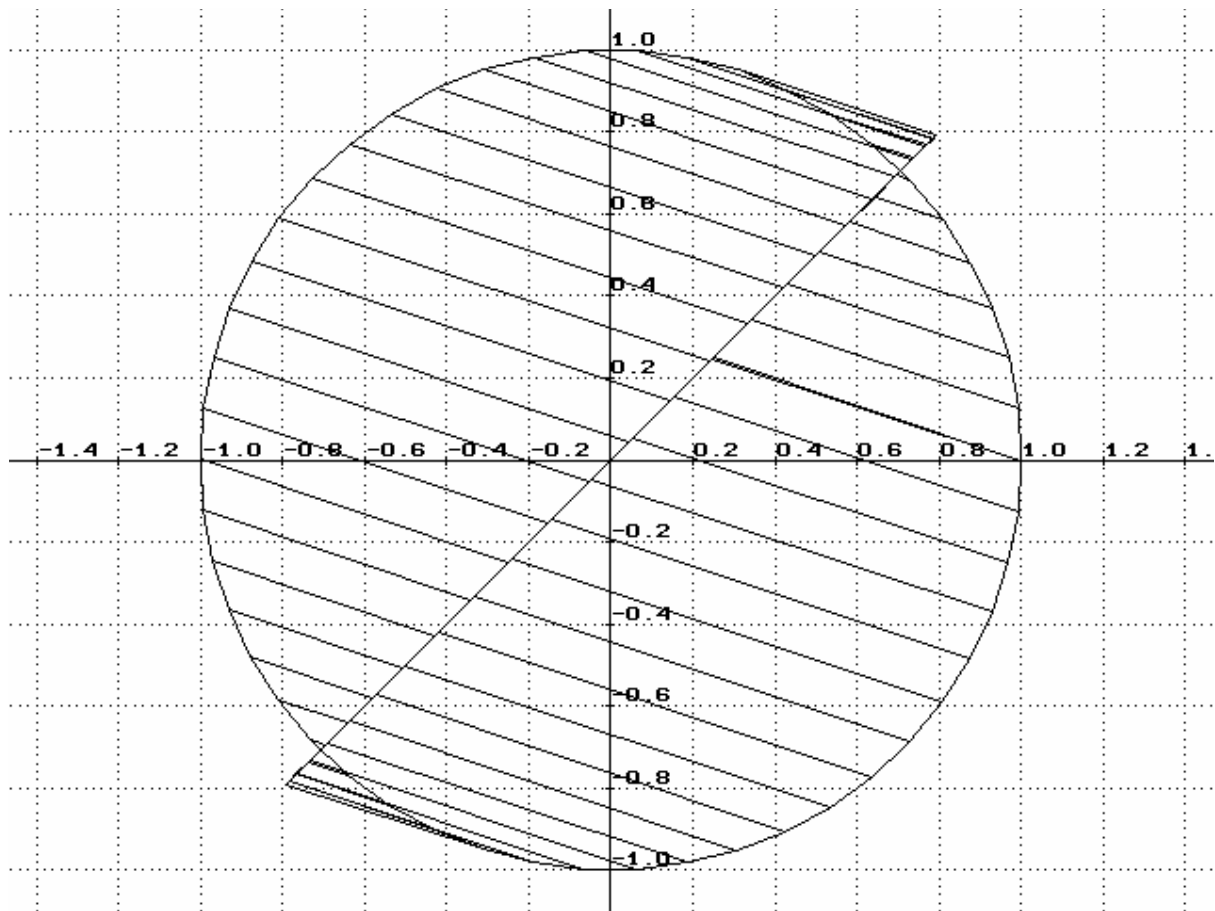
F1	F2	F3	F4	F5	F6
Algebra	Calc	Other	PrgmIO	Clear	a-z...
■	$\frac{d^2}{dt^2}(f(t))$			$-.25 \cdot \cos(t) - .75 \cdot \sin(t)$	
■	$\frac{d^2}{dt^2}(f(t)) \rightarrow f2(t)$				Done
■	f2(1.24905)				-0.790569
■	f2(4.39064)				0.790569
MAIN RAD AUTO PAR 19/30					

Überprüfung, ob es sich wirklich um Extremwerte handelt, wieder mit den Hilfsmitteln der Differentialrechnung.

Wir verdeutlichen den Vorgang wegen der besseren Auflösung des Bildschirms noch mit Hilfe von ANIMATO:



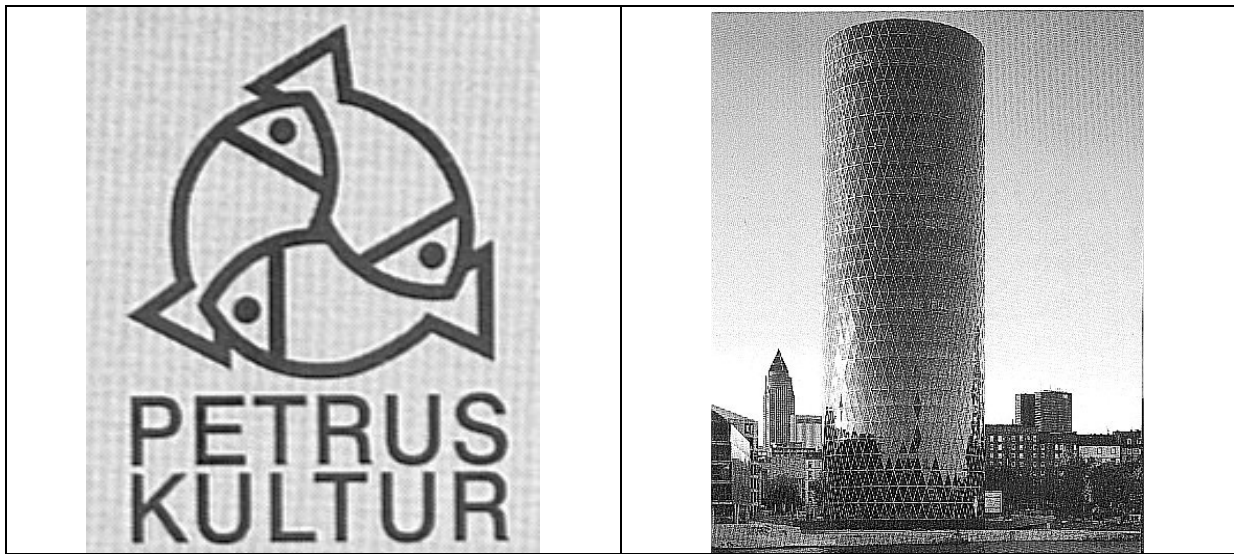
Die Zeichnung bestätigt: Bei fortlaufender Abbildung des Einheitskreises mit der Matrix ergibt sich schließlich die Strecke PQ mit $P(-0.790569, -0.790569)$, $Q(0.790569, 0.790569)$.



An dieser Zeichnung erkennt man noch zusätzlich, welche Kreispunkte auf welche Streckenpunkte abgebildet werden - besonders eindrucksvoll in Farben während des langsamen Entstehens der Zeichnung auf dem Bildschirm.

Bei der Abbildung von Figuren mittels Matrizenpotenzen können eindrucksvolle Bilder entstehen, die die Bedeutung dieser Methode für die Computergrafik, etwa für Animationen verdeutlichen. Das wurde in Kapitel 3.2. auch für Drehstreckungen einer Ellipse gezeigt.

AG 4 Projekte mit Objekten der Analytischen Geometrie



Projekte

- AG 4.1 Analytische Geometrie mit LOGOS - fachübergreifend
- AG 4.2 Viele Kreise durch einen Punkt, Kreis – Ellipse - Ellipsenstapel
- AG 4.3 Kugeln und andere Körper, die uns umgeben
- AG 4.4: Programmieren: POV-Ray-Kugeln und andere Objekte
- AG 4.5 Netze – Maschen – Muster
- AG 4.6 Teilverhältnisse auf Dreiecksseiten, mathematische Entdeckungsreise -
- AG 4.7 Abbildung komplexer Landschaften
- AG 4.8 Ebenen – Ebenenausschnitte
- AG 4.8.1 Ebenen mit DERIVE
- AG 4.8.2 Strukturierung von Ebenen – Lagerhaus Barcelona
- AG 4.8.3 Strukturierung von Ebenen – Modellierung eines Kunstwerkes - Kunst mit Ebenenteilen

AG 4.1 Analytische Geometrie mit LOGOS - fachübergreifend



Projekt: Wirtschaft und Politik



Projekt: Logos und Design, siehe unten



Logo des Kulturkreises einer Kirche



Logo: Musikinstrumente-Firma

LOGOS sind in unserer Umwelt weit verbreitet. Dankbare Objekte für den Mathematikunterricht sind z.B. Firmen-Logos, etwa von Autofirmen, die auch oft geeignete mathematische Objekte aus der Geometrie enthalten. Für Logos bieten sich mehrere unterrichtliche Verwendungsmöglichkeiten an, zum Beispiel:

- Vorgeben der Logo-Graphik, das Analysieren derselben, das Nachkonstruieren und ggf. Ändern der Graphik mit geeigneter Software
- Entwerfen einer eigenen Logo-Graphik unter vorgegebenen Bedingungen, etwa einem „Auftrag“ an eine Firma, die Logos anbietet (siehe Internet!).

Aedeutung des fachübergreifenden und Anwendungsaspekts

Firmen oder Werbeagenturen beauftragen üblicherweise ausgebildete Graphiker oder eine Designagentur mit dem Entwurf eines Firmen-Logos. So wirbt z.B. die *ART-Webagentur Berlin* im Internet (<http://www.art-x.de/firmenlogos.htm>, aufgerufen am 20.10.2005) u.a. mit folgendem Text für ihre Logo-Herstellung:

„Wir entwickeln Ihr Firmenlogo! Teilen Sie uns Ihre Wünsche mit und wir liefern die Ideen! Unsere studierten Berliner Graphikerinnen entwickeln über 4 verschiedene Designvorschläge in jeweils 3-4 Varianten. Aus diesen Ideen entsteht dann in ständiger Absprache mit Ihnen das finale Logo.“

Was genau bekommen Sie für Ihr Geld?

Im Logo-Preis enthalten sind: 3-4 Designvorschläge in jeweils 3-4 Varianten per E-Mail

- Weiterentwicklung dieser Entwürfe zum finalen Logo
- Das finale Logo im Datei-Format JPG/JPEG für Internet und Word
- Eine fertige Druckdatei im Format EPS/Postscript auf CD per Post
- Die Exklusivrechte an der finalen Version Ihres Logos
- 10 % Rabatt auf Erstellung und Druck Ihrer Geschäftspapiere

Wie ist der Ablauf bis zum fertigen Logo?

1. Sie stehen in direktem telefonischen Kontakt mit unserer Graphikerin.
2. Die Graphikerin führt mit Ihnen ein umfangreiches Briefing durch.
3. Die ersten Entwürfe erhalten Sie nach ca. 3 Werktagen in verschiedenen Farb und Stil-Varianten per E-Mail zugesandt.
4. Nach Absprache mit der Graphikerin wird aus den Entwürfen eine von Ihnen gewünschte Zusammenstellung in mehreren Varianten weiterentwickelt.
5. In Absprache mit Ihnen entsteht daraus das finale Logo.“

Diese Auszüge aus der Werbung zeigen einige Aspekte der professionellen Entwicklung von Firmenlogos, siehe auch <http://de.wikipedia.org/wiki/Firmenlogo>.

Die nun folgenden Ausführungen können auch von den Schülern erarbeitet werden.

Wir entwerfen ein Firmen-Logo

Grundlage für die Logo-Gestaltung ist eine Analyse des Istzustands der zu beliefernden Firma. Bei der Herstellung sollten folgende Aspekte beachtet werden:

- 1. Unverwechselbarkeit:** Ein Logo transportiert das spezielle Firmen-Image und soll nicht mit anderen Assoziationen besetzt sein.
- 2. Verständlichkeit:** Das Logo soll auf die Tätigkeit des Unternehmens hinweisen. Das kann durch ein graphisches Symbol und/oder die Auswahl einer passenden Schrift geschehen.
- 3. Einprägsamkeit:** Was einfach ist, ist auch einfach zu merken! Erfolgreiche Firmen-Zeichen wie z. B. die von Audi, Toyota und Nike sind so einfach, dass sie fast jeder auswendig nachzeichnen kann.
- 4. Lesbarkeit:** Wird auch mit Worten gearbeitet, sollten diese bei jeder Verwendungsart gut lesbar sein. Das Logo muss auch auf einem Fax, als Stempel oder auf einem T-Shirt gestickt noch gut erkennbar sein und gut aussehen.

Das Toyota-Logo (Ellipsen)

Das Toyota-Logo nachkonstruieren

Die verwendete Mathematik: Geeignete Wahl eines Koordinatensystems, Ellipsengleichungen in Parameterform, Verschiebung von Ellipsen, Berechnung von Bogenlängen von Ellipsen, Ellipsenbaustein definieren mit mehreren Parametern, Ellipsen mit Bausteinaufrufen erzeugen, Durchführung einer Termumformung von Hand.

Hilfsmittel: DERIVE oder entsprechende Software

Das Ausgangsbild:

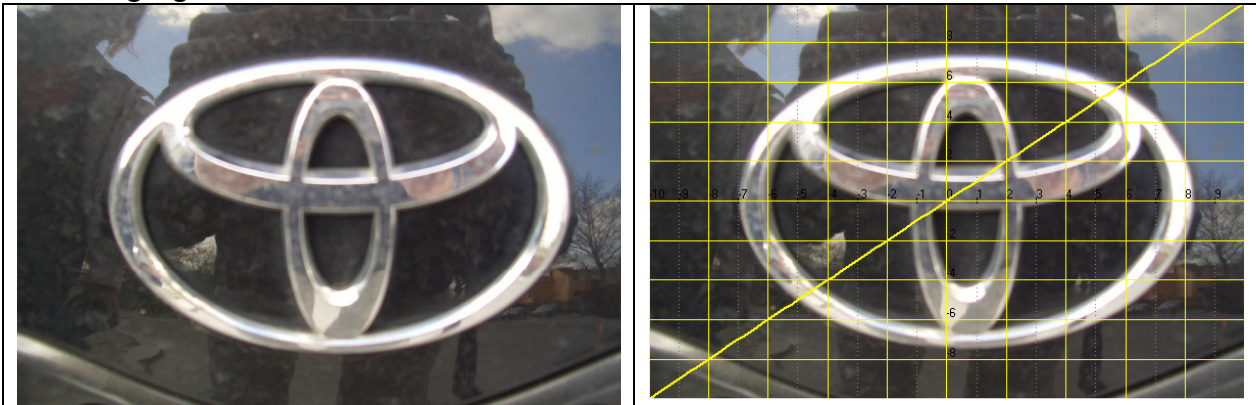


Bild a

Bild b

Aufgabe 1

Bild b ist der erste Versuch einer mathematischen Modellierung. Erläutern und beurteilen Sie diesen Ansatz.

Aufgabe 2

Erzeugen Sie das LOGO mit Computerhilfe. Benutzen Sie dazu passende Gleichungen (die Lage des LOGOS auf dem Bildschirm bleibt Ihnen überlassen). Skizzieren Sie Ihr Bild einschließlich Koordinatensystem.

Aufgabe 3

Berechnen Sie die Bogenlängen der drei Ellipsen.

Aufgabe 4

Entwickeln Sie einen Baustein für das Zeichnen vieler Ellipsen der im LOGO verwendeten Art – Ellipsen-Achsen parallel zu den Koordinatenachsen. Wie könnte man auch Ellipsen in anderen Lagen erzeugen?

Aufgabe 5

Bei der Rechnung zu Aufgabe 3 erhält man u.a. die folgende DERIVE-Zeilen

a) $\text{INT}(\text{SQRT}(\text{DIF}(8*\text{COS}(t),t)^2+\text{DIF}(6*\text{SIN}(t),t)^2),t,0,2*\pi)$

b) $;\text{Simp}(\#4)$ ergibt $2*\text{INT}(\text{SQRT}(7*\text{SIN}(t)^2+9),t,0,2*\pi)$

Bestätigen Sie die vom Rechner durchgeführte Umformung durch ausführliche Handrechnung.

Lösungen

Aufgabe 1

Der Schülertext sollte die folgenden Aspekte enthalten: Koordinatensystem über das Bild gelegt zwecks analytischer Erfassung der Graphen, die Lage des Systems ist nicht optimal, Angabe einer besseren Lage, die Einführung eines KS mit gleichen Längen auf den Achsen würde das Bild transformieren und ist deshalb hier nicht geeignet.

Aufgabe 2

Am besten arbeitet man mit der Parameterdarstellung von Ellipsen. In DERIVE-6 –Notation erhält man

$$\#1: [8 \cdot \cos(t), 6 \cdot \sin(t)]$$

$$\#2: [2 \cdot \cos(t), 6 \cdot \sin(t)]$$

$$\#3: [5.5 \cdot \cos(t), 3 \cdot \sin(t) + 3]$$

Auf größere Genauigkeit kommt es nicht an. Mit diesen Ellipsentermen kann auch später gerechnet werden.

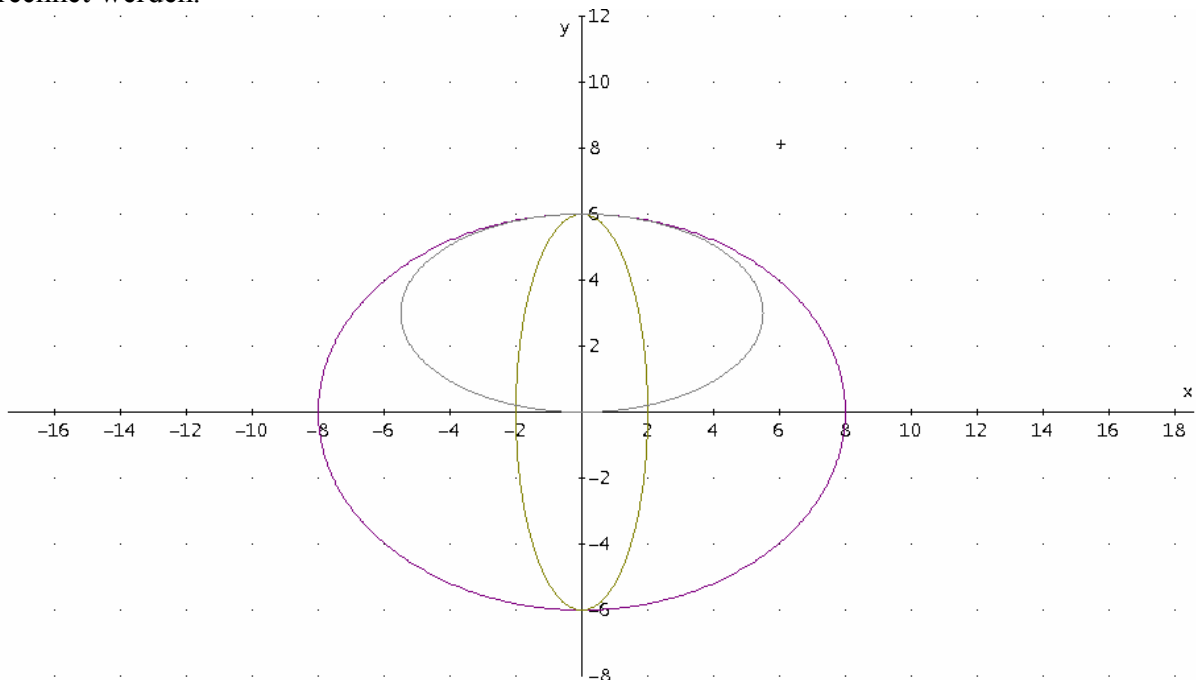


Bild c

Aufgabe 3

Die Bogenlängenberechnungen erfolgen hier mit DERIVE. Die Ellipsengleichungen waren: $[2 \cdot \cos(t), 6 \cdot \sin(t)]$, $[5.5 \cdot \cos(t), 3 \cdot \sin(t) + 3]$ und $[8 \cdot \cos(t), 6 \cdot \sin(t)]$

Die Formel für die Berechnung von Bogenlängen in Parameterdarstellung lautet

$$l = \int_{t_1}^{t_2} \sqrt{(x'(t))^2 + (y'(t))^2} dt . \text{ Die Anwendung auf die drei Ellipsen ergibt:}$$

$$\text{INT}(\text{SQRT}(\text{DIF}(8 \cdot \cos(t), t)^2 + \text{DIF}(6 \cdot \sin(t), t)^2), t, 0, 2 \cdot \pi)$$

;Simp(#4)

$$2 \cdot \text{INT}(\text{SQRT}(7 \cdot \sin(t)^2 + 9), t, 0, 2 \cdot \pi)$$

$$\text{APPROX}(2 \cdot \text{INT}(\text{SQRT}(7 \cdot \sin(t)^2 + 9), t, 0, 2 \cdot \pi), 4)$$

;Simp(#6)

44.20

```
APPROX(INT(SQRT(DIF(2*COS(t),t)^2+DIF(6*SIN(t),t)^2),t,0,2*pi))
;Simp(#8)
```

26.72978644

```
APPROX(INT(SQRT(DIF(5.5*COS(t),t)^2+DIF(3*SIN(t)+3,t)^2),t,0,2*pi))
;Simp(#10)
```

27.28422840

Damit erhält man für die drei Ellipsen folgende Bogenlängen

Ellipse	Bogenlänge in Längeneinheiten
$[8*\text{COS}(t),6*\text{SIN}(t)]$	44.20
$[2*\text{COS}(t),6*\text{SIN}(t)]$	26.73
$[5.5*\text{COS}(t),3*\text{SIN}(t)+3]$	27.28

Aufgabe 4

Insbesondere an der Gleichung $[5.5*\text{COS}(t),3*\text{SIN}(t)+3]$ erkennt man, welche Form der Baustein haben muss. Es wird definiert

Ellipse(a,b,c,d):= $[a*\text{COS}(t)+b, c*\text{SIN}(t)+d]$. Dann liefert der Aufruf `Ellipse(5.5, 0, 3, 3)` gerade die 3. Ellipse, siehe folgende Tabelle.

$[8*\text{COS}(t),6*\text{SIN}(t)]$	Aufruf	<code>Ellipse(8,0,6,0)</code>
$[2*\text{COS}(t),6*\text{SIN}(t)]$	Aufruf	<code>Ellipse(2,0,6,0)</code>
$[5.5*\text{COS}(t),3*\text{SIN}(t)+3]$	Aufruf	<code>Ellipse(5.5,0,3,3)</code>

Auf diese Weise erzeugt man beliebige Ellipsen mit Achsen, die zu den Koordinatenachsen parallel sind. Andere – schräg liegende – Ellipsen, kann man Drehung des obigen Typs erhalten. Das kann unter Verwendung von Drehstreckmatrizen geschehen

$$k * \begin{pmatrix} \cos(u) & -\sin(u) \\ \sin(u) & \cos(u) \end{pmatrix}, \text{ k ist Streckzahl, u Drehwinkel.}$$

Aufgabe 5

Die Handumformungen kann man in DERIVE 6 auch mit „Vereinfachen – Rechenschritt“ nachvollziehen. Den Schülern muss das nicht bekannt sein, für den Lehrer ist es eine zusätzliche Hilfe. Ist das den Schülern doch bekannt – was methodisch durchaus einen Sinn macht – ist es eben ein erneutes Üben für das Aufschließen einer Black-Box.

Eine weitere Aufgabe, die die Zusammenhänge zwischen Kreis und Ellipse verwendet, könnte sein: Bei dem folgenden Bild wurde die große Ellipse offenbar auf einen Kreis abgebildet. Welche Koordinatentransformation leistet das? Wie heißt die Gleichung des Kreises?

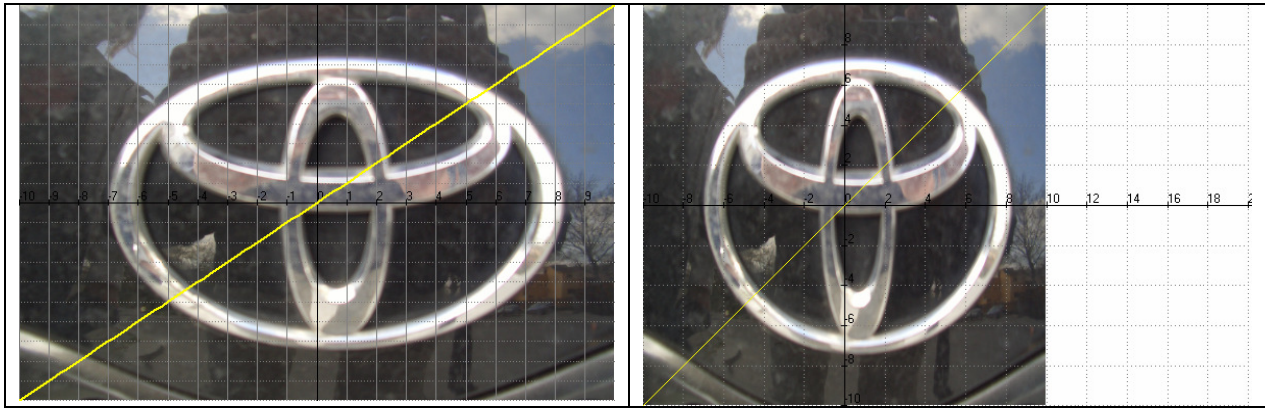


Bild d

Bild e

Weitere Aufgaben: Die Toyota-Ellipsen lassen sich auf verschiedene Weise variieren.

Eine Animation des Logos unter Verwendung von ANIMATO

Auftrag: Der Modellierungsvorgang soll schrittweise graphisch verdeutlicht werden.

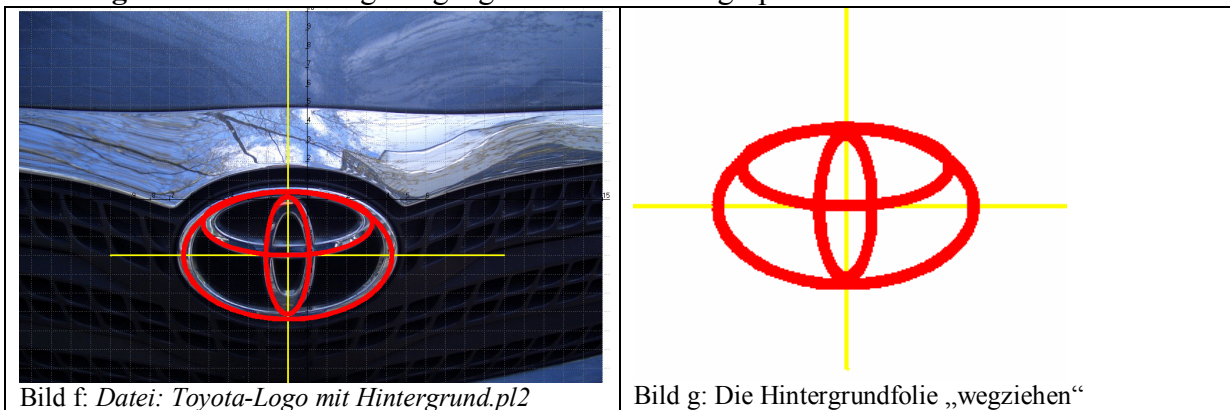


Bild f: Datei: Toyota-Logo mit Hintergrund.pl2

Bild g: Die Hintergrundfolie „wegziehen“

Die experimentelle Arbeit

f2: $-1, t$ // Schritt 1, Wahl der y-Achse

f3: $t, -3$ // Schritt 1, Wahl der x-Achse

f4: $5.3 \cdot \cos(t) - 1, 3.4 \cdot \sin(t) - 3$

// Schritt 2, Modellierung Ellipse 1 (groß)

f5: $1.1 \cdot \cos(t) - 1, 3.12 \cdot \sin(t) - 3$

// Schritt 3, Modellierung Ellipse 2

f6: $4.3 \cdot \cos(t) - 1, 1.7 \cdot \sin(t) - 1.3$

// Schritt 4, Modellierung Ellipse 3

Als erstes wird das Foto des Toyota-Logos in den Hintergrund gelegt. Danach könnte die experimentelle Arbeit mit der Wahl eines geeigneten Koordinatensystems beginnen und wie links gezeigt schrittweise fortgesetzt werden.

Kompetenzen:

- Kennenlernen der Ellipsengleichung in Parameterdarstellung, Anwendung in experimenteller Arbeit
- Umgang mit der Software wird gefestigt

Abschließend zur Idee des Logos einige Anregungen für mathematische Logos

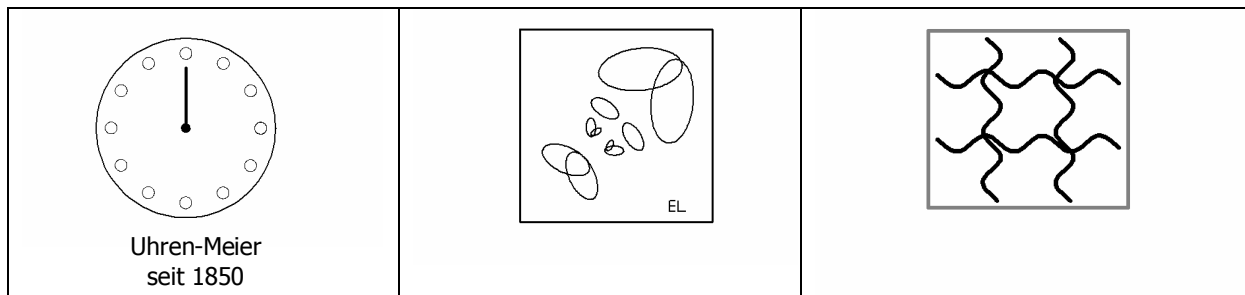


Bild h: Logo einer Uhrmachers

Bild i: Logo eines Blumenladens

Bild j: Logo für das Sinus-Projekt

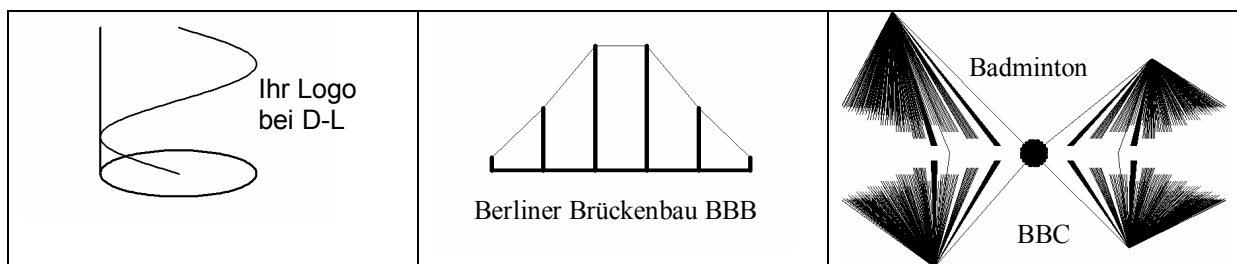


Bild k: Designer-Logo

Bild l: Logo für Brückenbau-Firma

Bild.m: Für Badminton-Center

Zusammenfassung

Bei einem Projekt mit der hier geschilderten fachübergreifenden Projektidee erwirbt der Schüler diverse mathematische, aber auch außermathematische Kompetenzen.

AG 4.2 Projekt: Viele Kreise durch einen Punkt Kreis – Ellipse - Ellipsenstapel

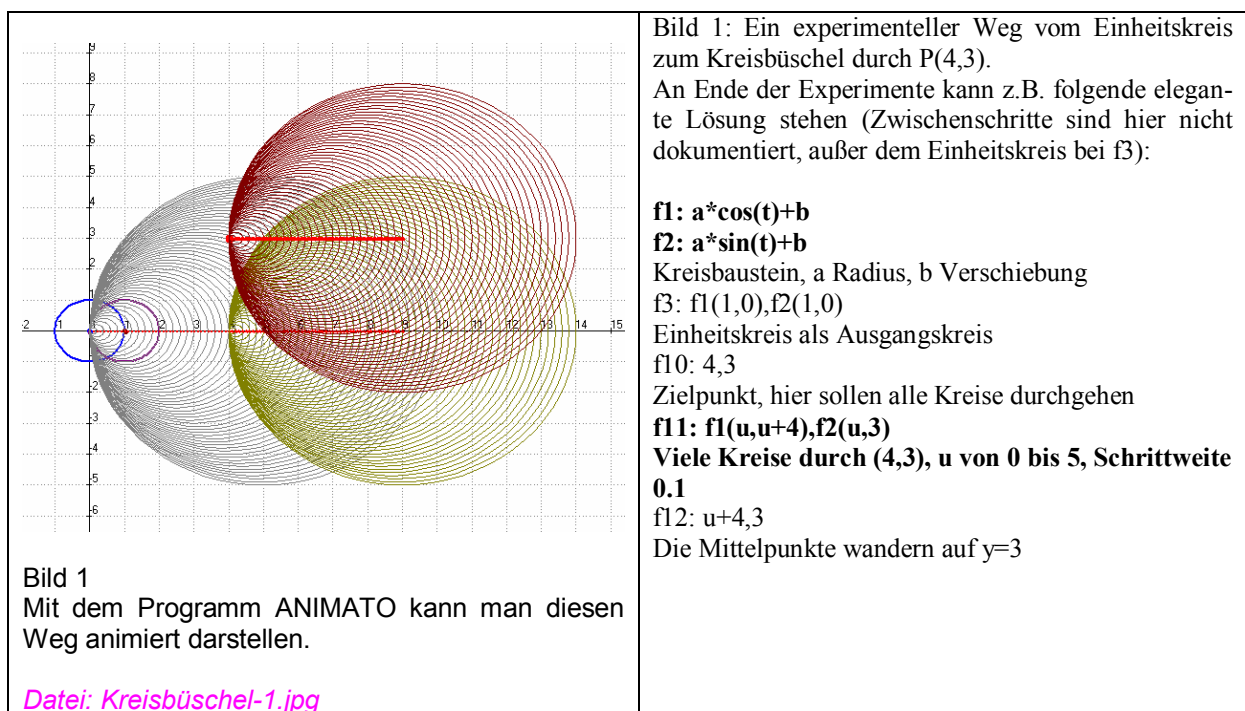
Die Ausgangsaufgabe ist leicht zu verstehen, sie hat viele Bearbeitungsmöglichkeiten (besonders mit dem Computer), regt zu künstlerischen Bildern an und ist vielfältig variierbar z.B. bezüglich der gewählten Objekte und anderer Parameter. Sie vermittelt viel Mathematik und sie macht einfach Spaß, weil man so schön experimentell arbeiten kann. Das Problem ist geradezu ein Musterbeispiel für die Möglichkeiten dieser Arbeitsweise mit Hilfe von Mathematikprogrammen.

Das Ausgangsproblem: Zeichne sehr viele Kreise durch den Punkt P(4,3).

Das wird auf verschiedene Weise gelingen (auch von Hand), aber nun gibt es viele Fortsetzungsmöglichkeiten.

Erste mögliche Fortsetzung

Wenn man das Ausgangsproblem beherrscht (z.B. wie in Bild 1), kann man u.a. dazu übergehen, sehr viele Kreise auch noch durch andere Punkte zu zeichnen. Dann kann z.B. das Bild 2 entstehen. Bild 3 vereint gleich vier Lösungen des Ausgangsproblems.



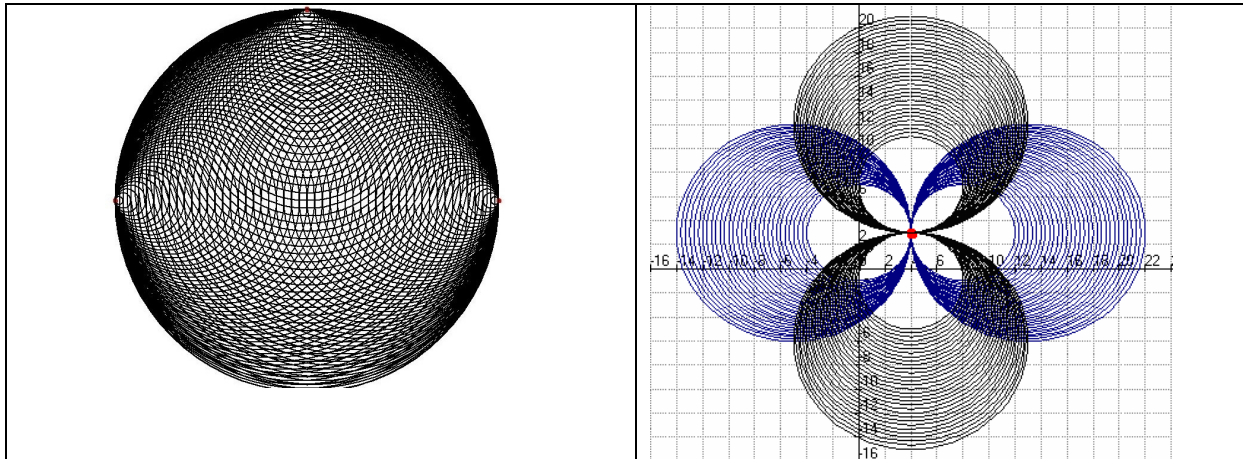


Bild 2: Kreisbündel durch drei Punkte
→ Moire-Bilder

Datei Kreisbündel-2.jpg

Bild 3: Vier Kreisbündel durch einen Punkt

Datei Kreisbündel-3.jpg

Konstellationen wie in Bild 2 können die SchülerInnen zum Erweiterungsthema „Moiré-Bilder“ führen, Bild 3 zeigt die Vielfalt von Lösungen der Ausgangsaufgabe – und es gibt weitere Lösungen.

Allgemeine und speziellere fachliche Kompetenzen

- weitgehend eigenverantwortlich und kooperativ arbeiten.
- Ausbau von Lösungskompetenz
- Entwickeln der Werkzeugkompetenz
- Entwickeln von modularen Kompetenzen, Verallgemeinerungen
- Schulung der Kreativität, Aufgabenvariation, experimentelles Arbeiten mit der Software, Beachtung ästhetischer Aspekte
- Erkennen von Verknüpfungen zu anderen Bereichen, Moiré-Bilder, Entdecken neuer Funktionstypen
- Entwerfen von Animationsstrategien
- Üben an vielfältigem Material, Umgehen mit den gängigen Funktionstypen, aber auch mit anspruchsvolleren ggf. neuen Typen
- Handlösungen mit Computerlösungen vergleichen
- Nutzen der Konzepte: Mehrfachanwendung, Arbeiten mit Modulen, vergrößern, verkleinern

Eine besondere Relevanz gewinnt die Problematik durch die herausfordernden experimentellen Arbeitsmöglichkeiten mit unterschiedlichen Relationstypen, auch mit unterschiedlicher Software. Dazu kommen die sich sofort anbietenden Aufgabenvariationen, die dann ein weites Feld von Mathematik erschließen können.

Auch algebraische und analytische Kenntnisse und Fähigkeiten kommen dabei immer wieder zum Tragen, etwa bei der Berechnung von Abbildungen wie Drehungen, z.B. mit Matrizen.

Einige Ansatzpunkte werden deutlich in der folgenden Abbildung

Aspekte einer Unterrichtseinheit zum Thema

Zeichne sehr viele Kreise durch den Punkt $P(4,3)$

Mehrere Lösungen suchen

Aufgabenvariationen

Variation des Objekts
Geraden, Parabeln, Ellipsen, Sinuskurve,
Lissajous-Kurven usw.

Die Lösungen mehrfach
anwenden, allgemeine
Lösung anstreben

Verlauf durch 2
oder noch mehr
feste Punkte

Kunstabilder erstellen durch Ausnutzen von
Programmooptionen
Farbe, Linienstärke, Geschwindigkeiten,
Definitionsbereiche, Laufbereiche,
vergrößern, verkleinern

Animationen entwerfen und realisieren

Zusammenfassen!!!

Vom Kreis zu Ellipse

A) Konstruieren

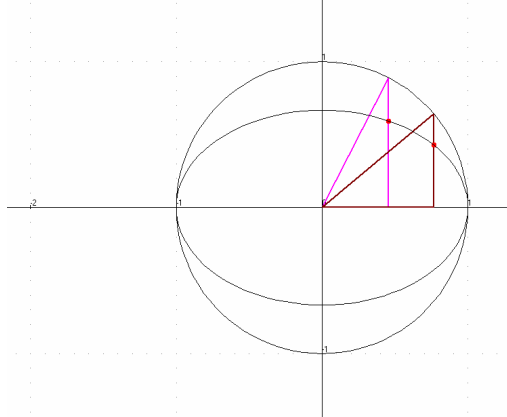
	<p>Aufgabe Das Bild zeigt, wie man von einem Kreis (hier dem Einheitskreis) konstruktiv zu einer Ellipse kommt.</p> <p>a) Erläutern Sie den Weg und konstruieren Sie auf diese Weise eine Ellipse. b) Der Kreis ist gegeben durch $x(t) = r \cdot \cos(t)$, $y(t) = r \cdot \sin(t)$. Leiten Sie eine Gleichung der Ellipse her.</p> <p>Hinweis: Für die Bearbeitung der Aufgaben können die Eingaben zur Bilderzeugung helfen, siehe unten!</p>
---	--

Bild: Datei Kreis-zu-Ellipse.pl2

Zur Erzeugung des Bildes wurde eingegeben:

f1: $\cos(t), \sin(t)$

f2: $\cos(t), 2/3 \cdot \sin(t)$

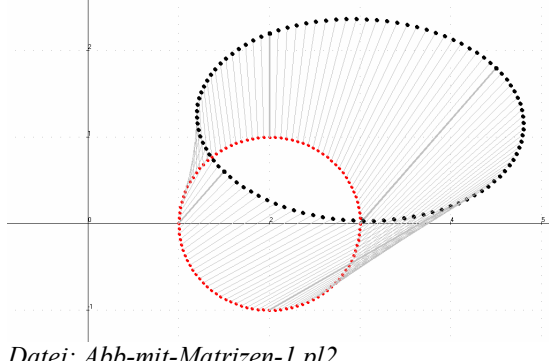
f3: $\cos(1.1), \sin(1.1), 0, 0, \cos(1.1), \sin(1.1), \cos(1.1), 0, \cos(1.1), 0, 0, 0$

f4: $\cos(0.7), \sin(0.7), 0, 0, \cos(0.7), \sin(0.7), \cos(0.7), 0, \cos(0.7), 0, 0, 0$

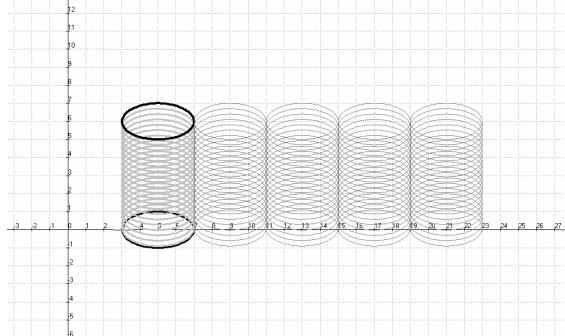
f5: $\cos(0.7), 2/3 \cdot \sin(0.7), \cos(0.7), 2/3 \cdot \sin(0.7)$

f6: $\cos(1.1), 2/3 \cdot \sin(1.1), \cos(1.1), 2/3 \cdot \sin(1.1)$

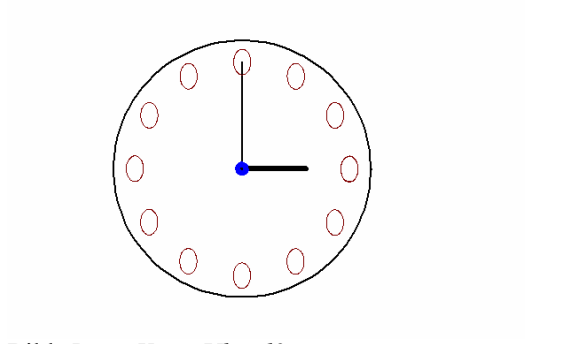
B) Rechnen und zeichnen

	<p>f1: $\cos(t)+2$ f2: $\sin(t)$ f3: $1.5*f1-1*f2, 0.6*f1+1*f2, f1, f2$ f4: $f1, f2$ f5: $1.5*f1-1*f2, 0.6*f1+1*f2$</p> <p>in Matrixschreibweise:</p> $\begin{pmatrix} 1.5 & -1 \\ 0.6 & 1 \end{pmatrix} * \begin{pmatrix} \cos(t) + 2 \\ \sin(t) \end{pmatrix}$ <p>Aufgabe: Erläutern Sie Bild und Rechnung</p>
<p>Datei: <i>Abb-mit-Matrizen-1.pl2</i></p>	

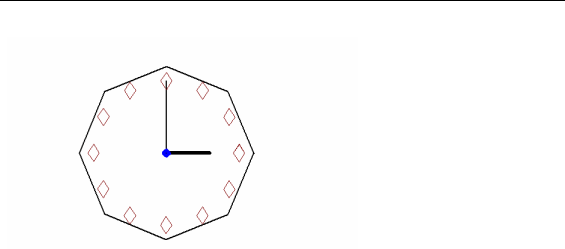
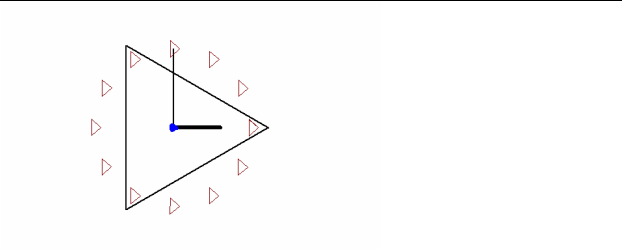
C) Ellipsen-Stapel

	<p>f1: $2\cos(t)+5, \sin(t)$ f2: $2\cos(t)+5, \sin(t)+u$ f3: $2\cos(t)+5, \sin(t)+6$ f5: $2\cos(t)+v, \sin(t)+u$</p> <p>In f5 läuft u von 0.1 bis 6, Anzahl 20 v von 9 bis 21, Anzahl 4</p> <p>Auf dem Weg zum Zylinder → siehe einige Seiten weiter!</p>
--	---

D) Eine Uhr aus Kreis und Ellipsen – und Variationen

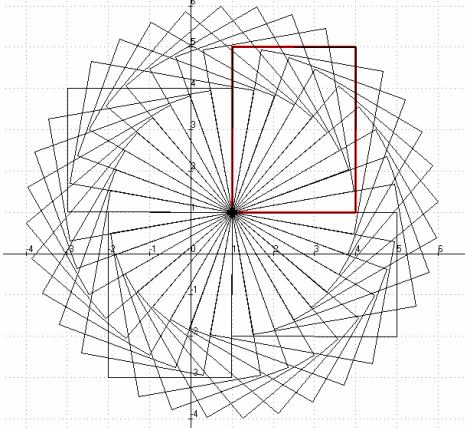
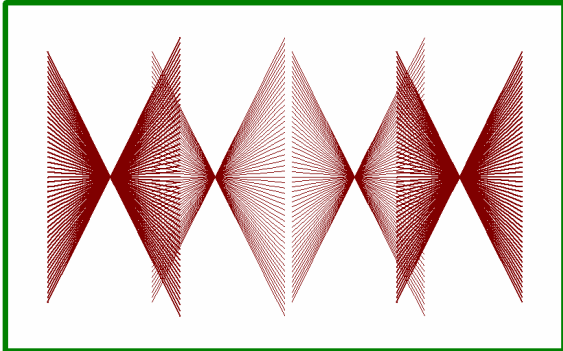
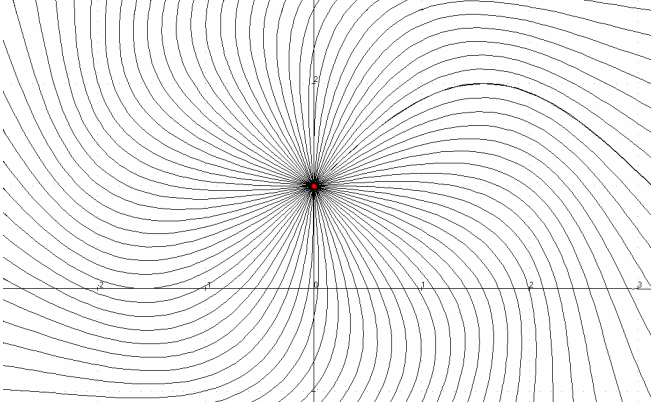
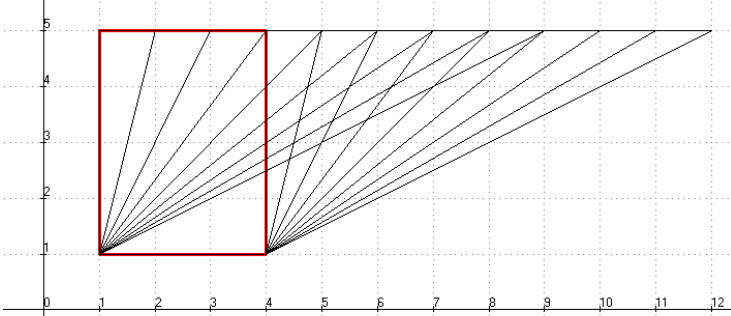
	<p>f1: $a*\cos(t)+b$ f2: $a*\sin(t)+b$ f3: $f1(3,0), f2(3,0)$ f4: $f1(0.2, 2.5*\cos(u)), f2(0.3, 2.5*\sin(u))$ f5: $f1(0.1, 0), f2(0.1, 0)$ f6: $0, 0, 0, 2.5$ f9: $0, 0, 1.5, 0$</p>
<p>Bild: <i>Datei Kreis-Uhr.pl2</i></p>	

Wenn man die Anzahl der Kreispunkte verringert, z.B. auf 8 oder 3, und auch bei den Ellipsen andere Anzahlen nimmt, kann man weiter variieren und abstrahieren.

	
---	--

Bildseite – Aufgabenvariationen

Rechtecke, Strecken, Sinuskurven, Vierecke

<p>Viele Rechtecke durch den Punkt $(1,1)$, Drehungen</p> <p><i>Datei</i> <i>Viele Vierecke-Drehung.jpg</i></p>	
<p>Viele Strecken durch vier Büschelpunkte, vereint zu einem Kunstbild Steigungen verändern</p> <p><i>Datei</i> <i>Viele Geraden.jpg</i></p>	
<p>Viele Sinuskurven durch $(0,1)$, Drehungen</p> <p><i>Datei</i> <i>Viele Sinuskurven.jpg</i></p>	
<p>Viele Vierecke, Scherungen eines Rechtecks mit zwei festen Punkten $P(1,1)$ und $Q(4,1)$</p> <p><i>Datei</i> <i>Viele Vierecke-Scherung.jpg</i></p>	

AG 4.3 Projekt: Kugeln, die uns umgeben – andere Körper



Bild a: Abakus mit Kugeln (Unter den Linden, Berlin)

Eine Fotosafari mit der Suche nach Kugeln in der Umgebung Ihrer Wohnung kann zu vielen Anregungen führen!

Aufgabe:

Geben Sie Kugelgleichungen für die in Bild a gezeigten Kugeln an.



Bild b: Kunst mit Kugeln und anderen Objekten (Pinakothek der Moderne, München)

Aufgabe: Kennen Sie Formeln für die Objekte? Modellieren Sie die Objekte m.H. des Programms POVRAY



Bild c: Kugel (Kunst am Aa-See, Münster)

Aufgabe: Geben Sie eine Gleichung für die untere Halbkugel an.



Bild d: Kugeln (Kunst am Spreeufer, Berlin)

Aufgabe: Nehmen Sie das Bild als Hintergrundbild und färben Sie die Kugel m.H. von Gleichungen gelb.



Bild e: Billard

Aufgabe: Bearbeiten Sie das Thema „Kugelwege auf dem Billardtisch“

Modellierung: Kugel am Spreuefer (Bild d)

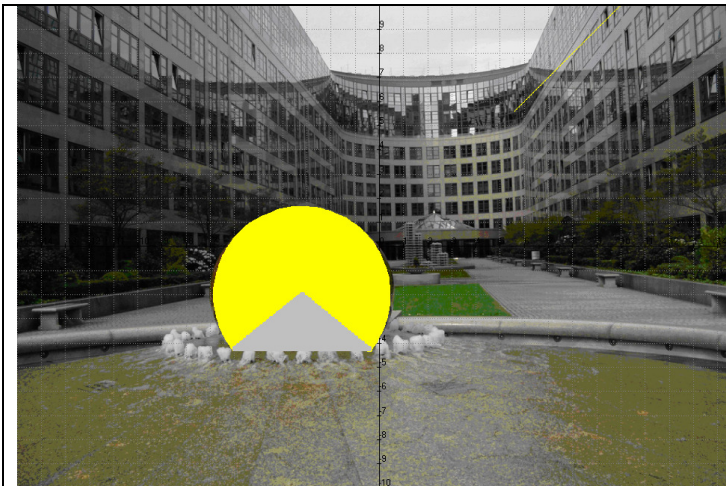


Bild d1: Modellierung der Kugel von Bild d mit ANIMATO

- 1) Hilfsgerade zeichnen, Bildausschnitt wählen (hier y von -10 bis 10, x von -15 bis 15)
- 2) Einheitskreis einzeichnen, dann Kreisgleichung experimentell ändern bis äußere Umrandung der Kugel erreicht, Term bei f2
- 3) Term bei f3 füllt die Kugel zu einem großen Teil aus (gelb), wobei t von 5.6 bis 10.1 (Bogen) läuft (Kugel ist unten abgeflacht). u läuft von 3.55 bis 0.
- 4) Es bleibt ein Kugelteil übrig. Dieses wird gefüllt mit Strecken, zunächst mit f4 (unterste Begrenzung)
- 5) Dann weitere Füllung mit f5 (grau), u wie bei 3) bzw. bei f3.

f1: x Hilfsgerade am Anfang der Modellierung

f2: $3.55\cos(t)-3.2, 3.55\sin(t)-2$

f3: $u*\cos(t)-3.2, u*\sin(t)-2$

f4: $3.55\cos(5.6)-3.2, 3.55\sin(5.6)-2,$
 $3.55\cos(10.1)-3.2, 3.55\sin(10.1)-2$

f5: $u*\cos(5.6)-3.2, u*\sin(5.6)-2,$
 $u*\cos(10.1)-3.2, u*\sin(10.1)-2$

Datei:

Kugel-Spreuefer-Modellierung.pl2

Kugeln als Weihnachtsdekoration - von der Kugel zum Ellipsoid

Kreise und Kugeln sind in der Regel auch in den Lehrplänen zur Analytischen Geometrie als Inhalte genannt. Die nachfolgenden mathematischen Überlegungen gehen von einem Foto aus der Vorweihnachtszeit aus – von einer großen Kugeldekoration in den Berliner Arkaden.

Mathematik am Potsdamer Platz in Berlin

Sekundarstufe 2 Mathematik und Kunst	Analytische Geometrie: Kugeln	Foto-Exkursion, Gruppenarbeit, selbstorganisiertes Lernen	Arbeitsbogen 1 „Arkaden am Potsdamer Platz“
---	-------------------------------	---	--

Im Dezember 1998 unternahmen wir mit dem Mathematik-Kunst-Kurs (12. Klasse) eine Foto-Exkursion zum neuen Potsdamer Platz. Sie sollte Fotos liefern, die mit Mathematik zu tun haben. Mehrfach wurde die Weihnachtsdekoration in den Arkaden (einem großen Einkaufszentrum) aufgenommen. Hier eins der Fotos, das später von Karl und Katja wie folgt beschrieben wurde (siehe unten).



Bild 1: Ein Foto zur Weihnachtszeit 1998

Aufgabe 1:

Beschreibe das Foto, gehe dabei besonders auf die mathematischen Objekte ein.

Aufgabe 2:

Informiert euch (Gruppenarbeit) darüber, wie man eine Kugel mathematisch beschreiben kann.

Aufgabe 3:

Wie kann man die unterschiedlichen Größen und Lagen der Kugeln „in den Griff“ bekommen?

Aufgabe 4:

Skizziere eine Erdkugel. Wie kann man die Lage eines Ortes auf der Erdkugel festlegen?

Aufgabe 5:

Mit geeigneten Programmen (u. a. POV-Ray - siehe Internet) kann man Kugeln und andere räumliche Objekte überzeugend darstellen! – Informiert euch darüber! Eine Demonstration wäre schön!

Von der Kugel zum Ellipsoid



Bild 2: Ein Foto zu Ostern!

Aufgabe 6:

Zu Bild 2 gibt es wohl Einiges zu sagen! – Schreiben Sie einen mathematischen Aufsatz.

Bearbeitungsmöglichkeiten / Lösungen

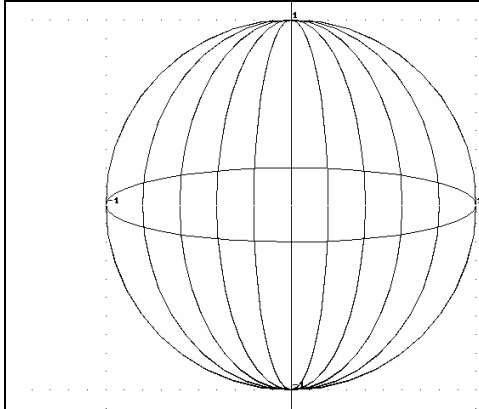
Zu Aufgabe 1

Von Katja und Karl: Auf dem Foto sind fünf mathematische Objekte zu erkennen. Das Glasdach ist aus vielen rechteckigen Glasscheiben zusammengesetzt, die allerdings auf dem Foto wie Parallelogramme aussehen. – Die zweite erkennbare Form sind Rechtecke, aus denen die Fassade des im Hintergrund zu sehenden Hochhauses zusammengesetzt ist. – Die dritte Form ist ein Zylinder. Er befindet sich am Glasdach und die Lichterkette ist an ihm befestigt. Für ihn gilt, dass der Radius der Grundfläche und der des Deckels gleichgroß sind. Der Zylindermantel stellt die senkrechte Verbindung zwischen Grundfläche und Deckel dar. –

Die vierte Form ist das Dreieck. Es ist der Teil des Glasdaches hinter den Parallelogrammen.
 – Die Kugel ist die fünfte mathematische Form, welche auf dem Foto zu erkennen ist. Sie hängen in verschiedenen Größen von der Decke in den Potsdamer Arkaden (nur in der Weihnachtszeit zu bewundern!!!). Bei einer Kugel ist der Radius überall gleichgroß.

Zu Aufgabe 2

Erdkugel:



Kugeln wurden in den folgenden Kursstunden ein wichtiges mathematisches Thema. Wie kann man Kugeln durch Formeln beschreiben?

Legt man eine Kugel in ein räumliches Koordinatensystem, so dass der Mittelpunkt im Koordinatenursprung $(0,0,0)$ liegt, dann lautet die

Kugelgleichung $x^2 + y^2 + z^2 = r^2$, r Radius der Kugel, Mittelpunkt ist $(0, 0, 0)$.

Hinweis: Zum Beweis kann man den Pythagoras benutzen (Abstand der Kugelpunkte vom Mittelpunkt).

Und wenn der Kugelmittelpunkt woanders liegt, z.B. im Punkt (a,b,c) , dann gilt:

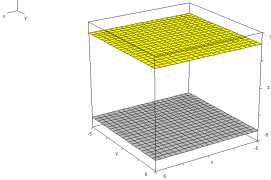
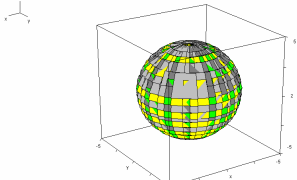
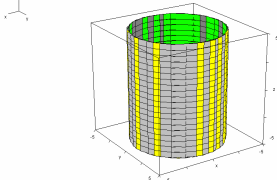
Kugelgleichung $(x - a)^2 + (y - b)^2 + (z - c)^2 = r^2$, wobei r der Radius der Kugeln und (a,b,c) ihr Mittelpunkt ist.

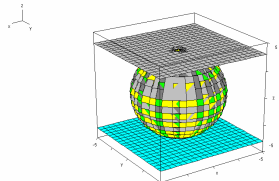
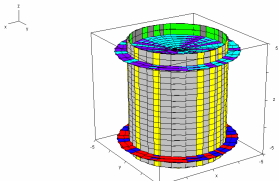
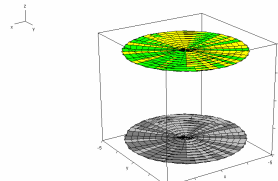
Vektoriell geschrieben erhält man:
$$\begin{pmatrix} x - a \\ y - b \\ z - c \end{pmatrix}^2 = r^2.$$

Koordinatensysteme – Ebenen, Kugeln, Zylinder

Die folgenden Abbildungen zeigen, dass Terme in verschiedenen Koordinatensystemen unterschiedliche Bilder ergeben.

In den drei Bildern werden die gleichen Terme $r = 4$ und $r = -4$ benutzt. DERIVE 6 stellt unter auf der 3D-Grafikseite die Optionen „Einstellen“, „Koordinatensystem“ (Auswahl: rechtwinklig, sphärisch, zylindrisch) zur Verfügung. Je nach Einstellung erhält man Ebenen, eine Kugel, einen Zylinder.

 <p>Koordinatensystem, rechtwinklig $r=4$ und $r=-4$ oder auch $r=4$ und $z=-4$</p>	 <p>Koordinatensystem sphärisch $r=4$ oder auch $z=4$</p>	 <p>Koordinatensystem zylindrisch, $r=4$</p>
--	---	---

		
<p>Man kann auch innerhalb einer Zeichnung die Koordinatensysteme wechseln (hier rechtwinklig, sphärisch).</p>	<p>Koordinatensystem zylindrisch $r=4$ und $z=4$</p>	<p>Koordinatensystem zylindrisch, $z=4$ und $z=-4$</p>

Hinweis: Einzelheiten zu den Darstellungen „Einstellen > Koordinatensystem“ für 3D-Grafik in DERIVE6 finden Sie in der Hilfe von DERIVE.

Auch Kugeln kann man schneiden – mit CAS-Hilfe

<pre> kugel1:=x²+y²+z²-42=0 kugel2:=(x-5)²+(y-2)²+(z-3)²-36=0 kugel3:=(x+4)²+(y-3)²+(z+2)²-50=0 solve(kugel1 and kugel2 and kugel3, {x,y,z}) x=-sqrt(8074-136)/108 and y=-sqrt(8074-4213)/702 and z=23*sqrt(8074+1732)/1404 or x=sqrt(8074+136)/108 and y=sqrt(8074+136)/108 x=-sqrt(8074-136)/108 and y=-sqrt(8074-4213)/702 and z=23*sqrt(8074+1732)/1404 or x=sqrt(8074+136)/108 and y=sqrt(8074+136)/108 x=4.27264 and y=5.87343 and z=2.70561 or x=2.09125 and y=6.12942 and z=-.238373 </pre> <p><small>©Die Kugeln schneiden sich also in zwei Punkten S1 und S2</small></p>	<p>Aufgabe: Man bestimme den Schnitt der Kugeln kugel1, kugel2, kugel3. Hier ist CAS-Nutzung sehr angebracht!</p> <p>Aufgabe: Schildern Sie den Rechenweg für die Handrechnung. Ansatz: kugel1-kugel2 bilden, kugel1-kugel3 bilden usw.</p>
--	---

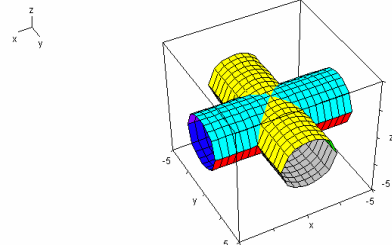
Bild: Datei Schnitt dreier Kugeln-Rechnung.tns

Zylinder und ihre Darstellung in DERIVE

	
<p>Zylinder in den Berliner Arkaden, Potsdamer Platz, Weihnachtdecoration</p>	<p>Zylindrischer Bau in Frankfurt am Main</p>

Zylinderfläche 1
 $z^2 = (4-x^2)$, y beliebig
 $z = \text{SQRT}(4-x^2)$
 $z = -\text{SQRT}(4-x^2)$

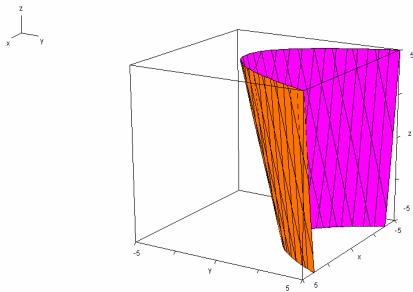
Zylinderfläche 2
 $z^2 = (4-y^2)$, x beliebig
 $z = \text{SQRT}(4-y^2)$
 $z = -\text{SQRT}(4-y^2)$



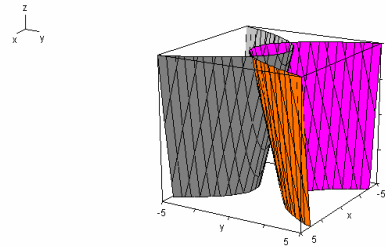
Zwei Zylinder, die Terme stehen links

Parabolische Zylinder: Gleichung $z = x^2 - 2p \cdot y$

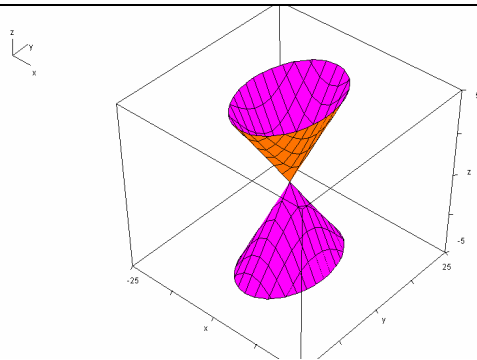
Die Gleichung stellt eine zylindrische Fläche dar, deren Querschnitt die Parabel $x^2 = 2p \cdot y$ ist. Die Fläche ist symmetrisch zur y - z -Ebene. Die x - z -Ebene ist Tangentialebene und berührt den Zylinder in der z -Achse. Jede Ebene, die parallel zur x - y -Ebene ist, schneidet den parabolischen Zylinder in einer Parabel.



Parabolischer Zylinder,
 Eingabe DERIVE $z = x^2 + 4y$ und $z = x^2 - 4y$



Elliptischer Kegel



Elliptischer Kegel: Diese Flächen werden durch die Gleichung $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 0$ dargestellt. Für die Darstellung in DERIVE löst man nach z auf und hat dann zwei Wurzelterme einzugeben. Die beiden ersten Brüche erinnern an die Terme in der Ellipsengleichung und auch Teile einer Kugelgleichung sind zu erkennen. Für die Zeichnung wurde $a = 2$, $b = 3$ und $c = 1$ gesetzt. Damit wurden die Gleichungen $z = \sqrt{\left(\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{9}\right)}$ und $z = -\sqrt{\left(\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{9}\right)}$ benutzt.

Die Fläche ist symmetrisch zu den drei Koordinatenebenen, da ja zu jedem Wertepaar zweier Koordinaten zwei Wert der dritten Koordinate gehören, unterschieden nur durch das Vorzeichen.

Rechnerische Anwendung

$\text{expand}\left(\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 0 \text{ and } z=4 \text{ and } c=1\right)$	<p>Aufgabe: Zeigen Sie, dass der elliptische Kegel von jeder zur x,y-Ebene parallelen Ebene in einer Ellipse geschnitten wird.</p> <p>Lösung: Interpretieren Sie dazu die CAS-Rechnung.</p>
$\frac{b^2 \cdot x^2 + a^2 \cdot (y^2 - 16 \cdot b^2)}{a^2 \cdot b^2} = 0 \text{ and } z=4 \text{ and } c=1$	
$\text{expand}\left(\frac{b^2 \cdot x^2 + a^2 \cdot (y^2 - 16 \cdot b^2)}{a^2 \cdot b^2} = 0\right) \quad \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - 16 = 0$	
$\text{expand}\left(\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 0 \text{ and } z=4 \text{ and } c=1 \text{ and } a=2 \text{ and } b=3\right)$	
$9 \cdot x^2 + 4 \cdot (y^2 - 144) = 0 \text{ and } z=4 \text{ and } a=2 \text{ and } b=3 \text{ and } c=1$	

AG 4.4: Programmieren: POV-Ray-Kugeln und andere Objekte

In einer Schülergruppe, die schon Erfahrung mit Programmieren hat, kann man z.B. so vorgehen:

- 1) **Demonstration:** Ein vorgefertigtes Bild (eine Szene) wird benutzt.
- 2) **Interpretation:** Der Bildinhalt soll gedeutet werden.. Dazu gibt man die Programmdatei, siehe unten, und lässt sie in Gruppenarbeit analysieren. Zum Beispiel können die Schüler zuerst die Kugeln identifizieren (*Kompetenz: Vergleichen und Analysieren von Bild- und Programmteilen*). Weitere Analysen können durch Aufruf der Programmhilfe erfolgen (*Kompetenz: Dokumentation lesen lernen*) – man kann auch einen Auszug der Dokumentation in gedruckter Form vorlegen.
- 3) **Kommunikation:** Die Gruppenergebnisse werden referiert und eventuelle Verständnislücken ausgeräumt (*Kompetenzen: Kommunizieren, Kooperieren, fachliche Kompetenzen erwerben*).
- 4) **Die Schüler erstellen eigene Programme**, z.B. Nachkonstruieren von Bildern, wie in diesem Kapitel gegeben (Kugeln in den Arkaden usw.). *Kompetenz: Entwurf und Programmierung einer POV-Ray-Szene*.

In einem verlangsamten Ablauf kann man den gleichen Weg auch für im Programmieren unerfahrene Schüler verfolgen. Man kann dabei z.B. Programmteile löschen oder später andere Teile hinzufügen lassen und den Ablauf vom Editor über das Compilieren bis zum Programmlauf gemeinsam durchgehen.

Das Programmieren ist dadurch sehr vereinfacht, dass fertige Module mit Parametern zur Verfügung stehen, wie (siehe Beispielprogramm)

sphere <8,7,5>,3

Kugel mit Mittelpunkt <8,7,5> und dem Radius 3,

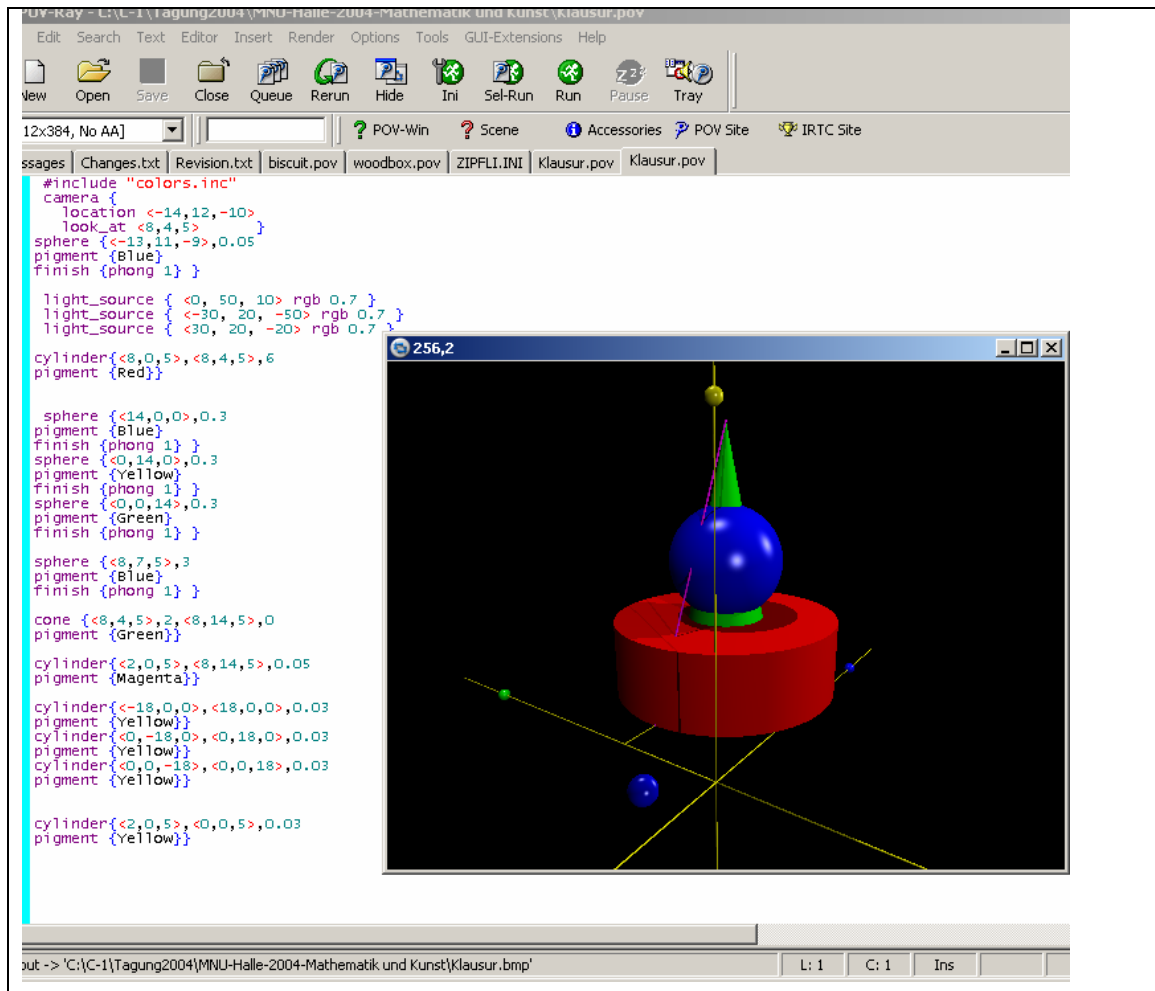
cylinder <-18,0,0>, <18,0,0>, 0.03

Kreiszyylinder Mittelpunkt des unteren Kreises, Mittelpunkt des oberen Kreises, Radius

Modulare Kompetenz:

Modulare Kompetenzen sind bei vielen Computer-Programmen und auch darüber hinaus sehr nützlich und sollten unbedingt zum Mathematikunterricht gehören. Entscheidend für die sinnvolle Verwendung solcher Module (Bausteine) ist das Verständnis der Bedeutung der notwendigen Parameter.

Beispiel 1



Module in POV-Ray - ein Auszug aus der Programm-Hilfe:

<p>Section Contents</p> <ul style="list-style-type: none"> • 3.4.1 Finite Solid Primitives <ul style="list-style-type: none"> ○ 3.4.1.1 Blob ○ 3.4.1.2 Box ○ 3.4.1.3 Cone ○ 3.4.1.4 Cylinder ○ 3.4.1.5 Height Field ○ 3.4.1.6 Julia Fractal ○ 3.4.1.7 Lathe ○ 3.4.1.8 Prism ○ 3.4.1.9 Sphere ○ 3.4.1.10 Sphere Sweep ○ 3.4.1.11 Superquadric Ellipsoid ○ 3.4.1.12 Surface of Revolution ○ 3.4.1.13 Text 	<h4>3.4.1.9 Sphere</h4> <p>The syntax of the sphere object is:</p> <pre> SPHERE: sphere { <Center>, Radius [OBJECT_MODIFIERS...] } </pre> <p>Where <i><Center></i> is a vector specifying the x, y, z coordinates of the center of the sphere and <i>Radius</i> is a float value specifying the radius.</p>
--	---

Beispiel 2

Lernen und Anwenden von POV-Ray

Man nehme ein fertiges Programm, führe kleine Änderungen durch, lasse es „rendern“ und studiere die Auswirkungen. Hierzu Beispiel 2:

Das Programm links ist gegeben, das Rendern ergibt Bild 1. Die kleinen Änderungen führen dann zu Bild 2.

```
// Persistence Of Vision raytracer version 3.1
    sample file.
// File by Alexander Enzmann

global_settings { assumed_gamma 2.2 }

camera {
    location <0, 0, -8>
    direction <0, 0, 1.2071>
    look_at <0, 0, 0>}

sphere { <0.0, 0.0, 0.0>, 2
    finish {
        ambient 0.2
        diffuse 0.8
        phong 1 }
    pigment { color red 1 green 0 blue 0 }}

box { <-2.0, -0.2, -2.0>, <2.0, 0.2, 2.0>
    finish {
        ambient 0.2
        diffuse 0.8 }
    pigment { color red 1 green 0 blue 1 }
    rotate <-20, 30, 0>}

light_source { <-10, 3, -20> color red 1 green 1
blue 1 }
```

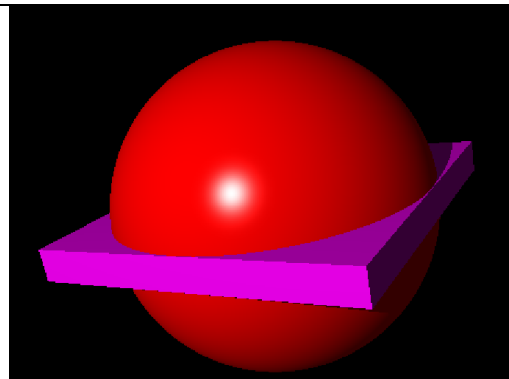


Bild 1 zum Programm links

Zwei Änderungen

```
sphere { <0.0, 0.0, 0.0>, 0.5
...
pigment { color red 1 green 1 blue 0
}}}
```

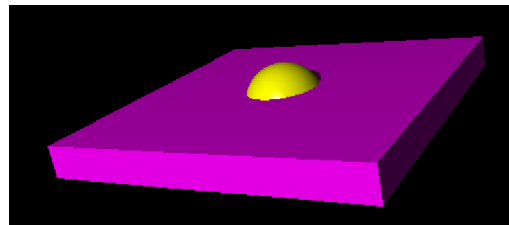


Bild 2 mit den obigen Änderungen

Aus der Hilfe von POV-Ray

A2.2.7.1 Transformations

The supported transformations are rotate, scale, and translate. They are used to turn, size and move an object or texture. A transformation matrix may also be used to specify complex transformations directly. Groups of transformations may be merged together and stored in a transformation identifier. The syntax for transformations is as follows.

TRANSFORMATION:

```
rotate <Rotate_Amt> | scale <Scale_Amt> |
translate <Translate_Amt> | transform TRANSFORM_IDENTIFIER |
transform { TRANSFORMATION_BLOCK... } |
matrix <Val100, Val101, Val102,
      Val110, Val111, Val112,
      Val120, Val121, Val122,
      Val130, Val131, Val132>
```

TRANSFORMATION_BLOCK:

```
TRANSFORM_IDENTIFIER | TRANSFORMATION | inverse
```

TRANSFORM_DECLARATION:

```
#declare IDENTIFIER = transform { TRANSFORMATION_BLOCK... } |
#local IDENTIFIER = transform { TRANSFORMATION_BLOCK... }
```

2.2.7.1.1 Translate

Items may be moved by adding a *translate* modifier. It consists of the keyword *translate* followed by a vector expression. The three terms of the vector specify the number of units to move in each of the *x*, *y* and *z* directions. *Translate* moves the element relative to its current position. For example

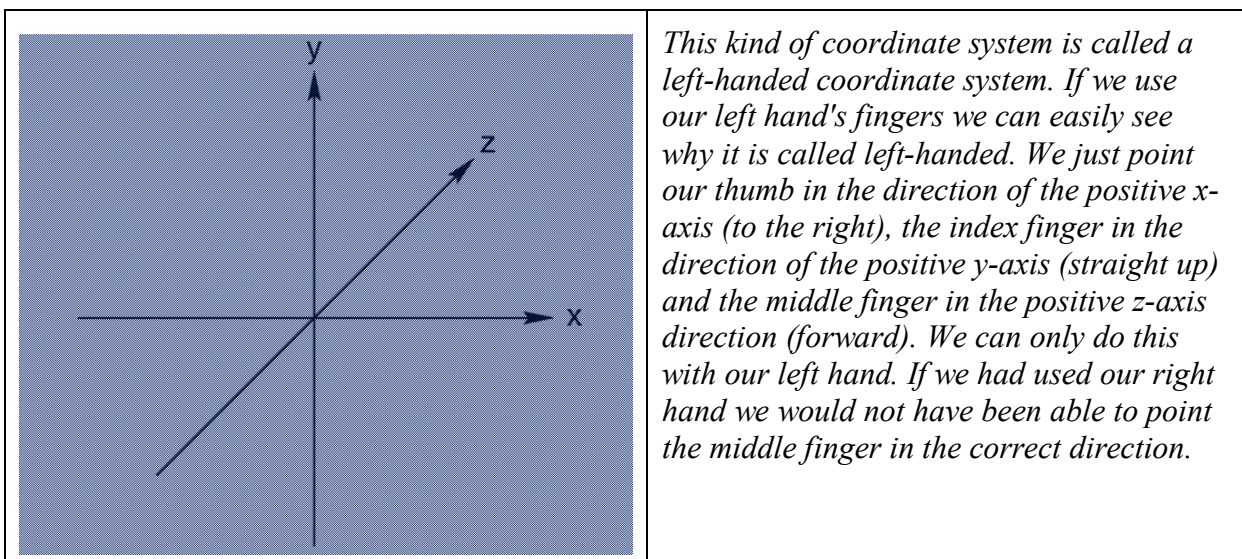
```
sphere { <10, 10, 10>, 1
  pigment { Green }
  translate <-5, 2, 1>
}
```

will move the sphere from the location $\langle 10, 10, 10 \rangle$ to $\langle 5, 12, 11 \rangle$. It does not move it to the absolute location $\langle -5, 2, 1 \rangle$. Translations are always relative to the item's location before the move. Translating by zero will leave the element unchanged on that axis. For example:

```
sphere { <10, 10, 10>, 1
  pigment { Green }
  translate 3*x // evaluates to <3,0,0> so move 3 units
               // in the x direction and none along y or z
}
```

Aus der Hilfe von POV-Ray

First, we have to tell POV-Ray where our camera is and where it is looking. To do this, we use 3D coordinates. The usual coordinate system for POV-Ray has the positive *y*-axis pointing up, the positive *x*-axis pointing to the right, and the positive *z*-axis pointing into the screen as follows:



Beispiel 3

Verwendung der Matrixabbildung
$$\begin{pmatrix} 0.886 & 0.5 & 0.5 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0.5 & 0 & -0.886 \end{pmatrix} * \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 1.5 \\ 0 \end{pmatrix}$$

// Matrix is an object transformation that does rotation about the Y axis,
 // shear along the Y axis, and translation along the Y axis

matrix

<

```
0.886, 0.5, 0.5, // the first 3 lines form a rotation matrix
0, 1, 0, // since it is not orthogonal, shearing occurs
0.5, 0, -0.886,
0, 1.5, 0 // the last 3 values contain the translation
```

>

```
// Persistence Of Vision raytracer version 3.1 sample file.
// File by Alexander Enzmann
```

```
global_settings { assumed_gamma 2.2 }
```

```
camera {
```

```
location <0, 0, -8>
```

Kameraposition

```
direction <0, 0, 1.2071>
```

Blickrichtung

```
look_at <0, 0, 0>
```

Blick auf Punkt

```
}
```

```
sphere { <0.0, 0.0, 0.0>, 2
```

```
finish {
```

```
ambient 0.2
```

```
diffuse 0.8
```

```
phong 1
```

```
}
```

```
pigment { color red 1 green 0 blue 0 }
```

```
}
```

```
box { <-2.0, -0.2, -2.0>, <2.0, 0.2, 2.0>
```

```
finish {
```

```
ambient 0.2
```

```
diffuse 0.8
```

```
}
```

```
pigment { color red 1 green 0 blue 1 }
```

```
rotate <-20, 30, 0>
```

```
}
```

```
light_source { <-10, 3, -20> color red 1 green 1 blue 1 }
```

Was macht die Verwendung von POVRAY für den Unterricht so wertvoll?

- 1) **Fachliche Kompetenzen:** Die in POVRAY möglichen Objekte erweitern die sonst in der analytischen Geometrie der Schule üblichen Beschränkungen auf Punkt, Gerade, Ebene, Kugel um viele weitere in unserer Umgebung vorkommende, also realistische Objekte.
- 2) **Interpretationskompetenz:** Die Analysen von Programmen führen in diese Welt ein und üben das Lesen, Nachvollziehen und Verstehen von Problemlösungen.
- 3) **Modellierungskompetenz:** Eigene Entwürfe von POVRAY-Szenen und deren Realisierung machen die Thematik für Schüler interessant und fruchtbar sowohl beim Modellierungsprozess als auch durch die sofort mögliche Umsetzung der Entwürfe.
- 4) **Modulare Kompetenzen:** Das Arbeiten mit Modulen wie „sphere“ und den zugehörigen Parametern ist übertragbar auf andere Computersoftware und bestätigt das in CAS-Programmen überaus wichtige Konzept der vordefinierten oder selbstdefinierten Module / Bausteine. Hier kann sich dann auch die Frage anschließen, wie man die verwendete Black-Box (das Modul mit seinen Parametern) öffnen kann zu einer White-Box.
- 5) **Vernetztes Denken:** Der Entwurf von Szenen führt zu ganzheitlichen Bildern, die sich aus vielen Objekten zusammensetzen. Deren Platzierung im 3D-Koordinatensystem schult das räumliche Verständnis der Schüler.
- 6) **Fragen stellen, Probleme erkennen:** Die experimentelle Arbeit mit dem System führt automatisch zu weiteren Fragestellungen und zu einer intensiveren Beschäftigung mit den mathematischen Inhalten, aber auch mit den jeweils notwendigen *Werkzeugkompetenzen*.

An dieser Stelle ein Literaturhinweis zur Verwendung von POVRAY

Filler, Andreas:

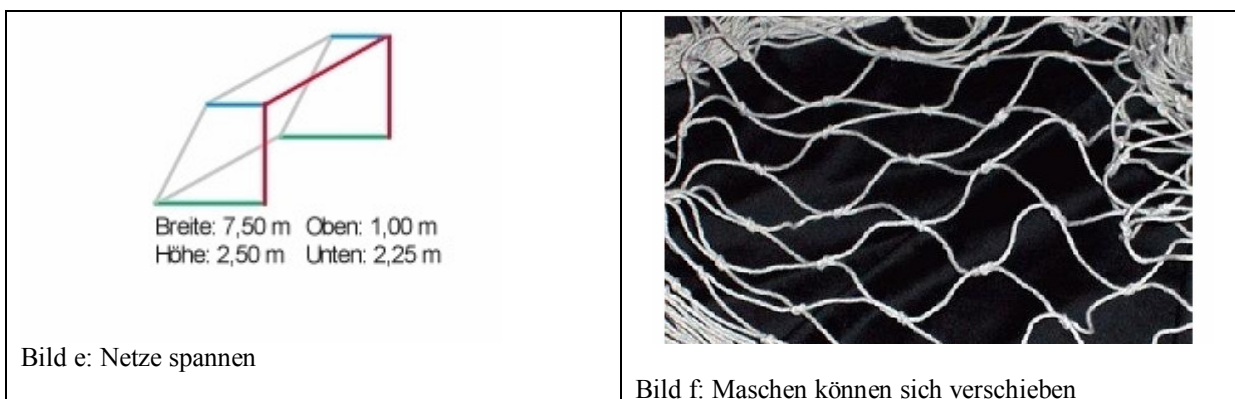
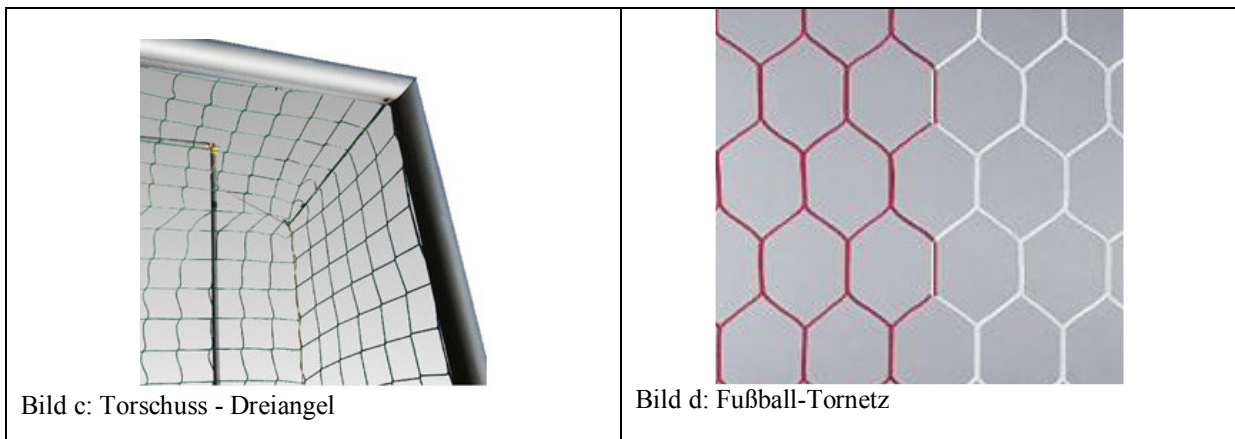
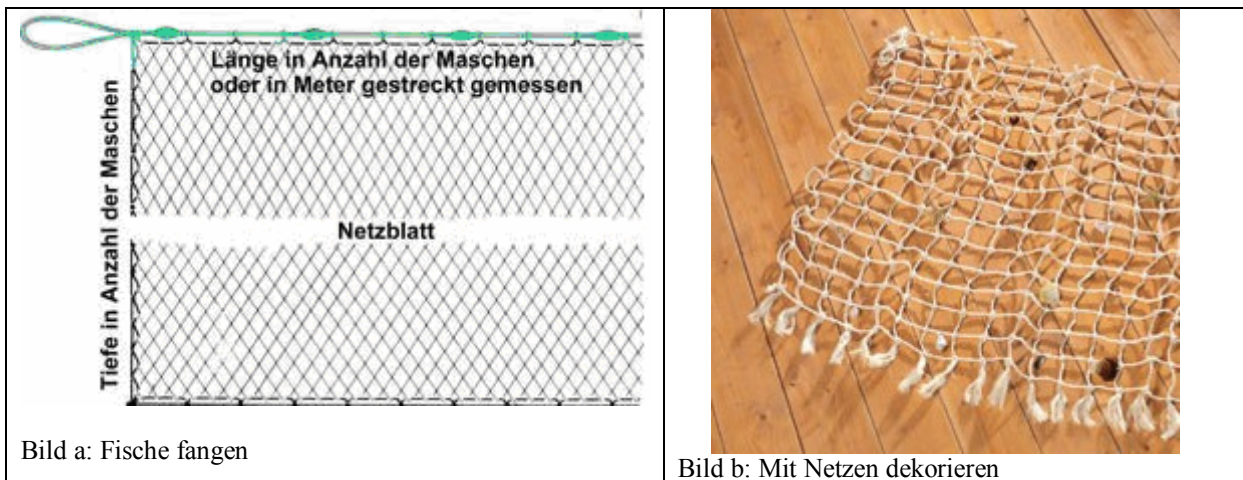
Einbeziehung von Elementen der 3D-Computergrafik in den Mathematikunterricht der Sekundarstufe II im Stoffgebiet Analytische Geometrie (Habilitationsschrift).

edoc Dokumenten- und Publikationsserver der Humboldt-Universität zu Berlin, 2007

<http://www.ph-heidelberg.de/wp/filler/3dgc.html>

AG 4.5 Projekt: Netze – Maschen – Muster

Auch bei diesem Thema gibt es zahlreiche Anknüpfungsmöglichkeiten an die Lebenswelt. Fischernetze, Tornetze, Netze zum Dekorieren, Ballnetze usw. liefern uns mathematische Formen und umgekehrt können **eigene Entwürfe und Realisierungen** (das wird hier der Schwerpunkt) hergestellt werden. Außerdem sind an vielen Stellen fachübergreifende Betrachtungen möglich (Kosten, Herstellung, Material, Anbieter usw.). Werfen Sie zunächst einen Blick auf die Bilder.



Eigene Netzmuster entwerfen

In diesem Abschnitt geht es um den Entwurf und die Erzeugung von Maschenformen. Netze werden an vielen Stellen verwendet. Es gibt diverse Maschenformen – wir werden Netze aus geometrischen Objekten erzeugen und dabei zwei Ansätze benutzen, die aber eng miteinander verknüpft sind.

- 1) Gegeben ist das Objekt – das Objekt wird vervielfältigt,
- 2) Das Netz entsteht durch „families“ wie Geradenscharen, Kurvenscharen usw. durch deren Schnitt miteinander.

Für diese Ansätze brauchen wir eine Software, die auf schnelle Weise Scharen erzeugen kann.

Vom Kreis zum Muster

Wir erzeugen einen Einheitskreis, dieser wird geeignet vervielfältigt. Damit ist das erste Muster gewonnen. – Nun kommt als neue Idee dazu, dass man den Kreis nicht aus vielen Punkten entstehen lässt, sondern nur z.B. 4 Punkte nimmt. Es entstehen Quadrate. Mit diesem Ansatz kann man nun eine Fülle von Formen entwerfen. Dabei kann man auch noch den Ausgangskreis durch ein anderes Objekt ersetzen.

Damit ist im Unterricht wegen der zahlreichen Variationsmöglichkeiten und der Eigentätigkeiten eine hohe Motivation der SchülerInnen gesichert und es werden vielfältige Kompetenzen benutzt und ausgeweitet sowie neue Kompetenzen erworben (siehe am Ende des Abschnitts).

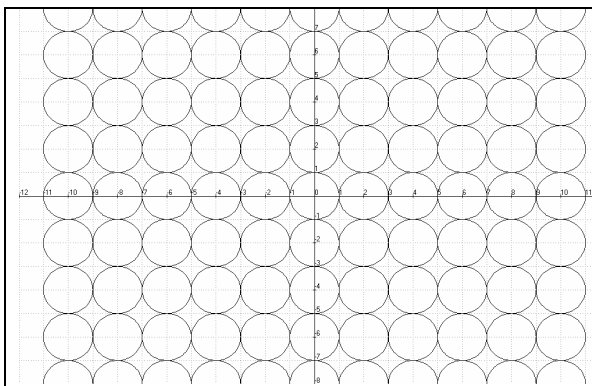
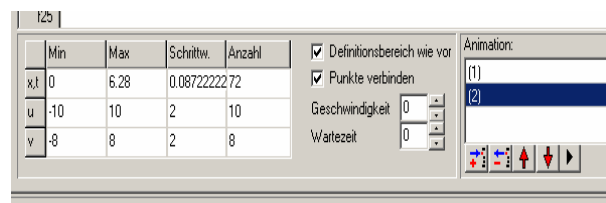


Bild g: Datei Mustererzeugung 1.pl2
Auf Wunsch kann das Koordinatensystem herausgenommen werden.

f1: $a \cdot \cos(t)$ // Bei f1, f2 andere Terme
→ andere Muster
f2: $a \cdot \sin(t)$
f3: f1(1), f2(1) // Kreis mit Radius 1
f4: f1(1)+u, f2(1)+v // **Mustererzeugung durch Verschiebungen des Ausgangsobjekts**



Laufbereiche für t, u und v. Hier sind überall leicht Variationen durchführbar, die zu anderen Mustern führen.

Einige Variationen

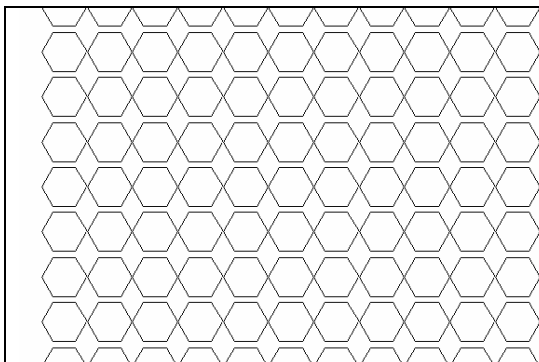


Bild h, Änderung gegenüber oben: x,t6 (statt 72)

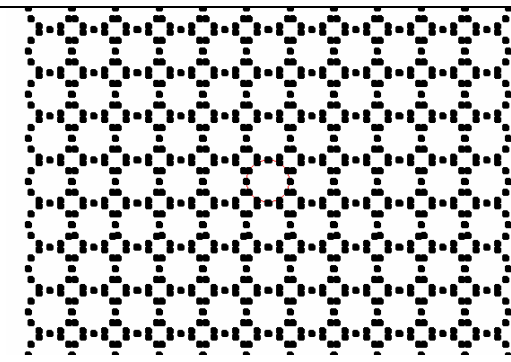
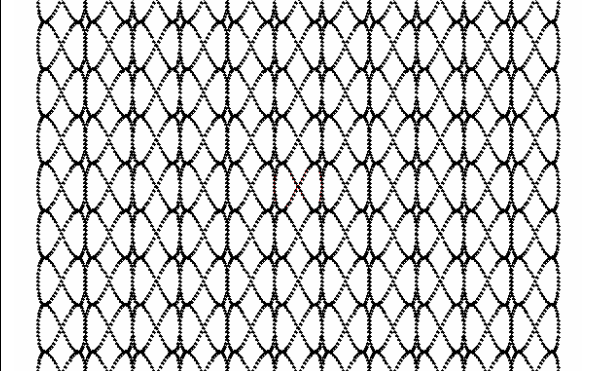
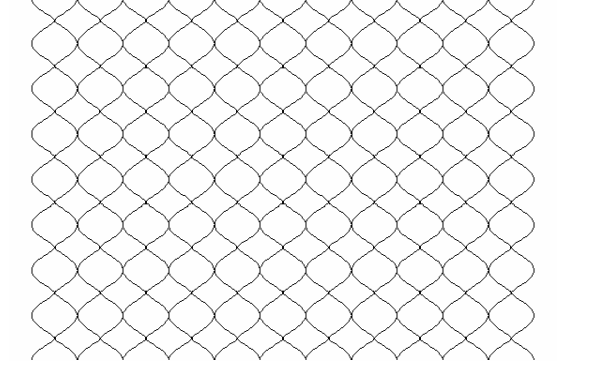
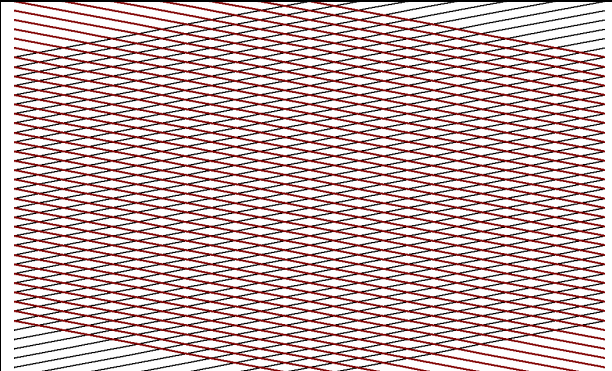
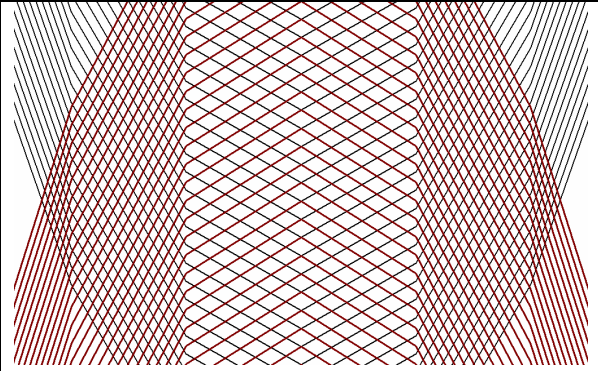
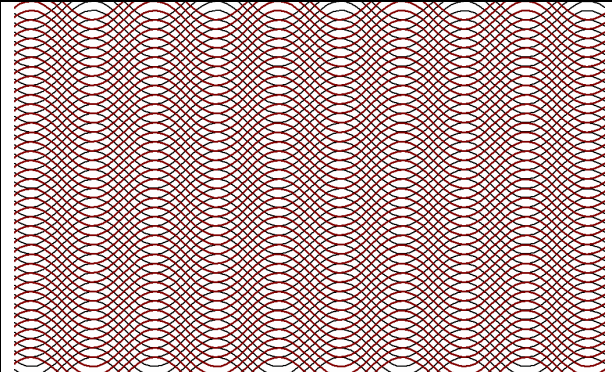
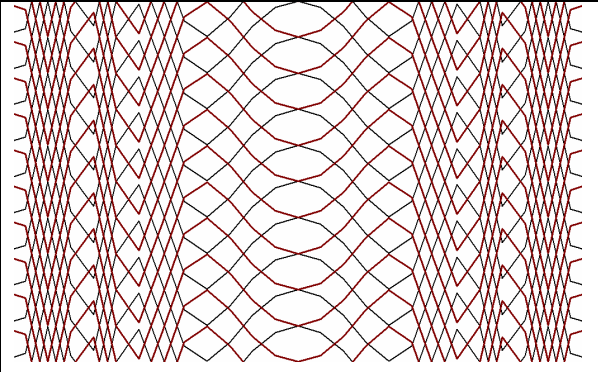


Bild i, Änderung gegenüber oben: x,t12 (statt 72), Punkte nicht verbunden, fettere Punkte

	
Bild j f1: $a \cdot \cos(t)$ f2: $a \cdot \sin(2t)$, sonst wie Bild g	Bild k f1: $a \cdot \cos(t)^3$ f2: $a \cdot \sin(t)$, sonst wie Bild g

Von zwei Scharen zum Muster

Bei dem zweiten Lösungsansatz gehen wir von Scharen aus und lassen durch mehrere Scharen Muster erzeugen.

	
f1: $a \cdot x + b$ f2: $f1(0.2, u)$ f3: $f1(-0.2, u)$, u passend wählen	f1: $a \cdot x^2 + b$ f2: $f1(0.2, u)$ f3: $f1(-0.22, u)$, u passend wählen
	
f1: $a \cdot \sin(x) + b$ f2: $f1(1, u)$ f3: $f1(-1, u)$, u passend wählen	f1: $a \cdot \sin(x^2) + b$ f2: $f1(-1, u)$ f3: $f1(1, u)$, u passend wählen

Was sind die hier angesprochenen mathematischen Kompetenzen, die geübt oder neu herausgebildet werden:

Die SchülerInnen

- können Netze modellieren,
- können verschiedene Lösungswege benutzen,
- verwenden diverse Terme für Kurvenscharen, für einzelne Objekte,
- üben die Verwendung passender Definitions- und Wertebereiche,
- können mit Modulen und ihren Parametern arbeiten,
- können Abbildungen durchführen, z.B. das Verschieben
- arbeiten experimentell,
- benutzen Anregungen aus dem Internet,
- präsentieren ihre Netze und die dahinter stehenden Entwurfsüberlegungen.

Wie man oben sieht, ist die Anzahl der benutzten Terme überraschend gering (Verwendung von Modulen mit Parametern). Zusammen mit den Einstellungen der Definitionsbereiche ergeben sich so vielfältige Variationen, von denen hier nur einige gezeigt werden konnten.

AG 4.6 Projekt: Teilverhältnisse auf Dreiecksseiten - eine mathematische Entdeckungsreise -

Hinweise zur unterrichtlichen Verwendung des Themas

(A) Etwa in Klasse 8 kann man die Mittelpunkte der Dreiecksseiten konstruieren und über die Mittelpunktsformeln berechnen lassen. Diese können dabei ggf. hergeleitet werden.	(B) In Klasse 10 oder 11 ist das Thema „Folgen“ relevant. Die Entdeckungsreise ist eine schöne Anwendung rekursiv definierter Folgen.	(C) Im Analysiskurs kann man zunächst wie in (B) vorgehen. Anschließend können explizite Darstellungen gesucht und Grenzwerte gebildet werden.	(D) Im Kurs „Analytische Geometrie“ kann es neben den Teilpunktrechnungen um die Schwerpunktrechnung gehen. Außerdem kann mit anderen Teilverhältnissen experimentiert werden.	(E) Grafische Darstellungen sind z. B. im CAS oder mit ANIMATO schon in (A)-(D) erwünscht. Zusätzlich können diese unter dem Aspekt der Computergrafik gesehen und möglicherweise programmiert werden.
---	---	--	---	--

Die Entdeckungsreise für die Sekundarstufe 2 zielt insbesondere auf folgende Aspekte ab, wobei der Fokus auf der Analytischen Geometrie liegt:

- Teilverhältnisse in der Analytischen Geometrie
- Mathematik betreiben mit rekursiv definierten Funktionen,
- Programmieren lernen/üben mit rekursiv definierten Funktionen/Relationen,
- entdeckendes Lernen praktizieren mit Hilfe einer dynamischen Animationssoftware, die die eigene Konstruktion von Animationen ermöglicht,
- das Wechselspiel zwischen Visualisierung, Numerik (Wertetafeln) und exakten Beweisen erfahren.
- Mathematik besser verstehen durch Experimentieren, Entdecken und Beweisen!

Mittendreiecke – Ausgangspunkt für eine mathematische Entdeckungsreise

Gegeben ist ein Dreieck. Die Mittelpunkte der drei Seiten werden verbunden, so dass ein neues Dreieck entsteht. Wird dieser Vorgang für die folgenden Dreiecke wiederholt, so erhält man eine Folge von Mittendreiecken. Der geschilderte Ansatz und Variationen der Aufgabenstellung können eine interessante mathematische Entdeckungsreise einleiten!

Bild a zeigt die Ausgangskonfiguration (im Unterricht sollte man sie zunächst durch Handzeichnungen erzeugen lassen).

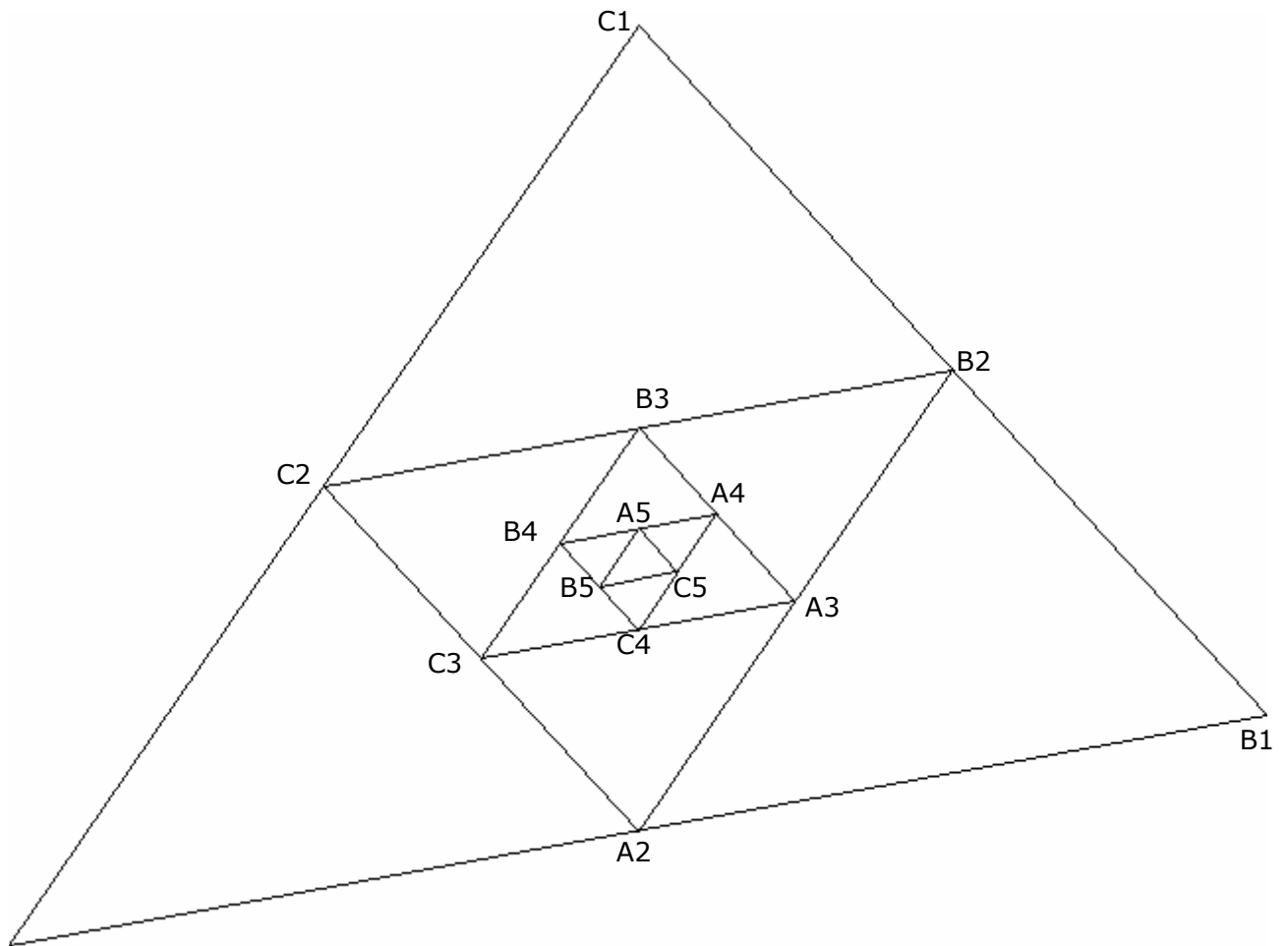
Problembearbeitung - Rekursion

Das Problem lässt sich elegant mit rekursiv definierten Folgen angehen. Derartige Folgen sind ein überzeugendes Beispiel für eine Schnittstelle zwischen Mathematik und Informatik. Einerseits lassen sich viele mathematische Probleme mit rekursiven Funktionen bearbeiten, andererseits gehören rekursiv definierte Funktionen zu den Grundelementen funktionaler Pro-

grammiersprachen. Die Schnittstelle spiegelt sich hier u. a. bei der Arbeit mit der Animationssoftware ANIMATO wider.

Bei der Interpretation der entstehenden Bilder kann man u. a. folgende Besonderheiten feststellen:

- Entstehen einer „Spirale“ beim Verbinden aller Punkte A_i , B_i oder C_i ,
- gleiche Proportionen der Seitenlängen für alle Dreiecke,
- alle entstehenden Dreiecke einer Teilungsstufe sind kongruent,
- Ähnlichkeit der aufeinanderfolgenden Dreiecke.



A1 Bild a: Seitenmittelpunkte im Dreieck, Punktfolgen $A_1, A_2, A_3, \dots B_1, B_2, \dots$

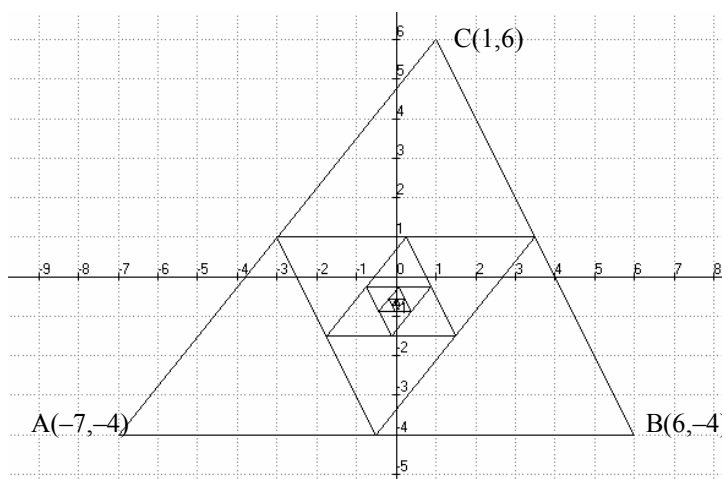


Bild b: Zeichnung im Koordinatensystem

Der Entwurf zeigt die verwendeten Rekursionsformeln. Man erkennt die bekannte Formel für den Teilpunkt einer Strecke PP_1P_2 :

$$x_T = \frac{x_1 + t \cdot x_2}{1+t}, \quad y_T = \frac{y_1 + t \cdot y_2}{1+t}, \quad z_T = \frac{z_1 + t \cdot z_2}{1+t}.$$

Bei f1 wurde das Teilverhältnis nicht mit t, sondern mit u bezeichnet.

f1	{n=1:-7:(f1(n-1)+u*f2(n-1))/(1+u)}	Ein Entwurf für die Animationssoftware ANIMATO
f2	{n=1:6:(f2(n-1)+u*f3(n-1))/(1+u)}	
f3	{n=1:1:(f3(n-1)+u*f1(n-1))/(1+u)}	
f4	{n=1:-4:(f4(n-1)+u*f5(n-1))/(1+u)}	
f5	{n=1:-4:(f5(n-1)+u*f6(n-1))/(1+u)}	
f6	{n=1:6:(f6(n-1)+u*f4(n-1))/(1+u)}	
f7	f1(n),f4(n),f2(n),f5(n)	
f8	f2(n),f5(n),f3(n),f6(n)	
f9	f3(n),f6(n),f1(n),f4(n)	
f10	f1(n),f4(n)	

Arbeit mit rekursiv definierten Funktionen

Programmerläuterungen

Terme	Erläuterungen
f1 {n=1:-7:(f1(n-1)+u*f2(n-1))/(1+u)}	f1 berechnet die x-Werte der A-Punkte aus den vorhergehenden A- und B-Punkten; für den Mittelpunkt ist u=1.
f2 {n=1:6:(f2(n-1)+u*f3(n-1))/(1+u)}	f2 berechnet die x-Werte der B-Punkte aus den vorhergehenden B- und C-Punkten
f3 {n=1:1:(f3(n-1)+u*f1(n-1))/(1+u)}	f3 berechnet die x-Werte der C-Punkte aus den vorhergehenden C- und A-Punkten
f4 {n=1:-4:(f4(n-1)+u*f5(n-1))/(1+u)}	f4 berechnet die y-Werte der A-Punkte aus den vorhergehenden A- und B-Punkten; für den Mittelpunkt ist u=1.
f5 {n=1:-4:(f5(n-1)+u*f6(n-1))/(1+u)}	f5 berechnet die y-Werte der B-Punkte aus den vorhergehenden B- und C-Punkten
f6 {n=1:6:(f6(n-1)+u*f4(n-1))/(1+u)}	f6 berechnet die y-Werte der C-Punkte aus den vorhergehenden C- und A-Punkten
f7 f1(n),f4(n),f2(n),f5(n)	f7 zeichnet die Strecken AB
f8 f2(n),f5(n),f3(n),f6(n)	f8 zeichnet die Strecken BC
f9 f3(n),f6(n),f1(n),f4(n)	f9 zeichnet die Strecken CA
f10 f1(n),f4(n)	f10 zeichnet die A-Punkte in einer anderen Farbe, um die Ortskurve darzustellen

Die Ausgangspunkte der Berechnung sind A(-7,-4), B(6,-4) und C(1,6).

Vermutung 1

Die Punktfolgen $A_1, A_2, A_3, \dots, B_1, B_2, B_3, \dots, C_1, C_2, C_3, \dots$ konvergieren auf einen gemeinsamen Punkt.

Ein Blick in die Wertetafel für die Funktionen f_4, f_5, f_6 (diese stellen die y -Folgen der drei Punktfolgen dar) bestätigt das numerisch:

x, t	u	f_4	f_5	f_6
1	1	-4	-4	6
2	1	-4	1	1
3	1	-1.5	1	-1.5
4	1	-0.25	-0.25	-1.5
5	1	-0.25	-0.875	-0.875
6	1	-0.5625	-0.875	-0.5625
7	1	-0.71875	-0.71875	-0.5625
8	1	-0.71875	-0.640625	-0.640625
9	1	-0.6796875	-0.640625	-0.6796875
10	1	-0.66015625	-0.66015625	-0.6796875
11	1	-0.66015625	-0.66992188	-0.66992188
12	1	-0.66503906	-0.66992188	-0.66503906
23	1	-0.66666508	-0.66666746	-0.66666746
24	1	-0.66666627	-0.66666746	-0.66666627
25	1	-0.66666687	-0.66666687	-0.66666627
26	1	-0.66666687	-0.66666657	-0.66666657
27	1	-0.66666672	-0.66666657	-0.66666672
28	1	-0.66666664	-0.66666664	-0.66666672
29	1	-0.66666664	-0.66666668	-0.66666668
30	1	-0.66666666	-0.66666668	-0.66666666
31	1	-0.66666667	-0.66666667	-0.66666666
32	1	-0.66666667	-0.66666667	-0.66666667
33	1	-0.66666667	-0.66666667	-0.66666667

Für $u = 1$ ergeben sich die jeweiligen Mittelpunkte der Dreiecksseiten.

Der Grenzwert der y -Folgen scheint $G_y = -2/3$ zu sein.

Entsprechend sieht man:
Der Grenzwert der x -Folgen scheint $G_x = 0$ zu sein.

Vermutung 2

Der Punkt G ist Schwerpunkt des Ausgangsdreiecks (sogar aller Dreiecke)!

Beweis: Der Schwerpunkt berechnet sich mit den angegebenen Formeln für S_x und S_y .

$$S_x = \frac{A_x + B_x + C_x}{3} = \frac{-7 + 6 + 1}{3} = 0 \quad \text{und} \quad S_y = \frac{A_y + B_y + C_y}{3} = \frac{-4 + (-4) + 6}{3} = -\frac{2}{3}$$

Aufgabenvariation durch andere Teilverhältnisse

Abbildung c wandelt die Idee der Mittelpunkte ab und benutzt sehr kleine Teilstrecken, z. B. das Teilverhältnis $u = 0.02$ (für die Mittelpunkte war oben $u = 1$).

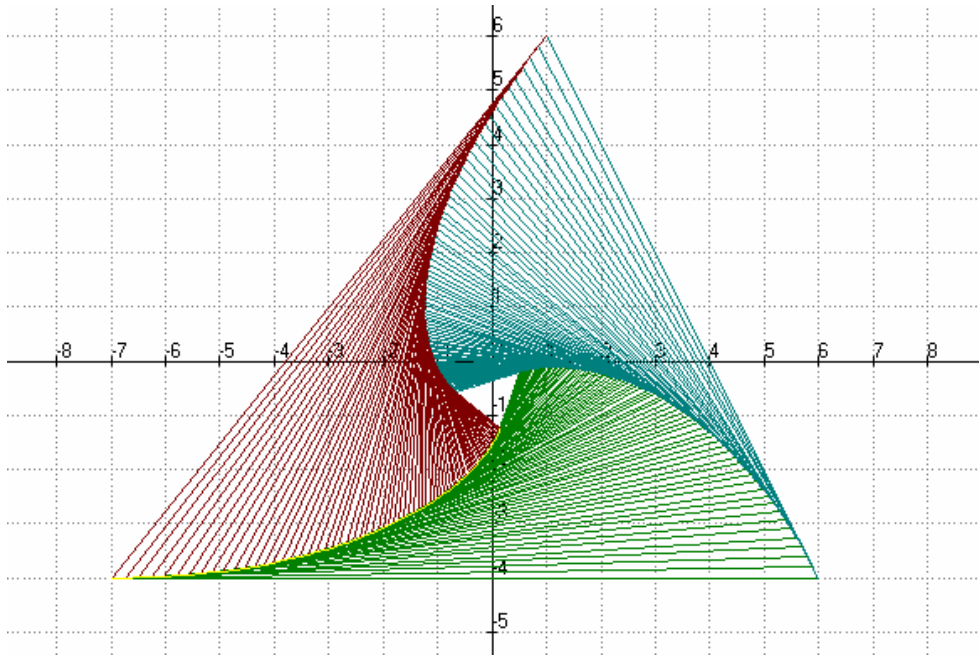


Bild c: Die Situation für $u = 0.02$

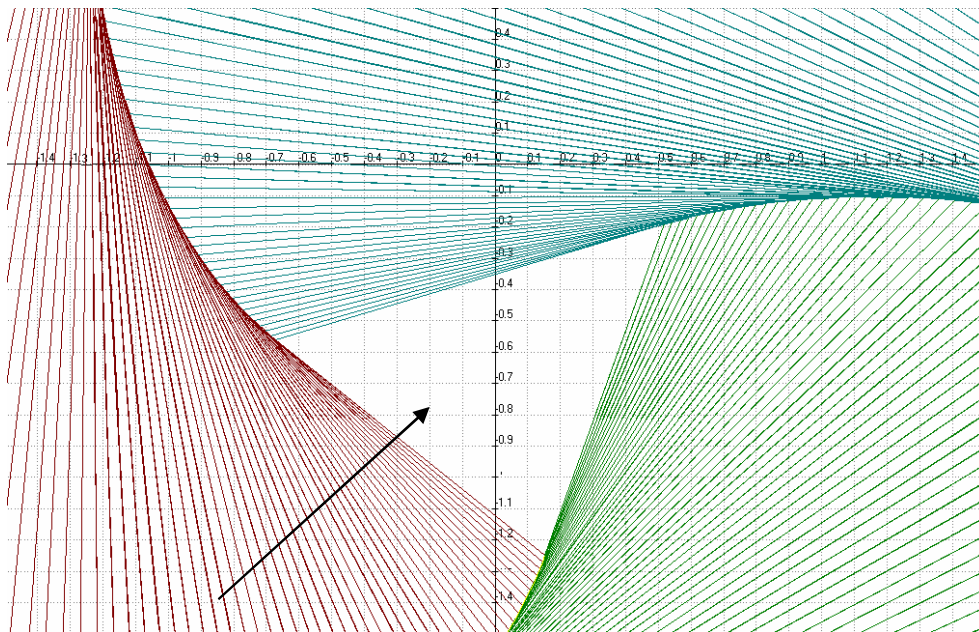


Bild d: Ein Blick ins „Innere“

Je nach Wahl von u können also verschiedene Figuren erzeugt werden. Die Anzahl der Schritte kann unterschiedlich gewählt werden. Die Zeichengeschwindigkeit und andere Optionen wie z. B. Farbe, Anzahl der Berechnungen können je nach gewünschter Animation gesteuert werden.

Wir vergrößern nun die Anzahl der Iterationsschritte auf $n=500$ und zoomen die Zeichnung um den vermutlichen Grenzpunkt herum.

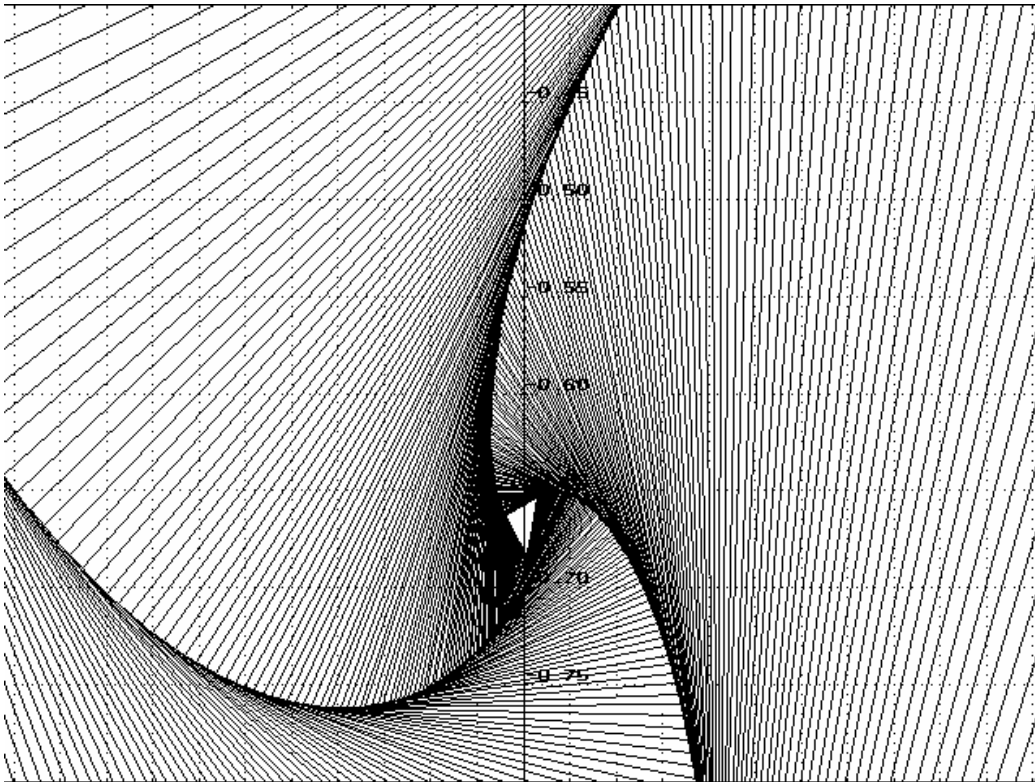


Bild e: Zoom um den Konvergenzpunkt herum

Abbildung f ergänzt die bisherigen Darstellungen und zeigt die Ortskurven der A-B-C-Punkte, so wie sie auch in Abbildung f erkennbar sind.

In

Eberhard Lehmann: Von den Mittendreiecken zu Teilpunktpolygonen, Zeitschrift ML Mathematiklehren 1988, Heft 27, Seite 13-19,

werden zu den oben benutzten rekursiv definierten Formeln für die x -Werte

$$\begin{aligned} f1 & \quad \{n=1:-7:(f1(n-1)+u*f2(n-1))/(1+u)\}, \\ f2 & \quad \{n=1:6:(f2(n-1)+u*f3(n-1))/(1+u)\}, \\ f3 & \quad \{n=1:1:(f3(n-1)+u*f1(n-1))/(1+u)\}, \end{aligned}$$

explizite Formeln hergeleitet, mit denen dann der Grenzwert der Folgen exakt berechnet werden und als Schwerpunkt des Dreiecks identifiziert werden kann.

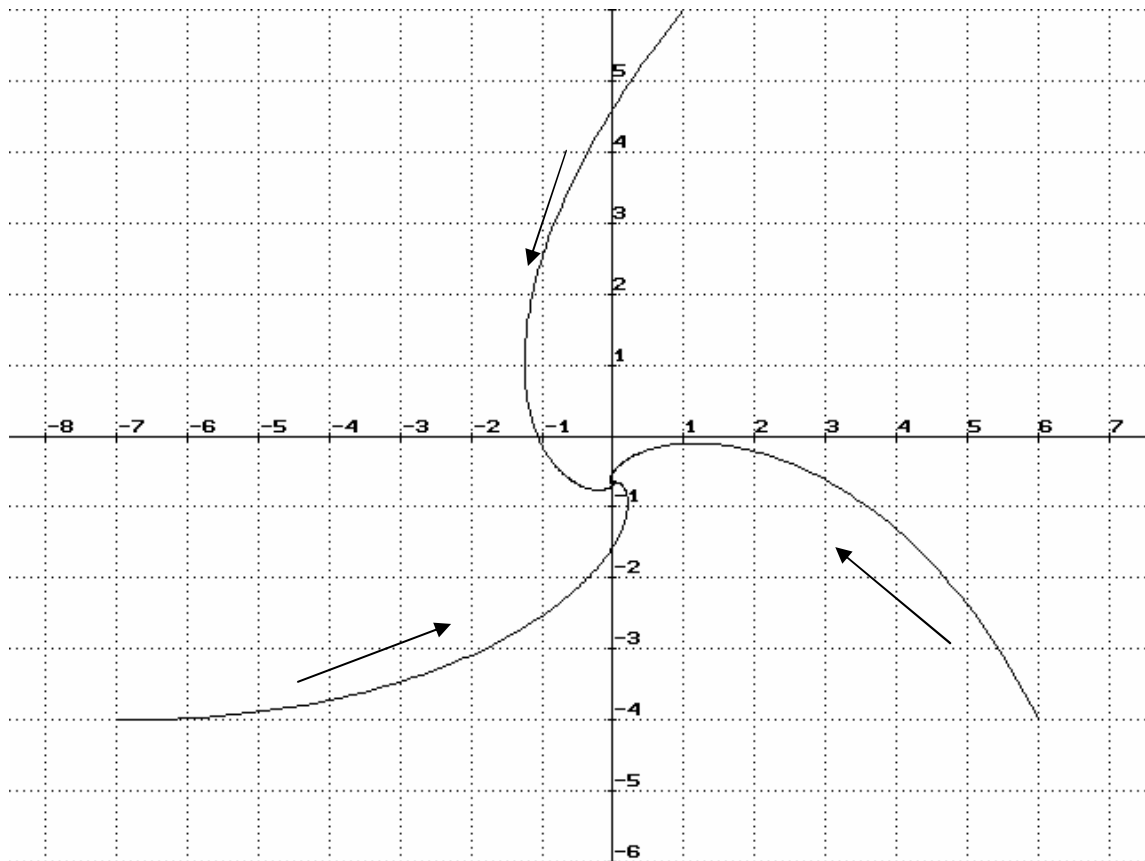


Abb.f: Die drei Punkt-Folgen im Koordinatensystem

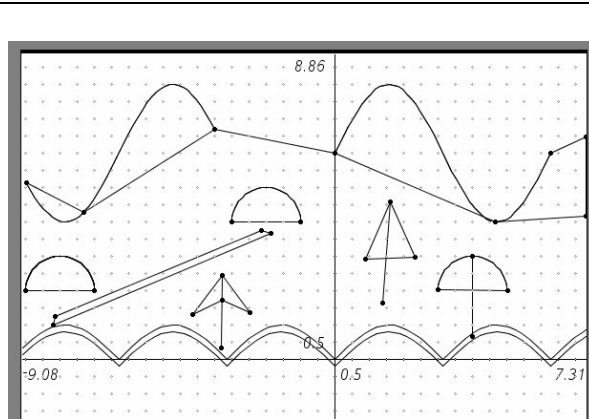
Zusammenfassung und Ausblick

Die Ausführungen zeigen, dass das Standardthema „Teilverhältnisse“ der Analytischen Geometrie auf experimentelle Weise behandelt werden kann, so dass auch unterschiedliche Unterrichtsmethoden zum Tragen kommen können. Das Experimentiermaterial wird mittels vieler Aufgabenvariationen bereitgestellt – andere Ausgangsfiguren, andere Teilverhältnisse, Verknüpfung mit anderen mathematischen Gebieten wie z.B. Rekursion. Bei geeigneter Software können die Überlegungen auf den Raum übertragen und dort visualisiert werden.

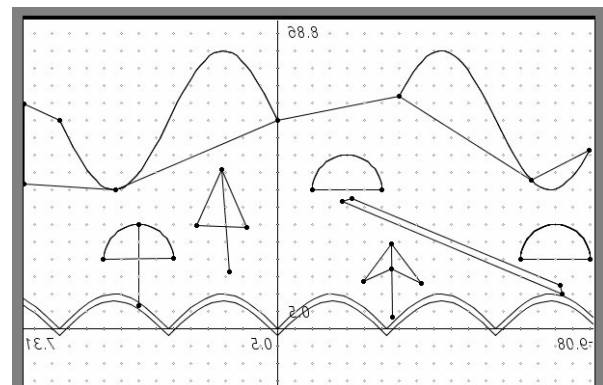
AG 4.7 Projekt: Abbildung mathematischer Landschaften

Wir haben uns gleich am Anfang in Kapitel 1 mit der Spiegelung komplexer Bilder befasst. Dieser Einstieg wird nun aufgegriffen.

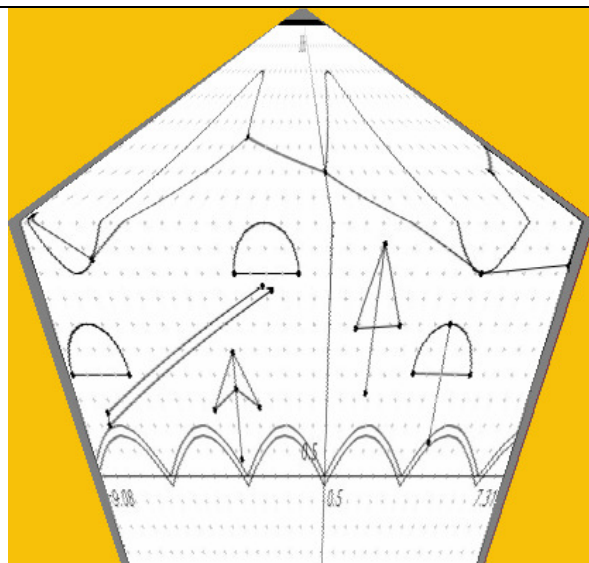
Projektziele: In der Regel werden in der Schule einzelne Objekte abgebildet. Viele solcher Objekte können zu mathematischen „Landschaften“ (families) zusammengefasst werden. Diese können dann als Ganzes abgebildet werden, indem eine Abbildung auf jedes vorhandene Objekt angewendet wird. Dadurch entstehen dann neue Landschaften. In Bildbearbeitungsprogrammen gibt es solche Abbildungen wie drehen, spiegeln, deformieren.



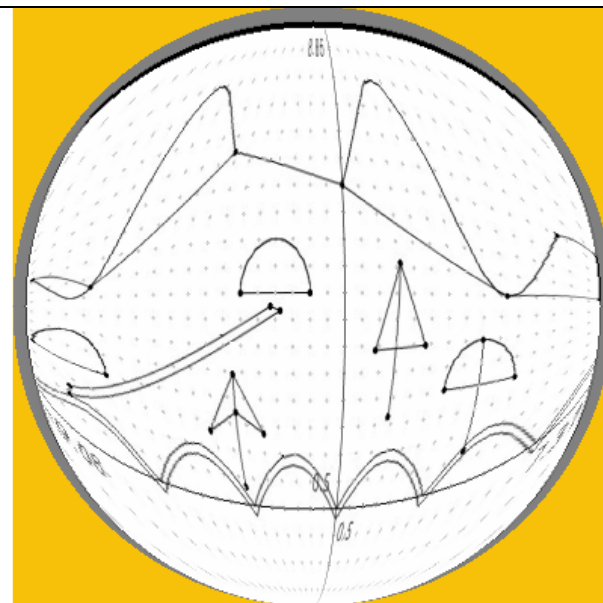
Original-Landschaft (erstellt mit TI-Nspire)



Paint Shop Pro: Image, mirror



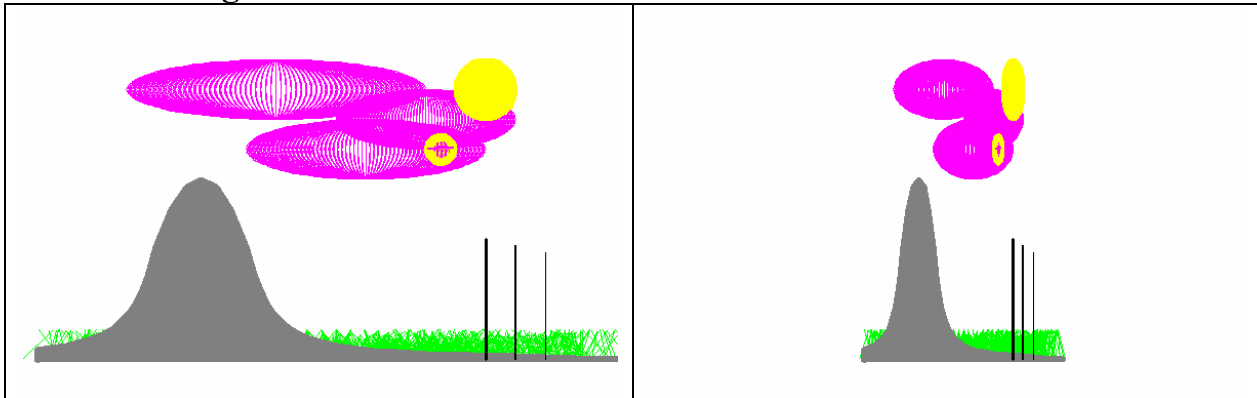
Paint Shop Pro:
Image, deformations, pentagon



Paint Shop Pro:
Image, deformations, circle

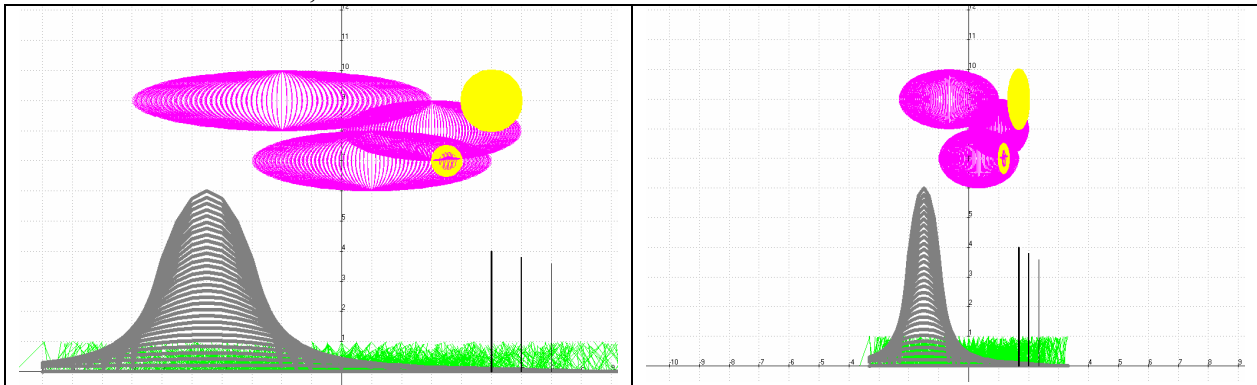
Die Abbildungsgleichungen sind hier dem Benutzer nicht bekannt. In ANIMATO kann man die erstellten mathematischen Landschaften mittels der Option „Einstellungen, Transformation (keine, selbst definiert, polar)“ abbilden und damit über mathematische Terme beeinflussen, siehe auch Kapitel 2.3.

Terme erzeugen eine Landschaft



Datei Land1a1.pl2 (hier natürlich mit Farben)

Die Schülerin, die diese Landschaft mit ANIMATO im Rahmen eines Kurses „Mathematik und Kunst“ erstellt hat, wird unten zitiert.



Die Bilder auf der linken Seite sind die Ausgangslandschaften. Einblenden des Koordinatensystems liefert die nötige Abbildungsinformation. Offenbar wurde die gesamte Abbildung horizontal um etwa 1/3 verkürzt, während die vertikalen Werte beibehalten wurden.

Also $x \rightarrow x/3$ und $y \rightarrow y$. In Matrixschreibweise

$$\text{Matrix} * \text{Bildobjekte} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 3 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} * \begin{pmatrix} f_x \\ f_y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ f_y \end{pmatrix} * f_x$$

zelenen Bildobjekte und f_y die zugehörigen y-Werte.

Die Schülerin, die diese Landschaft mit ANIMATO im Rahmen eines Kurses „Mathematik und Kunst“ erstellt hat, schreibt dazu:

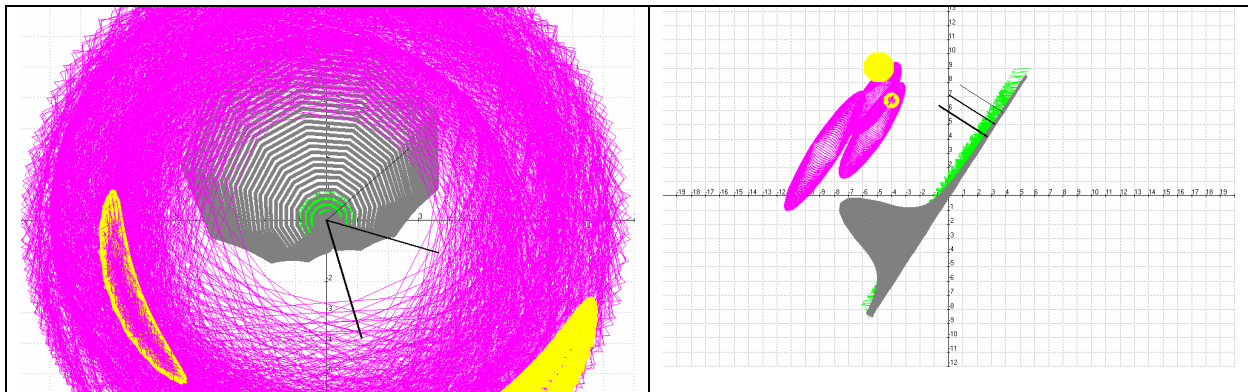
f 1:Wiese; f 2:großer Mond; f 3:Berg; f 4,f 5,f 6:Wolken; f 7:kleiner Mond

Das Bild LAND1 stellt eine Landschaft bei Nacht dar, welches durch den relativ dunklen Hintergrund bewirkt werden soll (im Original ist der Hintergrund dunkelblau). Zusätzlich werden zwei Monde dargestellt, auch die pinken Wolken sollen darauf hinweisen, daß wir uns auf einem Planeten befinden, der unserem von der Atmosphäre ähnlich ist, jedoch zwei Monde als Trabanten besitzt.

<pre>f1: rand*x,rand,rand*x+u,0 f2: u*cos(t)+5,u*sin(t)+9 f3: {-(x*u+4.5*u)^2+6*u<0:undef: -(x*u+4.5*u)^2+6*u} f4: u*3*cos(t)+3,sin(t)+8 f5: u*4*cos(t)+1,sin(t)+7 f6: u*5*cos(t)-2,sin(t)+9 f7: 0.5*u*cos(t)+3.5,0.5*u*sin(t)+7 f8: 5,0,5,4 f9: 6,0,6,3.8 f10: 7,0,7,3.6</pre>	<p>Wiese, Strecken mit Zufall Großer Mond, Kreise mit Radius u Berg</p> <p>Wolken Wolken Wolken Kleiner Mond Strecke, Turm 1 Strecke, Turm 2 Strecke, Turm 3</p>
--	--

Eingaben in ANIMATO mit passenden Definitionsbereichen

Weitere Landschaftstransformationen



Transformation polar

$$f_x \rightarrow f_y \cdot \cos(f_x),$$

$$f_y \rightarrow f_y \cdot \sin(f_x)$$

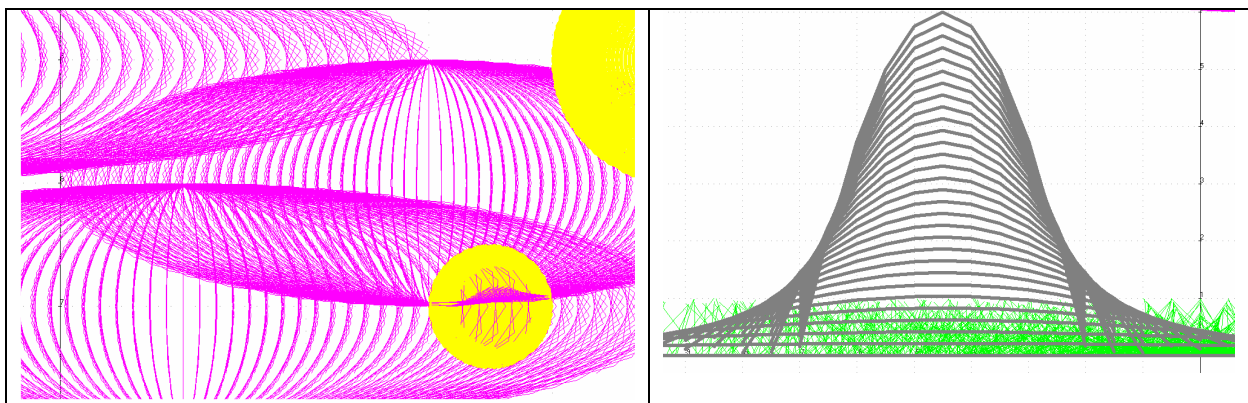
Transformation Drehung

$$f_x \rightarrow f_x \cdot \cos(1) - f_y \cdot \sin(1),$$

$$f_y \rightarrow f_x \cdot \sin(1) + f_y \cdot \cos(1)$$

Vergrößern

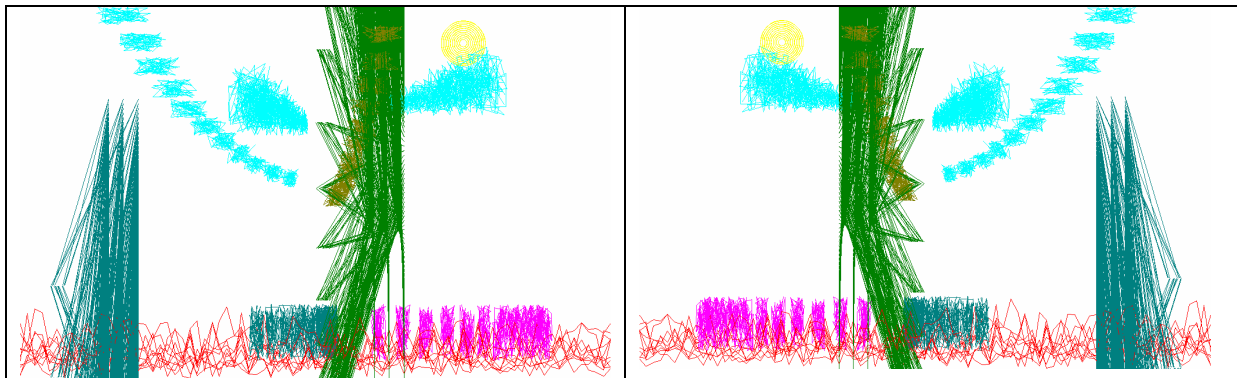
Durch Vergrößern erhält man genauere Einblick in die Struktur der einzelnen Objekte. Hierbei wird auf andere Weise deutlich, wie die einzelnen Parameter wirken und welche Rolle die gewählte Punktzahl spielt.



Ein Blick ins Innere der Wolken

und ins Innere des Berges

Eine Landschaft mit Zufallspunkten

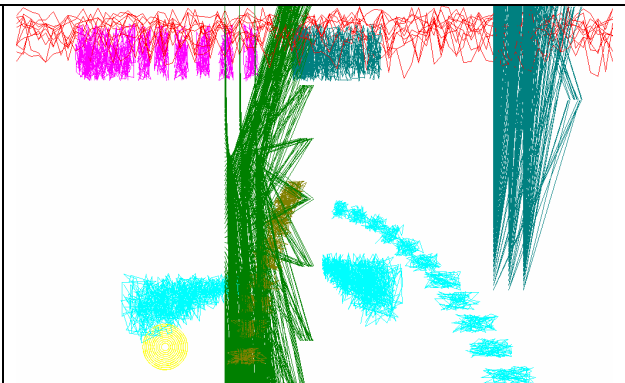


Datei: Landschaft-A.pl2

$fx \rightarrow -fx$, $fy \rightarrow fy$

```
f1: 2*x,random+u*random-10
f2: random-u*u+8*u,-int(random*2.5)-random-6
f3: random-u*u+1.5*u,-int(random*2.5)-random-6
f4: int(random*3+4)-18,x-5,random-18,x*x-105
f5: int(random*3+4),x,random,3*x*x-15
f6: 1.5*random+u/2*random+u ,random+u*u-1
f7: 0.5*u*cos(x)+10,0.4*u*sin(x)+8
f8: u*random-2*u,random+u*random+3
f9: random+u*random-5*u,random+u*u
f10: u*random+2*u+4,random+u*random+4
```

u aus [0.5; 3] , Schrittweite 0.25



Die Terme, mit viel Zufall versehen

$fx \rightarrow -fx$, $fy \rightarrow -fy$

Zielsetzung und mathematische Kompetenzen

Projektziele wurden eingangs bereits genannt. Darüber hinaus:

- Eine besonders weit tragende Kompetenz ist die des Entwurfs und der Realisierung eigener komplexer Bilder aus mathematischen Objekten.
- Hierbei werden die Objekte zu ansehnlichen Bildern zusammengestellt – dabei werden auch ästhetische Aspekte berücksichtigt. Damit betätigen sich die SchülerInnen als „Designer“.
- Der fachübergreifende Charakter des Themas ist unübersehbar – und bekanntlich heute auch besonders empfohlen (siehe Lehrpläne).
- Durch die Abbildung komplexer Bilder geraten passende mathematische Werkzeuge – hier z.B. Matrizenrechnung – ins Blickfeld.
- Darüber hinaus ergibt sich die Fragestellung, wie die Abbildung (Rotation usw.) in Bildverarbeitungsprogrammen programmiert ist.
- Insgesamt erweist sich damit die Thematik als eine ideale Anwendung und Wiederholung erworbener mathematischer Fertigkeiten in ganzheitlichen Kontexten.

AG 4.8 Projekt - Ebenen – Ebenenausschnitte

AG 4.8.1 Ebenen mit DERIVE



Bild 1: Häuser in Amsterdam

Wie sieht es innen aus?

Die in den schmalen Häusern befindlich Ebenen in den einzelnen Stockwerken können durch Bild 2 veranschaulicht werden.

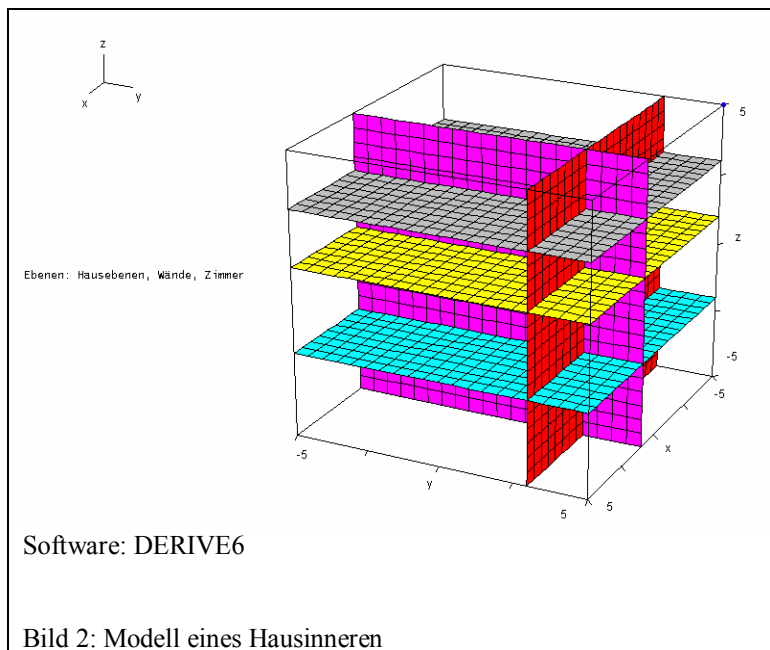


Bild 2: Modell eines Hausinneren

Bild 2 :
Ein zweistöckiges Haus
mit Keller

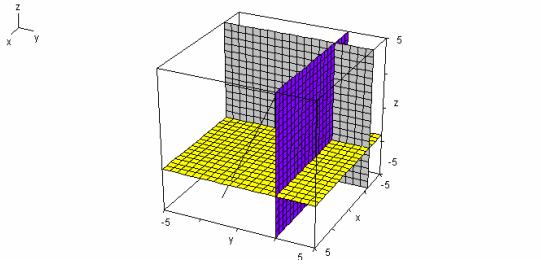
$y=3$ senkrechte Hausebene rot
 $x=1$ senkrechte Hausebene lila
 $z=-2$ Hausebene blau
 $z=1$ Hausebene gelb
 $z=3$ Hausebene grau

drei parallele $Z=$ Ebenen
 $[[1],[3],[-2]]$
das sind die Hausebenen
gelb, grau, blau

$[-5,5,5]$
Ein Würfeckpunkt

Aufgabe

- Wie heißen die Gleichungen der Schnittgeraden je zweier Ebenen?
- Wie groß sind die Zimmer?

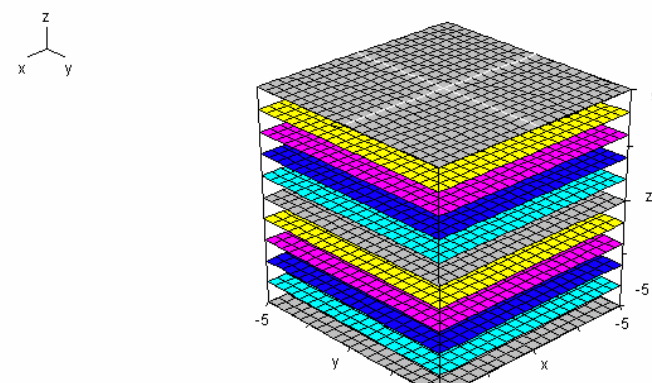


Eingaben
 $x = -3$
 $y = 2.5$
 $z = -2$
 $[2, 1, 3]$, Punkt
 $\begin{bmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 5 & -1 & -3 \end{bmatrix}$, Strecke

Bild 3: Die drei Ebenen
 $x = -3$ (grau), $y = 2.5$ (lila), $z = -2$ (gelb)
und die Strecke PQ mit $P(2, 1, 3)$, $Q(5, -1, -3)$

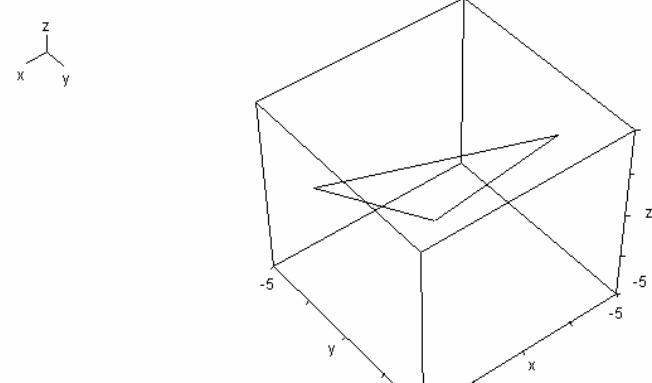
Software: DERIVE6

Einige elementare DERIVE6-Beispiele



Ein z-Ebenenstapel erzeugt mit
 $\text{Vector}(i,i,-5,5,1) =$
 $[-5, -4, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, 4, 5]$

Bild 4

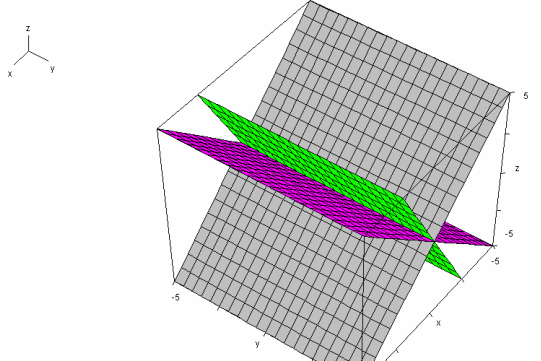


Erzeugung eines Dreiecks mittels
 $[-4, 2, 3; 4, -3, 1; 2, 2, 2; -4, 2, 3]$ bzw.

$$\begin{bmatrix} -4 & 2 & 3 \\ 4 & -3 & 1 \\ 2 & 2 & 2 \\ -4 & 2 & 3 \end{bmatrix}$$

Aufgabe
Bezeichnen Sie die Eckpunkte, Welche Koordinaten haben sie?

Bild 5



Ebenen
 t grau, von links unten nach rechts oben
 $-t$ lila, von links oben nach rechts unten
 $2t$ grün

Aufgabe
Wie heißen die Gleichungen der Ebenen?

Bild 6

Aufgaben

1) Zeichne mit DERIVE6 die folgenden Ebenenkonstellationen:

- 2 Ebenen, die parallel sind (bitte weder horizontal noch vertikal),
- 2 Ebenen, die sich schneiden.

2) Zeige rechnerisch mit dem CAS, dass die Ebenen in Aufgabe 1 passend gewählt wurden.



Hausdachebenen und ihre Stellung zueinander.

Aufgabe:
Berechnen Sie die Winkel zwischen den Dachebenen. Erstellen Sie ein DERIVE-Bild der Hausdächer (so ungefähr).

Bild 7: In Holland

Schnitt zweier Ebenen

Aufgabe

Erläutern sie die Bildschirme von Bild 8a und 8b. Rechnen Sie für 8a von Hand nach!

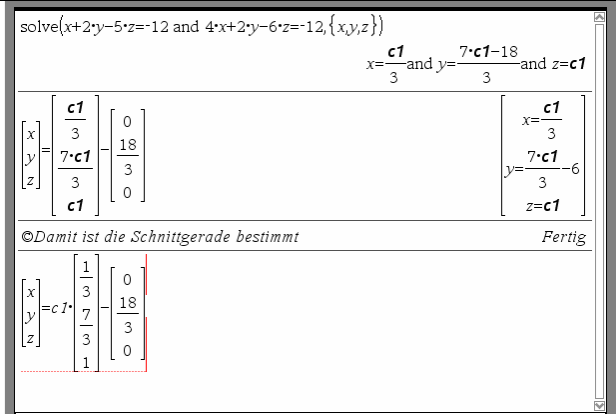


Bild 8a

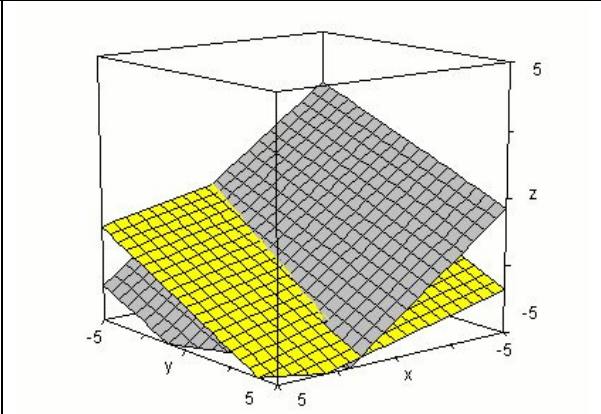


Bild 8b

AG 4.8.2 Strukturierung von Ebenen – Lagerhaus Barcelona



Bild 1: Auf einer Kunstaussstellung



Bild 2: Front eines Lagerhauses in Barcelona

Beide Bilder zeigen eine größere Fläche, die strukturiert ist. Damit wird die sonst sicher eintönige Fläche ansehnlich gestaltet.

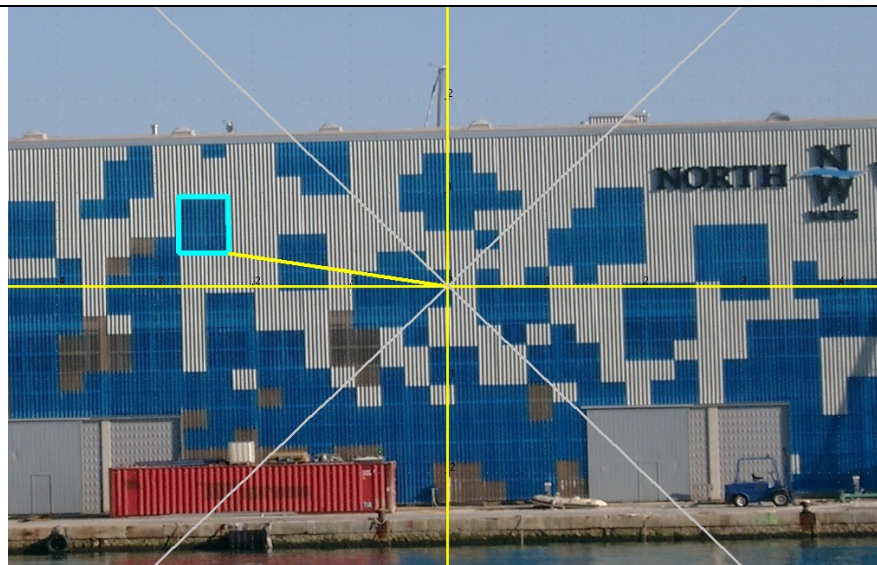
Aufgabe – Hauswand strukturieren

Entwerfen Sie eine Hauswand mit geometrischen Gestaltungselementen.

- Entwurf auf Papier,
- Entwurf mit einem Programm ihrer Wahl (Power Point, Textverarbeitung, Zeichenprogramm),
- Entwurf mit CAS-Grafik.

Aufgabe – Mathematik an einer Lagerhauswand

Erläutern sie die im folgenden beschriebene Modellierung einer Teilfläche der Lagerhauswand als Fläche in einer Ebene.



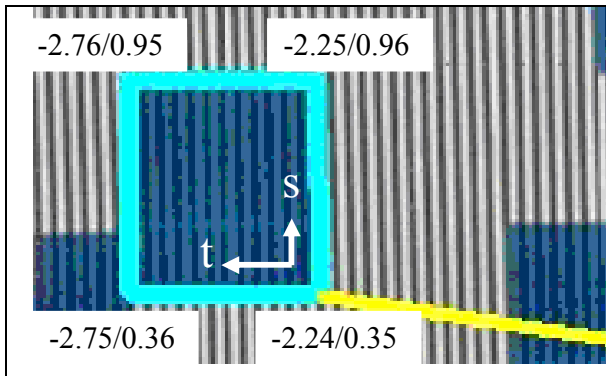
Modellierung der Lagerhausfläche:

- Bild in Hintergrund legen
- Koordinatensystem
- Eckpunkte einer Teilfläche ablesen
- 2.76,0.95,
- 2.25,0.96,
- 2.24,0.35,
- 2.75,0.36,
- Stützvektor zur Teilfläche ziehen, zu (-2.24 / 0.35)
- Teilfläche mathematisch beschreiben (siehe unten)

Bild 3: Lagerhauswand

Software: ANIMATO

Der Streckenzug beschreibt die markierte Teilfläche: [-2.76,0.95, -2.25,0.96, -2.24,0.35, -2.75,0.36, -2.76,0.95]



Zur Ermittlung der Gleichung der Teilfläche wird vergrößert und die Eckpunkte werden eingetragen. Damit ist dann der Ansatz unten auch erklärt. Dieser geht aus von der Dreipunkteform einer Ebenengleichung.

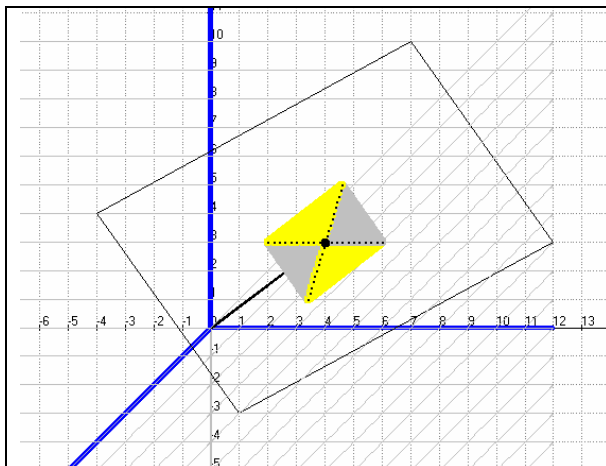
Bild 4

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2.24 \\ 0.35 \\ 0 \end{pmatrix} + t * \left[\begin{pmatrix} -2.75 \\ 0.36 \\ 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -2.24 \\ 0.35 \\ 0 \end{pmatrix} \right] + s \left[\begin{pmatrix} -2.25 \\ 0.96 \\ 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -2.24 \\ 0.35 \\ 0 \end{pmatrix} \right], \text{ mit } t \text{ aus } [0; 2.75-2.24], s \text{ aus } [0; 0.96-0.35]$$

mit t aus [0; 0.51] und s aus [0; 0.61].

Aufgabe

Erläutern Sie Bild 5. Beachten Sie die Eingaben für ANIMATO!



f11: 1,-3,12,3,7,10,-4,4,1,-3 // Ebene
f12: 0,0,4,3 // Strecke, Stützvektor

f15: 4+u,3 // Strecke (2,3) bis (6,3), gepunktet
f16: 4+0.3u,3+u // schräge Strecke gepunktet
f17: 4+0.3u,3+u,4+u,3 // graues Ebenenteil
f19: 4+0.3u,3+u,4-u,3 // gelbes Ebenenteil

f24: 0,0,-5,-5,4,-5,4,3 // 3D-Weg zu (4,3)

Bild 5: Ebene mit Teilfläche

Aufgabe: Wie kann man solche Muster mit mathematischen Hilfsmittel erzeugen?



Bild 6



Bild 7

AG 4.8.3 Strukturierung von Ebenen – Modellierung eines Kunstwerkes - Kunst mit Ebenenteilen -



Bild 1

Das Kunstwerk zeigt eine Fläche (über den Knick sehen wir hinweg), die durch schwarze Teilflächen strukturiert ist. – Jede Schülergruppe erhält den Auftrag auf diesem Bild, das als Hintergrundbild dient, eine der schwarzen Flächen und Gleichungen zu modellieren (Ausfüllung jeder Fläche).

Die einzelnen Bearbeitungen werden später zum Gesamtbild zusammengefügt. Die möglicherweise unterschiedlichen Ansätze werden präsentiert. Software: Hier ANIMATO, aber mit DERIVE6 geht es auch.

Im Anschluss an die Projektarbeit soll jeder Schüler selbst einen „Flächenstrukturierungsbild“ entwerfen (erst händisch, dann am Computer)

Einige Bearbeitungsszenen

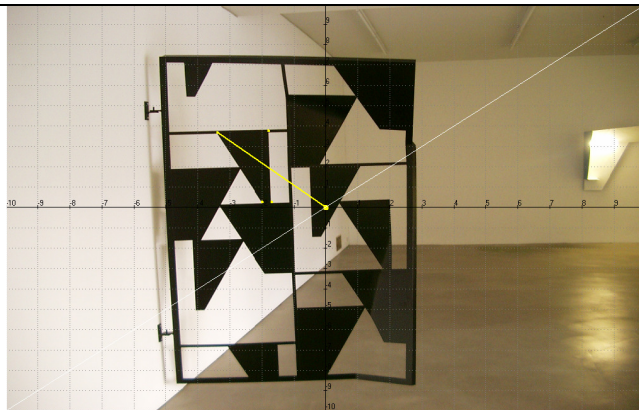


Bild 2

1) Über das Bild wird ein Koordinatensystem gelegt. Die Eckpunkte der fraglichen Fläche werden abgelesen (Cursorpositionen).

Die Fläche wird vergrößert auf kariertes Papier gezeichnet. Die Eckpunkte A, B, C, D mit ihren Koordinaten bezeichnet. Das vereinfacht das Aufstellen von Gleichungen.

A(-2/0.3), B(-1.7/0.3),
C(-1.8/3.8), D(-3.4/3.7)

2) Aufstellung von Geradengleichungen

$$DA: \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3.4 \\ 3.7 \end{pmatrix} + u * \begin{pmatrix} 1.4 \\ -3.4 \end{pmatrix}$$

$$DC: \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3.4 \\ 3.7 \end{pmatrix} + u * \begin{pmatrix} 1.6 \\ 0.1 \end{pmatrix}$$

Dabei läuft u überall von 0 bis 1, 100 Werte. Dadurch werden die Strecken DA, DC usw. gezeichnet.

$$BA: \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1.7 \\ 0.3 \end{pmatrix} + u * \begin{pmatrix} -0.3 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$BC: \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1.7 \\ 0.3 \end{pmatrix} + u * \begin{pmatrix} -0.1 \\ 3.5 \end{pmatrix}$$

Das Ausfüllen der Fläche erreicht man, indem man die vielen Punkte von DA und DC, die beim Laufen von u entstehen, miteinander verbindet (mit hoher Strichstärke).

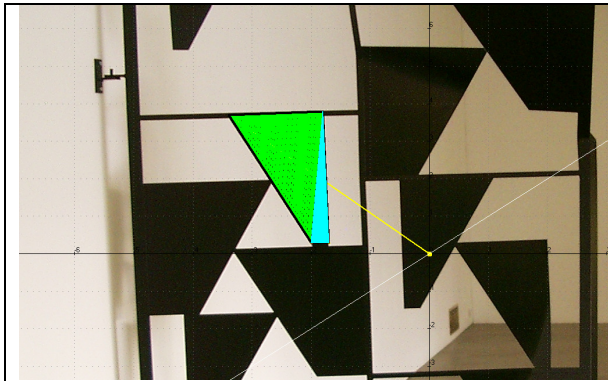


Bild 3

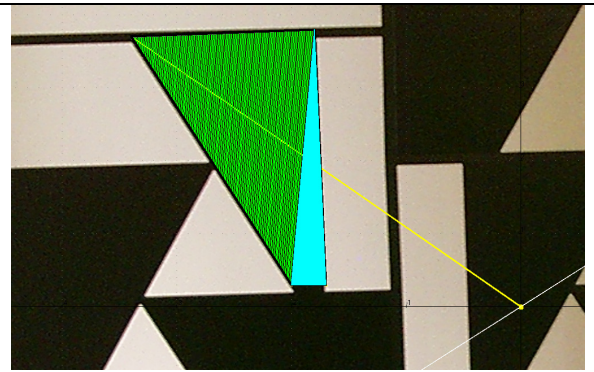


Bild 4

Datei Ebene-Kunst-modellierte Teilflächen.pl2

Eingaben in ANIMATO

f1: x

f2: -2,0,3 // Eckpunkt A

f3: 0,0

f4: 0,0,-3,4,3,7 // Strecke OD (Ortsvektor zu D)

f5: -3,4,3,7 // Eckpunkt D

f6: -1,8,3,8 // Eckpunkt C

f7: -3,4+u*(1,4),3,7+u*(-3,4)+0t // Strecke DA

f8: -3,4+u*(-1,8-(-3,4)),3,7+u*(3,8-3,7) // Str. DC

f10: -3,4+u*(1,4),3,7+u*(-3,4)+0t,
-3,4+u*(-1,8-(-3,4)),3,7+u*(3,8-3,7)

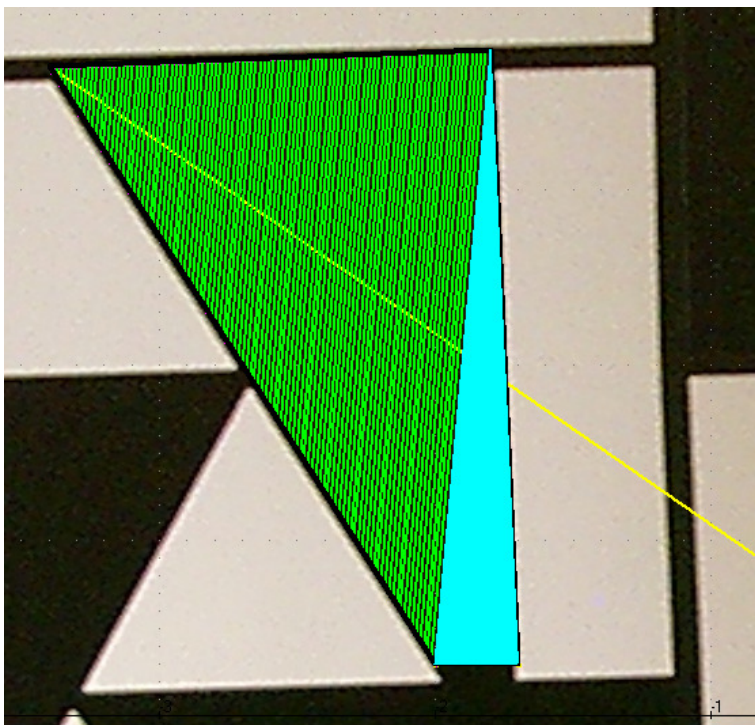
Verbindungsstrecken zwischen Punkten auf DA und DC, wenn u läuft

f12: -1,7-0,3u,0,3, -1,7-0,1u,0,3+3,5u // wie f10, hier mit BA und BC

f13: -1,7,0,3 // Eckpunkt B

f14: -2,0,3,-3,4,3,7,-1,8,3,8,-1,7,0,3,-2,0,3

Rand des Viercks A;B;C;D;A



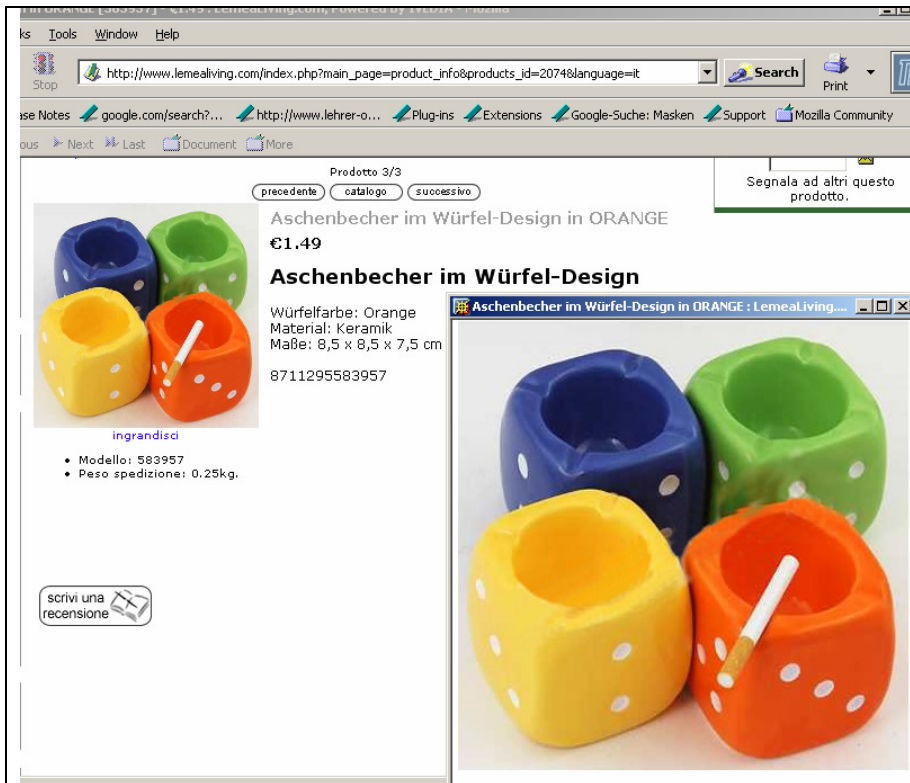
Hier würden dann die oben angekündigten Handbilder und ihre Computerrealisierung folgen.

AG 4.8 Projekt – Analytische Geometrie am Würfel

Wer kennt nicht den Würfel? Natürlich ist er auch mathematisch von Interesse, als geometrisches Objekt, als Hilfsmittel in der Stochastik und an vielen Stellen im Leben, besonders beim Spielen.

Zunächst einige Beispiele:

Aschenbecher im Würfel-Design



Aufgabe:
Recherchieren Sie zu Bild a!

Bild a: Aus dem Internet am 16.1.2008, Eingabe: *Würfel Design*



Sammeln Sie Informationen!

Bild b, <http://cgi.ebay.at/ws/ebayISAPI.dll?ViewItem&item=140196273707&ih=004&category=54108&ssPageName=WDVW&rd=1X>

Kube*Paris*


Das Haus im 18. Arrondissement ist ein Mekka für Design-Liebhaber. Hinter der klassischen Fassade erwartet den Gast ein außergewöhnliches Design, dessen Hauptelement der Kubus ist: hier gibt es Würfel, wohin man auch sieht.


In einem gläsernen Würfel im Innenhof ist der Empfang untergebracht. Kubisch sind auch die 41 ungewöhnlich eingerichteten Zimmer: In manchen werden Bett und Bad durch eine diagonal verlaufende, freistehende Wand getrennt, es gibt fluoreszierende Hocker, Nachttische, die wie Eiswürfel aussehen, oder Gardinen aus synthetischem Pelz. In der „Ice Kube-Bar“ wird bei minus fünf Grad Wodka serviert. Nicht kubisch sind einzig die Schalensessel in der Bar, in denen man, sich wiegend, seinen Cocktail schlürfen kann. Das Würfel-Design macht auch vor der Küche nicht halt. Mangels Speisesaal isst man sein Kube-Sandwich in der Bar, genießt pikant Gewürztes am Stiel und an der Suppenbar die Kube-Bouillon.

Recherchieren im Internet →

<http://www.kubehotel.com/>

Sudoku-Würfel

	<p>Schon bekannt?</p>
---	-----------------------

	<p>Geraden: Verbinde die Punkte gegenüberliegender Seiten miteinander. Es entstehen Strecken – deren Gleichungen? Hinweis: Betrachte jede Fläche als Quadrat, das hilft beim Modellieren. Koordinaten der Punkte?.</p>
---	--

Ein ANIMATO-Würfel

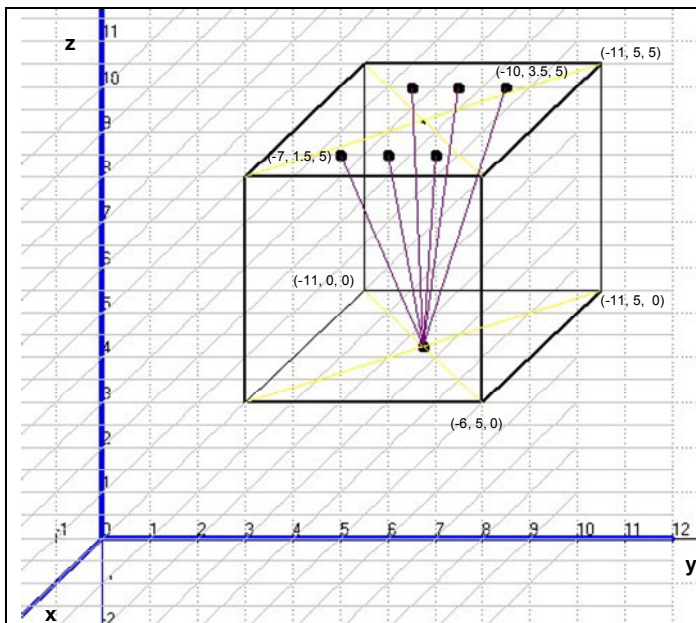


Bild: Datei Kosy-2d-3d-Würfelpunkte-xyz.pl2

Unser Würfelmodell

In ANIMATO Würfeckpunkte eingeben, die Punkte auf zwei Würfel­flächen festlegen, ein Punkt unten und 6 Punkte oben. Strecken zwischen unten und oben ziehen.

Aufgaben

Durch welche Gleichungen können die 6 Strecken, die vom unteren Diagonalenschnitt­punkt zu den oberen 6 Würfelpunkten gehen, beschrieben werden?
Als 3D-Problem betrachten!

Eingaben

<p>f1: 0,0,12,0 f2: 0,0,-10,-10 f3: 0,0,0,12 f4: 0,0,-12,0 f5: 0,0,10,10 f6: 0,0,0,-12 f7: -10,u,12,u //horizontale Geraden f8: x, { x-u<-10 :undef:x-u} // Die Funktionen f1 bis f8 sind für das räumliche Kosy belegt - Nicht anders verwenden! f11: 3,3,3,8,8,8,8,3,3,3 // Fläche vorn f12: 5,5,5,5,5,5,10,5,10,5,10,5,5,5,5,5,5 // Rückfläche Würfel f13: 8,3,10,5,5,5 f14: 3,3,5,5,5,5 f15: 3,8,5,5,10,5 f16: 8,8,10,5,10,5 f17: 5,5,10,5,10,5,10,5 f19: 3,3,10,5,5,5 // Diagonalen unten f20: 8,3,5,5,5,5</p>	<p>f21: 8,8,5,5,10,5 // Diagonalen oben f22: 3,8,10,5,10,5 f24: 6,75,4,25 // Diagonalen-Mittelpunkt unten, errechnet f25: 6,75,9,25 f27: 5,8,5 // 6 Punkte auf Würfeloberfläche f28: 6,8,5 f29: 7,8,5 f30: 6,5,10 f31: 7,5,10 f32: 8,5,10 f34: 6,75,4,25,5,8,5 // Verbindungsstrecken der Würfelpunkte f35: 6,75,4,25,6,8,5 f36: 6,75,4,25,7,8,5 f37: 6,75,4,25,6,5,10 f38: 6,75,4,25,7,5,10 f39: 6,75,4,25,8,5,10</p>
--	---

Aufgaben

1) Bestimmen Sie die Koordinaten der noch nicht beschrifteten Punkte. Der untere Würfelpunkt ist (-8.5, 2.5, 0).

2) Durch welche Gleichungen können die 6 Strecken, die vom unteren Diagonalenschnitt­punkt zu den oberen 6 Würfelpunkten gehen, beschrieben werden?
Als 3D-Problem betrachten!

Eine Lösung ist:
$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -8.5 \\ 2.5 \\ 0 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} 1.5 \\ -1 \\ 5 \end{pmatrix} \text{ mit } s \in [0,1].$$

3) Wie heißt die Abbildungsmatrix, die den Übergang vom R3 zum R2 vermittelt? – Erläutern Sie dazu die folgenden Zeilen:

Die Zeichnung sagt aus, dass die Einheitsvektoren so abgebildet werden:

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \text{ auf } \begin{pmatrix} -0.5 \\ -0.5 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \text{ auf } \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \text{ auf } \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}. \text{ Damit ist die Abbildungsmatrix}$$

$$A = \begin{pmatrix} -0.5 & 1 & 0 \\ -0.5 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Überprüfen Sie das, indem Sie einige der Punkte in Bild vom R3 in den R2 abbilden.

	<p>Bitte nachrechnen!</p> <p>amat ist die Matrix</p> $A = \begin{pmatrix} -0.5 & 1 & 0 \\ -0.5 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$
--	--

4) Wie kann man die Abbildungsmatrix verwenden, um die Streckgleichungen des R3 in R2-Streckgleichungen umzuwandeln?

5) Drehen Sie die gesamte Abbildung um 45°.

<p>Drehung um 114.4°, Bogenlänge 2 $\cos(2) \cdot fx - \sin(2) \cdot fy, \sin(2) \cdot fx + \cos(2) \cdot fy$</p>	<p>Spiegelung des Würfels an einer Geraden mit Steigungswinkel pi/2. $\cos(\pi) \cdot fx + \sin(\pi) \cdot fy, \sin(\pi) \cdot fx - \cos(\pi) \cdot fy$</p>
---	---

CAS-Hilfen für die gängigen Analytische Geometrie-Kurse

AG 5 Ein Kapitel zum Nachschlagen - Standardobjekte

Punkte, Vektoren, Geraden, Ebenen - die Standardobjekte der Analytischen Geometrie in der Schule – Definition von CAS-Bausteinen

Die Objekte der Analytischen Geometrie im dreidimensionalen Raum - Punkte, Geraden, Ebenen usw. – liegen häufig schon in parametrisierter Form vor. So kann man von der Bausteintechnik ausführlich Gebrauch machen. Zunächst werden die beim CAS des TI-92 / Voyage 200 / TI-Nspire **vordefinierten Bausteine** mit ihrem mathematischem Hintergrund aufgezählt, danach folgen einige **selbstdefinierte Bausteine**, die man häufiger benötigt. Einige Anwendungsbeispiele belegen das. Dann wird am Beispiel einer Klausuraufgabe gezeigt, worin Unterschiede bestehen, wenn man diese Aufgabe mit oder ohne CAS bearbeitet.

AG 5.1 Bausteine / Module in der Analytischen Geometrie

5.1.1 Vordefinierte Bausteine, mathematische Grundlagen

Länge eines Vektors TI-92/ Voyage200 *norm(Vektor)*
TI-Nspire

$$\left| \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} \right| = \sqrt{a^2 + b^2 + c^2}$$

Skalarprodukt TI-92/ Voyage 200 *dotp(Vektor, Vektor)*

$$\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} * \begin{pmatrix} d \\ e \\ f \end{pmatrix} = ad + be + cf \quad \text{bzw.} \quad \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} * \begin{pmatrix} d \\ e \\ f \end{pmatrix} = \left| \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} \right| * \left| \begin{pmatrix} d \\ e \\ f \end{pmatrix} \right| * \cos\left(\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} d \\ e \\ f \end{pmatrix} \right)$$

Vektorlänge

Das Skalarprodukt ist wichtig bei Längen- und Winkelberechnungen. Bei der Multiplikation zweier Matrizen A und B werden Skalarprodukte aller Zeilenvektoren von A mit allen Spaltenvektoren von B gebildet. Insofern gehören Skalarprodukte zu den besonders wichtigen Verknüpfungen.

Kreuzprodukt TI-92/ Voyage 200 *crossp(Vektor, Vektor)*

$$\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} d \\ e \\ f \end{pmatrix} = \begin{vmatrix} i & a & d \\ j & b & e \\ k & c & f \end{vmatrix}$$

(Determinante)

und $\left| \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} d \\ e \\ f \end{pmatrix} \right| = \left| \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} \right| * \left| \begin{pmatrix} d \\ e \\ f \end{pmatrix} \right| * \sin\left(\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} d \\ e \\ f \end{pmatrix} \right)$

Vektorlänge

dabei sind i, j, k die Einheitsvektoren $i = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, $j = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, $k = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$.

Das Kreuzprodukt (auch Vektorprodukt genannt) kann u.a. zur Flächenberechnung eines Parallelogramms und für die Bestimmung von 3 senkrecht aufeinanderstehende Vektoren verwendet werden.

Einheitsvektor

TI-92/ Voyage 200

unity(Vektor)

Ein Vektor mit der Länge 1.

Für den TI-Nspire beachte man das folgende Bild:

$v1 := \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$
$\text{norm} \left(\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} \right)$	$\sqrt{a^2+b^2+c^2}$
$\text{dotP} \left(\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} d \\ e \\ f \end{pmatrix} \right)$	$a \cdot d + b \cdot e + c \cdot f$
$\text{crossP} \left(\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} d \\ e \\ f \end{pmatrix} \right)$	$\begin{bmatrix} b \cdot f - c \cdot e \\ c \cdot d - a \cdot f \\ a \cdot e - b \cdot d \end{bmatrix}$
$\text{unitV} \left(\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} \right)$	$\begin{bmatrix} \frac{a}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}} \\ \frac{b}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}} \\ \frac{c}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}} \end{bmatrix}$

Man erkennt, dass sich in diesem Bereich die Befehle von
TI-92,
Voyage 200,
TI-Nspire
nicht unterscheiden.

Beispiele für die Anwendung der Bausteine

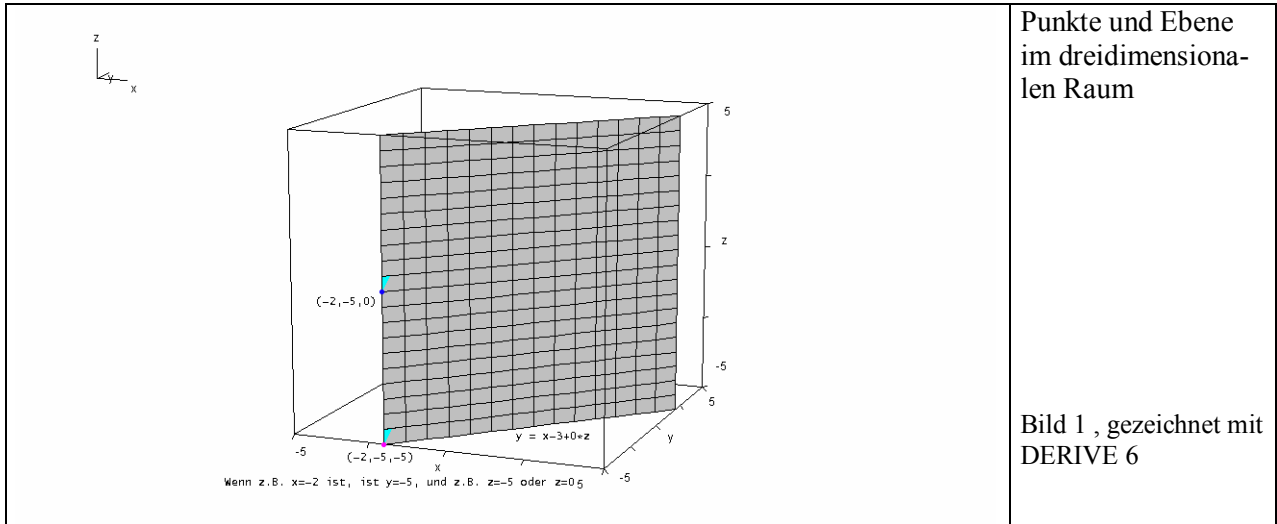
```

F1 Algebra F2 Calc F3 Other F4 PrgmIO F5 Clear a-z... F6
Define v1=[3 4] Done
Define v2=[-3 2] Done
dotP(v1,v2) -1
crossP(v1,v2) [0 0 18]
norm(v1) 5
unitV(v1) [3/5 4/5]
MAIN RAD AUTO FUNC 6/30

```

5.1.2 Geraden, Ebenen

Punkte, Geraden und Ebenen sind in der Schulmathematik die am häufigsten benötigten Punktmengen der Analytischen Geometrie. Hier sollen Geraden und Ebenen in ihrer gegenseitigen Lage untersucht werden. Diese Fragestellung führt auf lineare Gleichungssysteme, deren Lösungen Auskunft über die jeweilige Lagebeziehung geben. Da diese Themen leider zu den bekannten uninteressanten „Hieb- und Stichaufgaben“ führen, sollte man sich Erleichterungen bei diesbezüglichen Aufgaben schaffen, um das Gebiet möglichst schnell hinter sich bringen. Die Erleichterungen können uns die CAS geben. Mit diesem Rechenhilfsmittel folgt hier einige Beispiele, realisiert mit dem Voyage 200 / TI-92.



Punkte und Ebene im dreidimensionalen Raum

Bild 1, gezeichnet mit DERIVE 6

Geradengleichungsformen in der vektoriellen Analytischen Geometrie

3.1 Matrizen - Vektoren - Geraden - Ebenen - Linearkombinationen 63

Dann kann \vec{v} durch die beiden Zahlen +5 und -2 beschrieben und als (2, 1)-Matrix aufgefaßt werden:

$$\vec{v} = \begin{pmatrix} +5 \\ -2 \end{pmatrix}.$$

Auch Punkte im Koordinatensystem kann man als Matrizen deuten. Zum Beispiel werden die Punkte $A(1, 4, 5)$, $B(-3, 7, 56)$, $C(-1, -1, -2)$ des dreidimensionalen Raums \mathbb{R}^3 jeweils durch (1, 3)-Matrizen beschrieben. Wir haben eben schon berücksichtigt, daß man in der Regel Punktkoordinaten als Zeilen und Vektorenkoordinaten als Spalten schreibt.

Geraden- und Ebenengleichung

Erinnern wir uns an die Vektor-Gleichungen für Geraden und Ebenen:

$$g : \vec{r} = \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ 2 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 3 \\ 8 \\ 2 \end{pmatrix}, \quad E : \vec{r} = \begin{pmatrix} -3 \\ -2 \\ 5 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 3 \\ 9 \\ 0 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix},$$

allgemein:

$g : \vec{r} = \vec{r}_1 + t\vec{u}_1$	$E : \vec{r} = \vec{r}_1 + t\vec{u}_1 + s\vec{u}_2$
Geradengleichung	Ebenengleichung
\vec{r}_1 Ortsvektor; \vec{u}_1, \vec{u}_2 Richtungsvektoren; $t, s \in \mathbb{R}$.	

Die Abbildungen 3.4 und 3.5 verdeutlichen noch einmal, wie man die Gleichungen für Geraden und Ebenen herleiten kann.

Abb. 3.4: Zur Herleitung der Geradengleichung $g : \vec{r} = \vec{r}_1 + t\vec{u}$

Bild 2: Geradengleichungen herleiten

3 Analytische Geometrie

- $\vec{r}_1 = \overrightarrow{OP_1} = \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \\ z_1 \end{pmatrix}$ ist ein Ortsvektor (Ortsvektoren haben ihren Anfangspunkt im Koordinatenursprung), der uns auf die Gerade g bzw. die Ebene E bringt.
- Die Richtung der Geraden wird durch den Richtungsvektor \vec{u} angegeben, $t\vec{u}$ (mit $t \in \mathbb{R}$) führt uns auf der Geraden entlang (denken Sie sich z.B. $t = 2; -1; 4; 5; 8; -4$).
- $\vec{r} = \vec{r}_1 + t\vec{u}$ ist dann die Menge aller Ortsvektoren \overrightarrow{OP} zur Geraden hin, so daß die gesamte Gerade beschrieben wird.

Entsprechend kann man die Gleichung der Ebene E interpretieren.

Abb. 3.5: Zur Herleitung der Ebenengleichung $E : \vec{r} = \vec{r}_1 + t\vec{u}_1 + s\vec{u}_2$

Bild 3: Ebenengleichung herleiten

(1) Punktrichtungsform

$$\vec{r} = \vec{r}_1 + t * \vec{u}$$

(2) Zweipunkteform

$$\vec{r} = \vec{r}_1 + t * (\vec{r}_2 - \vec{r}_1)$$

(3) Normalenform für Gerade (nur im \mathbb{R}^2): $\vec{n} * (\vec{r} - \vec{r}_1) = \vec{0}$ oder auch $\vec{n} * \vec{r} = \vec{n} * \vec{r}_1$.

Dabei sind \vec{r}_1 und \vec{r}_2 Vektoren vom Nullpunkt zur Geraden (Ortsvektoren), \vec{u} ist Richtungsvektor, der die Richtung der Geraden angibt, \vec{n} (Normalenvektor) ist ein Vektor senkrecht zur Geraden. t ist ein Parameter aus der Menge der reellen Zahlen. \vec{r} beschreibt dann alle Vektoren OP vom Nullpunkt zur Geraden.

Die ausführliche Schreibweise zu den Geradengleichungsformen (1)-(3) lautet:

$$(1) \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \\ z_1 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} u_x \\ u_y \\ u_z \end{pmatrix} \quad (2) \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \\ z_1 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} x_2 - x_1 \\ y_2 - y_1 \\ z_2 - z_1 \end{pmatrix}$$

$$(3) \begin{pmatrix} n_x \\ n_y \end{pmatrix} \cdot \left(\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix} \right) = 0, \text{ Gerade in } x, y - \text{Ebene}$$

Ebenengleichungsformen in der vektoriellen Analytischen Geometrie**(4) Punktrichtungsform**

$$\vec{r} = \vec{r}_1 + t * \vec{u} + s * \vec{v}$$

(5) Dreipunkteform

$$\vec{r} = \vec{r}_1 + t * (\vec{r}_2 - \vec{r}_1) + s * (\vec{r}_3 - \vec{r}_1)$$

(6) Normalenform für Ebene (nur im \mathbb{R}^3)

$$\vec{n} * (\vec{r} - \vec{r}_1) = \vec{0} \text{ oder auch } \vec{n} * \vec{r} = \vec{n} * \vec{r}_1$$

Dabei sind \vec{r}_1 , \vec{r}_2 und \vec{r}_3 Vektoren vom Nullpunkt zur Geraden (Ortsvektoren), \vec{u} und \vec{v} sind Richtungsvektoren in der Ebene, \vec{n} (Normalenvektor) ist ein Vektor senkrecht zur Ebene. t und s sind Parameter aus der Menge der reellen Zahlen. \vec{r} beschreibt dann alle Vektoren OP vom Nullpunkt zur Ebene.

Die ausführlichen Schreibweisen:

$$(4) \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \\ z_1 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} u_x \\ u_y \\ u_z \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} v_x \\ v_y \\ v_z \end{pmatrix} \quad (5) \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \\ z_1 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} x_2 - x_1 \\ y_2 - y_1 \\ z_2 - z_1 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} x_3 - x_1 \\ y_3 - y_1 \\ z_3 - z_1 \end{pmatrix}$$

$$(6) \begin{pmatrix} n_x \\ n_y \\ n_z \end{pmatrix} \cdot \left(\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \\ z_1 \end{pmatrix} \right) = 0$$

<p>Normalenform einer Ebenengleichung</p> <p>Für die Gleichung einer Ebene E, gegeben durch einen Punkt P_1 (Ortsvektor \vec{r}_1) und einen Vektor $\vec{n} \perp E$ (Normalenvektor), gilt</p> <p style="text-align: center;">$E : (\vec{r} - \vec{r}_1) \cdot \vec{n} = 0$ bzw. $\vec{r} \cdot \vec{n} - \vec{r}_1 \cdot \vec{n} = 0$ bzw. $\vec{r} \cdot \vec{n} = c$ mit $c = \vec{r}_1 \cdot \vec{n}$.</p> <div style="text-align: center;"> </div> <p style="text-align: center;">Abb. 3.19: Skizze zur Herleitung der Normalenform von E</p> <p>11. Bestimmen Sie die Gleichungen der durch \vec{r}_1 und \vec{n} gegebenen Ebenen (in den drei oben genannten Formen):</p> <p>a) $\vec{r}_1 = \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ 5 \end{pmatrix}$, b) $\vec{r}_1 = \begin{pmatrix} -2 \\ 4 \\ -1 \end{pmatrix}$, c) $\vec{r}_1 = \begin{pmatrix} 3,4 \\ 4 \\ 5,6 \end{pmatrix}$,</p> <p>d) $\vec{r}_1 = \begin{pmatrix} -10 \\ 4 \\ 0 \end{pmatrix}$.</p>	<p style="text-align: right; font-size: small;">3.1 Matrizen - Vektoren - Geraden - Ebenen - Linearkombinationen 65</p> <p>Einheitsvektoren und Ortsvektoren</p> <div style="text-align: center;"> </div> <p style="text-align: center;">Abb. 3.6: Einheitsvektoren</p> <p>In Abbildung 3.6 erkennen wir drei spezielle Ortsvektoren, die auf den 3 Koordinatenachsen liegen und die Länge 1 haben. Es sind die Einheitsvektoren</p> $\vec{e}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \vec{e}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \vec{e}_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$ <p>Alle Ortsvektoren lassen sich mit Hilfe dieser drei Einheitsvektoren darstellen. Zum Beispiel gilt (siehe Abb. 3.6):</p> $\begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 2,5 \end{pmatrix} = 2 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + 3 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + 2,5 \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ <p>allgemein:</p> <div style="border: 1px solid black; padding: 5px; margin-top: 10px;"> <p style="text-align: center; font-size: small;">Darstellung eines Vektors mit Hilfe von Einheitsvektoren</p> $\begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \\ z_1 \end{pmatrix} = x_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + y_1 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + z_1 \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad x_1, y_1, z_1 \in \mathbb{R}.$ </div>
<p>Bild 4: Herleitung Normalenform der Ebenengleichung</p>	<p>Bild 5: Einheitsvektoren</p>

Aufgaben

(1) Gegeben seien die Ebene E und die Geraden g_1, g_2, g_3 . Zeigen Sie $E \cap g_1 = \{S\}$, $E \cap g_2 = \{ \}$ und $E \cap g_3 = g_3$. Berechnen Sie S .

$$E: \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix} \cdot \vec{r} + 7 = 0 \quad g_1: \quad \vec{r} = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 5 \\ 1 \\ 4 \end{pmatrix} \quad g_2: \quad \vec{r} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$g_3: \vec{r} = \begin{pmatrix} 7 \\ 2 \\ 8 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 5 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}$$

Bearbeitung von $E \cap g_1 = \{S\}$:

Eine geschickte Definition der Objekte führt zu einer kurzen Rechnung. Die Planung ist so:

- 1) Das \vec{r} von g_1 soll für das \vec{r} bei E eingesetzt werden (Skalarprodukt).
 - 2) Insgesamt entsteht dann eine Gleichung in t , die nach t aufgelöst wird.
 - 3) Der gefundene t -Wert wird bei g_1 eingesetzt. Es ergibt sich der gesuchte Schnittpunkt S .
- Zur eleganten Realisierung des Lösungsweges werden zunächst die unten ersichtlichen Definitionen getätigt.

```

F1 Algebra F2 Calc F3 Other F4 PrgmIO F5 Clear a-z... F6
[1 1 -2] → n [1 1 -2]
[0 -1 2] + t · [5 1 4] → r(t) Done
solve(dotP(n,r(t))+7=0,t) t = 1
r(1) [5 0 6]
dotP(n,[5 0 6])+7=0 true
MAIN RAD AUTO FUNC 5/30
    
```

Definition des Normalenvektors von E.
 Definition von r(t) der Geraden.
 Skalarprodukt bilden, 7 addieren und
 gleich 0 setzen. Gleichung nach t auflö-
 sen. Mit r(1) S berechnen.

Die letzte Zeile ist nur eine Probe.

Schnitt zweier Ebenen, die in Parameterform gegeben sind

Gegeben seien die Ebenen E1 und E2 mit den Gleichungen

$$E1: \vec{r} = \begin{pmatrix} 4 \\ 0 \\ -3 \end{pmatrix} + a \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} + b \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix}, E2: \vec{r} = \begin{pmatrix} -2 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix} + c \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} + d \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix}$$

```

F1 Algebra F2 Calc F3 Other F4 PrgmIO F5 Clear a-z... F6
[-2 3 0] + c · [0 0 -1] + d · [2 -1 3]
[4 0 -3] + a · [0 -1 0] + b · [-2 0 3]
e1(a,b) - e2(c,d)
-2 · b - 2 · d + 6
-a + d - 3
3 · b + c - 3 · d - 3
MAIN RAD AUTO FUNC 6/8
    
```

Die Terme auf der rechten Seite werden eingegeben und voneinander subtrahiert.

```

F1 Algebra F2 Calc F3 Other F4 PrgmIO F5 Clear a-z... F6
[0 -2 0 -2 -6]
[-1 0 0 1 4] → ebenen
[0 3 1 -3 3]
0 -2 0 -2 -6
-1 0 0 1 4
0 3 1 -3 3
MAIN RAD AUTO FUNC 5/8
    
```

Aus dem Ergebnis kann man das entstandene LGS in den Variablen a,b,c,d ablesen und dann die zugehörige Matrix „ebenen“ eingeben.

```

F1 Algebra F2 Calc F3 Other F4 PrgmIO F5 Clear a-z... F6
rref(ebenen)
1 0 0 -1 -4
0 1 0 1 3
0 0 1 -6 -6
solve(c - 6 · d = -6, c) c = 6 · d - 6
e2(c, d)
2 · d - 2
-d + 3
-(6 · d - 6) + 3 · d
MAIN RAD AUTO FUNC 4/8
    
```

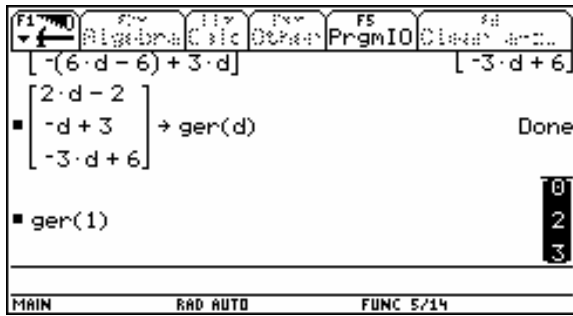
Die Anwendung des Bausteins *rref* liefert die Umformung des LGS. Es gibt unendlich viele Lösungen, da eine Variable frei ist. Man liest ab
 $a - d = -4$
 $b + d = 3$
 $c - 6d = -6$

```

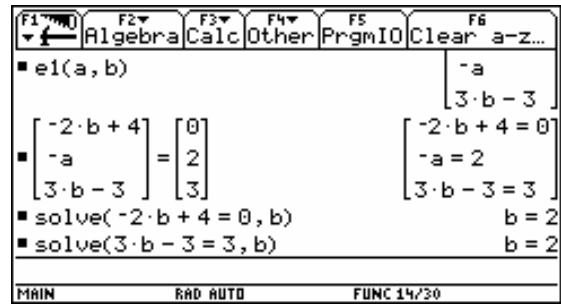
F1 Algebra F2 Calc F3 Other F4 PrgmIO F5 Clear a-z... F6
solve(c - 6 · d = -6, c) c = 6 · d - 6
e2(c, d)
2 · d - 2
-d + 3
-(6 · d - 6) + 3 · d
MAIN RAD AUTO FUNC 8/30
    
```

Die letzte Gleichung wird nach c aufgelöst. c wird bei e2(c,d) eingesetzt, die erwartete Geradengleichung ist entstanden.

$$\vec{r} = \begin{pmatrix} -2 \\ 3 \\ 6 \end{pmatrix} + d \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ -3 \end{pmatrix}$$



Die Gerade wird als ger(d) definiert. Der Aufruf ger(1) bestimmt einen Punkt auf der Geraden, für den wir überprüfen wollen, ob er auf der Ebene E1 liegt.



Der Punkt (0,2,3) wird bei e1(a,b) für r eingesetzt. Man liest ab a=-2 und errechnet für b aus den anderen beiden Gleichungen den gleichen Wert b=2.

(2) Berechnen Sie den Durchschnitt der beiden Ebenen E1 und E2!

$$2a) \quad E1: \vec{r} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -5 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} 5 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad E2: \vec{r} = \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \\ -6 \end{pmatrix} + t2 \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 8 \end{pmatrix} + s1 \begin{pmatrix} 5 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

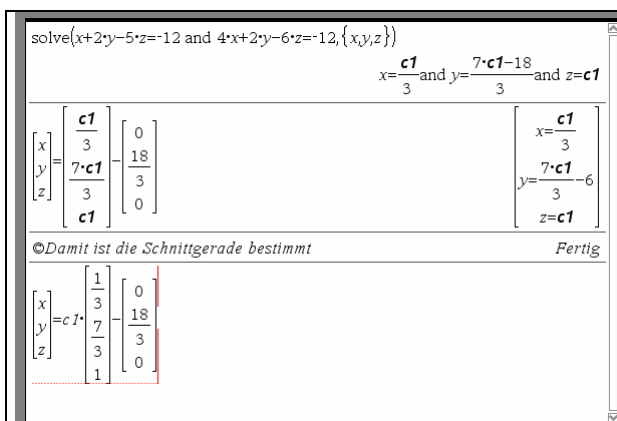
Schnitt zweier Ebenen, die in Normalenform gegen sind

Berechnen Sie den Durchschnitt der beiden Ebenen E1 und E2!

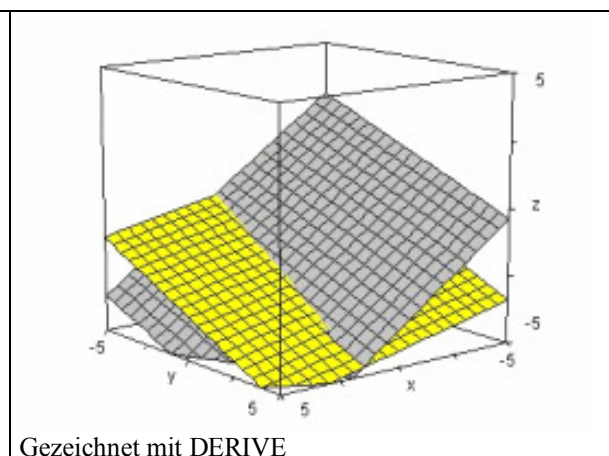
$$2b) \quad E1: \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -5 \end{pmatrix} \cdot \vec{r} + 12 = 0 \quad E2: \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \\ -6 \end{pmatrix} \cdot \vec{r} + 12 = 0$$

Für die DERIVE-Zeichnung benötigt man die Koordinatenform

$$\begin{array}{ll} E1: & E2: \\ x+2y-5z=-12 & 4x+2y-6z=-12 \\ z = 0.2 \cdot (-x-2y-12) & z = 1/6 \cdot (-4x-2y-12) \end{array}$$



Gerechnet mit TI-Nspire-CAS



Gezeichnet mit DERIVE

(3) Bestimmen Sie einen Vektor c, der senkrecht auf den Vektoren a und b steht.

$$a^T = (5, -1, -4); \quad b^T = (5, 1, 5).$$

- (4) Die Gerade $g(PQ)$ wurde einer **linearen Abbildung mit der Matrix $A(3,3)$** unterworfen.
Als Bild von $g(PQ)$ ergab sich $g(P'Q')$.- Bestimmen Sie die Gleichung von $g(PQ)$.

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 2 \\ 0 & -1 & 5 \\ 2 & 5 & -1 \end{pmatrix}, P'(-2, -1, 9); Q'(3, 28, 22).$$

5.1.3 Selbstdefinierte Bausteine

Wir beginnen mit einer Liste selbstdefinierter Bausteine für das Nspire-CAS

©Baustein-Definitionen zur Analytischen Geometrie, Blatt 1		Fertig
Define $p3d(ax,ay,az)=[ax \ ay \ az]$		Fertig
$p3d(1,2,3)$		$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \end{bmatrix}$
Define $v3d(ax,ay,az)=\begin{bmatrix} ax \\ ay \\ az \end{bmatrix}$		Fertig
$v3d(1,1,1)$		$\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$
Define $gp3d(ax,ay,az,bx,by,bz,t)=\begin{bmatrix} ax \\ ay \\ az \end{bmatrix}+t\cdot\begin{bmatrix} bx-ax \\ by-ay \\ bz-az \end{bmatrix}$		Fertig
$gp3d(5,4,3,1,1,1,s)$		$\begin{bmatrix} 5-4\cdot s \\ 4-3\cdot s \\ 3-2\cdot s \end{bmatrix}$

p3d, Punkt in 3D
Punkteingabe

v3d
Vektoreingabe

gp3d
Gerade durch 2 Punkte

©Baustein-Definitionen zur Analytischen Geometrie, Blatt 2		Fertig
Define $grv3d(ax,ay,az,ux,uy,uz,t)=\begin{bmatrix} ax \\ ay \\ az \end{bmatrix}+t\cdot\begin{bmatrix} ux \\ uy \\ uz \end{bmatrix}$		Fertig
$grv3d(5,4,3,1,2,3,r)$		$\begin{bmatrix} r+5 \\ 2\cdot r+4 \\ 3\cdot r+3 \end{bmatrix}$
Define $ep3d(ax,ay,az,bx,by,bz,cx,cy,cz,t1,t2)=\begin{bmatrix} ax \\ ay \\ az \end{bmatrix}+t1\cdot\begin{bmatrix} bx-ax \\ by-ay \\ bz-az \end{bmatrix}+t2\cdot\begin{bmatrix} cx-ax \\ cy-ay \\ cz-az \end{bmatrix}$		Fertig
$ep3d(1,2,3,4,4,4,7,5,3,t1,t2)$		$\begin{bmatrix} 3\cdot t1+6\cdot t2+1 \\ 2\cdot t1+3\cdot t2+2 \\ t1+3 \end{bmatrix}$

grv3d
Gerade mit Punkt und
Richtungsvektor

ep3d
Ebene durch 3 Punkte

©Baustein-Definitionen zur Analytischen Geometrie, Blatt 3		Fertig
Define $erv3d(ax, ay, az, ux, uy, uz, vx, vy, vz, t1, t2) = \begin{bmatrix} ax \\ ay \\ az \end{bmatrix} + t1 \cdot \begin{bmatrix} ux \\ uy \\ uz \end{bmatrix} + t2 \cdot \begin{bmatrix} vx \\ vy \\ vz \end{bmatrix}$		Fertig
$erv3d(1, 2, 3, -1, -2, -2, 4, 4, u, v)$		$\begin{bmatrix} -u+4\cdot v+1 \\ -2\cdot u+4\cdot v+2 \\ -2\cdot u+4\cdot v+3 \end{bmatrix}$
Define $enf3d(x, y, z, nx, ny, nz, ax, ay, az) = \text{dotP} \left(\begin{bmatrix} nx \\ ny \\ nz \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} \right) - \text{dotP} \left(\begin{bmatrix} nx \\ ny \\ nz \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} ax \\ ay \\ az \end{bmatrix} \right) = 0$		Fertig
$enf3d(x, y, z, 1, 2, 3, 7, 6, 5)$		$x+2\cdot y+3\cdot z-34=0$
Define $enfo3d(x, y, z, nx, ny, nz, c) = \text{dotP} \left(\begin{bmatrix} nx \\ ny \\ nz \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} \right) = c$		Fertig
$enfo3d(x, y, z, 1, 2, 3, 12)$		$x+2\cdot y+3\cdot z=12$

erv3d
Ebene mit Punkt und 2
Richtungsvektoren

enf3d
Ebene in Normalenform
Mit Normalenvektor und
Punkt

enfo3d
Ebene mit Normalenvek-
tor und Konstante

Oben wurde das CAS des Nspire benutzt, die Definitionen für DERIVE6, TI-92, Voyage 200 können entsprechend durchgeführt werden.

Die einzelnen Beispiel-Aufrufe der Bausteine zeigen, dass durch sie das langwierige Arbeiten mit den Vektorklammern oder mit den „;“ entfällt, etwa bei der Eingabe einer Ebenengleichung. Wichtig ist jedoch die Reihenfolge der Parameter, aber ein Kontrollausdruck liefert ja dann die Vektorschreibweise und es kann ggf. korrigiert werden.

Liegt der Punkt auf der Geraden?

P(8, 1, -3), Q(1,2,3), Gerade $\vec{r} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix}$

$grv3d(1, 2, 3, 3, 3, 4, t) = v3d(1, 2, 3)$	$\begin{bmatrix} 3\cdot t+1=1 \\ 3\cdot t+2=2 \\ 4\cdot t+3=3 \end{bmatrix}$
$grv3d(1, 2, 3, 3, 3, 4, t) = v3d(8, 1, -3)$	$\begin{bmatrix} 3\cdot t+1=8 \\ 3\cdot t+2=1 \\ 4\cdot t+3=-3 \end{bmatrix}$
$\text{solve} \left(\begin{bmatrix} 3\cdot t+1=8 \\ 3\cdot t+2=1 \\ 4\cdot t+3=-3 \end{bmatrix}, t \right)$	false
$\text{solve} \left(\begin{bmatrix} 3\cdot t+1=1 \\ 3\cdot t+2=2 \\ 4\cdot t+3=3 \end{bmatrix}, t \right)$	t=0
$\text{solve}(grv3d(1, 2, 3, 3, 3, 4, t) = v3d(1, 2, 3), t)$	t=0

Ansatz für den Punkt Q(1,2,3)

Ansatz für P(8,1,-3)

P nicht auf g

Q auf g

Und alles in einer Zeile als kompakte Lösung. – **Wer die modulare Kompetenz hat, spart viel Zeit!**

Mit den obigen vor- und selbstdefinierten Bausteinen erschließen sich diverse gebräuchliche Aufgaben aus der Analytischen Geometrie. Wir verdeutlichen uns das an der Geradendefinition $g3d(ax, ay, az, bx, by, bz, t)$. Dazu betrachten wir verschiedene Aufrufe des Bausteins und überlegen, was diese Aufrufe inhaltlich bedeuten.

1) $g3d(3, 4, 0, 1, -6, 5, 2)$ - Es handelt sich um den Vektor $[-1, -16, 10]$, denn

$$\begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ 0 \end{pmatrix} + 2 \begin{pmatrix} 1-3 \\ -6-4 \\ 5-0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ -16 \\ 10 \end{pmatrix}.$$

2) $g3d(5, 6, 8, 0, 0, 0, 0)$ - der Vektor mit den Komponenten 5, 6, 8.

3) $g3d(4, 5, 0, 2, 1, 0, t)$ - eine Gerade im R^2

$\vec{r} = \begin{pmatrix} 4 \\ 5 \\ 0 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} -2 \\ -4 \\ 0 \end{pmatrix}$	
---	--

In ähnlicher Form können sich weitere Übungen zu dem Baustein $g3d(\dots)$ anschließen.

Geraden/Strecken im R^2 in Parameterdarstellung zeichnen

Um Geraden im R^2 in Parameterdarstellung zu zeichnen, kann man beim TI-92 bzw. Voyage 200 so vorgehen:

- | | |
|---|--------------------|
| 1) <i>mode, graph</i> \rightarrow <i>parametric</i> | einstellen |
| 2) \blacklozenge , <i>y=</i> | y-Fenster aufrufen |
| 3) Eingaben durchführen | |
| 4) \blacklozenge , <i>Graph</i> | Zeichnen lassen |

Folgende Geraden sollen eingegeben werden:

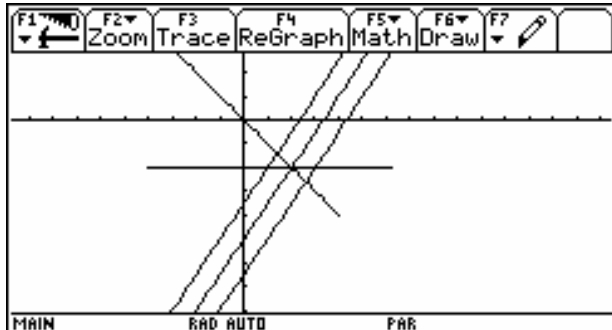
$$r = \begin{pmatrix} a \\ -2 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix} \text{ mit } a = 1 \text{ bzw. } 2 \text{ oder } 3; \quad r = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}; \quad r = \begin{pmatrix} 0 \\ -2 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

	<p>Wir sehen das <i>y =</i> Fenster im Parametric-Mode.</p> <p>Die Schreibweise $2t + a \mid a = \{1, 2, 3\}$ bedeutet: $2t + a$ mit der Eigenschaft: a aus der Menge $\{1, 2, 3\}$.</p>
--	--

Es wird in jeweils 2 Gleichung aufgespalten und dann z.B. eingegeben:

$x_{t1} = 2t+a$ | $a=\{1,2,3\}$ | wird mit „2nd K“ (beim Voyage200) erzeugt und bedeutet
 „mit der Eigenschaft“ a aus der Menge {1,2,3}

$y_{t1} = 3t-2$



Der Bereich der Zeichnung kann mit
 ♦, *WINDOW* eingestellt werden.

Mögliche weitere Fragestellungen können sein:
 Welche Gerade gehört zu den einzelnen Gleichungen?

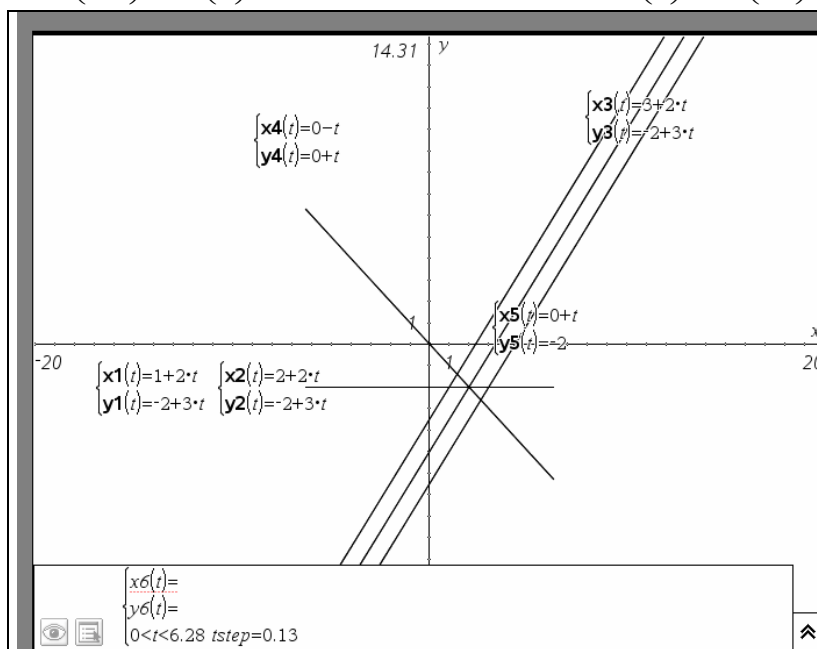
Welche Gleichung kann man aus der Zeichnung ablesen?

Welche t werden benutzt?

Für das TI-Nspire-CAS

Folgende Geraden sollen eingegeben werden:

$$r = \begin{pmatrix} a \\ -2 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix} \text{ mit } a = 1 \text{ bzw. } 2 \text{ oder } 3; \quad r = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}; \quad r = \begin{pmatrix} 0 \\ -2 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$



Auch hier wird die Darstellung
 „parametrisch“ benutzt. Art der
 Eingabe, siehe im Bild unten.

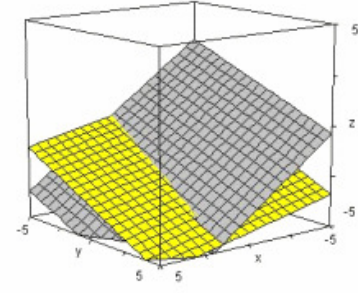
5.1.4 Viel zu rechnen: Schnitt zweier Ebenen und Umwandlungen von Gleichungsformen mit einem CAS (TI-Nspire)

Das sind Standardaufgaben in allen Lehrplänen, bei denen die SchülerInnen ihre Rechenkompetenzen zeigen sollen. Es sind aber langweilige Rechnereien, die vermutlich auch der Lehrer nicht immer fehlerfrei erledigt. Hier kommt ein CAS gerade richtig – hier wird das TI-Nspire-CAS benutzt. Aber Ansätze und Interpretation der Ergebnisse am Rechner muss man beherrschen. Dazu folgen unten die immer wieder gestellten Aufgabentypen, Ebenen in verschiedenen Gleichungsformen zu schneiden. Nun aber in schneller Bearbeitung mit CAS – und der Lehrer kann sich auf Verständnisfragen oder andere Anwendungen von Ebenengleichungen konzentrieren.

Angesichts der vielen Dateneingaben für Vektoren werden hier insbesondere zwei Werkzeugkompetenzen wichtig:

- 1) Geschicktes Kopieren von Eingaben und Ergebnissen,
- 2) Benutzung von Bausteinen,
- 3) Auswertungskompetenz bezüglich der erzeugten Ergebnisse.

Die Rechnungen wurden hier mit dem TI-Nspire durchgeführt (Datei Ebenenschnitte.tns)

<p>©Schnitt zweier Ebenen in Normalenform $ax+by+cz=d$ Fertig</p> <p>solve($x+2y-5z=-12$ and $4x+2y-6z=-12$, {x,y,z}) $x=\frac{c1}{3}$ and $y=\frac{7\cdot c1-18}{3}$ and $z=c1$</p> <p>$\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \text{expand} \left(\begin{bmatrix} c1 \\ 7\cdot c1-18 \\ 3 \\ c1 \end{bmatrix} \right)$</p> <p>$\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = c1 \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ 7 \\ 3 \\ 1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 \\ 6 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$</p> <p>©Das ist die gesuchte Geradengleichung Fertig</p>	 <p>Bild 1 Zwei Ebenen in Normalenform Weg a Ebenenschnitt1.jpg, Ebenenschnitte.tns</p>
--	--

<p>©Schnitt zweier Ebenen in Normalenform $ax+by+cz=d$ Fertig</p> <p>$x+2y-5z=-12$ and $4x+2y-6z=-12$ $2x+y-3z=-6$ and $x+2y-5z=-12$</p> <p>rref($\begin{bmatrix} 1 & 2 & -5 & -12 \\ 4 & 2 & -6 & -12 \end{bmatrix}$) $\begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -7 \end{bmatrix}$</p> <p>$\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{3}\cdot z \\ \frac{7}{3}\cdot z - 6 \\ z \end{bmatrix}$ $\begin{bmatrix} x = \frac{z}{3} \\ y = \frac{7z}{3} - 6 \\ \text{true} \end{bmatrix}$</p> <p>©Für z können also beliebige Werte eingesetzt werden, z freie Variable Fertig</p>	<p>Ein zweiter Weg. Statt mit „solve“ wird hier mit dem Befehl rref(matrix) gearbeitet. Hier muss dann die Werkzeugkompetenz bzgl. der Auswertung des rref-Befehls vorhanden sein.</p> <p>Bild 2 Zwei Ebenen in Normalenform, Weg b Ebenenschnitt2.jpg, Ebenenschnitte.tns</p>
---	--

©Schnitt zweier Ebenen in Parameterform Fertig

$$\begin{cases} x \\ y \\ z \end{cases} = \begin{cases} 2 \\ 0 \\ 4 \end{cases} + s \cdot \begin{cases} 2 \\ 1 \\ 1 \end{cases} + t \cdot \begin{cases} -2 \\ 1 \\ 0 \end{cases} + \begin{cases} -3 \\ 0 \\ 1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x \\ y \\ z \end{cases} = \begin{cases} 2 \\ 0 \\ 2 \end{cases} + s \cdot \begin{cases} 2 \\ 1 \\ 1 \end{cases} + t \cdot \begin{cases} -2 \\ 1 \\ 1 \end{cases} + \begin{cases} 3 \\ 0 \\ 1 \end{cases}$$

solve $\left(\begin{cases} 2 \\ 0 \\ 4 \end{cases} + s \cdot \begin{cases} 2 \\ 1 \\ 1 \end{cases} + t \cdot \begin{cases} -2 \\ 1 \\ 0 \end{cases} = \begin{cases} 2 \\ 0 \\ 2 \end{cases} + s \cdot \begin{cases} 2 \\ 1 \\ 1 \end{cases} + t \cdot \begin{cases} -2 \\ 1 \\ 1 \end{cases} + \begin{cases} 3 \\ 0 \\ 1 \end{cases}, \{s, t\} \right)$

$s = -2 \cdot (c5 - 1)$ and $s = -2 \cdot (c5 - 1)$ and $t = -c5$ and $t = c5$

$$\begin{cases} x \\ y \\ z \end{cases} = \begin{cases} 2 \\ 0 \\ 4 \end{cases} + s \cdot \begin{cases} 2 \\ 1 \\ 1 \end{cases} + t \cdot \begin{cases} -2 \\ 1 \\ 0 \end{cases} \quad \begin{cases} x = 7 \cdot c5 - 2 \\ y = -2 \cdot (c5 - 1) \\ z = 4 - c5 \end{cases}$$

Bild 3

Zwei Ebenen in Parameterform
Ebenenschnitt3.jpg, Ebenenschnitte.tns

c5 ist freie Variable

Die Ergebnisse für s1 und t1 werden eingesetzt (mittels .. | ...)

©Schnitt zweier Ebenen, eine in Parameterform, eine in Normalenform Fertig

$$\begin{cases} x \\ y \\ z \end{cases} = \begin{cases} 2 \\ 0 \\ 2 \end{cases} + s \cdot \begin{cases} 2 \\ 1 \\ 1 \end{cases} + t \cdot \begin{cases} -2 \\ 1 \\ 1 \end{cases} + \begin{cases} 3 \\ 0 \\ 1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x \\ y \\ z \end{cases} = \begin{cases} 2 \\ 0 \\ 2 \end{cases} + s \cdot \begin{cases} 2 \\ 1 \\ 1 \end{cases} + t \cdot \begin{cases} -2 \\ 1 \\ 1 \end{cases} + \begin{cases} 3 \\ 0 \\ 1 \end{cases}$$

solve $(x+2y-5z=-12 | x=-2s+3t+2 \text{ and } y=s \text{ and } z=s+t+2, \{t, s\})$

$s = \frac{-2 \cdot (c8 - 2)}{5}$ and $t = c8$

$$\begin{cases} x \\ y \\ z \end{cases} = \begin{cases} 2 \\ 0 \\ 2 \end{cases} + s \cdot \begin{cases} 2 \\ 1 \\ 1 \end{cases} + t \cdot \begin{cases} -2 \\ 1 \\ 1 \end{cases} \quad \begin{cases} x = \frac{19 \cdot c8}{5} + \frac{2}{5} \\ y = \frac{-2 \cdot (c8 - 2)}{5} \\ z = \frac{3 \cdot c8}{5} + \frac{14}{5} \end{cases}$$

Bild 4

Zwei Ebenen, eine in Parameterform, die andere in Normalenform, Weg a
Ebenenschnitt4.jpg, Ebenenschnitte.tns

Benutzung der Ergebnisse aus Zeile 1

Die Geradengleichung ist also

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0.4 \\ 0.8 \\ 2.8 \end{pmatrix} + c8 * \begin{pmatrix} 3.8 \\ -0.4 \\ 0.6 \end{pmatrix}$$

©Schnitt zweier Ebenen, eine in Parameterform, eine in Normalenform Fertig

$$\begin{cases} x \\ y \\ z \end{cases} = \begin{cases} 2 \\ 0 \\ 2 \end{cases} + s \cdot \begin{cases} 2 \\ 1 \\ 1 \end{cases} + t \cdot \begin{cases} -2 \\ 1 \\ 1 \end{cases} + \begin{cases} 3 \\ 0 \\ 1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x \\ y \\ z \end{cases} = \begin{cases} 2 \\ 0 \\ 2 \end{cases} + s \cdot \begin{cases} 2 \\ 1 \\ 1 \end{cases} + t \cdot \begin{cases} -2 \\ 1 \\ 1 \end{cases} + \begin{cases} 3 \\ 0 \\ 1 \end{cases}$$

solve $(-12 = -5s - 2t - 8, \{s, t\})$

$s = \frac{-2 \cdot (c9 - 2)}{5}$ and $t = c9$

$$\begin{cases} x \\ y \\ z \end{cases} = \begin{cases} 2 \\ 0 \\ 2 \end{cases} + s \cdot \begin{cases} 2 \\ 1 \\ 1 \end{cases} + t \cdot \begin{cases} -2 \\ 1 \\ 1 \end{cases} \quad \begin{cases} x = \frac{19 \cdot c9}{5} + \frac{2}{5} \\ y = \frac{-2 \cdot (c9 - 2)}{5} \\ z = \frac{3 \cdot c9}{5} + \frac{14}{5} \end{cases}$$

Bild 5

Zwei Ebenen, eine in Parameterform, die andere in Normalenform, Weg b
Ebenenschnitt5.jpg, Ebenenschnitte.tns

Die Parametergleichung wird auf beiden Seiten mit dem Vektor [1,2,-5] aus der Normalenform multipliziert.

Das gleiche Ergebnis wie oben.

Umwandlung von Parameterform in Normalenform, Weg a

©Verwandlung einer Ebenengleichung in Parameterform in die Normalenform Fertig

$$\text{ebene}(s, t) = \begin{cases} x \\ y \\ z \end{cases} = \begin{cases} 2 \\ 0 \\ 2 \end{cases} + s \cdot \begin{cases} 2 \\ 1 \\ 1 \end{cases} + t \cdot \begin{cases} -2 \\ 1 \\ 1 \end{cases} + \begin{cases} 3 \\ 0 \\ 1 \end{cases}$$

solve $(\text{ebene}(s, t), \{s, t\})$

$z = \frac{x+5y+4}{3}$ and $s = y$ and $t = \frac{x+2(y-1)}{3}$

$\left(z = \frac{x+5y+4}{3} \right) \cdot 3$ $3z = x+5y+4$

©Damit ergibt sich die Ebenengleichung $x+5y-3z=-4$ Fertig

Bild 6

Umwandlung von Parameterform in Normalenform, Weg a
Ebenenschnitt7.jpg, Ebenenschnitte.tns

In DERIVE gibt man Ebenengleichungen in Normalenform ein. Dadurch gewinnt die Umwandlung an praktischer Relevanz.

Umwandlung von Parameterform in Normalenform, Weg b

<p>©Verwandlung einer Ebenengleichung in Parameterform in die Normalenform Fertig</p> $ebene(s,t) := \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ <hr/> <p>solve(dotP($\begin{pmatrix} n1 \\ n2 \\ n3 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$)=0 and dotP($\begin{pmatrix} n1 \\ n2 \\ n3 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$)=0, {n1,n2}) $n1 = \frac{-n3}{3}$ and $n2 = \frac{-5 \cdot n3}{3}$</p> <hr/> <p>$n3 := -3$ -3</p> $\text{dotP}\left(\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -n3 \\ 3 \\ -5 \cdot n3 \\ 3 \\ n3 \end{pmatrix}\right) = \text{dotP}\left(\begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -n3 \\ 3 \\ -5 \cdot n3 \\ 3 \\ n3 \end{pmatrix}\right)$ <p style="text-align: right;">$x+5y-3z=-4$</p> <hr/> <p>©Damit ist die Normalenform bestimmt – vergleiche mit dem anderen Weg!</p>	<p>Bild 7 Umwandlung von Parameterform in Normalenform, Weg b Ebenenschnitt7.jpg, Ebenenschnitte.tns Zunächst wird ein Vektor n gesucht, der auf den beiden Richtungsvektoren der Ebene senkrecht steht. Dazu kann man den vordefinierten Systembaustein „dotp(vektor,vektor)“ benutzen. n3 kann man frei wählen. Die Normalenform ergibt sich wie oben.</p>
---	--

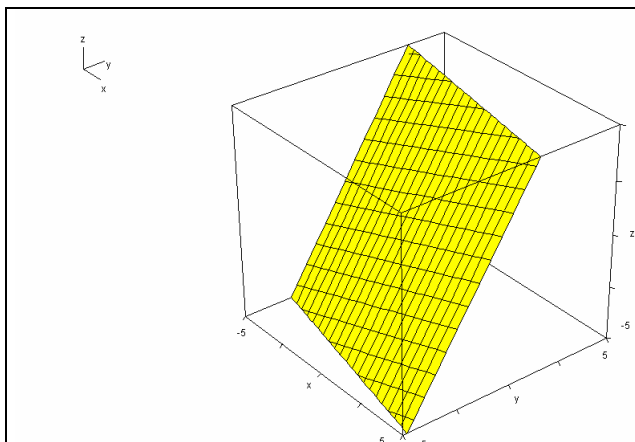


Bild 8

Die Ebene mit der Gleichung $x+5y-3z = -4$ bzw.

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 5 \\ -3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = -4 \text{ bzw.}$$

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -9 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} 8 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 5 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Umwandlung von der Normalenform in die Parameterform

<p>©Normalform in Parameterform umwandeln Fertig</p> $x+5y-3z=-4$ $x+5y-3z=-4$ <hr/> <p>$ebenepf(x,y,z) := x+5y-3z=-4$ Fertig</p> <p>solve($ebenepf(x,1,0),x$) $x=-9$</p> <hr/> <p>©Damit kennt man den Punkt A(-9,1,0) auf der Ebene Fertig</p> <p>solve($ebenepf(x,0,1),x$) $x=-1$</p> <hr/> <p>©Punkt B(-1,0,1) auf der Ebene Fertig</p> <p>solve($ebenepf(x,0,0),x$) $x=-4$</p> <hr/> <p>©Punkt C(-4,0,0) auf der Ebene Fertig</p> $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -9 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} -4 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -9 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} -4 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ <p style="text-align: right;">$x = -9 - s - 4t$ $y = 1 - t$ $z = s$</p> <hr/> <p>©Das ist die Ebenengleichung in Parameterform!</p>	<p>Bild Umwandlung von Normalenform in Parameterform Dateien: Ebenenschnitt9.jpg, Ebenenschnitte.tns Man sucht sich 3 Punkte auf der Ebene. Dann setzt man in die Parameterform ein.</p>
--	--

5.1.5 Abstände, Winkel

Die folgenden Seiten sind aus einem meiner älteren Werke – Lineare Algebra 1990 - übernommen. Sie bringen weitere Grundlagen der vektoriellen analytischen Geometrie. Es geht um die Anwendung des Skalarprodukts zur Abstands- und Winkelberechnung – Herleitungen und einige innermathematische Aufgaben. – Die Zeit hat nichts geändert!

<p style="font-size: small; margin: 0;">3.2 Skalarprodukt — Abstands- und Winkelberechnungen 71</p> <p>3.2 Skalarprodukt — Abstands- und Winkelberechnungen</p> <p>Zielsetzung Für Abstands- und Winkelberechnungen benötigt man das Skalarprodukt. Wir haben es bei der Multiplikation von Matrizen ständig benutzt. Nun aber erscheint es bei geometrischen Fragestellungen, so daß es darum geht, den Übergang von der algebraischen Definition zu geometrischen Anwendungen zu finden.</p> <p>Problemstellung Bestimmen Sie den Abstand der Punkte $P_1(x_1, y_1, z_1)$ und $P_2(x_2, y_2, z_2)$.</p> <p>Lösung Betrachten Sie Abbildung 3.8, und führen Sie den angedeuteten Lösungsweg durch!</p> <div style="text-align: center;"> </div> <p style="font-size: x-small; margin-top: 10px;">Abb. 3.8: Abstand zweier Punkte im \mathbb{R}^3</p> <p style="font-size: x-small;">(a) Pythagoras in Dreieck $P_1Q_2P_2$. (b) Pythagoras in Dreieck $P_1Q_1Q_2$. (c) Einsetzen von (b) in (a) ergibt:</p>	<p style="font-size: small; margin: 0;">3 Analytische Geometrie</p> <div style="border: 1px solid black; padding: 5px; margin-bottom: 10px;"> <p>Der Abstand P_1P_2 zweier Punkte $P_1(x_1, y_1, z_1)$ und $P_2(x_2, y_2, z_2)$ im \mathbb{R}^3 berechnet sich mit der Formel</p> $P_1P_2 = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2}$ <p>Länge des Vektors $\vec{P_1P_2}$ zwischen den Punkten P_1 und P_2:</p> $\vec{P_1P_2} = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2}$ </div> <p>Mit den Setzungen</p> $(x_2 - x_1) = a_x, \quad (y_2 - y_1) = a_y, \quad (z_2 - z_1) = a_z$ <p>ergibt sich für die</p> <div style="border: 1px solid black; padding: 5px; margin: 10px 0;"> <p>Länge eines Vektors \vec{a}: $\vec{a} = \sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2}$</p> </div> <p>Der nicht sofort sichtbare Zusammenhang dieser Formeln mit Matrizenrechnungen ergibt sich über den Begriff des Skalarprodukts! Das Skalarprodukt hat bei der Einführung der Matrizenmultiplikation eine wesentliche Rolle gespielt und ist uns später immer wieder begegnet. Wir haben definiert:</p> <div style="border: 1px solid black; padding: 5px; margin: 10px 0;"> <p style="text-align: center;">Skalarprodukt</p> $A_{(1,n)} B_{(n,1)} = (a_{11} \ a_{12} \ \dots \ a_{1n}) \begin{pmatrix} b_{11} \\ b_{21} \\ \vdots \\ b_{n1} \end{pmatrix} := \sum_{j=1}^n a_{1j} b_{j1}$ </div> <p>Betrachten wir nun die obigen Formeln für die Abstandsrechnungen,</p>
---	---

<p style="font-size: small; margin: 0;">3.2 Skalarprodukt — Abstands- und Winkelberechnungen 73</p> <p>so wird deutlich, daß auch hier Skalarprodukte im Spiel sind, etwa</p> $ \vec{P_1P_2} = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2}$ $ \vec{P_1P_2} = \sqrt{\begin{pmatrix} (x_2 - x_1) \\ (y_2 - y_1) \\ (z_2 - z_1) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} (x_2 - x_1) \\ (y_2 - y_1) \\ (z_2 - z_1) \end{pmatrix}}$ <p>Nun ist es in der analytischen Geometrie (Vektorrechnung) üblich, Vektoren als Spalten zu schreiben, so daß wir in Abweichung von der üblichen Matrixschreibweise hier Skalarprodukte als (Spalte*Spalte) schreiben, also</p> $\text{Vektorlänge } \vec{P_1P_2} = \sqrt{\begin{pmatrix} (x_2 - x_1) \\ (y_2 - y_1) \\ (z_2 - z_1) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} (x_2 - x_1) \\ (y_2 - y_1) \\ (z_2 - z_1) \end{pmatrix}}$ <p>Allgemein definieren wir für den Bereich der Vektorrechnung bzw. der analytischen Geometrie:</p> <div style="border: 1px solid black; padding: 5px; margin: 10px 0;"> <p style="text-align: center;">Definition</p> <p style="text-align: center;">Skalarprodukt zweier Vektoren $\vec{a}, \vec{b} \in \mathbb{R}^3$</p> $\vec{a} \vec{b} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix} = a_1 b_1 + a_2 b_2 + a_3 b_3 = \sum_{i=1}^3 a_i b_i$ </div> <p>Orthogonale Vektoren</p> <p>Das Skalarprodukt ermöglicht auch die Berechnung von Winkelgrößen! Wir betrachten zunächst den Fall, daß zwei Vektoren senkrecht aufeinander stehen und zeigen, daß dann das Skalarprodukt der Vektoren gleich Null ist. Unter einigen Einschränkungen gilt auch die Umkehrung.</p> <div style="border: 1px solid black; padding: 5px; margin: 10px 0;"> <p style="text-align: center;">Satz 3.2</p> <p style="text-align: center;">Orthogonalitätsbedingung für zwei Vektoren</p> $\vec{r}_1 \perp \vec{r}_2 \Leftrightarrow \vec{r}_1 \vec{r}_2 = 0 \quad (\vec{r}_1, \vec{r}_2 \neq \vec{0})$ </div>	<p style="font-size: small; margin: 0;">3 Analytische Geometrie</p> <p>(1) Wir haben oben gesehen, daß</p> $ \vec{P_1P_2} = \vec{r}_2 - \vec{r}_1 = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2}$ <p>also</p> $ \vec{r}_2 - \vec{r}_1 ^2 = (x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2 = (x_1^2 + y_1^2 + z_1^2) + (x_2^2 + y_2^2 + z_2^2) - 2(x_1 x_2 + y_1 y_2 + z_1 z_2)$ <p>(2) Diese Beziehung erinnert an den Cosinussatz der ebenen Trigonometrie, wie man an den Abbildungen 3.9 unschwer erkennt.</p> <div style="text-align: center;"> </div> <p style="text-align: center; font-size: x-small;">Abb. 3.9: Cosinussatz</p> <p>Mit den Bezeichnungen der Abbildungen sagt der Cosinussatz</p> $a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cdot \cos(\alpha)$ <p>bzw.</p> $ \vec{r}_2 - \vec{r}_1 ^2 = \vec{r}_1 ^2 + \vec{r}_2 ^2 - 2 \vec{r}_1 \vec{r}_2 \cdot \cos(\vec{r}_1, \vec{r}_2) \quad (*)$ <p>(3) Wir können zweierlei ablesen:</p> <p>Wenn $\vec{r}_1 \perp \vec{r}_2$, dann liegt in Abbildung 3.9 ein rechtwinkliges Dreieck vor, und es gilt nach dem Satz des Pythagoras</p> $ \vec{r}_2 - \vec{r}_1 ^2 = \vec{r}_1 ^2 + \vec{r}_2 ^2$ <p>Dann muß in (*) gelten: $-2\vec{r}_1 \vec{r}_2 = 0$, also $\vec{r}_1 \vec{r}_2 = 0$. Wir haben damit gezeigt: Wenn $r_1 \perp r_2$, dann $\vec{r}_1 \vec{r}_2 = 0$. Auch die Umkehrung gilt, sofern man voraussetzt, daß $\vec{r}_1, \vec{r}_2 \neq 0$.</p>
--	---

3.2 Skalarprodukt — Abstands und Winkelberechnungen 75

Damit ist der Satz über die Orthogonalitätsbedingung für zwei Vektoren bewiesen. Dabei sind die Betrachtungen nicht an die verwendeten Ortsvektoren \vec{r}_1, \vec{r}_2 gebunden.

Winkel zwischen zwei Vektoren

Wir setzen die Überlegungen von (3) fort:
Wir hatten in (2)

$$|\vec{r}_2 - \vec{r}_1|^2 = |\vec{r}_1|^2 + |\vec{r}_2|^2 - 2|\vec{r}_1||\vec{r}_2| \cdot \cos(\vec{r}_1, \vec{r}_2) \quad \text{und}$$

$$|\vec{r}_2 - \vec{r}_1|^2 = |\vec{r}_1|^2 + |\vec{r}_2|^2 - 2\vec{r}_1 \cdot \vec{r}_2.$$

Es muß also gelten $\vec{r}_1 \cdot \vec{r}_2 = |\vec{r}_1||\vec{r}_2| \cdot \cos(\vec{r}_1, \vec{r}_2)$.

Damit kann der Winkel zwischen den Vektoren \vec{r}_1 und \vec{r}_2 berechnet werden!

Berechnung des Winkels zwischen zwei Vektoren \vec{r}_1, \vec{r}_2

$$\cos(\vec{r}_1, \vec{r}_2) = \frac{\vec{r}_1 \cdot \vec{r}_2}{|\vec{r}_1||\vec{r}_2|}$$

Satz 3.3

Zusammenfassung

Das aus der Matrizenrechnung bekannte Skalarprodukt erweist sich auch in der Geometrie als sehr nützlich. Es ermöglicht dort u.a. die Berechnung

- des Abstands zweier Punkte,
- Winkelberechnungen.

Aber auch, wie weitere Überlegungen zeigen (siehe u.a. Aufgabenteil), die Berechnungen von

- Abstand Punkt/Gerade, Abstand Punkt/Ebene,
- Abstand Gerade/Gerade, Abstand Gerade/Ebene,
- Abstand Ebene/Ebene,
- Flächenberechnungen.

Kurz: Das Skalarprodukt ist unerlässlich bei der Lösung metrischer Aufgaben.

Berechnung des Winkels zwischen Vektoren

3 Analytische Geometrie

Abstandsrechnungen

Wir haben oben bereits die Aufgabe "Abstand zweier Punkte" bearbeitet und kommen nun zu weiteren Abstandsrechnungen.

Abstand Punkt — Gerade

Ermitteln sie den Abstand des Punktes Q von der Geraden g .

$$Q(10, 1, 12); \quad g: \vec{r} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} -2 \\ -3 \\ 4 \end{pmatrix}.$$

Lösungen

Im folgenden werden mehrere Lösungsansätze skizziert. Erläutern Sie diese!

1. Ansatz

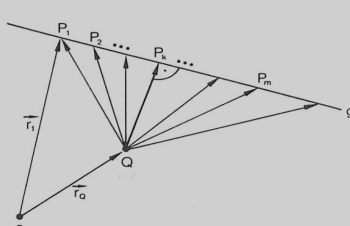


Abb. 3.10: Näherungslösung

- (1) Gesucht ist eine möglichst kurze Strecke $\overline{QP_i}$. Da wir in der Lage sind, den Abstand zweier Punkte zu bestimmen, haben wir die Möglichkeit, uns schrittweise an ein minimales $|\overline{QP_i}|$ heranzutasten.
- (2) Alle t aus einem Intervall $[t_A, t_B]$, Schrittweite t_H , liefern Punkte P_i auf g , indem wir t in die Geradengleichung einsetzen.

Abstand Punkt – Gerade

3.2 Skalarprodukt — Abstands und Winkelberechnungen 77

- (3) Wir bestimmen jeweils $|\overline{QP_i}|$ und suchen den kleinsten Wert heraus.
- (4) Anschließend kann das Intervall $[t_A, t_B]$ verkleinert werden, und wir benutzen wieder (2),(3).

2. Ansatz

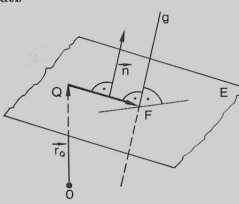


Abb. 3.11: Exakte Lösung (1)

- (1) Ebene E durch Q legen, so daß $E \perp g$.
- (2) $E \cap g = \{F\}$ berechnen.
- (3) $|\overline{QF}|$ bestimmen (Ergebnis: $|\overline{QF}| = \sqrt{25, 2}$).

3. Ansatz

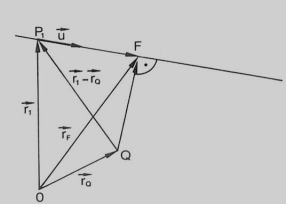


Abb. 3.12: Exakte Lösung (2)

Exakte Lösung (1)

Exakte Lösung (2)

Berechnung des Winkels zwischen Vektoren

3 Analytische Geometrie

- (1) $P_1 \in g$ beliebig wählen, z.B. den Ortsvektor von g .
- (2) $\overline{QP} = \overline{QP_1} + \overline{P_1P} = \vec{r}_1 - \vec{r}_Q + t\vec{u}$.
- (3) Auf beiden Seiten Skalarprodukt bilden mit \vec{u} :

$$\overline{QP} \cdot \vec{u} = (\vec{r}_1 - \vec{r}_Q + t\vec{u})\vec{u}$$

$$0 = (\vec{r}_1 - \vec{r}_Q)\vec{u} + t\vec{u}\vec{u}.$$

- (4) t berechnen und in g einsetzen:

$$t = \frac{-(\vec{r}_1 - \vec{r}_Q)\vec{u}}{\vec{u}\vec{u}}, \quad \text{eingesetzt ergibt sich } \vec{r}_F.$$

- (5) $|\overline{QF}|$ berechnen.

Abstand Punkt — Ebene

$Q(q_1, q_2, q_3), \quad E: \vec{r} = \vec{r}_1 + t\vec{u}_1 + s\vec{u}_2$

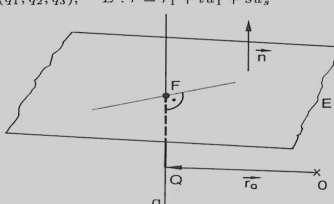


Abb. 3.13: Abstand Punkt–Ebene

- (1) Gerade g durch Q legen mit $g \perp E$, Normalenvektor von E rich Richtungsvektor von g .
- (2) $g \cap E = \{F\}$ bestimmen.
- (3) $|\overline{QF}|$ berechnen.

Abstand Punkt – Ebene

3.2 Skalarprodukt — Abstands und Winkelberechnungen 79

Abstand Ebene 1 — Ebene 2 ($E_1 \parallel E_2$)
 $E_1: \vec{r} = \vec{r}_1 + t\vec{u}_1 + s\vec{v}_2; E_2: \vec{r} = \vec{r}_2 + t\vec{v}_1 + s\vec{v}_2,$
 lineare Hüllen: $[\vec{u}_1, \vec{u}_2] = [\vec{v}_1, \vec{v}_2]$

Abb. 3.14: Abstand Ebene 1 — Ebene 2

- (1) Abstand d_1 des Nullpunkts von E_1 bestimmen,
- (2) Abstand d_2 des Nullpunkts von E_2 bestimmen,
- (3) $d = |d_2 - d_1|$ ist der Abstand der beiden Ebenen (Lage der Ebenen bezüglich $O(0,0,0)$ beachten).

Abstand Gerade — Ebene ($g \parallel E$)
 $g: \vec{r} = \vec{r}_1 + t\vec{u}, E: \vec{r} = \vec{r}_2 + t\vec{v}_1 + s\vec{v}_2,$
 lineare Hüllen: $[\vec{u}] \subset [\vec{v}_1, \vec{v}_2]$

Abb. 3.15: Abstand Gerade — Ebene

- (1) Ebene E_2 durch g legen, so daß $E_2 \parallel E$,
- (2) Fortsetzung wie bei Abstand Ebene 1 — Ebene 2.

Abstand Ebene 1 – Ebene 2, Abstand Gerade – Ebene

3 Analytische Geometrie

Abstand Gerade 1 — Gerade 2
 $g_1: \vec{r} = \vec{r}_1 + t_1\vec{u}_1, g_2: \vec{r} = \vec{r}_2 + t_2\vec{u}_2.$
 Für zwei Geraden im \mathbb{R}^3 gibt es drei Möglichkeiten
 (a) $g_1 \cap g_2 \neq \{ \}$, keine Abstandsberechnung erforderlich,
 (b) $g_1 \parallel g_2$ und $g_1 \neq g_2$, Abstandsberechnung möglich,
 (c) g_1 windschief zu g_2 , Abstandsberechnung möglich.

Zu (b), siehe Abbildung 3.16.

Abb. 3.16: Abstand Gerade 1 — Gerade 2

Man nehme einen beliebigen Punkt auf einer der Geraden und berechne dessen Abstand von der anderen Geraden (siehe oben: Abstand Punkt — Gerade).

Zu (c), siehe Abbildung 3.17.

Abb. 3.17: Abstand Gerade 1 — Gerade 2

Abstand Gerade 1 – Gerade 2

3.2 Skalarprodukt — Abstands und Winkelberechnungen 81

Unter dem Abstand zweier windschiefer Geraden wollen wir den Abstand zweier paralleler Ebenen E_1 und E_2 verstehen. Die Ebenen werden so konstruiert, daß g_1 in E_1 liegt und $E_1 \parallel g_2$; g_2 in E_2 liegt und $E_2 \parallel g_1$. Nun kann man den Abstand der beiden Ebenen wie oben berechnen.

Aufgaben

- Berechnen Sie die Seitenlängen der Dreiecke $P_1P_2P_3$ und $ABC!$
 $P_1(0,0,0), P_2(12,12,12), P_3(-5,5,2);$
 $A(-12,12), B(3,5), C(23,1).$
- Nennen Sie 8 Punkte, die vom Punkt $M(0,0)$ den gleichen Abstand haben.
- Nennen Sie 8 Punkte, die vom Punkt $M(1,2)$ den gleichen Abstand haben.
- Zeigen Sie: Die Gleichung eines Kreises K mit dem Mittelpunkt $M(0,0)$ und dem Radius r lautet
 — in Koordinatenschreibweise $x^2 + y^2 = r^2$ bzw. $y = \pm\sqrt{r^2 - x^2}$ und
 — in Vektorschreibweise $\vec{r}\vec{r} = |\vec{r}|^2$.
- Zeigen Sie: Die Gleichung einer Kugel K mit dem Mittelpunkt $M(0,0,0)$ und dem Radius $|\vec{r}|$ lautet $\vec{r}\vec{r} = |\vec{r}|^2$. Vergleichen Sie mit der Kreisgleichung.
- Erläutern Sie, inwiefern der Algorithmus in dem folgenden Struktogramm die paarweisen Abstände von n Punkten im \mathbb{R}^3 berechnet.

Übungsaufgaben zur Längen- und Winkelberechnung

3 Analytische Geometrie

Koordinaten der Punkte in eine $(3, n)$ -Matrix A einlesen

```

für i von 1 bis (n - 1)
  für j von (i + 1) bis n
    Abstandsquadrat q := 0
    für k von 1 bis 3
      q := q + (aki - akj)2
    Abstand := √q
  Ausgabe von "Abstand" und der Koordinaten der Punkte Pi und Pj, zwischen denen der Abstand berechnet wurde.
    
```

Abb. 3.18: Paarweiser Abstand von n Punkten im \mathbb{R}^3

7. Untersuchen Sie, welche der angegebenen Vektoren senkrecht aufeinander stehen.

$\vec{a} = \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ 1 \end{pmatrix}, \vec{b} = \begin{pmatrix} 2 \\ 7 \\ 3 \end{pmatrix}, \vec{c} = \begin{pmatrix} 4 \\ -3 \\ 0 \end{pmatrix}, \vec{d} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -4 \end{pmatrix}, \vec{e} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix},$
 $\vec{f} = \begin{pmatrix} -3 \\ 3 \\ 3/4 \end{pmatrix}, \vec{g} = \begin{pmatrix} -5 \\ 4 \\ -6 \end{pmatrix}, \vec{h} = \begin{pmatrix} 1,2 \\ 5,5 \\ 1 \end{pmatrix}, \vec{i} = \begin{pmatrix} 1,2 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \vec{j} = \begin{pmatrix} -1,2 \\ 2 \\ -5 \end{pmatrix}.$

8. Berechnen Sie die Winkel zwischen je zwei Vektoren.

$\vec{a} = \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ 1 \end{pmatrix}, \vec{b} = \begin{pmatrix} 2 \\ 7 \\ 3 \end{pmatrix}, \vec{c} = \begin{pmatrix} 4 \\ -3 \\ 0 \end{pmatrix}, \vec{d} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -4 \end{pmatrix}, \vec{e} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix},$
 $\vec{f} = \begin{pmatrix} -3 \\ 3 \\ 3/4 \end{pmatrix}, \vec{g} = \begin{pmatrix} -5 \\ 4 \\ -6 \end{pmatrix}, \vec{h} = \begin{pmatrix} 1,2 \\ 5,5 \\ 1 \end{pmatrix}, \vec{i} = \begin{pmatrix} 1,2 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \vec{j} = \begin{pmatrix} -1,2 \\ 2 \\ -5 \end{pmatrix}.$

5.2 Viele Punkte, viele Geraden

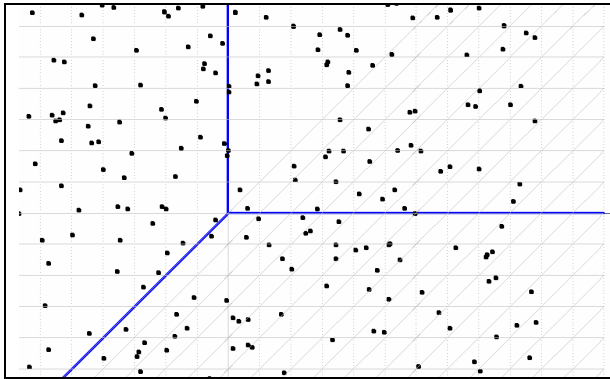
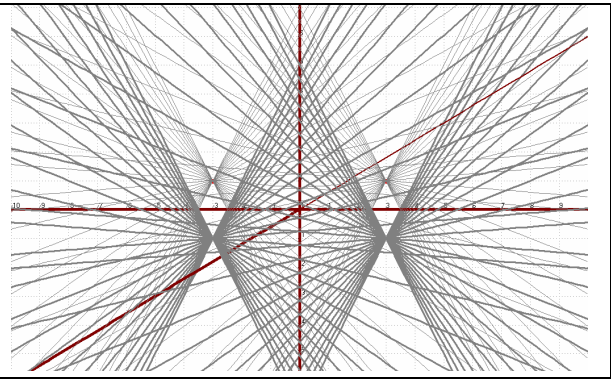


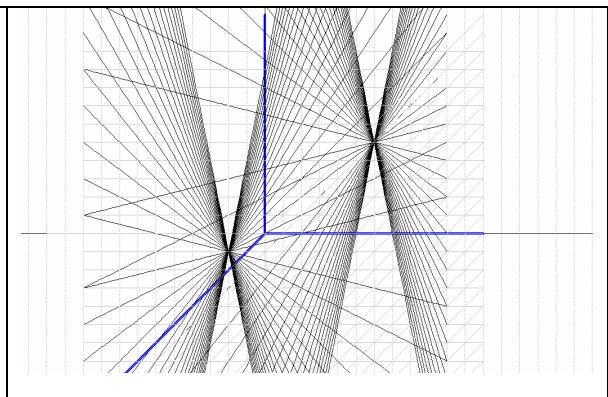
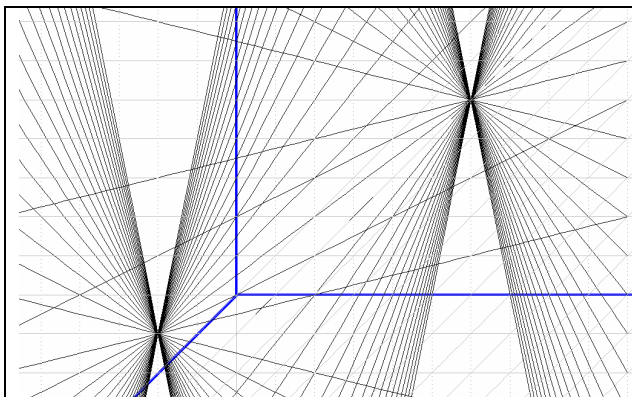
Bild 1: Viele Punkte im R^3



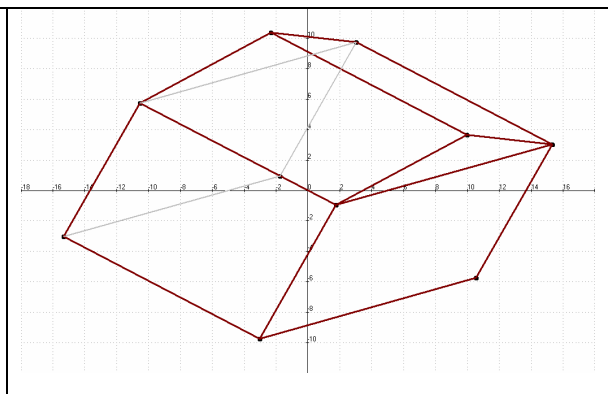
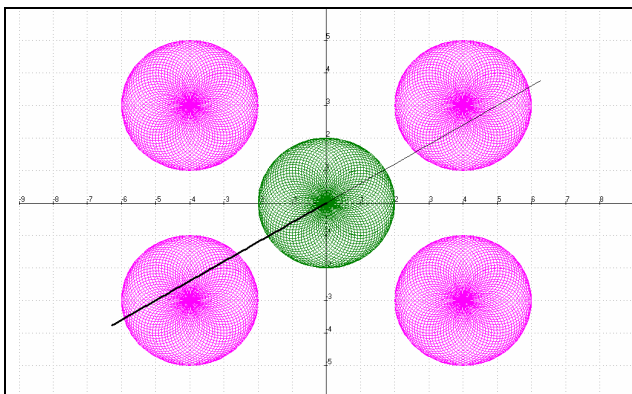
Viele Geraden im R^3

Aufgabe 1: Welche Punkte liegen im Einheitswürfel. Wie sind (in etwa) ihre Koordinaten?

Aufgabe 2: Gegeben ist ein Würfel mit der Kantenlänge 2. Zeichnen Sie viele Zufallspunkte in den Würfel!



Aufgabe 3: Nennen Sie Gleichungen von Geraden aus den Geradenbüscheln.



Aufgabe 4:
Wie lauten die Kugelgleichungen?

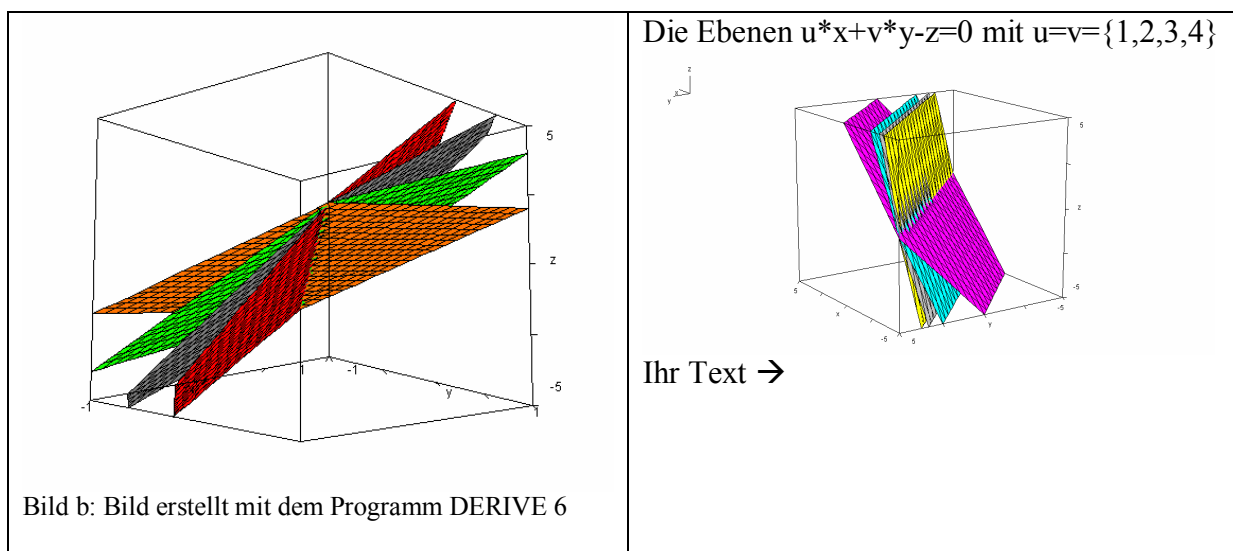
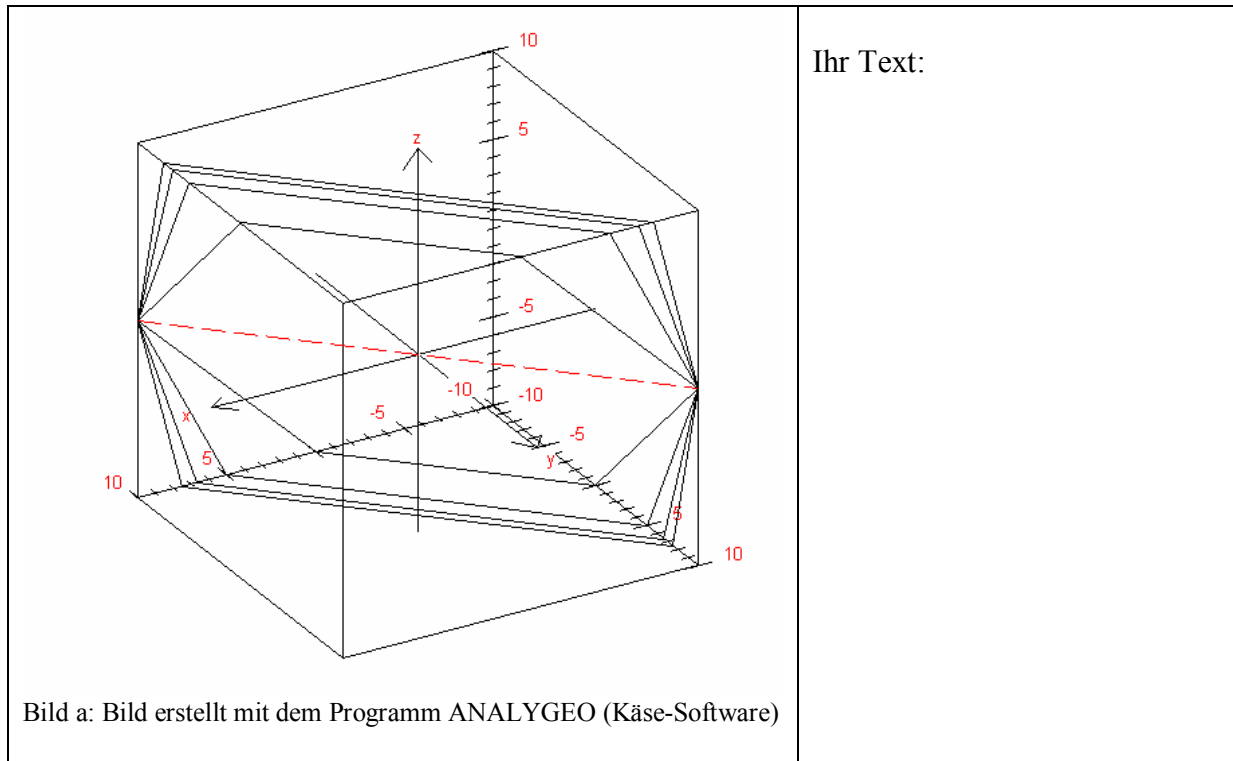
Aufgabe 5:
Nenne Punkte innerhalb des Hauses.

5.3 Ein Buch aufblättern - das Ebenenbündel $u \cdot x + u \cdot y = z(x, y, u)$

Das Problem:

Passt die Überschrift „Ein Buch aufblättern“? – Wir betrachten die Ebenen mit den Gleichungen $x+y-z=0$, $2x+2y-z=0$, $3x+3y-z=0$ und $4x+4y-z=0$.

Die folgenden Bilder machen dazu einige Aussagen. – Was sagen Sie dazu?



$\text{mat} := \begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 & 0 \\ 2 & 2 & -1 & 0 \\ 3 & 3 & -1 & 0 \\ 4 & 4 & -1 & 0 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 & 0 \\ 2 & 2 & -1 & 0 \\ 3 & 3 & -1 & 0 \\ 4 & 4 & -1 & 0 \end{bmatrix}$	Ihr Text →
$\text{ref}(\text{mat})$	$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$	
◉ Aus Zeile 2, folgt $z=0$, aus Zeile 1 folgt $y = -x$. Es gibt also nicht nur die		Fertig
◉ Lösung $x=0, y=0, z=0$, sondern unendlich viele Lösungen $(v, -v, 0)$		Fertig
◉ $y=-x, z=0$ ist geometrisch eine Gerade in der x,y -Ebene.		Fertig
$\text{solve}(x+y-z=0 \text{ and } 2x+2y-z=0 \text{ and } 3x+3y-z=0 \text{ and } 4x+4y-z=0, \{x,y,z\})$		
$x = -c1 \text{ and } y = c1 \text{ and } z = 0$		
<input type="checkbox"/>		

Bild c: Rechnung mit TI-Nspire-CAS

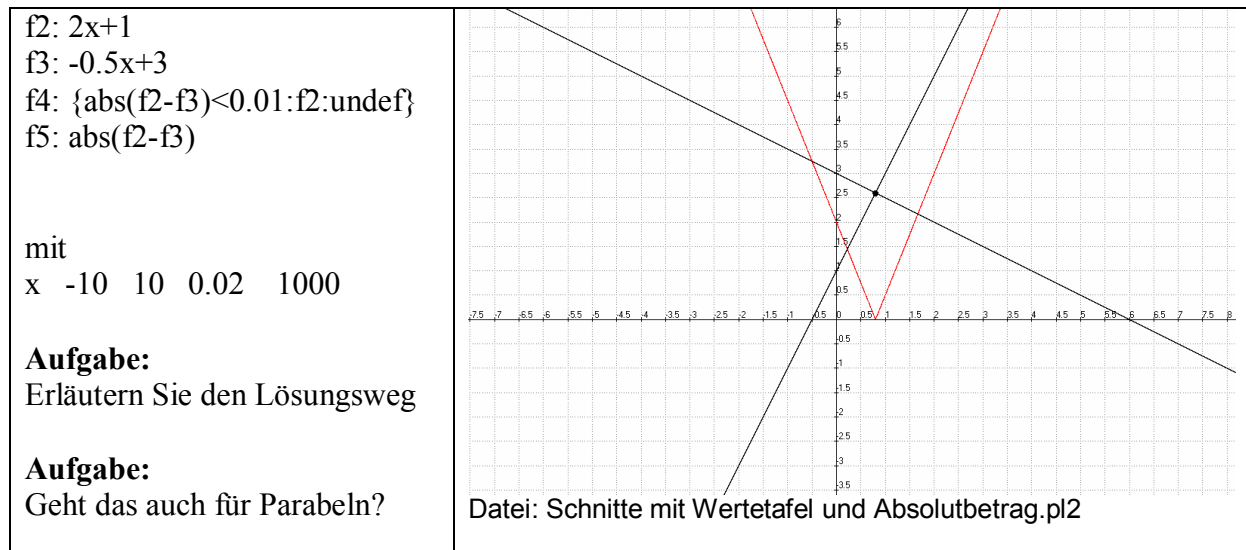
<table border="1"> <tr> <td>F1</td> <td>F2</td> <td>F3</td> <td>F4</td> <td>F5</td> <td>F6</td> </tr> <tr> <td>Algebra</td> <td>Calc</td> <td>Other</td> <td>PrgmIO</td> <td>Clean Up</td> <td></td> </tr> </table> $\text{solve}(x + y - z = 0 \text{ and } 2 \cdot x + 2 \cdot y - z = 0 \text{ and } 3 \cdot x + 3 \cdot y - z = 0 \text{ and } 4 \cdot x + 4 \cdot y - z = 0, \{x,y,z\})$ $x = -02 \text{ and } y = 02 \text{ and } z = 0$ <table border="1"> <tr> <td>MAIN</td> <td>RAD AUTO</td> <td>FUNC 1/30</td> </tr> </table>	F1	F2	F3	F4	F5	F6	Algebra	Calc	Other	PrgmIO	Clean Up		MAIN	RAD AUTO	FUNC 1/30	Ihr Text →
F1	F2	F3	F4	F5	F6											
Algebra	Calc	Other	PrgmIO	Clean Up												
MAIN	RAD AUTO	FUNC 1/30														

Bild d: Rechnung mit TI-Voyage 200

Aufgabe:

Gehen Sie auf die Suche nach weiteren Ebenenbüschel mit nennenswerten Eigenschaften!

5.4 Auf der Suche nach dem Schnittpunkt der Geraden - ein ungewohnter Lösungsweg



Aufgabe:
Kann man das Verfahren auf den Raum übertragen?

Dokumentation zum Programmsystem ANIMATO

Eberhard Lehmann, Stand 24.Juni 2008

ANIMATO hat besondere Eigenschaften, die mathematische Animationen intensiv unterstützen:

- (1) Wahl der Reihenfolge des Zeichnens der Graphen
- (2) Auch simultanes Zeichnen von Graphen
- (3) Ziehen von Strecken auch zwischen Punkten von Graph zu Graph
- (4) Farbwahl für die Graphen, verschiedene Strichstärken
- (5) Einstellen der Zeichengeschwindigkeit
- (6) Graphen punktweise zeichnen oder Punkte verbinden
- (7) Verwenden von Parametern
- (8) Schnelle Variierbarkeit in der Darstellungsart
- (9) Wahl geeigneter Zeichenbereiche
- (10) Verfügbarkeit vieler Animationsschritte, Festlegung von Wartezeiten dazwischen
- (11) Für jeden Animationsschritt können eigene Optionen festgelegt werden (etwa 5, 6, 10)
- (12) Eingabe von Transformationsgleichungen mit Wirkung auf alle Terme, z.B. Umrechnung in Polarkoordinaten oder Eingabe von Drehungen
- (13) Laden von Hintergrundbildern, z.B. mathematische Abbildungen oder Bildern von Digitalkameras, Wahl von Hintergrundfarben
- (14) Die Animationsabläufe können „gefilmt“ werden. Dabei entstehen avi-Dateien, die dann abgespielt werden können, ohne das ANIMATO-Programm zu benutzen oder zu kennen.

0. Vorspann

Hinweis: Beachten Sie bei den einzelnen Animato-Projekten die Option "Notizen". Dort befinden sich häufiger Hinweise zu den Problemlösungen.

Ein schneller Weg zur Arbeit mit dem Programm

- 1) Programm starten mit dem Aufruf von *PLOT2.EXE* (oder dem jeweils neuen Programmnamen bei neuen Versionen)
- 2) Klick auf „Datei öffnen“
- 3) Auswahl einer der vorgegebenen Beispieldateien, wählen Sie ***D-Geraden-durch-3-1.pl2***
- 4) Klick auf *Grafik* → Sie sehen die Animation
- 5) Sehen Sie sich nun die Programmierung (Klick auf *Funktionen*) an.
Unter den Optionen *Einstellungen*, *Notizen*, *Wertetafel* erhalten Sie weitere Informationen.
- 6) Nehmen Sie nun kleine Änderungen vor und beobachten Sie die Auswirkungen.
- 7) Erforschen Sie in der üblichen Weise mit Ihrem Cursor die Bedeutung der Symbole auf der Windows-Oberfläche (z.B. kann die Zeichnung zwischendurch angehalten werden. Klick auf ||).

Wie unter 1) bis 6) geschildert, können Sie mit allen Beispieldateien vorgehen. So lernt man die Möglichkeiten am besten kennen und kann das auf eigene Probleme anwenden.

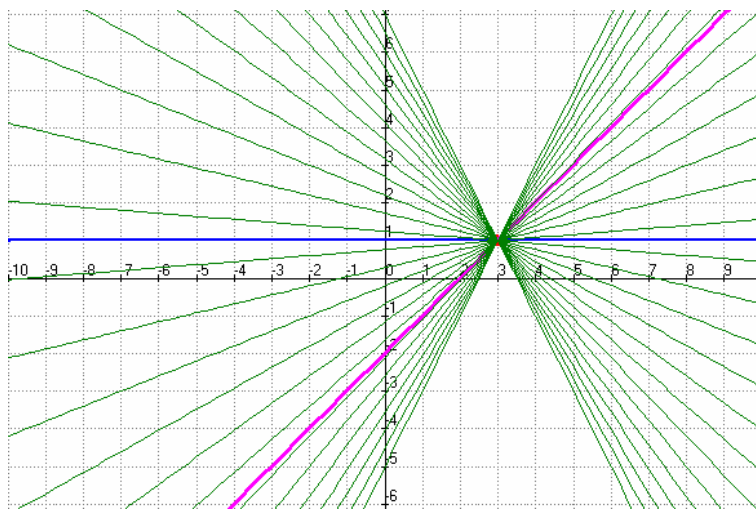


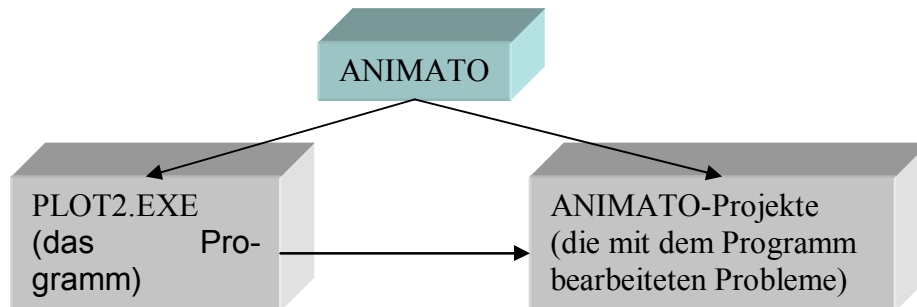
Bild zum Animato-Projekt

„D-Geraden-durch-3-1.pl2“

Ende der Kurzanleitung

ANIMATO

Das gesamte System einschließlich der Beispieldateien und Dokumentationen nenne ich **ANIMATO**. Das eigentliche Programm heißt **PLOT2.EXE**. Die erstellten Dateien werden als **ANIMATO-Projekte** bezeichnet. Sie werden unter dem Kürzel .pl2 gespeichert.



Die Leistungsfähigkeit von ANIMATO wird schnell deutlich, wenn Sie die vielen Beispieldateien (Animato-Projekte) betrachten und kleine Änderungen an Einstellungen oder Termen vornehmen.

1.1 Eine erste Anwendung

- (1) Starten Sie das Animato-Programm.
- (2) Klicken Sie in Block C in die Zeile f1 und tragen Sie dort einen Funktionsterm ein, z.B. $0.5x+1$
- (3) Klicken Sie auf das Kästchen neben f1, und klicken Sie auf eine **Farbe**.
- (4) Wiederholen Sie (2) und (3) für die Zeile f2. Eintragen von $\sin(x)$
- (5) Klicken Sie aus Block B auf das Icon **Grafik**.

Hinweis: Falls eine Eingabe in den Funktionenbildschirm anfangs nicht zu sehen ist, klicken Sie einfach irgendwo auf den Funktionenbildschirm.

Das Ergebnis (siehe Abbildung 1): Die Gerade und die Sinuskurve werden im Bereich $t \in [-10, 10]$ mit der Schrittweite 0.2 (100 Werte) und in den gewählten Farben gezeichnet. – Die Zeichnung ist noch nicht maßstabsgetreu.

- (6) Klicken Sie in Block B auf **Funktionen**. – Sie werden wieder in die Funktionsmaske geführt.

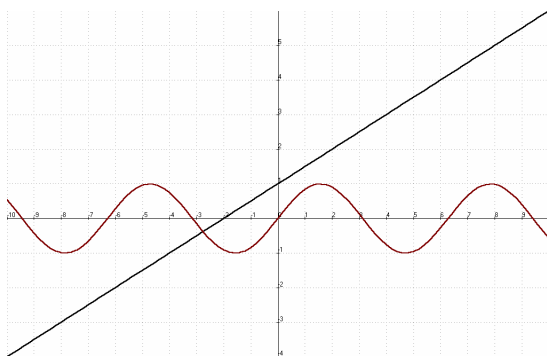


Abb. 1: Der erste Versuch – die Gerade $y = 0.5x+1$ und die Sinuskurve $y = \sin(x)$

1.2 Grundlagen - die fünf Bildschirme

(B1) Der Funktionen-Bildschirm

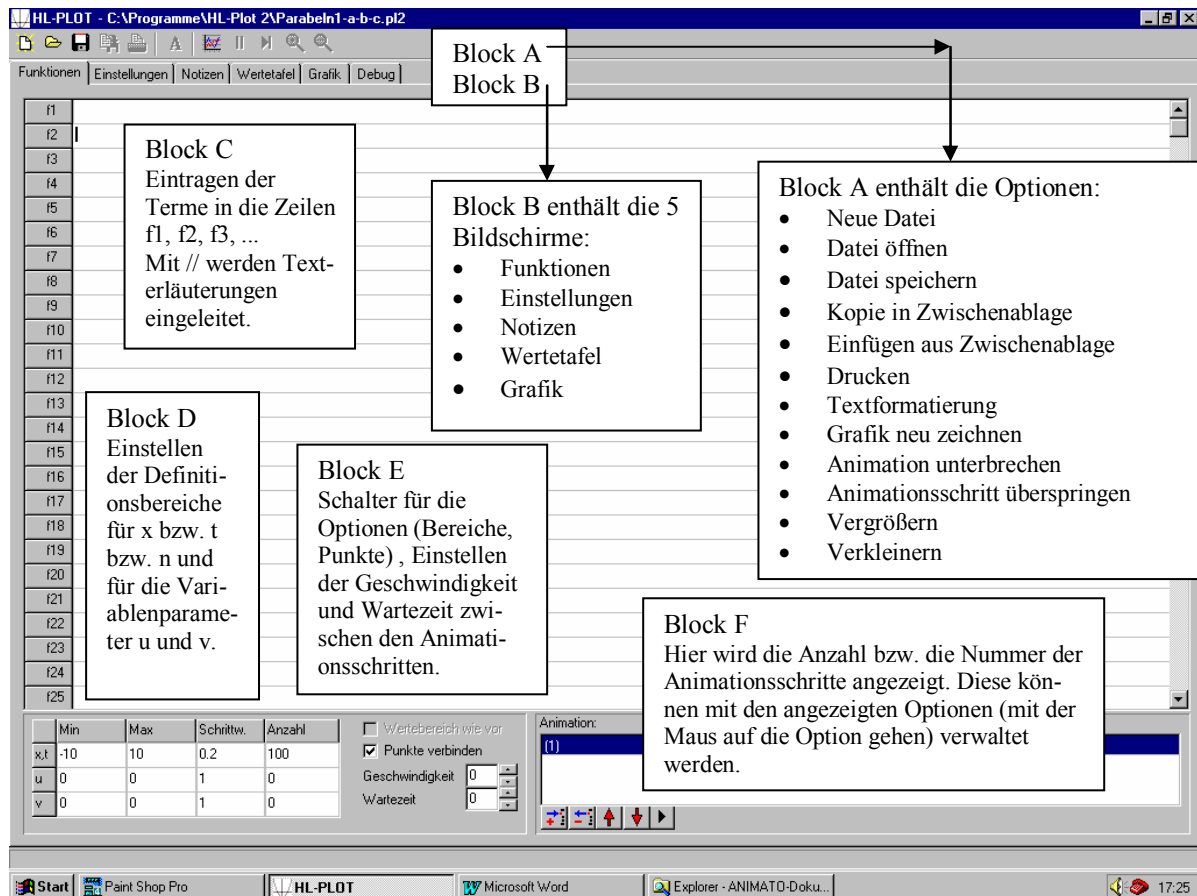


Abbildung 2: Die Ausgangsmaske von PLOT2.EXE

Aufruf des Programms PLOT2.EXE liefert beim Bildschirm „Funktionen“ das Bild von Abbildung 2 (ohne die erläuternden „Blöcke“). Das Startbild wird zur leichteren Beschreibung in die Blöcke A bis G eingeteilt. Gelegentlich erscheint auch zuerst der Bildschirm „Notizen“.

(B2) Der Einstellungen-Bildschirm

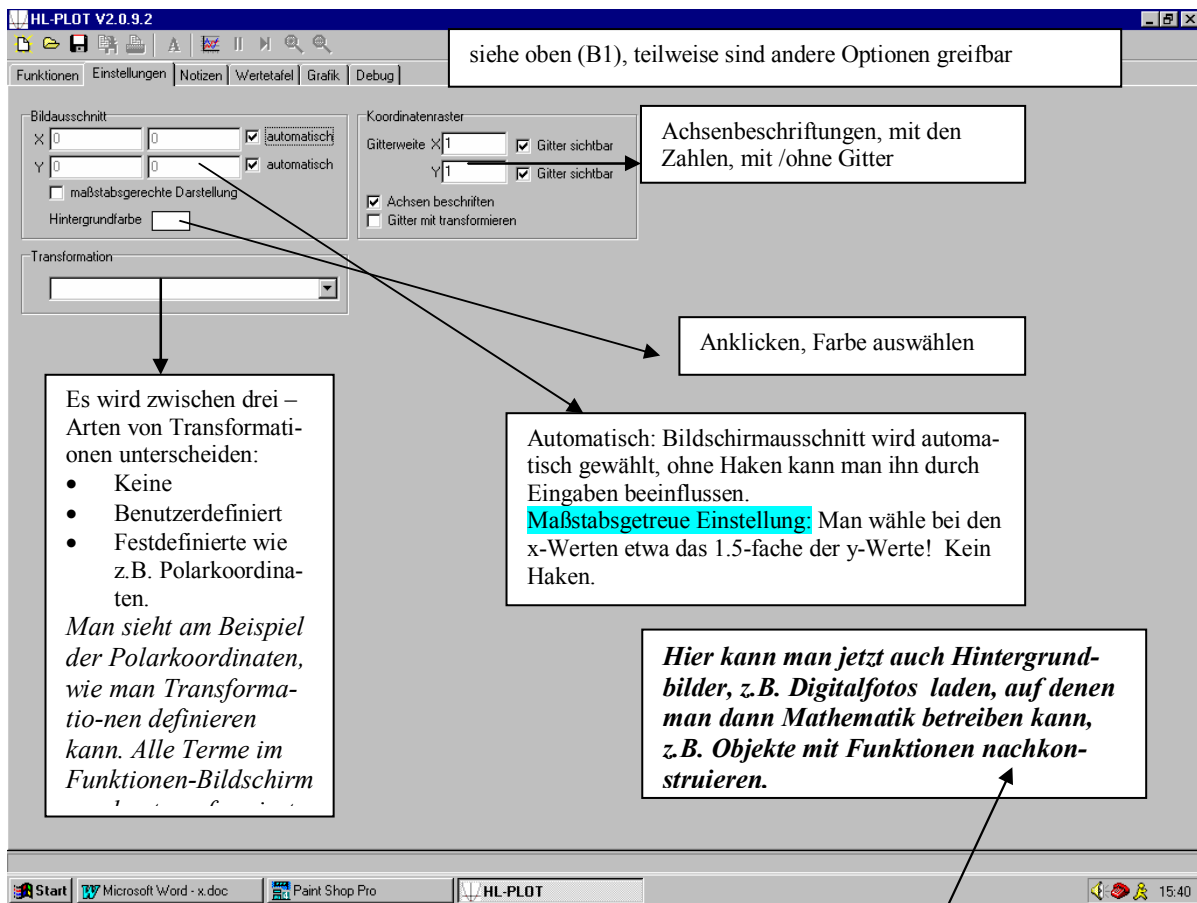


Abb.3a: Der Einstellungen-Bildschirm

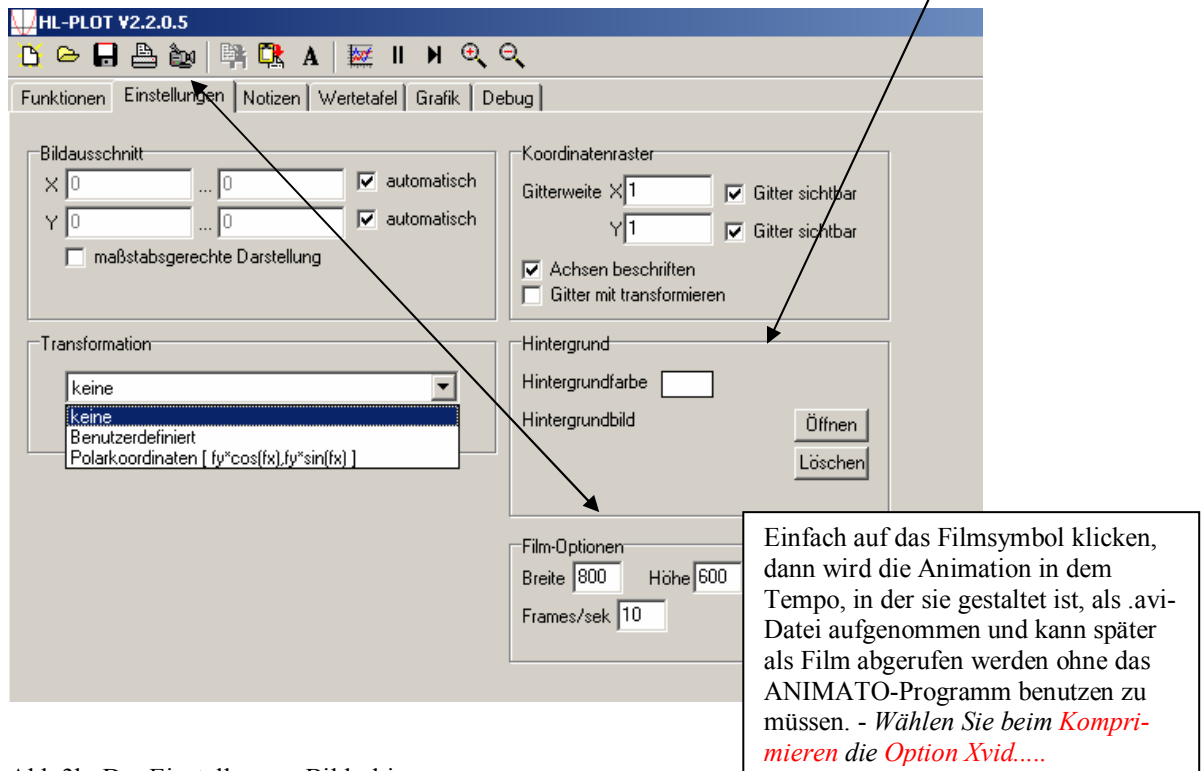


Abb.3b: Der Einstellungen-Bildschirm

(B3) Der Notizen-Bildschirm

In diesem Bildschirm kann man sich Notizen machen. Anwendungsmöglichkeiten sind z.B.:

- Der Lehrer formuliert hier in Hausarbeit eine Aufgabe, die die Schüler dann im Unterricht bearbeiten können.
- Die Schüler dokumentieren hier ihre Arbeit, der Lehrer kann das dann später einsehen.
- In dem Bildschirm kann editiert werden, Schrift kann farbig gestaltet werden usw.
- Der Funktionenbildschirm (nur die Funktionsterme) kann in den Notizen-Bildschirm kopiert werden, ebenso der Wertetafel-Bildschirm
- Die Gestaltungsmöglichkeiten des Notizen-Bildschirms machen ihn auch für Vorträge geeignet.
- Der Bildschirminhalt kann auch in eine Textverarbeitung übernommen werden.
-

(B4) Der Wertetafel-Bildschirm

Hier werden die der Zeichnung zugrundeliegenden *Wertetafeln* gezeigt. Die Wertetafeln beziehen sich immer auf den gerade markierten Animationsschritt. Die Wertetafeln können in die Zwischenablage gelegt werden oder auch ausgedruckt werden.

Die angezeigten Wertetafeln beziehen sich auf den jeweils markierten Animationsschritt.

Hinweis: Sollte einmal eine Wertetafel nur teilweise angezeigt werden, klicken Sie einfach auf irgendeine Stelle des Wertetafel-Bildschirms.

(B5) Der Grafik-Bildschirm

Hier entstehen die Zeichnungen unter Berücksichtigung

- der *mit einer Farbe versehenen Terme* aus dem Funktionsbildschirm,
- der bei den einzelnen Animationsschritten festgelegten Optionen, wie *Definitionsbereiche* für x, t, n bzw. für u und v ,
- der *Geschwindigkeiten* und der *Pausen*,
- der *Einstellungen* auf dem Einstellungen-Bildschirm.

Die Daten der Animato-Projekte (nicht die Grafiken) werden unter dem Namen `name.pl2` gespeichert. Diese Dateien können in eine Textverarbeitung eingefügt werden und dort nach Wunsch bearbeitet werden.

1.3 Zur Verfügung stehende Konstanten, Variablen, Funktionen und Relationen

In den Funktionstermen f_1, f_2, \dots können verwendet werden:

(a) Funktionen / Relationen

Sqr(x) Quadrat	sqrt(x) Quadratwurzel	int(x) Vorkommastelle	frac(x) Nachkommastellen	abs(x) Absolutbetrag	log10(x) Zehnerlogarithmus
Sin(x) asin(x)	cos(x) acos(x)	tan(x) atan(x) Arcustangens		exp(x) Exponential- funktion	ln(x) oder log(x) natürlicher Logarithmus
Random Zufallszahl aus [0,1[„random“ erzeugt an jeder Aufrufstelle jeweils eine andere Zufallszahl			rand Zufallszahl aus [0,1[Wird „rand“ aufgerufen, so bleibt der erzeugte Wert für einen Durchlauf (für ein x aus dem Definitionsbereich)		

<p>Ein Beispiel für die unterschiedliche Bedeutung von „rand“ und „random“ zeigt das Beispielprogramm „Random-Rand-Demo1.pl2“. Starten Sie das Programm und sehen Sie sich die Wertetafeln für f1, f2, f3, f4 an.</p>	<p>durch alle programmierten Funktionsterme und Animationsschritte hindurch gleich. Ein neues x aus D erzeugt dann auch eine neue Zufallszahl.</p>
<p>Zeichnen von Strecken und Streckenzügen Beispiel: f1: 2,3,7,1,5,6,2,3 Dadurch wird ein Streckenzug zwischen den Punkten (2,3), (7,1), (5,6) und (2,3) gezeichnet. Wichtig: Koordinaten können auch durch Funktionsterme ersetzt werden. Daraus ergibt sich eine Fülle neuartiger Möglichkeiten. Beispiel: f1: 2,3,x,5,5,5 erzeugt einen Fächer, ausgehend von (2,3) zu den Punkten (x,4) und dann zu (5,5).</p>	<p>f1, f2, f3, usw. können miteinander verkettet werden. Beispiel: Sei f5: sin(a), sei f1: random. Dann kann man programmieren f6: f5(f1), was gleichbedeutend ist mit sin(random).</p>

(b) Verknüpfungszeichen - Vergleichszeichen

<p>+ - * / sind die üblichen Rechenzeichen</p>	<p>^ Potenzieren</p>	<p>< kleiner, <= > größer, >= = gleich, <> ungleich</p>	<p>& logisches „und“ logisches „oder“</p>
--	--------------------------	---	---

(c) Bedingungen

<p>{ Bedingung B setzen: Term, wenn B wahr : Term, wenn B falsch }, Bedingungen können auch geschachtelt werden. Beispiel: $\{(x < -3) \mid (x > 4) : \text{undef} : x^2\}$ Wenn $x < -3$ oder $x > 4$, dann undefiniert (nichts tun), sonst Parabel $y = x^2$ zeichnen. Weitere Möglichkeit: Bedingung ? Wert von true : Wert, wenn false, Beispiel: $x < 3 ? \text{undef} : x^2$</p>
--

(d) Variablen - Konstanten

<p>x ist die normalerweise verwendete Variable t sollte man verwenden, wenn es um Winkel geht x und t sind aber sonst gleichbedeutend und werden auf der Funktionsseite unten links festgelegt.</p>	<p>n (bzw. a) sollte man verwenden, wenn es beim Einsetzen um natürliche Zahlen geht, etwa bei Folgen, für die festgelegte Schrittweite wählt man dafür den Wert 1. e Eulersche Zahl $e = 2.7182\dots$ pi Kreiszahl $\pi = 3.14159\dots$ undef undefinierter Wert</p>
---	--

(e) Parameter

<p>u v Variablenparameter, für die man Laufbereiche festlegen kann, siehe Funktionenbildschirm.</p>	<p>a (bzw. n) b c d Parameter ohne einen eigenen Laufbereich, für sie kann man Zahlen / Terme oder auch die Variablenparameter u und v oder x,t einsetzen. Man muss stets die Reihenfolge a,b,c,d verwenden.</p>
--	---

(f) Transformationen

f_x ist der x-Wert, f_y ist der y-Wert der gerade betrachteten Funktion,

Beispiel: Wenn in der benutzerdefinierten Transformation geschrieben wird: f_y , f_x , so werden im gesamten Funktionsvorrat x-Wert und y-Wert vertauscht (Spiegelung an der Geraden $y=x$). Ansonsten vergleiche man die vordefinierte Transformation **Po-larkoordinaten**.

(g) Klammern - Schrägstriche

Alle 3 Klammerarten sind gleichbedeutend, also $(, \{, [$ - aber die schließende Klammer muss passen.

Beispiel: $\{[x+3]*(x-3)\}$ ist möglich.

// Einleitung eines Kommentars anschließend an Funktionsdefinition.

2. Besprechung von Beispielen**Beispiel 1 – Parabeln animieren**

Dieses **Animato-Projekt** ist unter dem Namen *D-Parabeln-a-b-c.pl2* gespeichert.

The screenshot shows the HL-PLOT software interface. The title bar reads "HL-PLOT - C:\Programme\HL-Plot 2\Parabeln1-a-b-c.pl2". The menu bar includes "Funktionen", "Einstellungen", "Notizen", "Wertetafel", "Grafik", and "Debug".

Block A and **Block B** are located in the top right corner of the window.

The function list on the left contains:

- f1: $a*(x-b)^2+c$
- f2: $f(1,0,0)$
- f3: $f(1,7,u)$
- f4: $f(1,u,-2)$
- f5: $f(v,7,-2)$
- f6: $f(x,0,0)$
- f7 to f25: empty function slots.

Block C is a box containing the text: "Bereiche der Laufvariablen x (bzw. t) und der Parameter u und v." with an arrow pointing to the parameter settings table.

The parameter settings table (Block D) is:

	Min	Max	Schritt.	Anzahl
x,t	-10	10	0.2	100
u	0	0	0	0
v	0	0	0	0

Block E is a checkbox labeled "Weiterbereich wie vor" which is checked. Below it are "Geschwindigkeit" (20) and "Wartezeit" (0) settings.

The animation control panel (Block F) shows a list of animation steps: (1), (2), (3), and (x,y). Below the list are navigation buttons for back, forward, and stop.

Block G is a box containing the text: "Animationsschritte (1), (2), usw." with an arrow pointing to the animation step list.

The main text area contains the following definitions:

- f1: Allgemeine Form einer Parabel, Laufvariable x, Parameter a, b, c
- f2: Zeichnet die Normalparabel, da nun $f1 = 1*(x-0)^2+0$
- f3: $f1(1,7,u)$, hier ist $a=1$, $b=7$, $c=u$, wobei u von -3 bis 3, Schrittweite 1 läuft (Animationsschritt 2 unten rechts anklicken, dann findet man den Laufbereich für u unten links)

Abbildung 1.4-a: Funktionenbildschirm

Der folgende Text wurde aus dem Notizen-Bildschirm kopiert.

f1: $a \cdot (x-b)^2 + c$ // Die Scheitelpunktform der Parabel wird als Baustein definiert
 f2: f1(1,0,0) // Aufruf des Bausteins mit $a=1$, $b=0$, $c=0$. Das ist die Normalparabel

f3: f1(1,7,u)

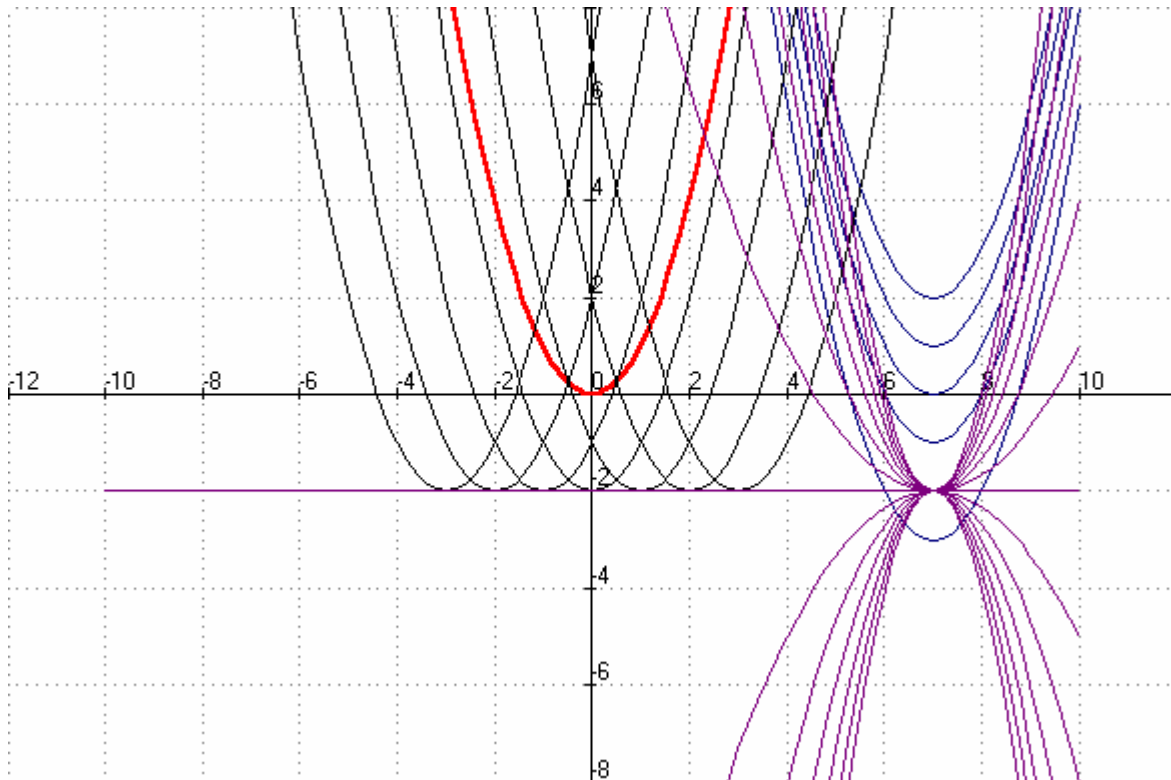
f4: f1(1,v,-2)

f5: f1(v,7,-2)

// Weitere gezielte Bausteinaufrufe, bei denen schrittweise die Auswirkung für die Parameter c , dann b , dann a erforscht werden. Das erfolgt insgesamt in vier Animationschritten.

Ende der Kopie aus dem Notizen-Bildschirm.

Es erfolgt nun die zugehörige Kopie aus dem Grafik-Bildschirm:



Beispiel 2 –Animieren von Landschaften

Die folgende Landschaft wurde von Schülerinnen einer neunten Klasse erstellt. Sie benutzten einige der ihnen bisher bekannten Funktionen und Optionen (Strecken, Kreis, random, usw.) – siehe **Animatoprojekt *D-Vulkan.pl2***.

Das Bild erhalten Sie durch Aufruf der Datei. Wegen der intensiven Farben wird es hier nicht abgedruckt.
 Abb.: Datei ***D-Vulkan.pl2***

Beispiel 3 – Konstruktion der Sinuskurve aus dem Einheitskreis

Idee: Aufbau eines Films zur Erklärung der Entstehung der sin-Kurve aus dem Einheitskreis - so wie man es in manchen Schulbüchern statisch findet.

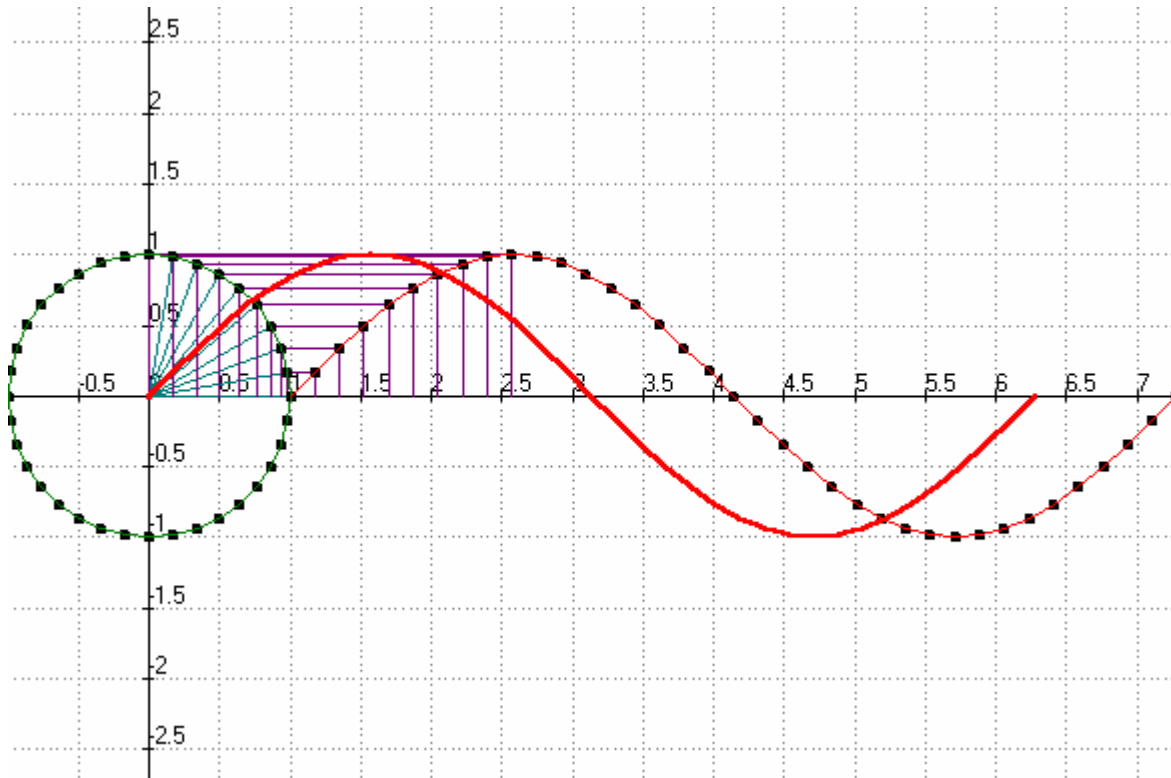
f1 Einheitskreis, x in Bogenmaß

f2 Strecken von $(0,0)$ zum Einheitskreis, Winkelschritte $0.5\pi/5$

f4 Strecken von $(\cos(x),0)$ zum Kreis, also die sin-Werte im E-Kreis

f5 Die (noch verschobene) Sinus-Kurve.

f6 Nachzeichnen der sin-Kurve in richtiger Lage.



Beispiel 4 – Rekursiv definierte Folgen, Teilpunkte auf Dreiecksseiten

Animato-Projekt: *D-Dreiecksteilverhältnisse.pl2*.

TEILPUNKTE, siehe ML 1988, Heft 27, Lehmann: Von den Mittendreiecken zu Teilpunktpolygonen, Seite 13-19,

Rekursive definierte Folgen / Klasse 11, Analysiskurs

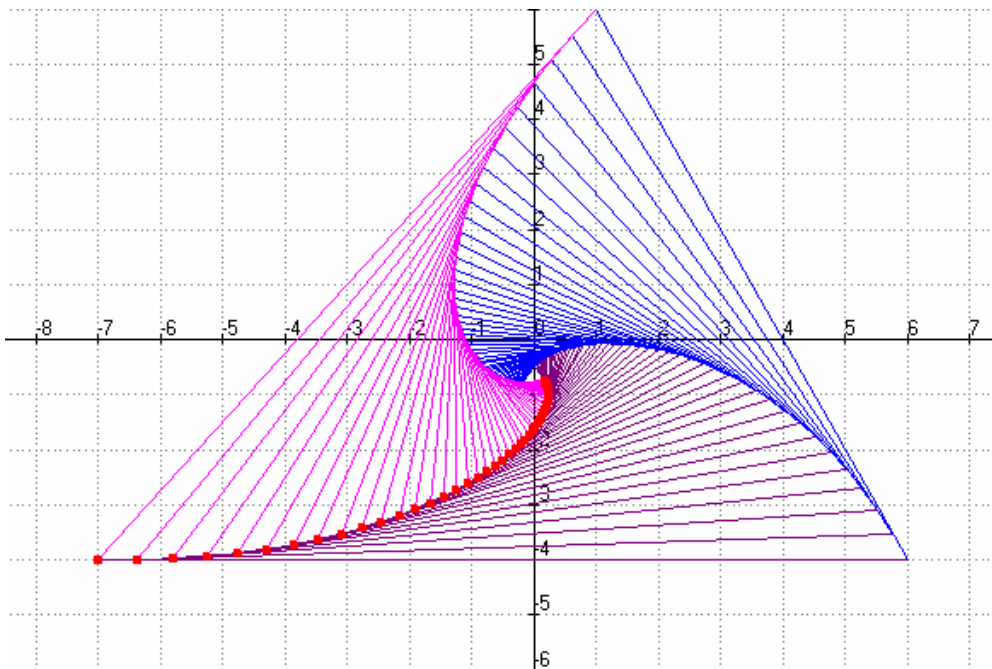
Gegeben ist ein Dreieck $P_1(-7,-4)$, $P_2(6,-4)$, $P_3(1,6)$. Die Dreiecksseiten werden im Verhältnis u geteilt (im Beispiel ist $u=0.05$). Daraus wird ein neues Dreieck gebildet, die Seiten werden wieder mit u geteilt usw.

(für $u=1$ ergeben sich die Mitten, mit u kann nun variiert werden oder auch mit Anzahl der Punkte.)

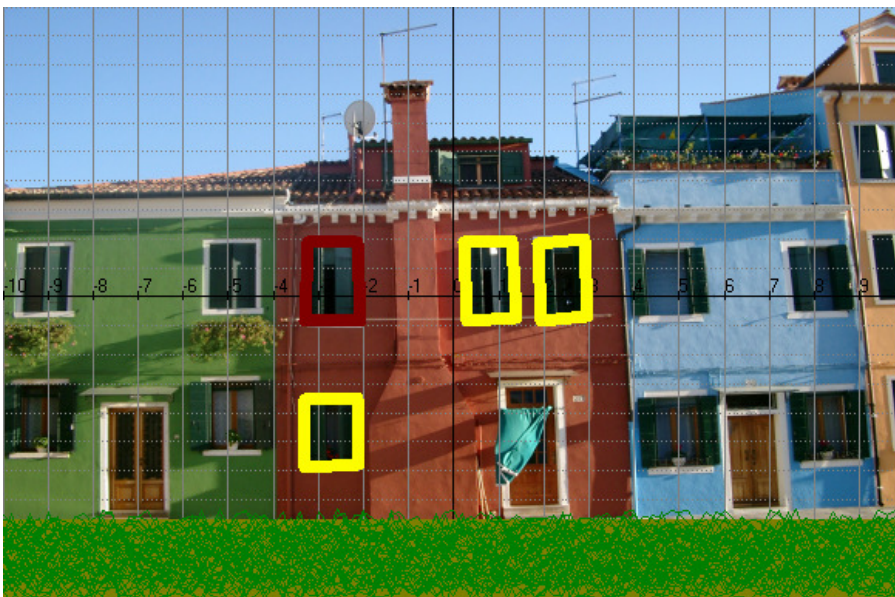
f1 berechnet x_1 , f2 x_2 , f3 x_3 , f4 y_1 , f5 y_2 , f6 y_3

f7,f8,f9 zeichnet das jeweilige Dreieck

$f1: \{n=1:-7:(f1(n-1)+u*f2(n-1))/(1+u)\}$
 $f2: \{n=1:6:(f2(n-1)+u*f3(n-1))/(1+u)\}$
 $f3: \{n=1:1:(f3(n-1)+u*f1(n-1))/(1+u)\}$
 $f4: \{n=1:-4:(f4(n-1)+u*f5(n-1))/(1+u)\}$
 $f5: \{n=1:-4:(f5(n-1)+u*f6(n-1))/(1+u)\}$
 $f6: \{n=1:6:(f6(n-1)+u*f4(n-1))/(1+u)\}$
 $f7: f1(n),f4(n),f2(n),f5(n)$
 $f8: f2(n),f5(n),f3(n),f6(n)$
 $f9: f3(n),f6(n),f1(n),f4(n)$
 $f10: f1(n),f4(n)$



Beispiel 5 – Mathematik auf einem Hintergrundbild



In den Hintergrund wurde ein Bild gelegt (Häuser in Burano, Insel bei Venedig). Auf diesem Hintergrund wurden u.a. Strecken als Fensterbegrenzungen eingetragen und ein Rasen mit Zufallszahlen erstellt.

Im Notizblock wurde notiert:

Auf einem Bild mathematische Spuren legen

Spuren legen, hier auf dem Hintergrund eines Bildes von der Insel bei Venedig

Kompetenzen KI.7 und KI.8

- Im Kosy arbeiten, dabei durch Ablesen von Punkten runden von Zahlen üben (Fenster)
- Punkte identifizieren
- Strecken zeichnen (Fenster)
- Geraden zeichnen, mit Parameter zur Verschiebung (Pflaster), Klasse 8
- Zufallszahlen benutzen (Rasen), Klasse 8

Entwurf Leh 1.12.06

Die Funktionsseite:

f1: x
f2: -3.25,1.90,-2.14,1.90,-2.07,-0.82,-3.31,-0.82,-3.25,1.90
f3: -10.4+0x+u
f4: -10.6+random+u
f5: 0.22,1.91,1.28,1.94,1.40,-0.74,0.28,-0.8,0.22,1.91
f6: 1.85,1.84,2.91,2.00,2.95,-0.64,1.95,-0.80,1.85,1.84
f7: -3.3,-3.54,-2.14,-3.51,-2.09,-5.77,-3.29,-5.9,-3.3,-3.54
f8: -3.9,2.41,-3.92,-7.56,3.9,-7.4,3.58,2.89,-3.9,2.41
f9: 1.02,-3.06,2.26,-2.94,2.4,-7.31,1.16,-7.34,1.02,-3.06

Ende der Dokumentation, Stand 24. Juni.2008

Sachverzeichnis

Sachverzeichnis		Sachverzeichnis	
Abbilden mit (3,3)-Matrizen	61	Landschaft erzeugen, Terme	127
Abbilden mit CAS	37	Landschaft	33
Abbilden mit stochastischer Matrix	83ff	Landschaften transformieren	128
Abbildungen umkehren	51f	Lernen von POVRAY	111
Abbildungsfolgen	77f	Lineare Algebra mit Matrizen	5
Abbildungsmatrix R_3, R_2	54f	Matrixabbildung in POVRAY	113
Abbildungsmatrizen, Typ (2,2)	35	Matrixpotenzen	83ff
Abstände, Winkel	155	Modellierung eines Kunstwerkes	134f
Achsen Spiegelung	39, 46	Module, Bausteine	109f, 141f
Analytische Geometrie in Schule	18f	Muster transformieren	65
ANIMATO, Beispiele	169	Objekte der Analyt. Geometrie	7ff
ANIMATO, Dokumentation	162ff	Parabolischer Zylinder	107
ANIMATO, Grundfolie für Schrägbilder	58	Parameterdarstellungen	20ff
ANIMATO-Würfel	139	Polarkoordinaten	69ff
Bausteine, Module	109f, 141f	POVRAY -Kugeln	109
Bausteine, selbstdefinierte	148f	Programmieren in POVRAY	109f
Bilder auf den Kopf stellen	31	Projekt "Ebenen, Ebenenausschnitte"	130f
Buch aufblättern, Ebenenbüschel	159	Projekt "Kreise", viele durch einen Punkt	97ff
Büschel	45	Projekt "Kugeln"	102ff
CAS-Hilfen für analytische Geometrie	141ff	Projekt "Landschaften abbilden"	126f
CD's	4	Projekt "Logos"	90ff
Computergrafik	27ff	Projekt "Netze, Maschen, Muster"	115ff
Constructive Solid Geometry, CSG	27, 28	Projekt "Teilverhältnisse"	119
Drehmatrizen	42f	Projekt "Würfelwelt"	137f
Drehstreckungen, Folgen	78	Projekte zur analytischen Geometrie	89ff
Drehungen	42f	Punkt auf Gerade	149
Ebenen in Derive	130	Quader, Schrägbild	54
Ebenengleichungsformen	144	Quader-Schrägbild transformieren	67
Einheitskreis	25	Rekursion	119
Elliptischer Kegel	107	Schiefer Turm von Frankfurt	68f
Filme, avi	166	Schnitt von Ebenen	132, 146, 152
Geraden, Ebenen	142	Schnittmengen	145f
Geradengleichungsformen	143	Schrägbilder bewegen	60f
Gleichungsformen mit CAS	152	Schrägbilder	30, 54f
Graphenwelt analyt. Geometrie	24f	Skalierung	41
Grundlagen für Kurse	5	Smily-Folgen	77
Hintergrundbilder	166, 172	Spiegelmatrix	46f
Inhaltsverzeichnis	3	Spiegeln einer Landschaft	33
Inverse Matrizen	52	Spiegeln mit Matrizen	34f
Konzept	6	Strukturierung von Ebenen	133ff
Koordinatensysteme	63f, 105	Toyota-Logo	92
Koordinatentransformationen	63f	Transformationen bei ANIMATO	64f
Kreis \rightarrow Banane	69ff	Translation	37
Kreis \rightarrow Ellipse	99	Verschiebung	37
Kreis \rightarrow Muster	116f	Viele Punkte, viele Geraden	158
Kugel am Spreuefer, Modellierung	103	Winkel, Abstände	155
Kugelgleichung	105	Zentrische Streckung	40
Kugeln als Weihnachtsdekoration	103	Zylinder transformieren	67
Kugeln schneiden	106	Zylinder	106
Lagerhaus in Barcelona	133f		