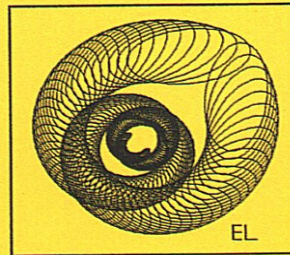


Nachhaltige CAS-Konzepte für den Unterricht

Didaktik und Methodik
des Mathematikunterrichts mit Computeralgebra



Für CAS-Anfänger, CAS-Fortgeschrittene,
Referenten, Didaktiker

Eberhard Lehmann
Leh-Soft, www.snafu.de/~mirza

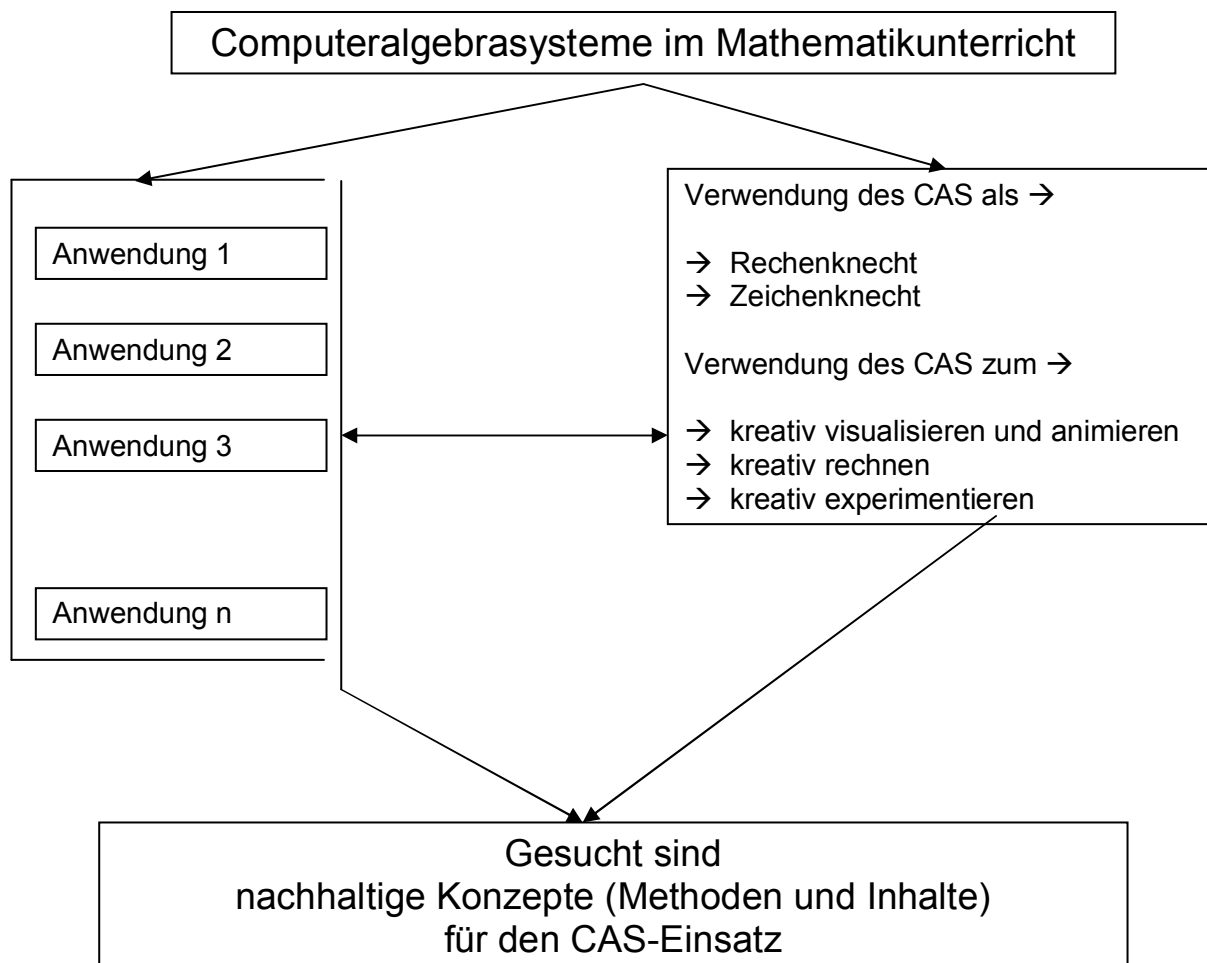
Berlin August 2007

Leh-Soft, Änderung des Namens der Homepage, jetzt
<http://home.snafu.de/mirza>

Vorwort

Der Einsatz von Computeralgebrasystemen (CAS) hat in den letzten Jahren so sehr an Verbreitung gewonnen, dass nun bereits etliche Schulbücher erschienen sind (Sek.1 und Sek.2), in denen der CAS-Einsatz berücksichtigt wird – wenn auch noch nicht durchgehend und häufig zu sehr eingeschränkt auf die Funktion des Computers als Rechenknecht oder Zeichenknecht. Äußerlich erkennbar sind diese Bemühungen u.a. an den Bildern von Computerrechnungen oder –zeichnungen.

So ist es an der Zeit, dem Computereinsatz über die praktizierten einzelnen Einsätze hinaus einen größeren Rahmen zu geben unter dem der Einsatz erfolgt. Die zahlreichen bereits veröffentlichten Unterrichtssequenzen sollten unter einem gemeinsamen Dach gesehen werden.



Dabei geht es insbesondere darum, langfristige und nachhaltige Konzepte des CE zu benennen, was bisher kaum in gesammelter Form geschehen ist. Inzwischen liegen jedoch genügend Detailerfahrungen zum CE vor, um daraus auch Schlüsse für die Formulierung langfristiger Konzepte und für den Erwerb entsprechender Kompetenzen zu ziehen.

Die immer wieder gestellten Fragen und diskutierten Probleme bei Fortbildungen zum Computereinsatz im MU ranken sich um die grundlegende Aussage:

Weniger sich ständig wiederholende Routine-Rechnungen und Routine-Zeichnungen von Hand – dafür mehr Rechnung und Visualisierung durch den Computer und besseres Verstehen der mathematischen Abläufe und Zusammenhänge.

Mit dem Buch möchte ich meine ca. dreißigjährigen Unterrichtserfahrungen im Computereinsatz im Mathematikunterricht in den Klassenstufen 7-13 und umfangreiche Erfahrungen aus der Lehrerfortbildung weitergeben. Im Mittelpunkt wird der Unterricht mit Computeralgeb-rasystemen (CAS) stehen. Dabei geht es mir insbesondere um zwei Ziele:

a) Allen bereits mit CAS arbeitenden Lehrpersonen Erfolg sollen versprechende langfristige und durchgehend zu verfolgende Konzepte des Computereinsatzes im MU an die Hand gegeben werden und

b) CAS-Einsteiger sollen vom Mehrwert des Computereinsatzes im MU überzeugt werden und dabei auch Hilfen für den Einstieg in den Mathematikunterricht mit Computern erhalten.

Für die CAS-Einsteiger wird schon hier ausdrücklich auf Kapitel 2.4 verwiesen!

„Die in 2.3 vorgestellten Konzepte werden CAS-AnfängerInnen selbstverständlich nicht alle sofort beachten können. Die gemeinsame Verfolgung der Konzepte im Unterricht wird erst in einem weit fortgeschrittenen Unterricht mit Computern möglich.“

Aus diesen Ansätzen heraus ist ein umfangreiches aktuelles Werk entstanden - immer orientiert an einer erfolgreichen Unterrichtspraxis. Etliche der genannten Unterrichtsinhalte und der Tipps für den Unterricht sind auch ohne Computereinsatz nützlich, aber meistens bringt dieser überzeugende Vorteile. Die meisten Inhalte und Tipps (teilweise sind es auch ungewöhnliche und innovative Ideen) sind jedoch nur mit Computereinsatz zu verwirklichen.

Zur weiteren Information bzgl. der Buchinhalte verweise ich auf das ausführliche Inhaltsverzeichnis.

Besonders in den Abbildungen zeigt sich, dass unterschiedliche Software verwendet wird. Diese spiegelt einen Teil meiner eigenen Unterrichtserfahrungen wider: TI-92, Voyage 200, TI-Nspire (PC), Derive, Animato. **Dabei wird deutlich, dass viele Bearbeitungen auf verschiedenen Geräten in ähnlicher Weise ablaufen können. Entscheidend sind die Ideen!** Es gibt aber auch Bearbeitungen, die zumindest ein Teil von den Fähigkeiten des jeweiligen Rechners abhängig sind.

Ich hoffe, dass möglichst viele Mathematik-LehrerInnen den erheblichen Mehrwert des Computereinsatzes für einen zeitgemäßen Unterricht erkennen und im Interesse ihrer SchülerInnen nutzen!

Der Adressatenkreis des Buches umfasst

CAS-Anfänger, CAS-Fortgeschrittene, Referenten, Didaktiker und sonstige CAS-Interessierte

Übrigens - CAS-EinsteigerInnen

Am Ende des Inhaltsverzeichnisses finden sie einen „schnellen Weg“ zum Einlesen in das Buch und der ihre ersten Stunden und Wochen begleitet und ihre eventuellen Sorgen verringert.

Dr. Eberhard Lehmann, Berlin im August 2007

E-Mail mirza@snaflu.de, Homepage www.snaflu.de/~mirza

Hinweis: Ich produziere und vertreibe dieses Buch sozusagen „auf eigene Faust“, weil es mir dadurch möglich ist, Gedanken, Konzepte, Fachinhalte und Methoden sehr individuell und völlig unabhängig von den Wünschen irgendeines Verlages zu formulieren und zusammenzustellen. So erklärt sich u.a. auch der große Umfang des Buches, der natürlich seinen Preis hat. Das gelegentlich verwendete Animationsprogramm ANIMATO ist bei

mir zusammen mit vielen Unterrichts Anwendungen zu einem sehr günstigen Preis erhältlich, siehe meine Homepage.

Nachhaltige CAS-Konzepte für den Unterricht

CAS-Methoden - Wie unterrichtet man mit CAS?

Vorwort	1
Inhaltsverzeichnis	3
0. Szenarien eines modernen Mathematikunterrichts	6
1. Der Start in das CAS	10
- Der Anfang ist nicht so schwer wie befürchtet -	
1.1 Einführung in die Arbeit mit Computeralgebra	10
1.2 Einführungsstunden	11
1.2.1 Geradenmuster erzeugen – CAS-Einführung in der Sek.1 – Voyage200	12
1.2.2 Einführung mit einem Kunstbild – Sekundarstufe 2 – DERIVE	14
1.2.3 Einführung mit einem Kunstbild – Sekundarstufe 2 – TI-Nspire	16
1.3 Weitere Stunden mit CAS-Einsatz	18
1.3.1 Unterrichtsstunde im Grundkurs - viele Kreise	18
1.3.2 Unterrichtssequenz: Näherungsweise Zeichnung von Ableitungsfunktionen mit dem Taschencomputer (Analysis-GK und -LK)	21
1.3.3 Unterrichtsstunde zum Thema „White Box – Black Box“, Sekundarstufe 1	24
1.4 Die zehn größten Fehler beim Unterricht mit Computern	26
1.5 Die zehn größten Erfolgserlebnisse beim Unterricht mit Computern	27
2. CAS-Konzepte	28
- Langfristig wirkende Konzepte für den Computereinsatz im Mathematikunterricht -	
2.1 Die Voraussetzungen	28
2.2 Was SchülerInnen sagen	29
2.3 Langfristige Konzepte für den Mathematikunterricht mit Computereinsatz (überblick - Details zu einigen Konzepten in nachfolgenden Kapiteln)	31
2.4 Wachsende Kompetenz der Lehrperson	42
3. Hand contra CAS	44
- Wieviel mit dem CAS – wie viel noch von Hand? -	
3.1 Handwerkliche Fähigkeiten	44
3.2 White-Box und Black-Box	48
3.3 Gleichungen – White-Box – Black-Box	54
3.4 Andere Kalküle	60
3.5 CAS als Knecht - Rechen-Intensives und Zeichen-Intensives	61
4. Visualisieren und Animieren	66
- Darstellungskompetenz – Visualisieren, Entwerfen, Animieren mit dem Computer -	
4.1 Visualisieren	66
4.2 Animation, Weiterentwicklung von Visualisierungen	69
4.3 Eine automatische graphische Kurvendiskussion	71
4.4 Abbildungsgeometrie – ein weites Feld für Visualisierungen	73
4.4.1 Hintereinanderausführung von Abbildungen	74
4.4.2 Achsenspiegelung animieren	78

5. Families	83
- Zusammengehörendes -	
5.1 Mit dem Computer Kurvenscharen erschließen	83
5.2 Families bilden, Kurvenchaos und Anderes ordnen	92
5.3 Vergleichen von Kurven, Kurvenscharen und Tabellen	101
6. Modules (Bausteine) - modulare Kompetenzen	107
- Rund um das Bausteindreieck -	
6.1 Das Modulkonzept – Bausteindreieck	107
6.2 Ein CAS-Abstandsbaustein in Klasse 9 – Stundenentwurf	113
6.3 Modellierung eines Abstandsproblems im Leistungskurs (Projekt)	116
6.4 Programmieren im CAS – u.a. mit dem Beispiel „Kaufverhalten“	120
6.5 Bausteinkisten ersparen das Programmieren	130
7. CAS-Projekte - Modellieren mit CAS-Hilfe	133
- Jetzt kann es auch komplex sein -	
7.1 Kompetenzerwerb bei Projekten – CAS-Projekte	133
7.2 Firmen-Logos – Modellieren mit den Graphen von Funktionstermen	138
7.3 Eine mathematische Exkursion im Garten	142
7.4 CAS-Projekt – der Baustein Trap(a,b,h)	147
7.5 Unterrichtseinheit - Maschinenüberwachung modellieren	153
8. Mathematik mit und auf Bildern	163
- Auf Fotosafari -	
8.1 Grundlagen	163
8.2 Mathematische Objekte entdecken und markieren	165
8.3 Modellieren von Funktionen (Relationen) durch Rekonstruktion auf einem mathematischen Hintergrundbild	166
8.4 Die Reichstagskuppel in Berlin – Mathematik, Architektur	167
8.5 Eine Klausuraufgabe zur Mathematik auf Bildern – Kirchenornament	168
8.6 Einige attraktive Bilder zum Analysieren und Bearbeiten	170
8.7 Weitere Bilder-Aufgaben für den Unterricht	171
9. Das CAS macht es möglich	172
- Mehr als bisher -	
9.1 Neue Sichtweisen auf Lehrplaninhalte	172
9.2 Gleichartige Abläufe zusammenfassen	172
9.3 Mit dem CAS experimentieren lassen – wie geht das?	176
9.3.1 Experimente mit Geraden	176
9.3.2 Gut geeignet für Entdeckungen - die Matrix $A_{(2,2)} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$	177
9.3.3 Magische Quadrate – Forschen, Entdecken, Beweisen	179
9.3.4 Weitere Entdeckungsreisen (Primzahlen, Kacheln)	184
9.4 Randthemen des Lehrplans gewinnen an Bedeutung	186
9.4.1 Parameterdarstellungen [x(t), y(t)]	186
9.4.2 Matrizen mit CAS	197
9.4.2.1 Lineare Algebra und Analytische Geometrie – ein Kurskonzept mit Matrizen und CAS-Computereinsatz	197
9.4.2.2 Dürerquadrate – eine Beispielaufgabe mit CAS-Einsatz	200
9.4.2.3 Abbildungsgeometrie mit Matrizen – eine Grundlage der Computergrafik	202

10. Erstellen von CAS-Aufgaben – Klassenarbeiten / Klausuren / Hausaufgaben	204
- Aufgaben konstruieren leicht gemacht -	
10.1 Klassenarbeiten und Klausuren mit CAS – 2 Beispiele	204
10.1.1 Eine CAS-Klassenarbeit für Klasse 8/9 – mit Lösungen	204
10.1.2 Eine ausführlich kommentierte Klausuraufgabe	208
- mit oder ohne Computereinsatz	
10.2 Tipps für das Erstellen von Klassenarbeiten und Klausuren mit CAS – auch nützlich für den Unterricht	211
10.3 Zur Zeiteinschätzung bei der Bearbeitung von CAS-Aufgaben in Abitur- und anderen Klausuren und in Klassenarbeiten	215
10.4 Hausaufgaben mit CAS – CAS-Arbeitsbögen	216
10.5 Von der Vielfalt der Lösungen profitieren	220
11. Dokumentation von CAS-Aufgabenlösungen	223
- Ein heißes Thema und sehr relevant -	
11.1 Dokumentation einer CAS-Klausuraufgabe	223
11.2 Dokumentieren mit Hilfe von Rechnerbefehlen oder nicht?	
11.3 Empfehlungen zur Dokumentation von CAS-Arbeit	225
12. Zentralabitur mit CAS	227
- Nicht einschüchtern lassen -	
12.1 Ein Vortrag: Im Bannkreis des Mathematik-Zentralabiturs	121
- Wie man dennoch interessant unterrichten kann -	
12.2 CAS im mündlichen Abitur	238
13. CAS-Werkzeugkompetenz	242
- Allgemeine und themenspezifische Kompetenzen -	
14. Empfehlungen für ein CAS-Schulcurriculum	251
- Hier kann man selbst gestalten –	
Sammlung von CAS-Beispielen in diesem Buch	254
Sachverzeichnis	257
Literaturreklame	260

Aufgrund der überall verteilten Beispiele ist das Buch auch eine kleine Aufgabensammlung für den Unterricht mit CAS. Die Beispielsammlung ermöglicht ein leichtes Finden und Einordnen der Aufgaben.

Ein gut begehbarer Pfad für CAS-EinsteigerInnen

1.1 → 1.2.1 → 1.4 → 1.5 → 2.4 → 2.3 → 4.1 →

0. Szenarien eines modernen Mathematikunterrichts

Wie jeder Unterricht entwickelt sich auch der Mathematikunterricht aus einer Fülle von Bedingungen. Die Komplexität konzeptioneller Überlegungen zu diesem Bedingungsfeld wird an den nun folgenden Überblicksdarstellungen deutlich.

Die Abbildungen 0.a-c zeigen zahlreiche zu beachtende Aspekte:

- Fachinhalte und Fachmethoden,
- Aufgabekultur,
- Unterrichtskultur,
- zu erwerbende Kompetenzen von LehrerInnen und SchülerInnen,
- Medien und ihre Einsatzformen (z. B. als Demonstrationsmedium),
- sonstige Bedingungen (z. B. organisatorische).

Leitideen	Allgemeine mathematisch Kompetenzen	Anforderungsbereiche
L1 Zahl	K1 Mathematisch argumentieren	AI Reproduzieren
L2 Messen	K2 Probleme mathematisch lösen	AII Zusammenhänge herstellen
L3 Raum und Form	K3 Mathematik modellieren	AIII Verallgemeinern und Reflektieren
L4 Funktionaler Zusammenhang	K4 Mathematische Darstellungen verwenden	
L5 Daten und Zufall	K5 Mit symbolischen, formalen und technischen Elementen der Mathematik umgehen	
	K6 Kommunizieren	

Abb. 0.a: Leitideen, allgemeine mathematische Kompetenzen

Unter Berücksichtigung all dieser Aspekte entstehen diverse Unterrichtsszenarien.

Ein anspruchsvolles Szenarium ergibt sich beispielsweise aus der Vernetzung von mathematischen Inhalten und Methoden

- mit komplexen und offenen Problemstellungen
- in Form eines Projektunterrichts,
- unter Verwendung neuer Medien, insbesondere im Rahmen eines experimentellen Computereinsatzes, z.B. mit einem CAS.
- mit informatischen Inhalten und Methoden.

Die Vielfalt der Szenarien und der sich ergebenden Konzepte kann in den folgenden Kapiteln nur für einige Vernetzungen verdeutlicht werden.

Dabei wird der Schwerpunkt auf der Konzeption eines Mathematikunterrichts liegen, der selbstverständlich, aber in sinnvoller Weise den Computer einsetzt und in der Regel von offenen Aufgabenstellungen und offenen Unterrichtsformen ausgeht.

Für derartige Konstellationen werden viele Beispiele aus der Unterrichtspraxis und für die Unterrichtspraxis vorgestellt. Die Abbildungen 0.b und 0.c bieten einen Überblick über zu berücksichtigende Themen und mögliche inhaltliche Verknüpfungen. Sie bilden damit auch die Grundlage für die in dem Buch dokumentierten konkreten und detaillierten Ausführungen.

Der Verlust einiger bisheriger Unterrichtsgewohnheiten

Angesichts der Fülle der sich aus den Abbildungen ergebenden Möglichkeiten für die Gestaltung eines modernen Mathematikunterrichts sollten Hindernisse und Hemmnisse nicht vergessen werden! Sie betreffen in starkem Maße die unterrichtende Lehrperson, aber auch die SchülerInnen.

- Der Lehrer kann nicht mehr wie bisher unterrichten!
- Bislang gewohnte und geübte grundlegende Fertigkeiten gehen teilweise verloren.
- Es besteht die Gefahr, die mathematische Struktur der bisherigen Lehrgänge zu verlieren.
- Auch die bisher gewohnten Unterrichtsziele werden sich zugunsten anderer/weiterer Ziele ändern.
- Die Komplexität des Unterrichts wird sich erheblich vergrößern.
- Form und Inhalt von Lernzielüberprüfungen ändern sich zugunsten einer größeren Vielfalt.
- Der Lehrer muss sich und seinen Schülern neue Arbeitsweisen und ein neues Rollenverständnis vermitteln.
- Gewohnte Formen der Unterrichtsvorbereitung können nicht mehr angewandt werden.

Damit erlebt der Mathematiklehrer seit einiger Zeit dramatische Veränderungen seines Arbeitsfeldes, Veränderungen, die sich angesichts der verbreiteten Verfügbarkeit von Computern nicht aufhalten lassen.

So bleibt den Lehrern kaum etwas übrig, als sich auf die neuen Gegebenheiten einzustellen durch

- aktive Teilnahme an Fortbildungsveranstaltungen,
- Kooperation im Fachbereich Mathematik
- Nutzen der vielfältigen konkreten Unterrichtsbeschreibungen in Büchern und Fachzeitschriften,
- Nutzen der Angebote des Internet,
- Umstellen ihrer Lehrerrolle,
- Anerkennung und Nutzung der Schülerkompetenzen, insbesondere über neue Medien,
- aber auch Vermeiden von Gefahren der neuen Entwicklungen, wie beispielsweise die einseitige Betonung nur neuerer Unterrichts- oder Aufgabenformen und damit etwa Vernachlässigung des Übens, Faktenwissens und mathematischer Hintergründe.

Viele der genannten Aspekte wirken auch auf die SchülerInnen und führen bei diesen zu veränderten Vorgehens- und Verhaltensweisen.

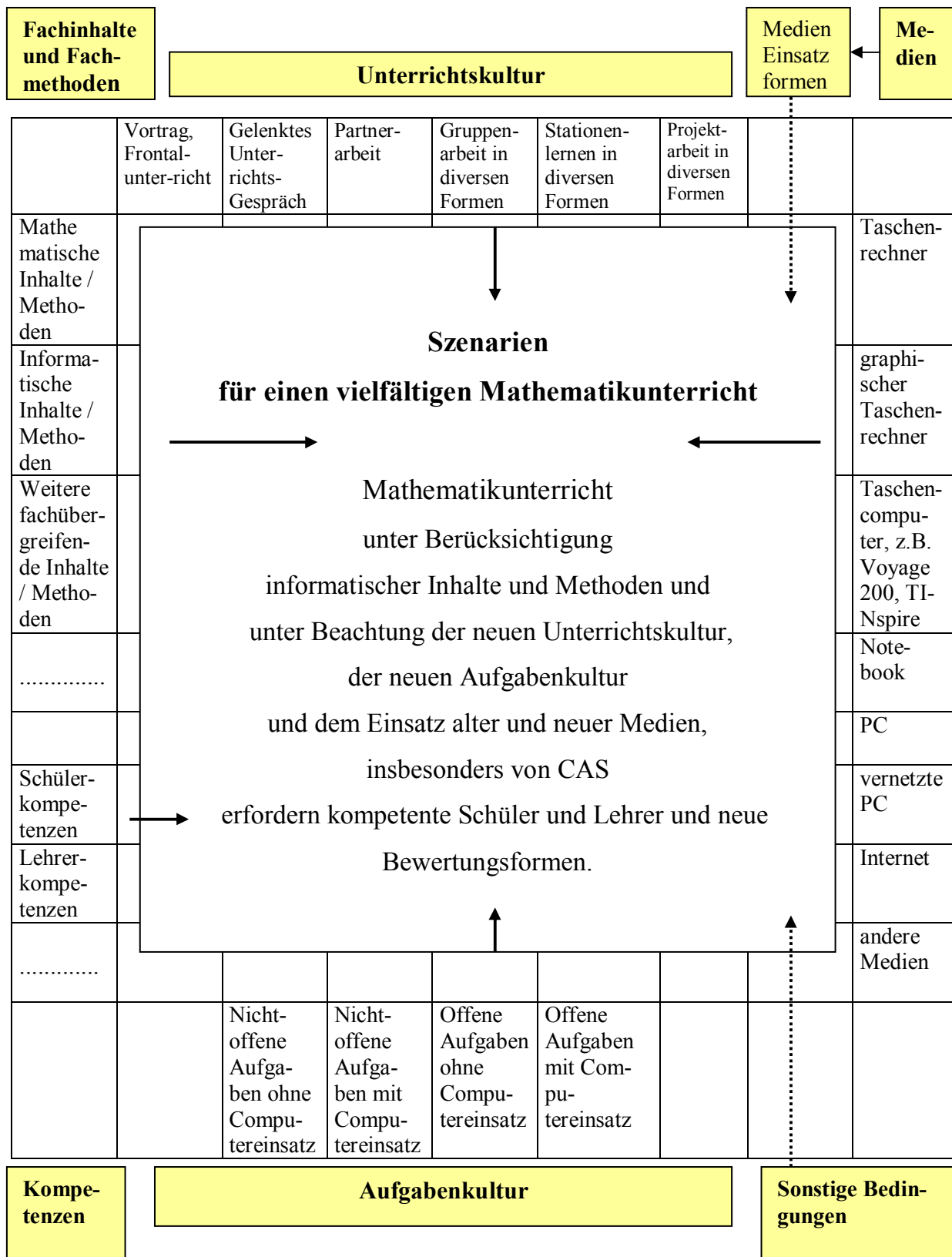
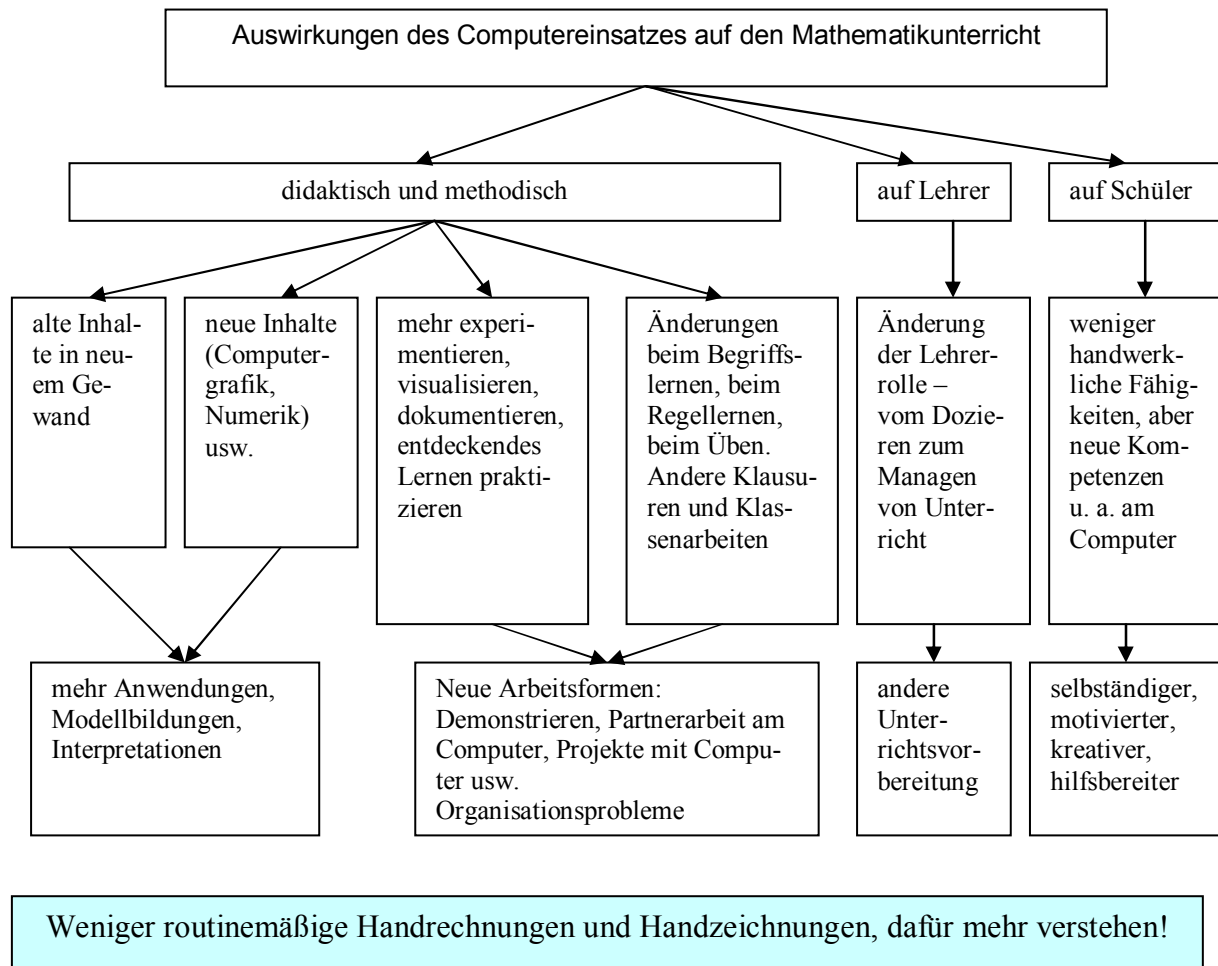


Abb. 0.b : Mathematikunterricht – wer die Wahl hat, hat die Qual

Die bisherigen Erfahrungen,

- dokumentiert in vielen einschlägigen Büchern und Fachzeitschriften,
- erprobt im Unterricht,
- diskutiert in Vorträgen und Fortbildungsveranstaltungen,

haben gezeigt, dass die Auswirkungen des Computereinsatzes auf den Mathematikunterricht erheblich sind. Abbildung 0.c vermittelt, in welchem Umfang das geschieht.



Computereinsatz im Mathematikunterricht bringt erhebliche didaktisch-methodische Bereicherungen und führt zu einer neuen Lehrer- und Schülerrolle.

Computereinsatz muss aber immer daran gemessen werden, ob er in der aktuellen Situation zu einer Qualitätssteigerung des Unterrichts führt.

Abb. 0.c: Auswirkungen des Computereinsatzes im Mathematikunterricht

1. Einführung in die Arbeit mit Computeralgebra – der Anfang ist nicht so schwer, wie befürchtet

Häufig wird von Lehrern die Meinung geäußert, dass der Einstieg mit einer Lerngruppe in die Arbeit mit dem Computer schwierig und zeitaufwendig ist. Das ist in der Regel jedoch nicht der Fall.

Zunächst haben sie die Neugier der Schüler auf ihrer Seite – diese gilt es in die richtigen Bahnen zu lenken. Was man allerdings dabei beachten sollte, zeigen ihnen die „Tipps und Tricks“ in Kapitel 1.1. Danach finden sie in Kapitel 1.2 gleich zwei mögliche erprobte Einstiege, nach deren Muster man letztlich in fast jeder Phase des gerade aktuellen Mathematikunterrichts mit dem erstmaligen Rechnereinsatz beginnen kann. Selbstverständlich ist ein solcher Einstieg immer von den unterschiedlichen fachlichen Voraussetzungen der Lerngruppen abhängig, wie auch von den persönlichen Vorkenntnissen in der Computernutzung der einzelnen Schüler.

**Ein Grundprinzip von Anfang an und immer wieder:
Nutzen sie die schon vorhandenen Computer-Kompetenzen einzelner Schüler!**

1.1 Einige Tipps und Tricks für die ersten Stunden mit dem CAS

Diese Tipps geben Hinweise auch für umfangreiche Lerngruppen aus der Sekundarstufe 1. Selbstverständlich macht es einen (kleinen) Unterschied, ob sie ein PC-Programm, einen Taschencomputer (TC) oder einen graphischen Taschenrechner (GTR, ohne CAS) einführen.

- Versuchen sie, eine **sehr große Lerngruppe** zu teilen und den Einstieg mit jeder Gruppe einzeln durchzuführen. – So sparen sie Kraft, die Schüler haben mehr davon und können individueller betreut werden.
- Wenn mit dem PC gearbeitet wird, ist es oft besser zwei Schüler an ein Gerät zu setzen (am Taschencomputer ist das wegen dessen Größe nicht so sehr zu empfehlen). Jeder kann dann zur Arbeit beitragen und Ideen einbringen. Achten Sie dann aber auf Schülerwechsel an der Tastatur.
- Stellen sie anfangs ganz gezielte, wenige **Aufgaben**, z.B. auf einem kleinen Arbeitsbogen. Je mehr Aufgaben, desto mehr vergrößern sich die Bearbeitungsunterschiede.– Unten finden sie aber auch ein Beispiel für einen offenen Einstieg (Kapitel 1.2.2, 1.2.3).
- Versuchen sie also nie, den Rechner mit all seinen Leistungen zu erklären, lassen sie die Schüler anfangs auf keinen Fall **herumprobieren**. Zumindest in kurzen Phasen ist die Steuerung durch den Lehrer unerlässlich.
- Arbeit am Computer ist manchmal (besonders anfangs) auch: **Demonstrieren** (über einen Beamer oder über ein OH-Display) und nachmachen lassen.
- Lassen sie die besprochenen **Rechnerfunktionen** am Stundenende von den Schülern zusammenstellen. Diese und die grundlegendsten **Bedienungshinweise** können auch auf einem Extrablatt zusammengestellt werden.
- Arbeiten Sie **nicht die ganze Stunde mit dem Computer (meine Empfehlung: höchstens 25 Minuten)**. Reflektieren sie lieber mit den Schülern was geschehen ist. So vermeiden sie, dass sich die Leistungsschere zwischen den Schülerfähigkeiten am Gerät sofort öffnet.
- Lassen sie grundlegende Bedienungshinweise im Heft notieren, z.B. in einem Rahmen.

- **Laufen sie nicht gleich zu jedem Schüler**, der sie ruft. Verweisen sie z. B. auf (kompetente) Mitschüler.
- Setzen sie kompetente S als „**Hilfslehrer**“ ein, indem sie sie an andere Computer-Arbeitsstellen schicken.

Wenn sie schon etwas länger mit dem Computer arbeiten und schon längere Computerphasen durchführen:

- **Unterbrechen** sie in nicht zu großen Abständen die Arbeit am Computer zum Sammeln von Ergebnissen und zum Fragen nach Problemen bei der Rechnerarbeit.
- Eine gute Frage ist deshalb stets: Welche **Probleme** hast du bei der Arbeit **gehabt**?
- Lassen sie die **Arbeit dokumentieren**: Eingaben - Ausgaben - Kommentare des S. Aber nicht die Fehlversuche dokumentieren.
- Lassen sie die Schüler ihre Arbeit am Rechner immer wieder mal **vorführen** (über Beamer oder am LC-Display).
- Setzen sie konsequent kompetente S als „**Hilfslehrer**“ ein, indem sie sie an andere Computer-Arbeitsstellen schicken.
- Nutzen sie aus, dass die Schüler den **Rechner zu Hause** zur Verfügung haben. Beachten Sie das bei der Aufgabenstellung der Hausarbeit.

Die erste Computerstunde, z.B. mit einem Taschencomputer

Für ihre erste Stunde mit dem Computer gibt es natürlich sehr unterschiedliche Ansätze. Bewährt hat sich u.a. das folgende Vorgehen.

1) Wählen sie ein kleineres mathematisches Problem aus dem aktuellen Unterricht und lassen sie es von Hand bearbeiten (ohne Computereinsatz).

Umfragen bei SchülerInnen und LehrerInnen haben ergeben, dass die Visualisierungsmöglichkeiten des Rechners besonders geschätzt werden. Deshalb kann empfohlen werden, gerade diese Fähigkeit anfangs oder möglichst bald zu benutzen!

2) **Nun folgt die Einführung des TI an dem gleichen Problem.** Da die Ergebnisse bekannt und die Mathematik zum Problem verstanden ist, reduziert sich der Anspruch an die Schüler und sie nur auf die Arbeit mit dem Rechner!

3) Direkt an dem vorliegenden Problem wird mit dem Rechner gearbeitet, möglicherweise kann man die Handrechnung / Handzeichnung am Computer nachvollziehen.

4) Die Vorgehensweise am Rechner wird protokolliert (Tafel / Heft). Ein Vorausarbeiten von Schülern muss unterbunden werden – alle sollten in den ersten Stunden immer etwa genauso weit in ihrer Rechnerarbeit sein.

5) Lassen sie - gerade beim ersten Mal - nicht zu lange am Rechner arbeiten. Zum Beispiel reichen 25 Minuten.

6) Wählen sie nach diesem Einstieg ein leicht abweichendes Problem und lassen sie es mit dem Rechner bearbeiten (das ist die erste Übung zum Handling).

1.2 Beispiele für Einführungsstunden

1.2.1 Geradenmuster erzeugen – CAS-Einführung in der Sek.1

Als Werkzeug wird bei diesem Beispiel der Taschencomputer Voyage 200 von Texas Instruments gewählt.

Die Aufgabenstellung:

Zeichne zwei Scharen paralleler Geraden

Die Vorkenntnisse: Die Schüler haben einige Geraden, gegeben in der Form $y = mx + b$ mit Zahlenwerten für m und b , als einzelne Objekte in ihr Heft gezeichnet. **Das CAS kennen sie noch nicht.**

Der Stundenablauf

1) Bilder a, b: Gemeinsam wird eine erste Gerade $g_1: y = 1.5x + 1$ auf den Bildschirm gebracht.

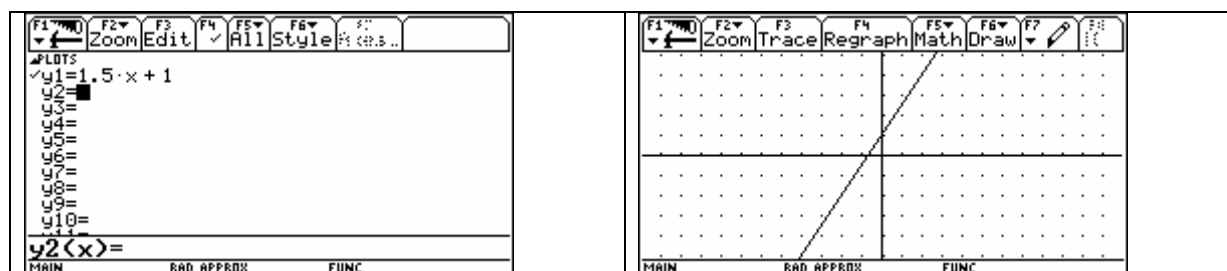


Bild 1.2a

Bild 1.2b

2) Bilder c, d: Nun schon in selbständiger Arbeit zeichnen die Schüler parallele Geraden zu g_1 . Das Computerbild ist gleichzeitig Kontrolle für die Richtigkeit ihrer Überlegungen. Damit erkennen die Schüler die Gleichungseigenschaften für parallele Geraden:

In $y = m \cdot x + b$ muss man m festhalten, b ändern.

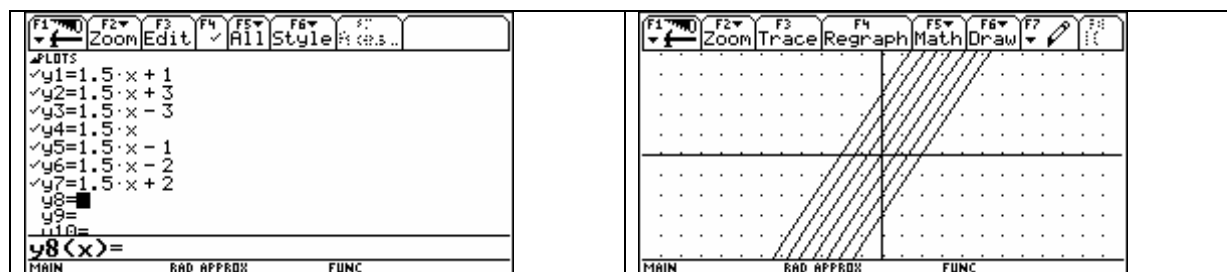


Bild 1.2c

Bild 1.2d

3) Ein Schüler präsentiert seine Ergebnisse.

4) Bilder e, f: Die Schüler zeichnen nun eigenständig eine zweite Geradenschar s_2 . Eine anspruchsvolle Bedingung (nur für leistungsstärkere Schüler) wäre z. B., dass die Geraden senkrecht zu s_1 sind. Das können z. B. Parallelen zu der Geraden mit $y = -2/3 \cdot x + 1$ sein.

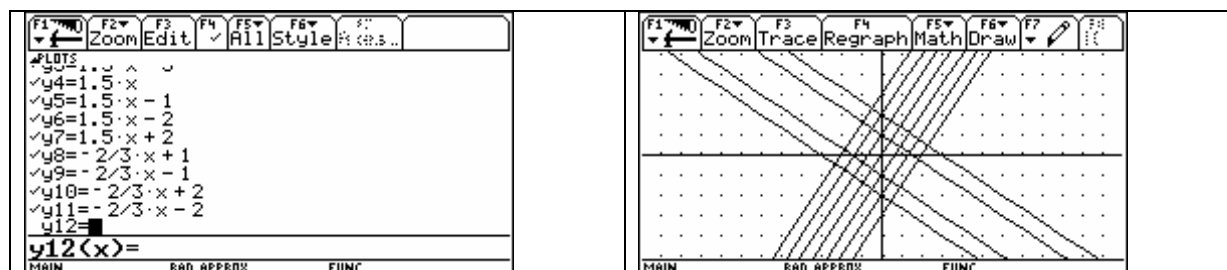


Bild 1.2e

Bild 1.2f

Zusammenfassung – was haben die Schüler in dieser Einführungsstunde über das CAS und an Mathematik gelernt?

Inhalt	Rechnerbedienung, Werkzeugkompetenz - hier Syntax des Taschencomputers Voyage 200	Mathematische Erkenntnisse
Einen Term eingeben zum Zeichnen	Eingabe im y-Editor, zeichnen im Grafikbereich	Wechselspiel Term \leftrightarrow Graph
Parallele Geraden	Wie oben, experimentelles Arbeiten, Übungseffekt	$y = 1.5x + b$ liefert parallele Geraden, Geradenschar
Senkrechte Geraden	Wie oben, experimentelles Arbeiten, bis Bedingung entdeckt, dann Übung	Eine Senkrechte zu Geraden mit der Steigung $1.5 = 3/2$ erhält man mit der Rechnung $-2/3 = -1/1.5$, (Steigungs-dreieck, Tafelarbeit)

Damit hat sich der Werkzeugkompetenz-Container (WKC) schon ein kleines Stück gefüllt und der bisherige Inhalt steht für weitere CAS-Stunden bereit. → Siehe Kapitel 13.

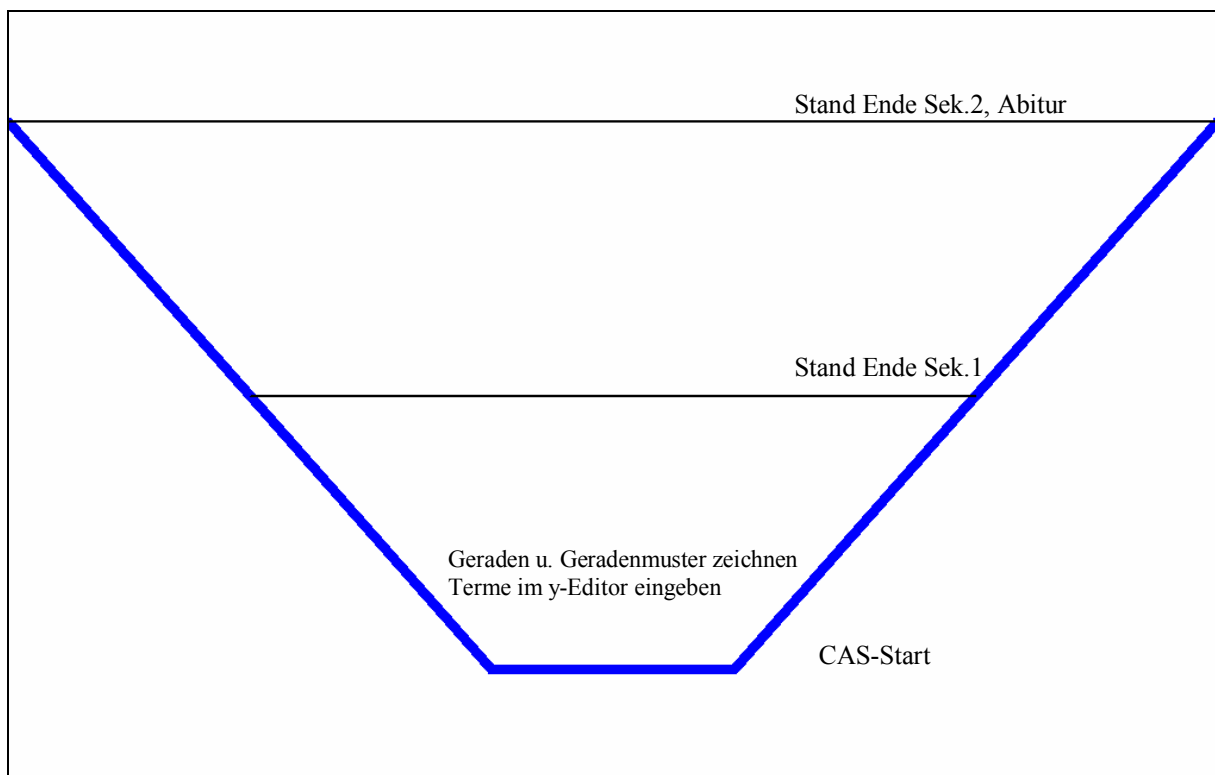


Abb. 1.2g: Der Werkzeugkompetenz-Container (WKV)

Hausarbeit: Zeichne zur Schar s_1 eine zweite Schar s_2 , deren Geraden durch Spiegelung von s_1 an der y-Achse entstehen.

Und später: Berechne alle Schnittpunkt der beiden Geradenscharen.

Insgesamt haben die Schüler damit folgende Kompetenzen erworben oder gefestigt.:

- 1) Erste Darstellung am Rechner durch Anknüpfen an mathematisch Bekanntes.
- 2) Erweiterung mathematischer Erkenntnissen bei gleichzeitiger Übung am Rechner
- 3) Eigenständiges experimentelles Arbeiten.

1.2.2 Einführung mit einem Kunstbild – Sekundarstufe 2 - DERIVE

Die hier geschilderte Einführung in das CAS DERIVE erfolgte im Rahmen einer Fortbildung an einem Gymnasium (2007) und fand auch später an verschiedenen Stellen großes Interesse wegen des ungewohnten Ansatzes. Der Mathematik-Fachleiter, Rainer Giese, schrieb später auf der Homepage der Schule: Mehr „Drive“ durch Derive

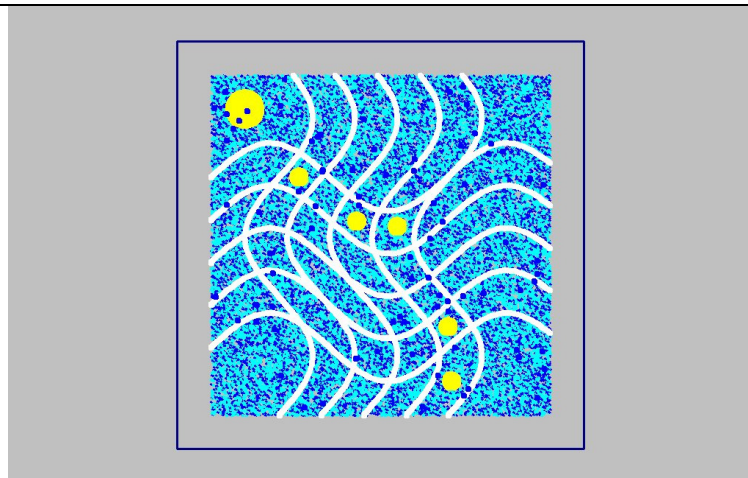
„... Einer der Höhepunkte der Veranstaltung war eine Vorführstunde mit den Schüler/-innen des **Leistungskurses Mathematik**... Nur drei von ihnen hatten bereits im Profilkurs Mathematik im vorigen Jahr Erfahrungen mit DERIVE sammeln können. Den anderen war das System völlig neu. Jeweils zu zweit erarbeiteten die Schüler/-innen die Lösungen von Problemen, die sich aus der Betrachtung eines Kunstwerkes ergaben. Verschiedene Sinuskurven waren zu zeichnen und Kreise mussten eingebettet werden, so dass sich - was in der Stunde nicht völlig gelang - das vorgegebene Bild ergab. Eifrig und mit viel Phantasie wurden unterschiedliche Lösungsstrategien erarbeitet und getestet. Zum Schluss wurden die Ergebnisse zusammengetragen und verglichen. - Das komplett anwesende Mathematikkollegium zeigte sich beeindruckt vom Engagement und Ideenreichtum der Schüler/-innen. Ohne ein Computer Algebra System wäre die Aufgabe praktisch nicht zu lösen gewesen.“

Diese Stunde soll im Folgenden näher beschrieben werden.

Voraussetzungen: In dem Computerraum standen genügend Computer an den Rändern des Raumes, davor Stühle (Bereich B). In der Raummitte waren Tische gruppiert, so dass sich die Schüler vom Computer entfernen konnten (Bereich A). DERIVE war weitgehend unbekannt. Die Schüler waren mir unbekannt.

Stundenziel:

- Die Schüler modellieren ein Kunstbild (Kompetenzen modellieren, darstellen, argumentieren)
- Die Schüler lernen erste Elemente des CAS DERIVE kennen und benutzen (Werkzeug-Kompetenz erwerben).



Sonnens im Sinusfeld (Eberhard Lehmann, 2006)

Das Bild wurde mit dem Animationsprogramm ANIMATO erstellt (2006) und hängt bei mir im Format 50cm x 70cm im Wohnzimmer.

Phase 1: Die Schüler saßen im Bereich A. Über einen Beamer wurde das Kunstbild (siehe links) gezeigt. Wie erwartet überraschte es Schüler und Lehrer. Eine Schülerin beschrieb das Bild und benannte auch gleich die mathematischen Objekte: 2 Scharen Sinuskurven, Kreise, Punkte im Hintergrund.

Arbeitsauftrag und Stundenthema:
Das Bild soll mit DERIVE nachgestellt werden.

Der Arbeitsauftrag ist eine offene Aufgabenstellung, die sich demzufolge auf verschiedene Weise abarbeiten lässt. Selbstverständlich ist klar, dass das Bild in einer Einführungsstunde nicht völlig nachkonstruiert werden kann und kleine Abweichungen sind ohnehin erlaubt. Die für die Schüler neuartige Aufgabenstellung motiviert aber auch, zu Hause weiter zu arbeiten (falls das Programm dort zur Verfügung steht, was bei CAS-Einsatz im Unterricht der Fall sein sollte).

Phase 2a: Die Schüler gehen zu je zwei an einen Rechner, starten DERIVE. Der Lehrer zeigt, wie man den Graphen der Sinuskurve einzeichnen kann. Das erfolgt zunächst - abweichend von dem vorgelegten Kunstbild - im Koordinatensystem, das ja später aus der Abbildung herausgenommen werden kann. Jetzt ist es für die Modellierung wichtig. Die parallelen Kurven können dann schon in Eigenarbeit erstellt werden.

Phase 2b: Der Lehrer erläutert, wie man eine senkrechte Kurve einzeichnet.

$[x, \sin(x)]$ wäre eine andere Schreibweise zur Eingabe der Sinuskurve, x und y sind zu vertauschen, also geben wir $[\sin(x), x]$ ein. Die Frage nach dem Definitionsbereich klärt sich in Eigenarbeit der Schüler, ebenso das Zeichnen der anderen Scharkurven.

Damit sind die Sinuskurven gezeichnet, der Lehrer erläutert noch wie man zu einer maßstabsgetreuen Darstellung kommt.

Phase 3: Die Schüler wollen nun Kreise zeichnen. Nach vagen Andeutungen der SchülerInnen, das über die Wurzelarstellung zu machen, erläutert der Lehrer an der Tafel die Parameterdarstellung $[\cos(t), \sin(t)]$ für den Einheitskreis. Hierzu genügt eine entsprechende Skizze und der Hinweis, dass sich mit $x(t) = \cos(t)$ und $y(t) = \sin(t)$ bzw. $[\cos(t), \sin(t)]$ jeder Punkt des Einheitskreises darstellen lässt, wenn man nur t laufen lässt (das sollte man übrigens schon in Klasse 10 bei der Einführung des Sinus über den Einheitskreis mit erledigen). – Die Schüler notieren die Tafelskizze.

Die Schüler zeichnen Kreise und dirigieren sie in experimenteller Arbeit an die gefragten Stellen. Dabei benutzen sie sehr selbstverständlich die Darstellungen der Form

$[r \cdot \cos(t) + v, r \cdot \sin(t) + w]$ mit passenden Werten für r, v, w .

Es verbleiben von der 45'-Stunde noch etwa 10 Minuten. Das bisherige Bild wird abgespeichert und die Schüler begeben sich an die Plätze in der Raummitte.

Phase 4: Die Schüler erhalten eine Kopie des gezeigten Kunstbildes. Ein Schüler steht an der Tafel, gemeinsam werden die erworbenen DERIVE-Kenntnisse zusammengestellt und dokumentiert – Eintragung ins Heft.

- 1) Eingabe von Termen und Zeichnen der zugehörigen Graphen
Pendeln zwischen Algebra- und Zeichenfenster
- 2) Spiegelung von Graphen durch Vertauschung von x und y , Darstellung [... ,...].
- 3) Verändern des Zeichenmaßstabs
- 4) Herleitung der Einheitskreis-Gleichung in Parameterdarstellung
- 5) Zeichnen von Kreisen an verschiedenen Stellen
- 6) Speichern der DERIVE-Datei.

In den letzten Minuten wird das weitere Vorgehen der Bilderstellung angedeutet, dabei fällt auch die Idee zum Ausfüllen der Kreise durch Zeichnen von Kreismengen mittels Veränderung des Radius.

Der Hintergrund mit den zahlreichen Punkten wird in der Stunde nicht problematisiert. Diese Punkte sind übrigens als Zufallspunkte entstanden.

Die hier beschriebene Stunde ist ein gutes Muster für eine Programmeinführung, in abgewandelter Form kann auch eine Stunde für Fortgeschrittene geplant werden, die ebenfalls von diesem oder einem anderen mathematischen Bild ausgeht und schneller zur Nachkonstruktion kommt.

Hier wurden in sehr dosierter Form nur wenige Werkzeugfähigkeiten gezeigt und gleich in experimenteller und eigenständiger Arbeit auf ganz ähnliche Situationen angewendet. Diese wenigen Werkzeugkompetenzen sind allerdings schon sehr weittragend für die Bearbeitung anderer Problemstellungen. In folgenden Unterrichtsstunden können dann weitere Werkzeugkompetenzen an anderen mathematischen Fragestellungen erworben werden.

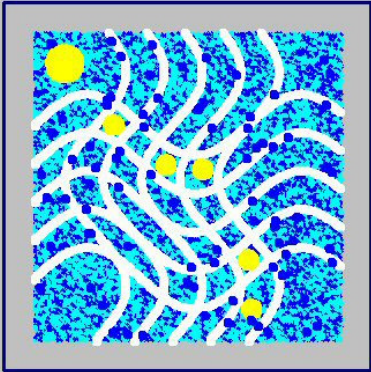
Hinweise: Die Stunde könnte auch in einem Grundkurs, der die benutzten mathematischen Kenntnissen hat, gegeben werden.

1.2.3 Einführung mit einem Kunstbild – Sekundarstufe 2 – TI-Nspire

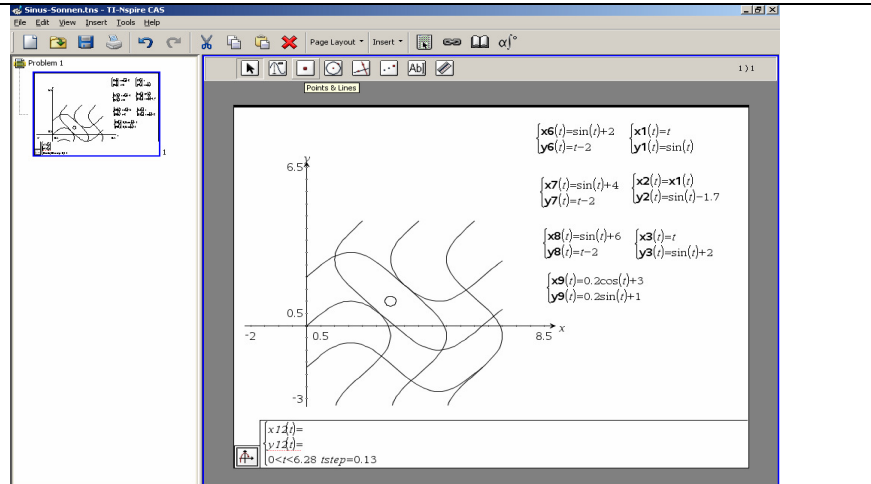
Und nun erleben sie mit der gleichen Themenstellung wie in 1.2.2 eine Einführungsstunde mit dem PC-Programm TI-Nspire (aus einem Vortrag in Brüssel 2007, deshalb auf Englisch).

Mathematics with pictures – reconstruction of an art picture –
a basic idea of teaching mathematics

Rekonstruktion with TI-Nspire or other software (ANIMATO, DERIVE, Voyage, ...)

	<p>To reconstruct the picture is an opened question! In the picture downstairs there are only some elements of a reconstruction. The students only must be able to draw the sinus-curve and a circle in parametric mode, then they can work experimentally. Some days ago I used this problem in a lesson, where the students made the first steps in DERIVE, but it is no big problem to do this with TI-Nspire. By working on this issue the students will have a lot of other questions, they also can vary the task. For example they can construct the background (with random-numbers). This task also is a good example for working with modules and parameters.</p>
---	---

(by Eberhard Lehmann, constructed with the software ANIMATO)

	<p>and so on!</p>
--	-------------------

This is a software-introduction with experimental work of the students and only some instructions of the teacher!

Lists&Spreadsheets: Random-Lists

Graphs&Geometrie: Random-Points

In L&S you now can construct random-numbers, for example in the columns D and E (in row •)

D• = $7 \cdot \text{rand}(150)$, labeled with var xliste2 (or $\text{xliste2} := 7 \cdot \text{rand}(150)$)

E• = $4 \cdot \text{rand}(150)$, labelled with var yliste2.

Now there is (xliste2, yliste2) a list of random-points. These lists are the input in G&G ($x \leftarrow \dots y \leftarrow \dots$) and so you get the random-points above the x-axis. For the other points below the x-axis you only

need the new list F• $\text{xliste3} := -4 \cdot \text{rand}(150)$ and now you can use the lists (xliste2, yliste3) in G&G.

– If you change the lists in L&S you at once will see new points in G&G.

Calculator: Random-Lists

Hint: You can see the defined lists also in the Calculator.

Summary – important! - in the last minutes of the lesson

1. The used mathematical objects – mathematical competences

In parametric-mode: sin-curves with translations $[t, \sin(t)+v]$, reversal $[\sin(t)+v, t+w]$, circles $[a \cdot \cos(t)+b, a \cdot \sin(t)+c]$. – Random-points (xliste, yliste).

2. TI-Nspire software-knowledge – media competence

In Graphs&Geometrie (GG): How to draw curves in parameter-mode $x_1(t), y_1(t)$ and to produce points with lists ($x \leftarrow \dots y \leftarrow \dots$)

3. In Lists&Spreadsheets (LS): Definition of variables, producing random-numbers and how to transform them into other areas.

Bemerkungen: Das Beispiel zeigt u.a. wie man mit dem neuen CAS von Texas Instruments (als PC-Version oder als Handheld) in fruchtbarer Weise mehrere Darstellungsbereiche benutzen kann. Hier wird außerdem mit Parameterdarstellungen gearbeitet, die gerade durch CAS eine wesentliche Bereicherung des Mathematikunterrichts sein können. Hierzu später mehr in einem eigenen Kapitel 9.4.1.

1.3 Weitere Stundenentwürfe mit CAS-Einsatz

Hinweis: Die folgenden Stundenabläufe setzen bei den Schülern eine schon erworbene Vertrautheit mit ihrem CAS voraus.

1.3.1 Unterrichtsstunde im Grundkurs - viele Kreise

Kreise	Parameterdarstellung	Anwendung: Türgitter	Voyage 200
--------	----------------------	----------------------	------------

Vorbemerkung

Die im Folgenden skizzierte Stunde im Grundkurs Mathematik, 1.Semester, wurde in den normalen Kursablauf eingeschoben. Sie wurde von mir als Projektleiter des Berliner CAS-Projekts Sekundarstufe 2 gehalten – die Klasse war mir unbekannt. Von der sonst unterrichtenden Lehrerin Frau Vogt wurden zuletzt die Ableitungen der Sinus- und Cosinus-Funktion behandelt und u.a. bei der Kettenregel verwendet. Jedem Schüler steht ein Taschencomputer Voyage 200 (Texas Instruments) ständig zur Verfügung. **Die Schüler haben den Rechner seit ca. drei Monaten.**

Die hier dargestellte Stunde hatte folgende Zielsetzungen:

a) Schwerpunkte:

- Einführung der Parameterdarstellung von Kreisen und
- Anwendung bei der Zeichnung vieler Kreise an verschiedenen Positionen im Koordinatensystem mit Hilfe des Taschencomputers

NEUE FACHINHALTE

Verschiebung von Graphen üben

b) Außerdem:

Experimentelles Arbeiten

- Übungen zu \sin und \cos in einer neuen Form
- Wiederholung von Gradmaß und Bogenmaß.

Intelligentes Üben bekannter Sachverhalte

Die Stunde wurde eingeleitet mit einer Folie, die ein Bild des Malers Kandinsky zeigte, in dem zahlreiche Kreise künstlerisch dargestellt waren. Das hinten gezeigte Foto (Türgitter mit vielen systematisch angeordneten Kreisen, aufgenommen in Kalabrien) bot danach einen Einblick in die spätere Aufgabenstellung. Diese von den Schülern unerwartete „unmathe-matische“ Einleitung in die Stunde führte ersichtlich zu einer guten Motivation und Aktivität der Schüler, die insbesondere in den Phasen (2) und (3) deutlich wurde.

Fachübergreifende Ansätze

(1) Nach einer durch das Kandinsky-Bild (Beschreibung durch eine Schülerin) und den Arbeitsbogen vorstrukturierten Einführung der Kreis-Parameterdarstellung mit der Darstellung des Einheitskreises auf dem Bildschirm des Taschencomputers ging die Stunde in eine

(2) offene Phase über, in der die Schüler weitere Kreise nach eigenem Gutdünken auf dem Bildschirm erzeugten.

Eigenständige Arbeit

(3) Einige Ergebnisse wurden von den Schülern über den Projektor (View-Screen) vorgestellt.

Präsentationen üben

12-2003, Stunde im Grundkurs ma-1 an der Fritz-Karsen-Schule Berlin-Neukölln

*Arbeitsbogen
und Folie*

Stundenthema: Viele Kreise

Unsere gemeinsame Arbeitsgrundlage ist die **Parameterdarstellung des Einheitskreises** $x(t) = \cos(t)$, $y(t) = \sin(t)$.

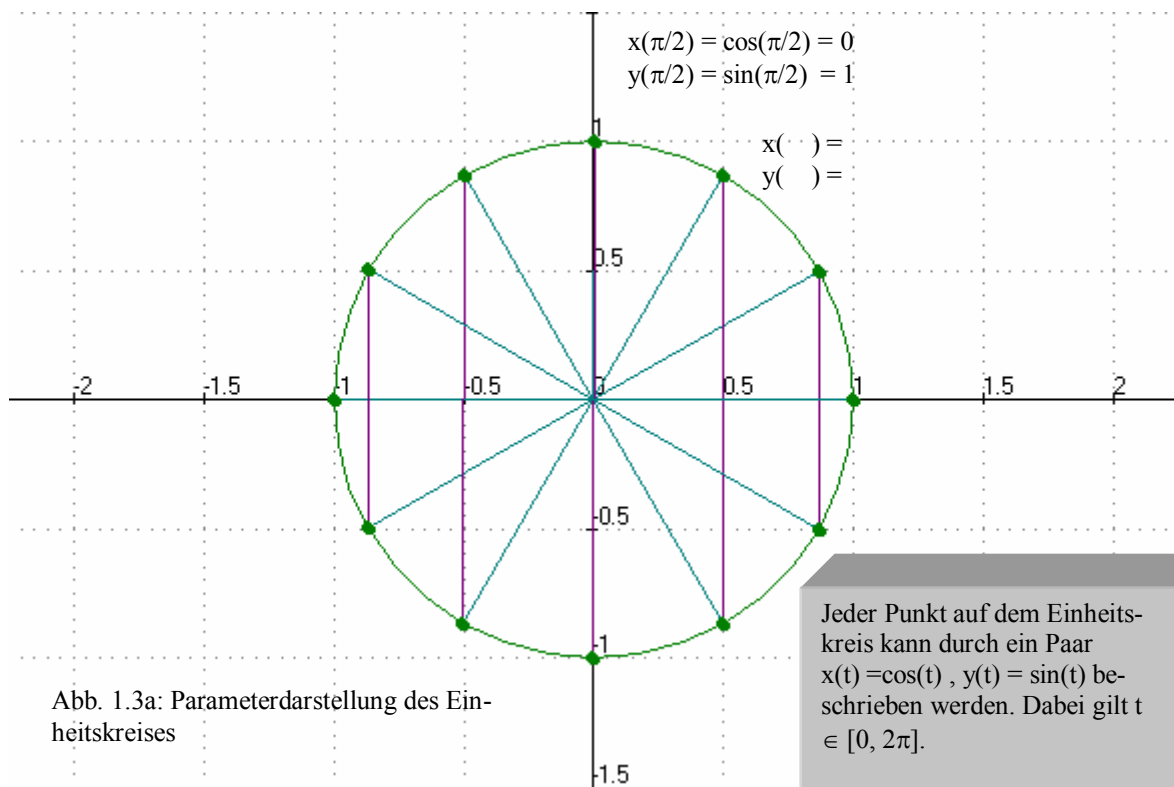


Abb. 1.3a: Parameterdarstellung des Einheitskreises

Jeder Punkt auf dem Einheitskreis kann durch ein Paar $x(t) = \cos(t)$, $y(t) = \sin(t)$ beschrieben werden. Dabei gilt $t \in [0, 2\pi]$.

Erläutere diese Aussage!

Hausaufgabe:

- Berechne die Punkte des Einheitskreises zu den Winkeln mit $t = 0.5$, $t = 1$, $t = 2$, $t = 3$, $t = 4$, $t = 35^\circ$, $t = 270^\circ$, $t = 2\pi$.
- Berechne den Winkel t zu den Kreispunkten $(0.5, 0.8860)$, $(-0.5, -0.8860)$.
- Liegen die Punkte $(0.5, 0.88)$, auf dem Einheitskreis?

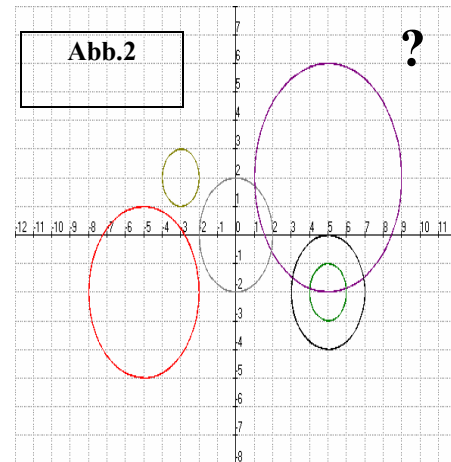
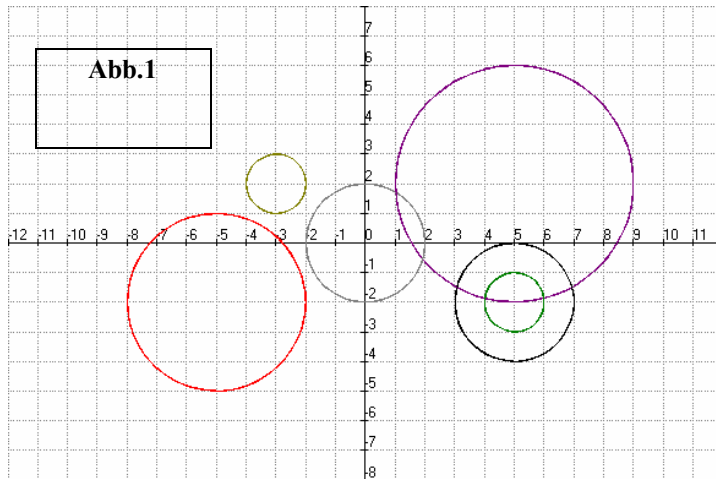
Weitere Übungsaufgaben

Folie -Arbeitsbogen

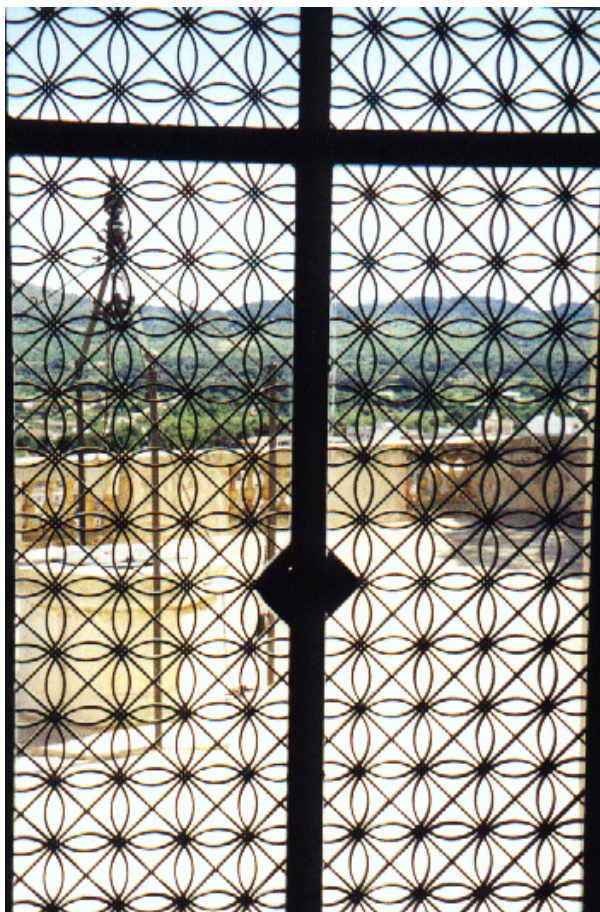
Aufgabe 1:

Die folgende Abbildung 1 zeigt viele Kreise an verschiedenen Stellen des Koordinaten-systems.

- Zeichne diese Kreise mit dem Taschencomputer.



Aufgabe 2:



Eine offene Aufgabenstellung

- Beschreibe die Abbildung eines Türgitters (aufgenommen in der Stadt Cosenza in Kala-brien / Italien) unter Beachtung mathematischer Gesichtspunkte.
- Versuche mit dem Taschencomputer eine (teilweise) Nachkonstruktion der Kreise.
- Formuliere weitere Aufgaben unter Bezug auf die Abbildung.

1.3.2 Unterrichtssequenz: Näherungsweise Zeichnung von Ableitungsfunktionen mit dem Taschencomputer (Analysis-GK und -LK)

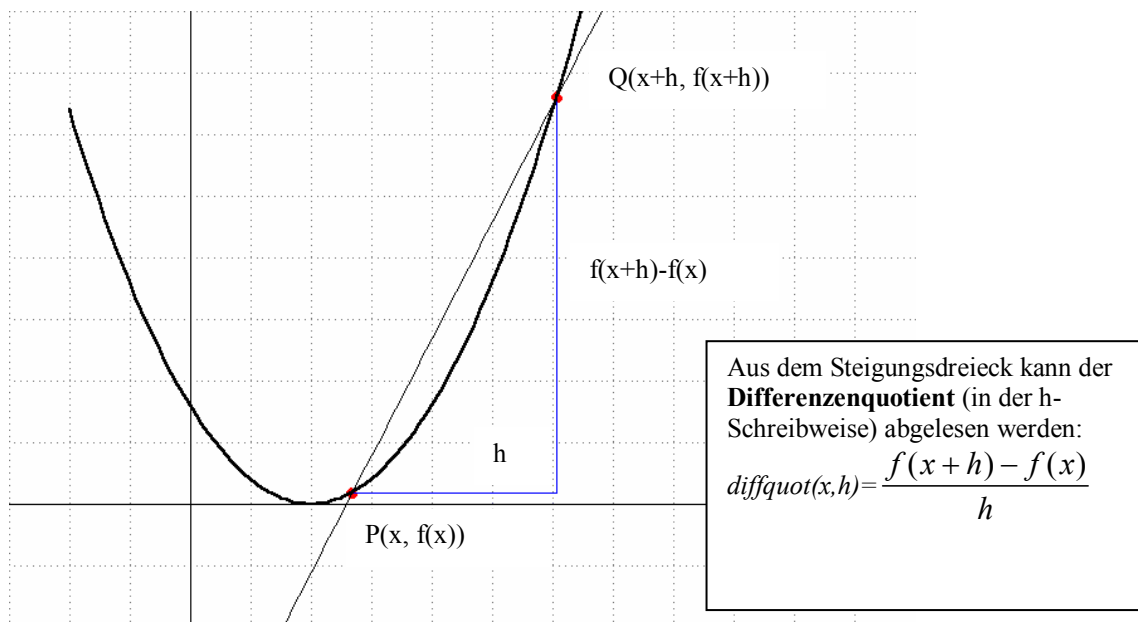
Die Unterrichtssequenz verfolgt u.a. folgende Ziele:

- Verstehen von Zusammenhängen rund um den Differenzenquotienten
- kompetenter Umgang mit Graphen zu Differenzenquotientenfunktionen
- Festigung der schon vorher verwendeten Bausteintechnik (modulare Kompetenz), siehe Kapitel 6.

Wiederholung 1

Ausgangspunkt der Überlegungen ist das längst bekannte Steigungsdreieck:

Bild 1



Der Differenzenquotient zum Funktionsterm $f(x)$ wird hier von uns abgekürzt mit **diffquot(x,h)**. Sein Wert ist abhängig von dem gewählten x-Wert und der Schrittweite h. Diese Schreibweise mit der Angabe der Variablen x und h wird sich für die Arbeit mit einem CAS gleich als sehr nützlich erweisen.

Wiederholung 2:

Erinnern Sie sich noch an die ausführliche Berechnung der Ableitung von $f(x) = x^2$ nach der h-Methode? Nach der Berechnung der Ableitungsfunktion $f'(x) = 2x$ war es Ihnen dann leicht möglich den Ableitungsgraphen - in diesem Fall eine Gerade - zusammen mit dem Graphen der Ausgangsfunktion $f(x) = x^2$ in ein Koordinatensystem zu zeichnen.

Um Entsprechendes für andere Funktionen durchführen zu können, ist die Kenntnis der Ableitungsfunktion unerlässlich. Doch es ist nicht immer einfach sie zu ermitteln! Probieren sie es doch einmal für die Sinusfunktion. Der Differentialquotient lautet in diesem Fall:

- $\frac{\sin(x+h) - \sin(x)}{h}$. Aber wie geht es nun rechnerisch weiter?

Term umformen und Grenzwert bilden - aber wie? Nun kommt die Überraschung! Sie werden mit dem CAS Ableitungsgraphen zeichnen können ohne die Ableitungsfunktion zu kennen!

1. Zeichnung von Differenzenquotienten-Funktionen

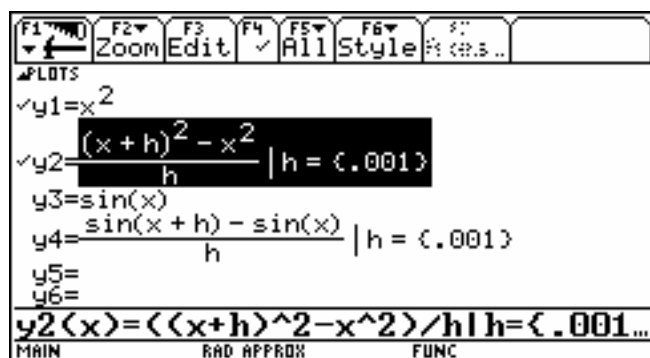


Bild 2

Arbeit mit dem CAS des Voyage-200-Taschencomputers (oder mit TI-92):

1) Im „y-Editor“ werden die Eingaben für y1 und y2 durchgeführt.

$h = \{.001\}$.

2) y1(x) und y2(x) werden graphisch dargestellt, siehe 2.Bild.

3) Im „y-Editor“ werden die Eingaben für y3 und y4 durchgeführt.

2) y3(x) und y4(x) werden graphisch dargestellt, siehe 3.Bild.

Aufgabe: Erläutern sie den mathematischen Gehalt der nebenstehenden Abbildung, die entsprechend Bild 2 entstanden ist.

- Um welche Funktionsgraphen handelt es sich?
- Was hat das mit der Ableitungsfunktion zu tun?

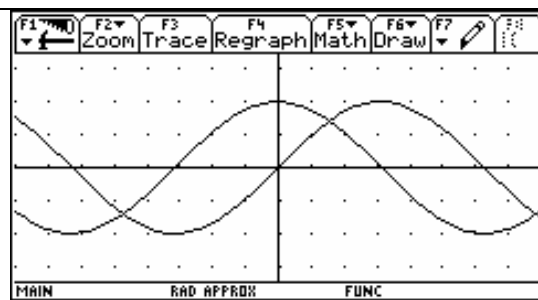


Bild 3

Weitere Beispiele zur näherungsweisen Zeichnung der Graphen von Ableitungsfunktionen

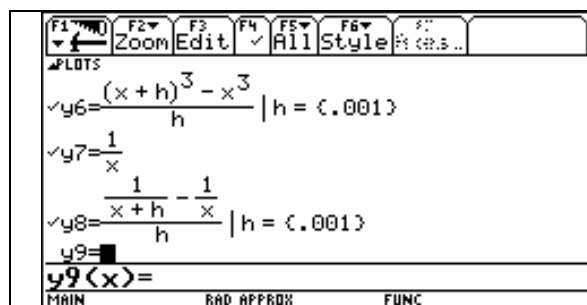


Bild 4

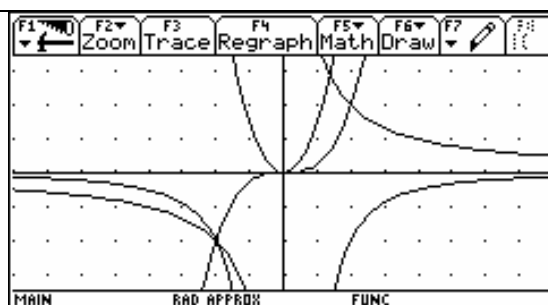


Bild 5

2. Die bisherigen Untersuchungen zeigen:

Mit Hilfe der Differenzenquotientenfunktion $\frac{f(x+h)-f(x)}{h}$ ist es möglich, die Ableitungsfunktion näherungsweise, aber wegen der begrenzten Auflösungsfähigkeit des Computerbildschirms hinreichend genau zu zeichnen, wenn man den Wert h nur klein genug wählt. In den Beispielen wurde $h=\{0.001\}$ gewählt.

Aufgabe: Deuten Sie die Bildschirmabdrucke Bild 4 und 5. - Erstellen Sie dann ähnliche Bilder für weitere Ihnen bekannte Funktionen aus dem vorhergehenden Unterricht

3. Wenn man nun eine h-Folge wählt, die sich immer mehr auf 0 zu bewegt,

so entsteht auch auf dem Bildschirm eine Bildfolge, mit der man die rechnerische Grenzwertbildung

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$

eindrucksvoll visualisieren kann.

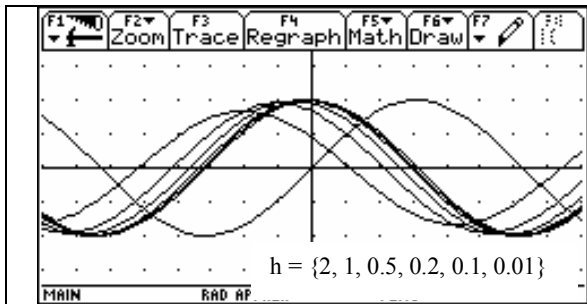


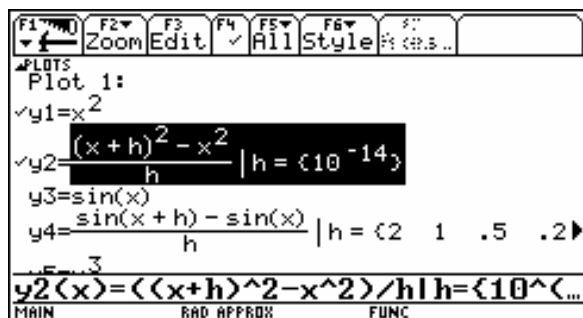
Bild 6

Aufgabe: Erstellen sie weitere derartige Bilder auch für andere Funktionen. Wählen Sie dabei auch die Menge $h = \{-2, -1, -0.5, -0.2, -0.1, -0.01\}$.

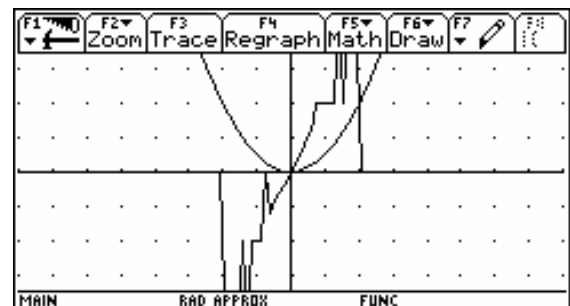
Bild 7

4. Ausbau der Überlegungen

Es hat sich gezeigt, dass die obigen Ergebnisse zuverlässig genug zum Zeichnen des Graphen von Ableitungsfunktionen sind; ein rechnerischer Nachweis ist dennoch besser! Betrachten Sie dazu die folgende Abbildung, die für $h = \{10^{-14}\}$ entstanden ist:



Figur



Nun zeichnet y2(x) offenbar nicht mehr den Graphen der Ableitungsfunktion von $y = x^2$! - Können Sie das verstehen? - **Letzte Gewissheit liefert also nur die Rechnung.**

Zusammenfassung:

Mit Hilfe der Differenzenquotientenfunktion (*) $diffquot(x,h) = \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$ ist es möglich, den Graphen der Ableitungsfunktion $f'(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$ in hoher Genauigkeit zu zeichnen, wenn man z.B. $h = 0.001$ wählt. Damit beherrscht man die Graphen zahlreicher Ableitungsfunktionen schon bevor man den Term der jeweiligen Ableitungsfunktion kennt. Die Definition (*) kann als „Differenzenquotienten-Baustein“ bezeichnet werden. Derartige Definitionen sind kennzeichnend für eine ökonomische Arbeit mit Computeralgebra-systemen.

1.3.3 Unterrichtsstunde zum Thema „White-Box – Black-Box“ Sekundarstufe 1

Eine Unterrichtsstunde zum Thema „White-Box – Black-Box“ gegeben in Klasse 9, aber zur Einführung der Begriffe auch für die Sekundarstufe 2 geeignet.

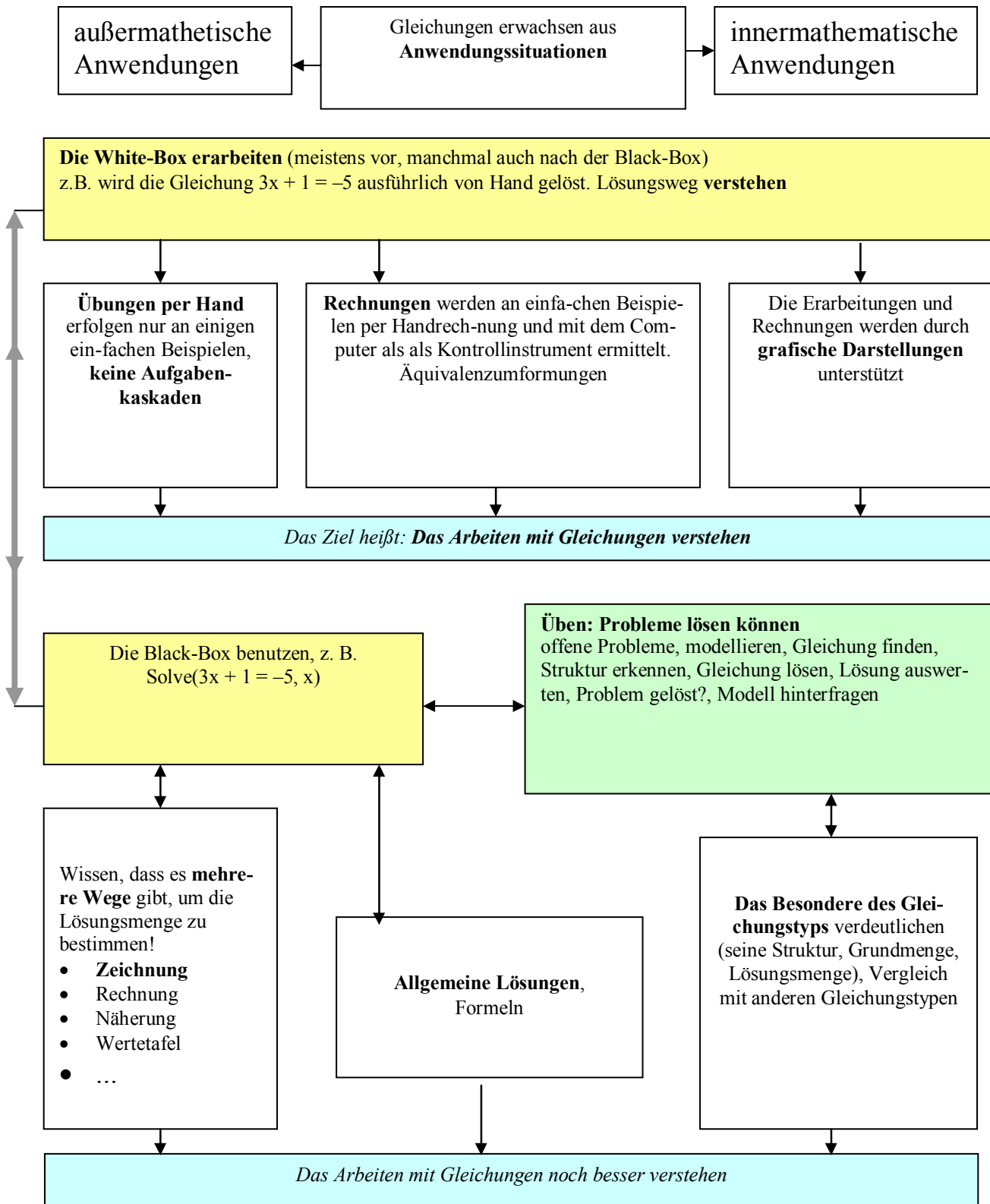
1. Am Anfang der Stunde steht an der Tafel

Von der White-Box zur Black-Box

Inhalte / Material	Geplanter Unterrichtsablauf
<p>Tafelanschrieb des Lehrers White-Box – Black-Box L: Wer kann sich darunter etwas vorstellen?</p> <p>(man kann auch einige Black-Boxes (BB) mitbringen oder Bilder einsetzen)</p> <p>L: Warum ist das so?</p> <p>L: Was könnte eine White-Box sein?</p> <p><i>Zeit: Ca. 15 Minuten</i></p>	<p>Die S werden etwas zu Black-Boxes sagen können: Flugschreiber, CD-Player, Computer, ... (an Tafel und BB-Beispiele im Heft notieren). Vielleicht werden auch der TI-92 oder der Taschenrechner genannt.</p> <p>Satz diktieren: Das Benutzen von Black-Boxes ist heutzutage weit verbreitet und unumgänglich!</p> <p>Diskussion</p> <p>Satz, z.B.: Wenn man eine Black-Box näher untersucht und ihre Arbeitsweise versteht, wird sie für den Betrachter zu einer White-Box. - Man kann aber auch Vorgänge / Sachverhalte, die man verstanden hat (White Box) zu einer Black Box zusammenfassen, die dann nur noch das Ergebnis sichtbar macht.</p> <div style="border: 1px solid black; padding: 5px; margin: 10px 0;"> <p>Bild: White-Box Black-Box</p> <p style="text-align: center;">-----></p> <p style="text-align: center;">←-----</p> </div>
<p>L: Was hat das Ganze mit dem Lösen von Gleichungen zu tun?</p> <p>Einfaches Beispiel nehmen! Verweis auf vorhergehenden Unterricht.</p> <p><i>Zeit: Ca. 10 Minuten</i></p>	<p>$\text{solve}(3x+1 = -5, x)$ $x = -2$</p> <p>Black-Box benutzt</p> <p>$3x+1 = -5 \quad // -1$ $3x = -6 \quad // :3$ $x = -2$</p> <p>White-Box benutzt</p>
<p>L verteilt „Grundregeln für das Arbeiten mit Gleichungen“ (siehe folgende Seite)</p> <p>L lässt erläutern, alles wird an Beispielen / vorherigem Unterricht festgemacht.</p> <p>Ggf. Heft</p> <p><i>Zeit: Ca. 15 Minuten</i></p>	<p>S erklären die Abbildung unter Benutzung obiger Gesprächsergebnisse und ihrer schon vorhandenen Kenntnisse über Gleichungen (LGS)</p> <p>Abbildung einheften. Ggf. Beispiele notieren mit Zuordnung zu Position in der Abbildung.</p>
Zusammenfassung	S fassen zusammen, Kern: Begriffe BB, WB

Entwurf: Eberhard Lehmann, 12.12.2001 - Gleichungen in neuer Sicht

Grundregeln für das Arbeiten mit Gleichungen (aufbereitet für das Schulheft der SchülerInnen)



1.4 Die zehn größten Fehler beim Unterricht mit Computern

1. Wenn man als LehrerIn alle SchülerInnenfragen bei der Computerarbeit selbst beantwortet.	Dann wird der Computerunterricht richtig anstrengend.
2. Wenn man die Frage „Was für Probleme traten bei euch auf?“ vernachlässigt.	Hier könnte sich die Lehrperson in die Lage der SchülerInnen versetzen und deren Probleme erkennen und beseitigen (lassen).
3. Wenn man die gerade neu gelernten Werkzeugkompetenzen nicht festigt.	Die Werkzeugkompetenz ist grundlegend für den weiteren Ausbau der Arbeit mit dem Computer und die Entwicklung nachhaltiger Kompetenzen.
4. Wenn man die SchülerInnen nicht auch in Gruppen oder in Partnerarbeit agieren lässt.	Damit verhindert man die gegenseitige Hilfestellung und das Lernen voneinander.
5. Wenn man die SchülerInnenkompetenz nicht ausnutzt.	Damit verschenkt die Lehrperson die Fähigkeiten seiner „HilfslehrerInnen“ und belastet sich selbst in unnötiger Weise.
6. Wenn man den Computer in einer Stunde zu lange einsetzt.	Damit vergrößert man die Schere zwischen leistungsstarken und leistungsschwächeren SchülerInnen noch mehr und die Zeit fehlt für andere wichtige Ziele.
7. Wenn man die SchülerInnen <u>planlos</u> herumprobieren lässt.	Schade um die dadurch verbrauchte Zeit.
8. Wenn man Computerarbeit erst am Ende einer Stunde beendet (Ausnahme Doppelstunde).	Denn da ist keine Zeit mehr die vorhergehende Computerarbeit zu reflektieren und Schlüsse daraus zu ziehen
9. Wenn man gelegentliche Zusammenfassungen, insbesondere auch der Werkzeugkompetenz nicht durchführt.	Damit vergrößert man die Schere zwischen leistungsstarken und leistungsschwächeren SchülerInnen noch mehr.
10. Wenn man die vielfältigen Möglichkeiten für Computer-Hausaufgaben nicht ausnutzt.	Damit verschenkt man u.a. die (automatische) Stundenplanung für die Folgestunde, Motivationseffekte und seine eigene Freizeit!
Nun sind wir schon bei Fehler 10,	aber es gibt bestimmt noch weitere, die kann man in den Folgezeilen ergänzen!
11. Wenn die Lehrperson nicht das richtige Verhältnis zwischen Hand- und Computerarbeit findet.	Das Fingerspitzengefühl vergrößert sich bei zunehmender Erfahrung in der Unterrichtsarbeit mit Computereinsatz.
12. Wenn man nicht die einschlägige Literatur und das Internet benutzt und Fortbildungen für unwichtig hält.	Es gibt zahlreiche Angebote!

1.5 Die zehn größten Erfolgserlebnisse beim Unterricht mit Computern

Auch sie haben ihre Erfolgserlebnisse, wenn

- sie begeistert sind, dass wieder einmal eine Schülerin eine zündende und unerwartete Lösungsidee am CAS hatte,
- sie sich im Stundenverlauf innerlich freuen und den SchülerInnen das auch mal sagen, wie toll sie sich gegenseitig helfen,
- sie erstaunt sind, was die SchülerInnen bei der CAS-Arbeit wieder für neue Fragestellungen entdeckt haben,
- sie sehen, wie variabel die SchülerInnen die verschiedenen Rechnerebenen bzw. Softwareprodukte im Stundenverlauf einsetzen,
- sie bemerken, dass in der Stunde die richtige Mischung zwischen Hand-, Kopf- und Computerarbeit gefunden wurde,
- sie sich sagen können: „schön, dass ich die persönlichen SchülerInnen-Kompetenzen erkannt und ausgenutzt habe“,
- sie sich an einer abwechslungsreichen Präsentation der mathematischen mit Einbindung der CAS-Ergebnisse freuen,
- die SchülerInnen am Stundenende noch weiterarbeiten wollen,
- es ihnen gelungen ist, den Unterrichtsablauf im Rahmen der CAS-Arbeit so richtig schön zu managen und sie glücklich aus der Klasse gehen,
- sie und die SchülerInnen sich auf die nächste Stunde mit dem CAS freuen,
- sie an den SchülerInnen-Berichten in der Stunde merken, wie passend die von ihnen zuletzt gestellte CAS-Hausarbeit gewesen ist.

2. Nachhaltige (langfristige) Konzepte für den Computereinsatz im Mathematikunterricht

2.1 Voraussetzungen

Seit einigen Jahren steht der Mathematikunterricht unter stärkerer kritischer Beobachtung als zuvor (TIMMS, PISA, SINUS-Projekt, usw.) und zahlreiche Verbesserungsvorschläge sind unterbreitet und teilweise umgesetzt worden.

Die geforderten Veränderungen liegen im methodischen Vorgehen (offene Unterrichtsformen), in der inhaltlichen Ausgestaltung (veränderte Aufgabenkultur, offene Aufgaben, Anwendungsbezug), in einer Orientierung an outputorientierten Kompetenzen und auch in der angemessenen Ausnutzung der heute zur Verfügung stehenden Technologie (Computeralgebrasysteme CAS, dynamische Geometriesysteme DGS usw.).

Bemängelt wird u.a. die fehlende Nachhaltigkeit von Mathematikunterricht für die Tätigkeit in und nach der Schule. Um diese Problematik geht es in diesem Teilkapitel, besonders bezogen auf den Computereinsatz und hier wieder auf die Nutzung von Computeralgebrasystemen (CAS). Wir stellen uns die Frage:

Welches sind langfristige (nachhaltige) Konzepte für den Einsatz von CAS im Mathematikunterricht?

Die Frage wird von mir bearbeitet aus der Sicht eines Lehrers und Fachseminarleiters für Mathematik und Informatik mit sehr langfristiger Erfahrung im Computereinsatz (seit Ende ca. 1975 mit immer wieder neuen Systemen und Programmen) und in Fort- und Weiterbildungsveranstaltungen.

Die Diskussionen über einen nachhaltigen Mathematikunterricht leiden unter einem Mangel an Belegen, so dass es erlaubt sein muss, persönliche langjährige Erfahrungen zu reflektieren. 2006 habe ich einige ehemalige SchülerInnen (Abitur 2001) und etliche LehrerInnen aus meinem CAS-Arbeitskreis zu dieser Thematik befragt. Ihre Auskünfte gehen in die folgenden Ausführungen ein. Die Auskünfte der ehemaligen SchülerInnen, die im Übrigen seinerzeit gewohnt waren, Unterricht zu reflektieren – manchmal auch schriftlich - liegen also ca. 6 Jahre zurück und sind für mich von nicht geringer Relevanz, weil eben schon damals von mir u. a. auch kompetenzorientiert unterrichtet wurde – wie man heute sagen würde.

Grundlage meiner Überlegungen ist der folgende Ansatz zur Nachhaltigkeit von Mathematikunterricht:

Nachhaltig wirken / sind durchgehend verfolgte Konzepte (bezüglich Inhalte und Methoden), die immer wieder verwendet werden – aber nicht etwa im Sinn vieler (langweiliger) Übungen in der laufenden Unterrichtseinheit -, sondern im Verlauf des Unterrichts in immer wieder anderen Zusammenhängen (möglichst auch in fachübergreifenden). - Diese Konzepte müssen den Schülern immer wieder bewusst gemacht werden, bis sie fest und auf Dauer verankert sind.

Dieser Ansatz wird u.a. gestützt durch einige Aussagen des oben genannten Personenkreises. Dabei zeigt sich, dass individuell häufig unterschiedliche Aspekte genannt werden. Dennoch erkennt man, dass es sich immer wieder um methodische und inhaltliche Aspekte handelt.

Immer wieder wird jedoch **der durchgehende Rechneinsatz** betont. In der Tat war die Medienkompetenz der SchülerInnen sehr hoch – sie wurde bei etlichen SchülerInnen bereits ab Klasse 9 aufgebaut.

2.2 Was SchülerInnen sagen

Die Medienkompetenz der befragten SchülerInnen ergab sich u. a. aus der Nutzung von

- HL-PLOT11, einem Funktionenplotter mit Animationseigenschaften (die jetzige Version heißt ANIMATO),
- CAS-DERIVE,
- CAS des Taschencomputers TI-92 (Nachfolgemodell ist jetzt Voyage 200),
- POVRAY, einem Ray-Tracing-Programm,
- ANALYGE0, einem Programm zu analytischen Geometrie

Kerstin Altenwirth schreibt – 5 Jahre nach dem Abitur:

Zum Mathe - LK

- es wurde das Gefühl vermittelt, daß der Umgang mit Rechnern normal ist \Rightarrow dies ist (zumindest im ingenieurtechnischen Bereich) absolut sinnvoll.
- ich erinnere mich an einen kreativen Unterricht, in dem ein großer Schwerpunkt auf Problemlösung und Teamarbeit lag \Rightarrow das was eigentlich heute überall verlangt wird.
- zudem war selbstständiges Arbeiten wichtig, wichtiger als in anderen anderen Fächern.
- ich hatte an der Uni das Gefühl, daß wir einiges mehr behandelt haben im Vgl. zu anderen Kursen
- der Unterricht war (sehr) praxisbezogen, nicht zu Theorie-lastig \Rightarrow ich fand das gut – jetzt mache ich ja auch etwas praktisches (zum Teil) Die, die sich ~~da~~ ~~gen~~ mit Theorie befassten, waren vielleicht nicht immer ganz glücklich.

So, ich hoffe dieses kurze Feedback hilft etwas.

Anuß, Kerstin

Kerstin Altenwirth (Note 2/3), Abitur 2001, LK Lehmann

Es wurde das Gefühl vermittelt, dass der **Umgang mit Rechnern normal** ist.

Ich erinnere mich an einen **kreativen Unterricht**, in dem ein großer **Schwerpunkt auf Problemlösung und Teamarbeit** lag. Zudem war **selbständiges Arbeiten** wichtig. Der Unterricht war sehr praxisbezogen.

Kerstin Altenwirth studiert
Ingenieurwissenschaft
LK Lehmann, Abitur 2001,
befragt Dezember 2006

Robert Kaplun meint:

Mir hat die **Matrizenrechnung** sehr viel gebracht, da sie in der Wirtschaftsmathematik (insbesondere bei Maximierungs- und Minimierungsproblemen in der Makroökonomie bzw. in der Finanzwissenschaft) und in der Ökonometrie grundlegend ist! **Der ständige Umgang damit im Profil- und Leistungskurs** erleichterte mir den Einstieg in den Uni-Stoff erheblich und führte zum schnelleren Verständnis komplexer Sachverhalte! Darüber hinaus hat **der regelmäßige Einsatz des TI-92** sicherlich dazu beigetragen, dass mir der Umgang mit anderen und teilweise sehr ähnlichen Programmen wie EVIEWS, LINDO, MATLAB, DERIVE etc. deutlich leichter fiel, als es bei meinen Kommilitonen der Fall war, die keinerlei Erfahrungen mit CAS aufwiesen.

Inhalte

Konzepte

Computer

Robert Kaplun studiert VWL
LK Lehmann, Abitur 2001,
befragt Dezember 2006

In den Ausführungen von Kerstin liegt der Schwerpunkt deutlich auf der Unterrichtskultur. Robert hingegen greift insbesondere einen fachinhaltlichen Aspekt (Matrizenanwendungen) auf, auch er betont die Wirkung des durchgehenden Computereinsatzes. Und dieser spielt auch bei Raja eine wesentliche Rolle. Raja hat sich noch einen anderen Fachinhalt gemerkt – die unterschiedlichen Koordinatensysteme und Parameterdarstellungen.

Raja Fügner schreibt 2007 (Abitur 2001)

„Was ich von unserem Mathematikunterricht am meisten behalten habe, ist wohl der Verlust von Angst vor scheinbar „Abstraktem“ in der Mathematik (obwohl es bei weitem nicht meine Stärke war). Im Studium kam die Umrechnung von Parametern in Polarkoordinaten nochmals vor, was andere eher negativ überraschte, mir durch unseren Unterricht aber schon geläufig war und ich dadurch nicht die für andere Studenten „abstrakte Welt“ der Polarkoordinaten verwirrend empfand. Wahrscheinlich ist diese Umrechnung und damit Vertrautheit zwischen den Dimensionen von **Parameter-, Karthesischen- und Polarkoordinaten** am meisten hängen geblieben. ..

Mhh, bei mir war die Überwindung von Berührungsängsten mit der Mathematik und dem abstrakten Denken und Darstellung schwierig, aber dies habe ich in unserem Unterricht gelernt und damit im Studium keine Probleme mehr (heißt aber auch nicht, dass ich super bin in Mathe...) In den Unterrichtsmethoden fand ich im Rückblick vor allem die Arbeit mit dem Plot 11, aber auch den TI, die Programmierung und Darstellung mathematischer Funktionen sehr hilfreich. Die gesammelte Anwendung von Wissen und diesen Darstellungsmöglichkeiten in unserer Gruppenarbeit über besondere Kurven und deren diverse Darstellungen und Erzeugungen (Astroide etc.) fand ich besonders gut und die Inhalte und Methoden dieser Arbeit, waren am interessantesten und haben langfristig wahrscheinlich zum größten Verständnis geführt.“

Die Ausführungen anderer SchülerInnen gingen in die gleiche Richtung – leider waren nach nunmehr 6 Jahren nicht mehr so viele SchülerInnen erreichbar, insbesondere fehlen mir Stellungnahmen der Leistungsstärksten.

2.3 Langfristige und nachhaltige Konzepte für den Mathematikunterricht mit CAS

Bei mir sind es elf Konzepte, die den Mathematikunterricht mit dem Computer besonders bestimmen und die teilweise auch bei anderen FachkollegInnen wieder erkennbar sind.

Konzept 1	Das Wechselspiel zwischen Term, Graph, Tabelle, Text
Konzept 2	Visualisierung
2a	Visualisierung tragender Begriffe und Inhalte
2b	selbst erstellte Animationen
Konzept 3	Durchgängiges Arbeiten mit Modulen (siehe „Bausteindreieck“)
Konzept 4	Häufige Verwendung von Families / Gesamtheiten (Scharen, Büschel, ...)
Konzept 5	Durchgängige Verwendung bestimmter Fachinhalte, die durch CE besonders unterstützt werden, insbesondere Parameterdarstellungen $[x(t), y(t)]$, Matrizen in diversen Anwendungen
Konzept 6	Häufige Arbeitsweise: Neugierig machen - experimentieren – vermuten – begründen
Konzept 7	Modellbildungsprozesse mit CAS-Hilfe
Konzept 8	Mathematik auf und mit Bildern
Konzept 9	Gelegentliches Aufbrechen der üblichen Lehrplanstruktur
Konzept 10	Durchgehende Verwendung und Reflexion des White-Box / Black-Box – Prinzips
Konzept 11	Rechnen - Abwägen zwischen Nutzung des CAS und Handrechnung

- Die hier genannten Konzepte beziehen sich im Wesentlichen auf den CAS-Einsatz, gelten teilweise aber auch für andere Mathematik-Software.
- Weitere Konzepte für einen erfolgreichen Mathematikunterricht (auch ohne Rechner) werden hier nicht betrachtet.
- Die einzelnen Konzepte werden nun überblicksartig erläutert. Später wird dann auf die meisten Konzepte in Extrakapiteln genauer eingegangen, siehe Inhaltsverzeichnis.

Wichtig! → Es wird ausdrücklich auf Kapitel 2.4 verwiesen!

„Die in 2.3 vorgestellten Konzepte werden CAS-AnfängerInnen selbstverständlich nicht alle sofort beachten können. Die gemeinsame Verfolgung der Konzepte im Unterricht wird erst in einem weit fortgeschrittenen Unterricht mit Computern möglich.“ – Näheres dazu in Kap. 2.4.

Konzept 1

Term, Graph, Tabelle, Text

Dieses Konzept ist unter Verwendung des Computers besonders nachhaltig wegen der schnell erzeugbaren Darstellungen, wegen der zeitlichen und räumlichen Nähe, wegen der ständigen Wiederverwendbarkeit der Darstellungsformen.

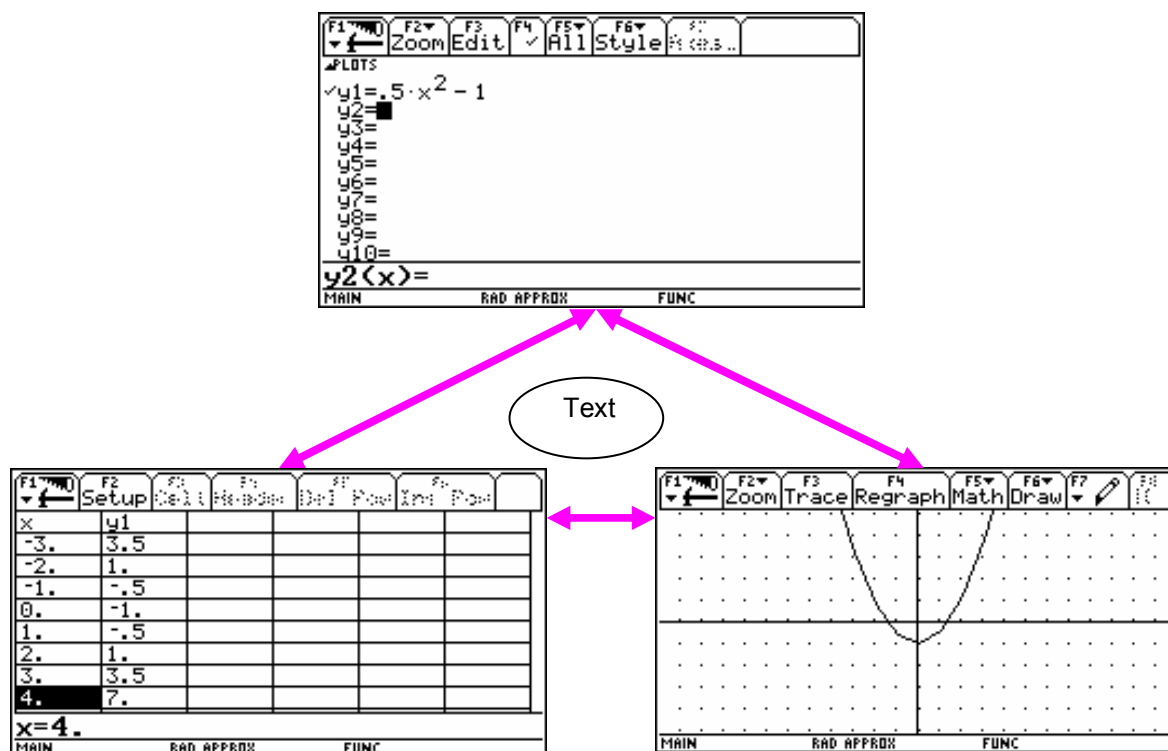


Abbildung 2.3a

Das Wechselspiel zwischen diesen Darstellungsformen hat sich als fundamental für die Arbeit mit einem CAS erwiesen. Dadurch hat der Schüler verschiedene Sichtweisen auf den jeweiligen Unterrichtsgegenstand, Sichtweisen, die sich dann gegenseitig ergänzen und ein besseres Verständnis für die Zusammenhänge bewirken. Eine Unterrichtssituation zu Abbildung 2.3-1 könnte z. B. sein.

Aufgabe: Gegeben ist Abbildung 2.3a. Erläutere in einem Aufsatz die Zusammenhänge zwischen den drei Bildschirmausdrucken und „Text“.

Wegen der weiten Verbreitung dieses Konzept und der vielen in der Literatur vorhandenen Beispiele wird hier auf nähere Erläuterungen verzichtet. In dem vorliegenden Buch finden sich aber in anderen Kapiteln etliche Beispiele.

Es wird darauf hingewiesen, dass dieses Konzept letztlich auch zur Entwicklung neuer CAS-Programme bzw. Taschencomputer beigetragen hat, die nun eine enge Verknüpfung zwischen den Teilen Term, Graph, Tabelle, Text ermöglichen; hier ist z.B. der Taschencomputer TI-Nspire von Texas Instruments zu nennen, der auch in diesem Buch mehrfach benutzt wird.

Konzept 2

Visualisierungskompetenz

Nirgends zeigt sich der Mehrwert des CAS-Einsatzes im Mathematikunterricht so deutlich wie beim Visualisieren und Animieren von Zusammenhängen. Hierin liegt der Schlüssel zu einem besseren mathematischen Verständnis und der Zusammenhänge – übrigens eine bei SchülerInnen-Umfragen immer wieder von ihnen bestätigte Aussage.

Was visualisiert man im M-Unterricht (bezogen auf Funktionen / Relationen)	Von Hand gebräuchlich / noch sinnvoll und mit CAS erst recht möglich	Mehrwert durch CAS Das wird man nur noch mit dem Computer visualisieren
Einzelne Objekte darstellen	X	X
Wertetabelle für eine/zwei Terme anlegen	X	X
Maßstab beachten	X	X
Auch viele Objekte gleichzeitig oder nacheinander darstellen, Scharen, Büschel, ...diese können strukturiert werden		X
Wertetabelle für viele Terme anlegen		X
Ausschnitte, Fenster, window-shuttle, Zoomen, weitere Maßstabsüberlegungen		X
Andere Koordinatensysteme (Parameter, polar,...) benutzen		X
Koordinatentransformationen, Abbildungen durchführen, z.B. mit Matrizen		X
Animationen interpretieren und erstellen		X
den Zufall darstellen, Simulationen durchführen		X
Mit vorgegebenen Bildern arbeiten – erläutern – strukturieren – ergänzen – Teilbereiche betrachten	X	X

Abbildung 2.3b: Der Mehrwert des Computereinsatzes beim Visualisieren (CAS-bezogen)

Die Abbildung belegt diesen Sachverhalt in deutlicher Weise. Man kann eben von Hand nicht so schnell und übersichtlich Zeichnungen herstellen. Zudem können am Computer eventuelle Fehler sofort korrigiert werden. In diesen Visualisierungsmöglichkeiten liegt dann im Unterricht eine große Zeitersparnis. Zu beachten ist dabei allerdings, dass die wichtigen Zeichnungen auch dokumentiert werden müssen. Und außerdem:

- Von großer Bedeutung ist richtige Wahl eines problemangepassten Maßstabs!
- Das Interpretieren von Abbildungen gehört zu den grundlegenden Kompetenzen!

Visualisierung und Animation tragender Begriffe und Inhalte

Von besonderer Bedeutung für den Unterricht ist, dass man häufig auch die wichtigen Begriffsbildungen und Fachinhalte visualisieren oder auch animieren kann.

→ Häufig (natürlich passend) visualisieren – und dadurch besser und mehr verstehen!

Beispiele sind:

Analysis:	Ableitungsbegriff, Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung
Algebra:	Gleichungen lösen (SOLVE) und visualisieren, Animation der Matrizenmultiplikation mit Power Point
Stochastik:	Zufallspunkte und ihre Transformation, Simulation
Formeln	Module visualisieren

Beispiel: Mit Differenzenquotienten zur Ableitung von $y = \ln(x)$

Abbildung 2.3c bringt die Visualisierung von Überlegungen zur Ableitung der ln-Funktion.

1) Zur Erinnerung für die SchülerInnen werden zunächst Graphen der Differenzenquotientenfunktionen zu $y = e^x$ gezeichnet (für $h \rightarrow 0$, z.B. bis $h = 0.001$). Es ergibt sich wieder die e-Funktion.

2) Nun werden die Differenzenquotientenfunktionen für $y = \ln(x)$ gezeichnet. Gegen welche Funktion laufen diese?

3) Es könnte die Funktion $y = \frac{1}{x}$ sein. Diese wird gezeichnet und die Wertetabellen zu $y = \frac{1}{x}$ und zu $(\ln(x+0.01)-\ln(x))/0.01$ verglichen. Es ergibt sich eine gute Übereinstimmung die für kleineres h noch weiter verbessert werden kann. – Also gilt wohl $(\ln(x))' = \frac{1}{x}$.

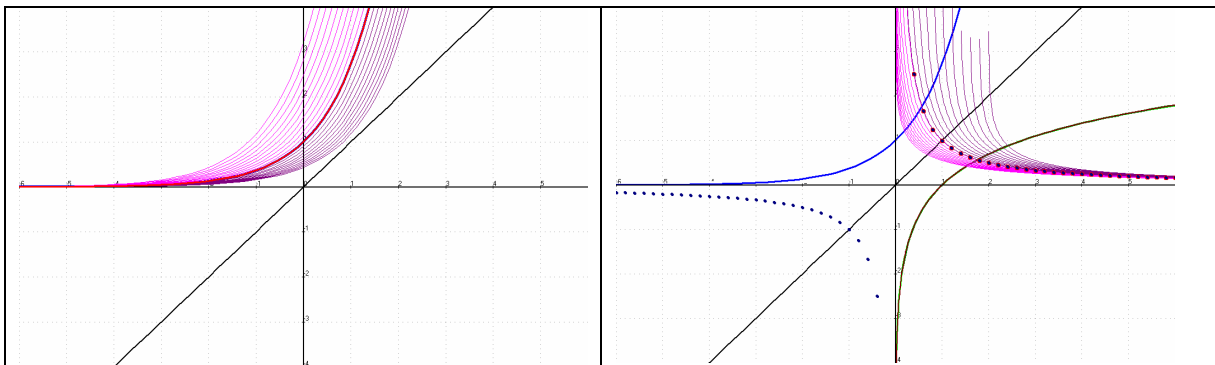


Abbildung 2.3c: Mit

Hilfe der Graphen der Differenzenquotientenfunktionen: Von der Ableitung der e-Funktion zur Ableitung $(\ln(x))'$. Identifizierung der Ableitungsfunktion als $1/x$ (graphisch und mit Wertetabelle)

Diese Animation ist gut dazu geeignet, die Ableitung von $y = \ln(x)$ zu erkennen - auch für den Grundkurs. Die Ableitung wird graphisch und durch Tabelle bestätigt. Falls noch Beweisbedürfnis vorhanden ist, müsste noch die rechnerische Herleitung folgen, was aber dann dem Leistungskurs vorbehalten bleibt.

Angesichts seiner besonderen Bedeutung wird dem Visualisierungskonzept später noch ein eigenes Kapitel gewidmet.

→ Visualisierung, siehe Kapitel 4.

Konzept 3

Arbeiten mit Modulen - modulare Kompetenzen

Module mit Parametern werden von vielen Computersystemen bereitgestellt oder können vom Benutzer selbst definiert werden. Da sie ein grundlegendes Konzept sind, finden sie in verschiedenen Kapiteln zahlreiche Beispiele. Kapitel 6 geht ausführlich auf das Konzept ein. Vorerst orientieren wird uns an einem Parabel-Baustein mit drei Parametern (Syntax ANI-MATO).

Parabel-Baustein und einige Aufrufe

f1: $a*(x-b)^2+c$	Beim TI-Voyage $a*(x-b)^2+c \rightarrow \text{parabel}(x,a,b,c)$
f2: $f1(1,0,0)$	f3: $f1(1,7,u)$
f4: $f1(1,v,-2)$	f5: $\{f1(v,7,-2)<-2:f1(v,7,-2):undef\}$

Man erkennt die Definition des Bausteins in f1 und vier verschiedene Aufrufe des Bausteins in f2, f3, f4, f5. So zeichnet f3 in Abhängigkeit von dem u-Bereich eine Schar paralleler Parabeln der Form $y = (x - 7)^2 + u$.

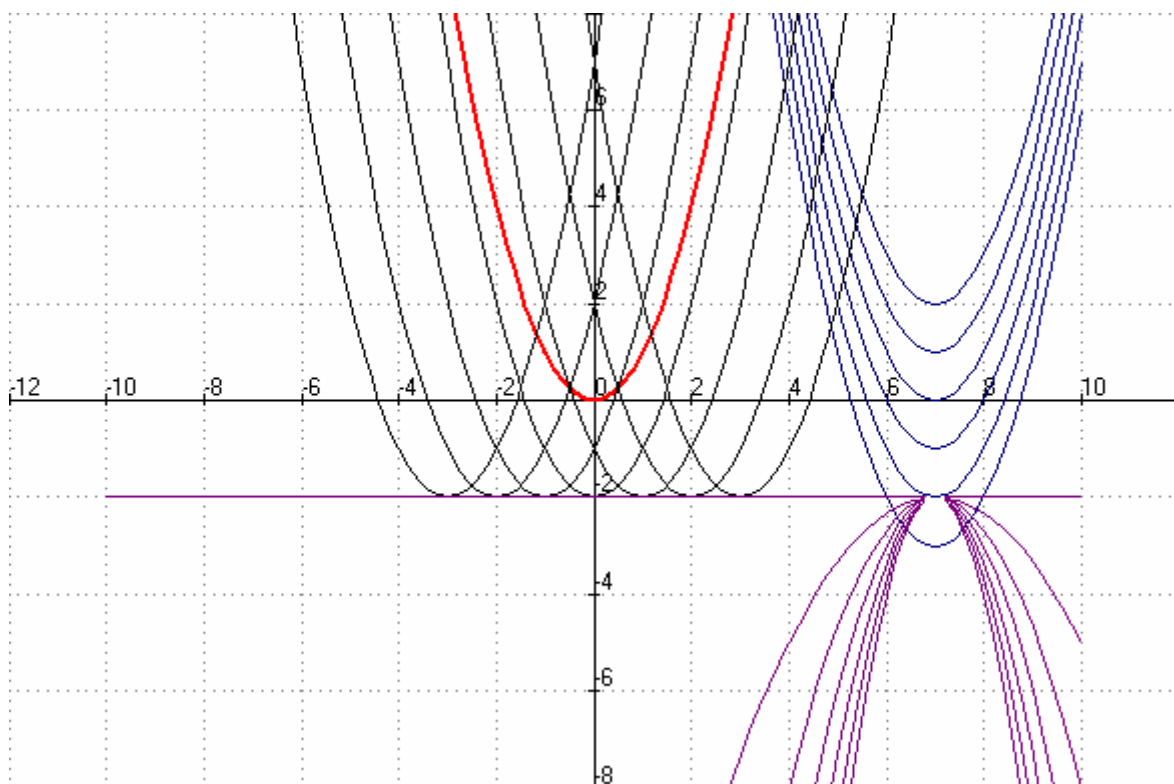


Abb. 2.3.d: Visualisierung zum Parabelbaustein

Das durchgängige Arbeiten mit Modulen / Bausteinen und ihren Parametern führt im Unterricht zu erheblichen Vorteilen.

Komprimierung von Wissen: Bausteine (Module) können als kompakte Einheiten aufgefasst werden, in denen das (mathematische) Wissen verdichtet ist und in denen die Operationen als Paket abgerufen werden können

Komprimierung langer Terme: Mit einem Baustein können lange komplizierte Terme abgekürzt werden und sind so leichter handhabbar.

Wiederverwendbarkeit: Bausteine sind wiederverwendbar .

Modellbildung: Bausteine können von den Schülern selbst definiert werden und tragen damit zur eigenständigen Modellierung von Problemen durch die Schüler bei.

Anwendungsfeld: Passend definiert können Bausteine durch geeignete Einsetzungen von Parameterwerten ein breites Anwendungsfeld abdecken.

Experimentelles Arbeiten: Bausteine ermuntern die Schüler, Einsetzungen für die vorhandenen Parameter zu erproben und leisten damit einen wesentlichen Beitrag zum experimentellen Arbeiten.

Allgemeine Lösungen: Die Suche nach passenden Bausteinen ist gleichzeitig eine Suche nach allgemeinen Lösungen von Problemen. - Die **Formeln** in den Formelsammlung **sind Bausteine**

Vernetzung: Bausteine können miteinander verknüpft werden und damit auch mathematische Gebiete miteinander vernetzen. Damit können zuweilen auch sehr komplexe Lösungen in kurzer Form dargestellt werden.

Programmieren: Bausteine können in vielen Fällen das Schreiben von Programmen ersetzen.

Ziele eines modulatorientierten Mathematikunterrichts sind

- Definieren von Modulen
- Analysieren von Modulen, Nutzen von Modulen für experimentelles Lernen
- Entwickeln eines "Modulpools" als Werkzeugkasten für das Problemlösen
- Nutzen von Modulen als „Black-Boxes“
- Verknüpfung von Modulen, Entwickeln neuer, komplexerer Module durch Nutzen bekannter Module als Bausteine

Die Ergebnisse der Arbeit mit mehreren Lerngruppen zeigen, dass SchülerInnen, die mit dem modularen Arbeiten vertraut sind, diese Module tatsächlich als neue Sprachelemente beim Problemlösen und Erforschen mathematischer Sachverhalte nutzen.

→ Weitere Ausführungen zum Baustein- / Modulkonzept erfolgen in Kapitel 6 →

Konzept 4

Gesamtheiten / Families - Scharen, Büschel – Vergleichen

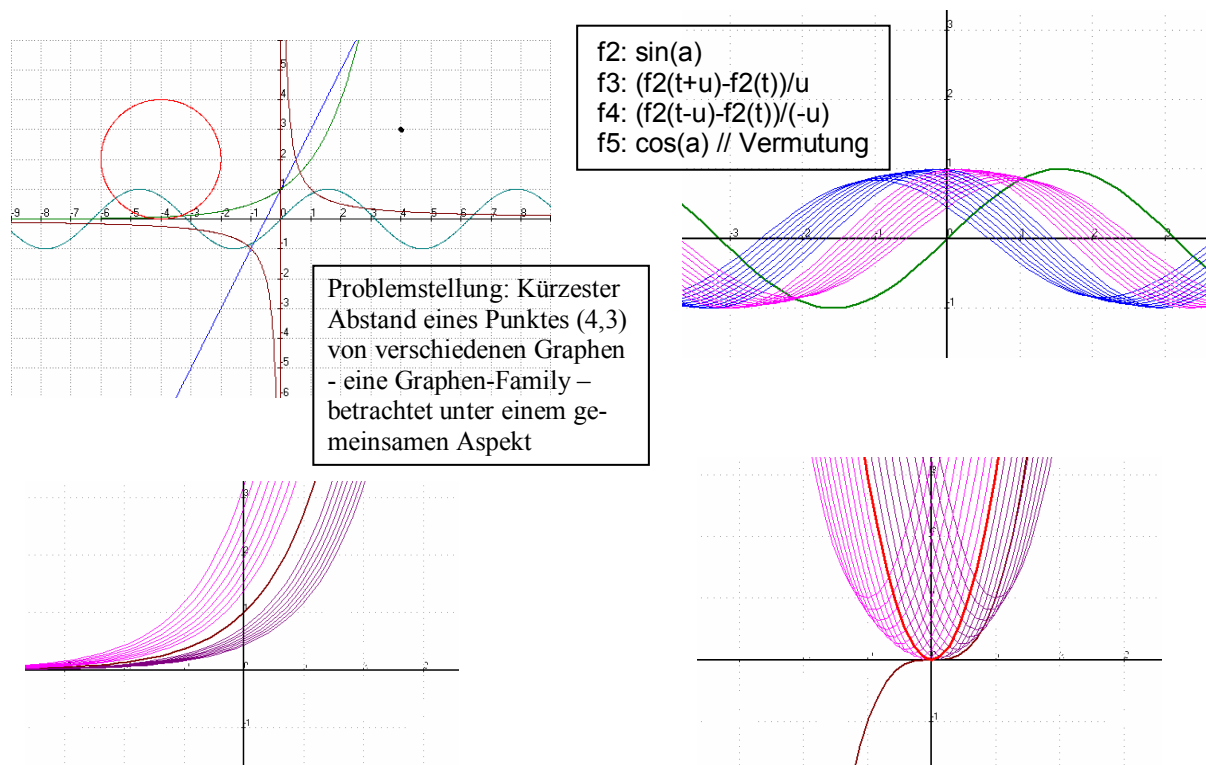


Abbildung 2.3e: Oben: Graphen-Family, rechts und unten: Kurvenscharen, hier für Differenzenquotienten-Funktionen

Dieses Konzept hat sich als außerordentlich fruchtbar für meine Unterrichtsarbeit erwiesen.

Was ist ertragreicher für Unterricht und Erkenntnis – eine einzelne Gerade, eine Schar paralleler Geraden? Ein Kreis – ein Menge konzentrischer Kreise?

Bei dem oben benutzten Abstandsproblem „Punkt – Graph“ besteht die Mannigfaltigkeit in den unterschiedlichen Funktionstypen, die dann auch Vergleiche herausfordern – das ist viel spannender als nur mit einer Funktion zu arbeiten!

Die Idee der Differenzenquotienten-Graphen (siehe oben) führt einerseits wieder zu den einzelnen Funktionsscharen mit einer Grenzfunktion, andererseits wird deutlich, dass es sich immer um dieselbe fundamentale Idee handelt. Warum also nicht auch hier verschiedene Funktionstypen quasi gleichzeitig betrachten? Damit trennt sich der Lehrer an dieser Stelle von der leider immer wieder in den Lehrplänen zu findenden sequentiellen Anordnungen, die alles schön brav nacheinander anbieten. Siehe hierzu auch das noch folgende Konzept 9.

Konzept 5

Durchgängige Verwendung bestimmter zusätzlicher Fachinhalte, die durch CE besonders unterstützt werden

In einem Extrakapitel (Kapitel 9) wird auf einige Gebiete abgehoben, die den bisherigen Mathematiklehrplänen (aber nicht unbedingt im Unterricht einiger Lehrpersonen!) eher eine untergeordnete Rolle gespielt haben, insbesondere wegen möglicherweise aufwendiger Zeichnungen oder Rechnungen. Es gibt genügend Fachleute, die in ihrem Unterricht seit langem

solche Themen mit großem Erfolg berücksichtigt haben, was sich auch in der Fachliteratur widerspiegelt.

→ Dazu werden u.a. Parameterdarstellungen $[x(t), y(t)]$ und Matrizen in diversen Anwendungen gezählt. Siehe Kapitel 9.4→ .

Konzept 6

Neugierig machen - experimentelles Arbeiten – vermuten – begründen

Viele der oben genannten Beispiele sind auch für Konzept 6 passend, so dass hier keine ausführlicheren Darstellung nötig sind. Experimentelles Arbeiten führt auch immer zu einem offenen Unterricht, zum Entdecken neuer Sachverhalte und neuen Fragestellungen, zur Eigenständigkeit der SchülerInnen und ist in der Regel spannend. Damit ist diese Arbeitsweise, die durchgehend besonders gut mit Technologieanwendung möglich ist, unverzichtbar.

→ Ausführliches in Kapitel 9.3 →

Konzept 7

Modellbildungsprozesse durch CAS fördern

Hierzu gibt es vielfältige Möglichkeiten. Einige werden auch schon in den obigen Ausführungen deutlich . Hier wird ein Beispiel gezeigt, in dem ein Kunstbild modelliert – angenähert rekonstruiert – wird, siehe Kapitel 1.2.2. Der Hintergrund dieses Bildes ist blau, darauf sieht man kleine und größere dunkelblaue Punkte. Auf dem Hintergrund befinden sich weiterhin je fünf horizontale bzw. vertikale, jeweils parallele Sinuskurven in weiß. Dazwischen sind insgesamt 6 gelb ausgefüllte Kreise in unterschiedlicher Größe platziert.

Hinweis: Eine exakte Rekonstruktion des Bildes wurde nicht angestrebt.

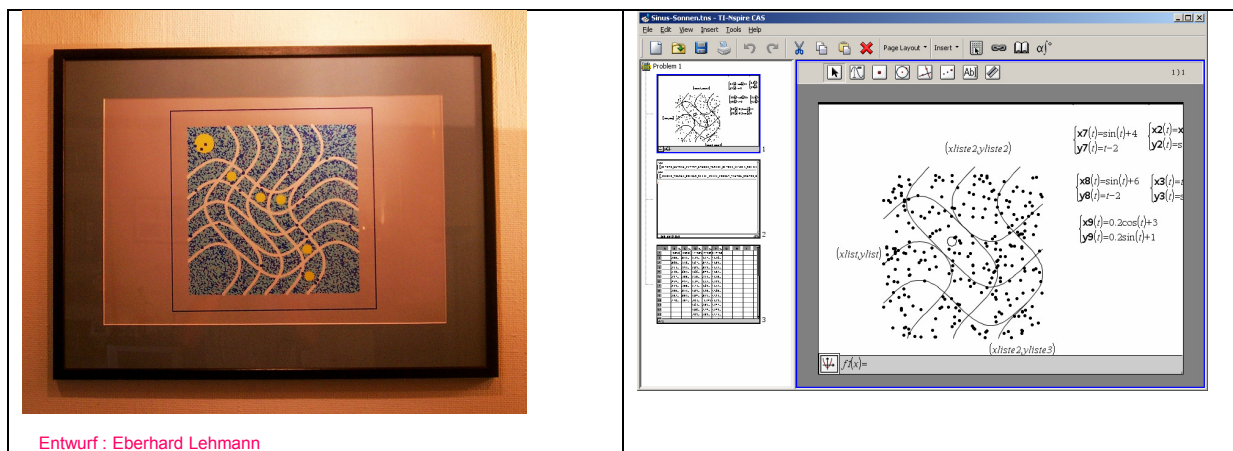


Abbildung 2.3f: Modellieren mit dem CAS in einer DERIVE-Einführungsstunde, siehe Kapitel 1.2.2 -hier wird das Bild einer Modellierung mit der Software TI-Nspire gezeigt, siehe Kapitel 1.2.3.

Einige Aspekte, die den Mehrwert des CAS-Einsatzes bei Modellierungen begründen, sind:

- Ideen / Ansätze visualisieren
- Vorausrechnungen / Testrechnungen durchführen
- Lösungen auf Verwendbarkeit überprüfen, ggf. schnell ändern
- Das Modell anwenden, Modellrechnungen /-zeichnungen mit dem CAS durchführen

→ Auch über Modellbildung gibt es ein Extrakapitel, siehe Kapitel 7→

Konzept 8

Mathematik auf Bildern – Spuren legen

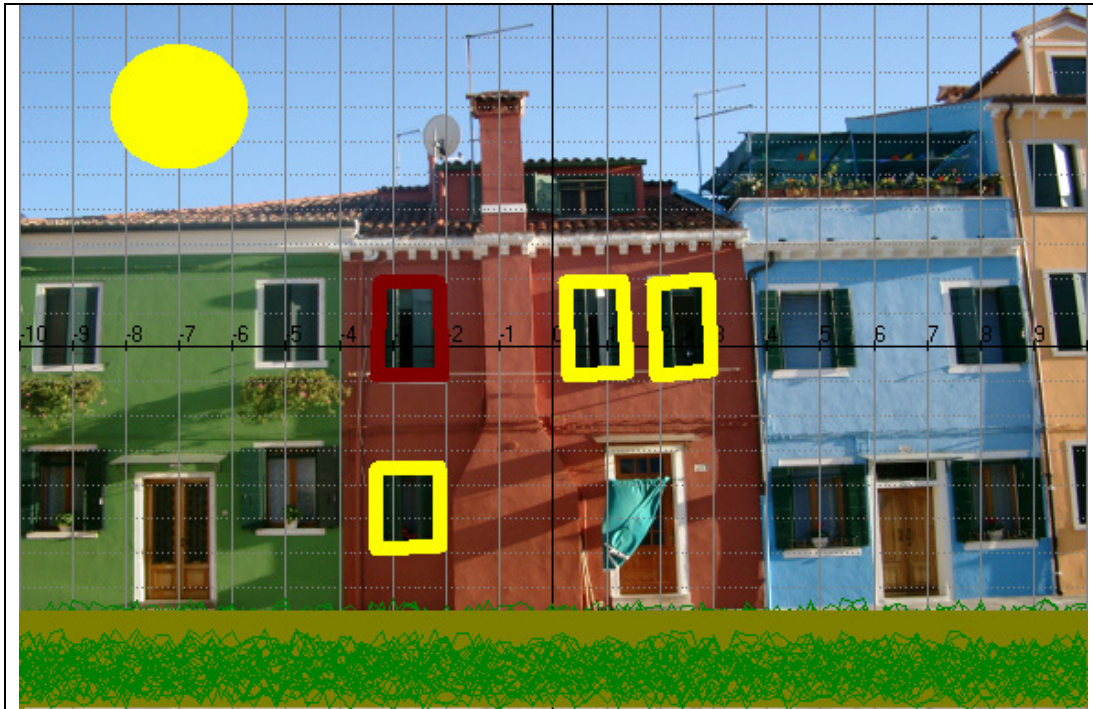


Abbildung 2.3g: Auf dem Bild von der Insel Burano (bei Venedig) werden mathematische Spuren gelegt.

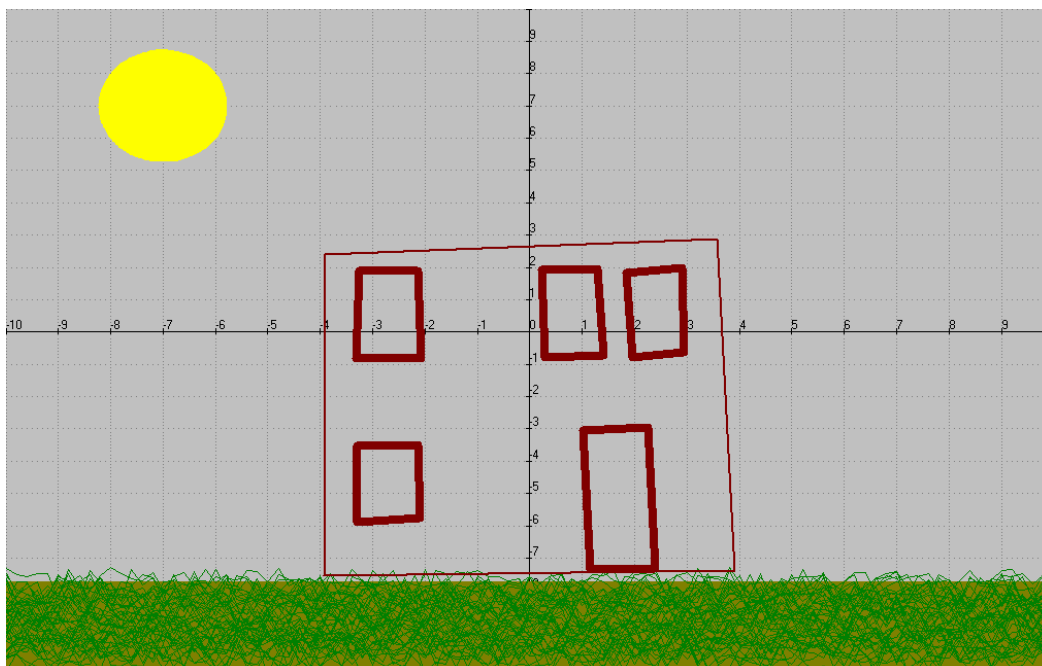


Abb.2.3-11: Die auf dem Burano-Bild gelegten Spuren

Die Idee der Verwendung von Bildern mit mathematischen Objekten wurde bereits oben deutlich. Das Bild von Burano kann beispielsweise in Klasse 6/7 vorgelegt werden, überzogen mit einem Koordinatensystem. Die Eckpunkte der Fensterrahmen können nun von den SchülerInnen als Punkte abgelesen werden. Andere Objekte können das Bild ergänzen (Üben im Umgang mit Koordinaten). Für beide Sekundarstufen gibt es mit dem Ansatz „Spuren legen“ eine Fülle von Anwendungen, die auch von SchülerInnen initiiert werden können (Fotosafari mit

dem digitalen Fotoapparat). Hier folgt noch eine Seite mit mathematisch interessanten Inhalten.

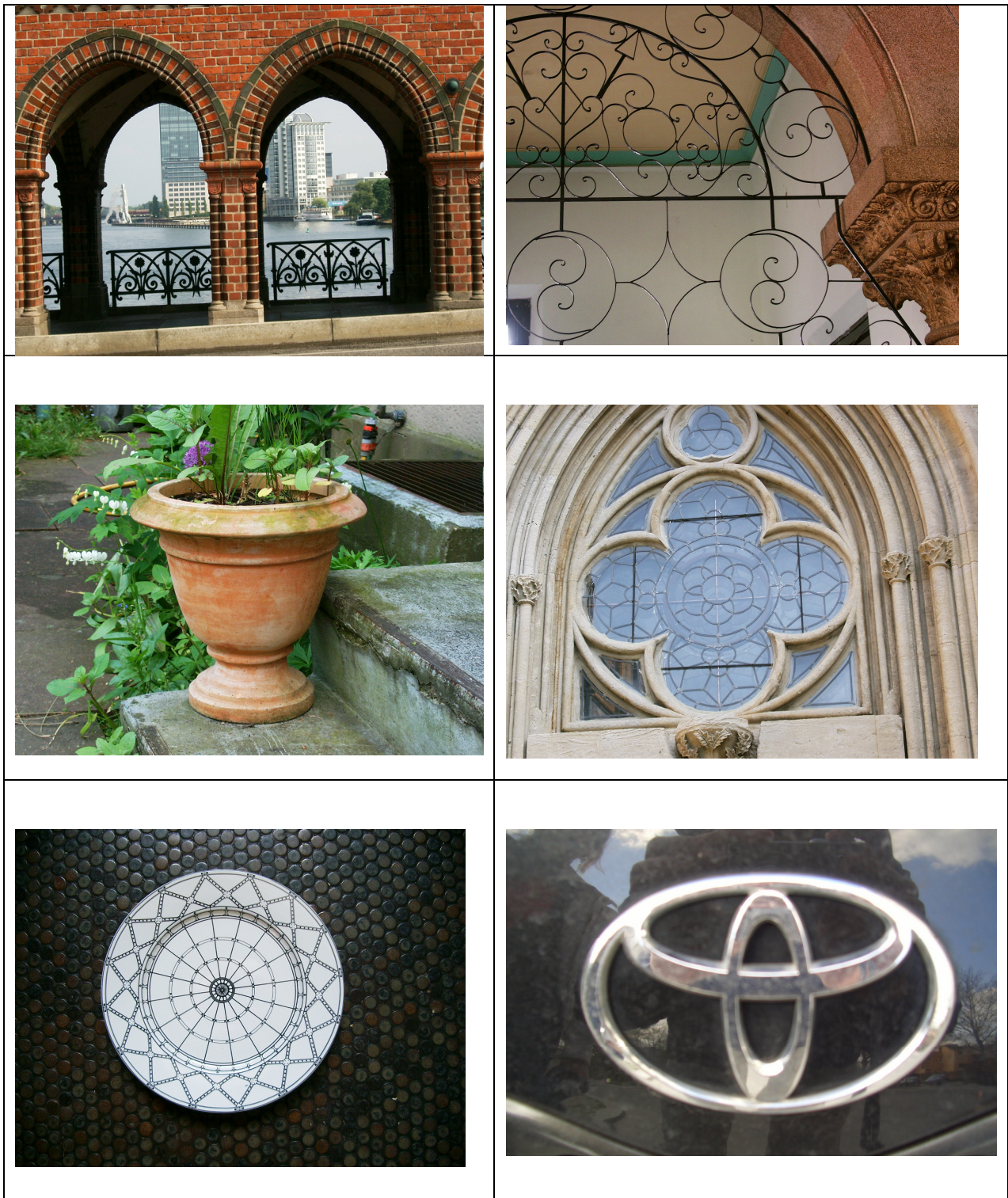


Abb. 2.3h: Beispiele für Bilder mit Mathematik

Konzept 9

Aufbrechen der sequentiellen Lehrplanstruktur

Mit diesem Ansatz kann die Lehrperson Zeit sparen und rationeller arbeiten. Das geschieht durch gelegentliche Zusammenlegungen von Lehrplanthemen, durch die gleichzeitige Bearbeitung von Themen, die im Lehrplan häufig weit voneinander getrennt vorkommen.

Beispiele für die Verfolgung dieses Konzept sind die gleichzeitige Behandlung von Funktionstypen (siehe oben: Abstandsaufgabe), Ableitungen, Hüllkurven, Integralen usw.

→ siehe besonders Kapitel 5 und Kapitel 9.2 →

Zusammenfassung:

Unterrichtskonzepte sollten nicht versteckt im Hintergrund lagern und nur dem Lehrer bekannt sein. Sie sind auch wichtig für die Ausbildung der Schülerkompetenz und für deren langfristiges Verständnis von Mathematik. Mit Recht haben meine SchülerInnen oben auf den durchgängigen Computereinsatz verwiesen (da wo er den Mathematikunterricht verbessert!). Die oben geschilderten Konzepte werden nur dann wirksam, wenn sie von Beginn des Rechnereinsatzes an verfolgt und reflektiert werden.

Konzept 10

Durchgehende Verwendung und Reflexion des White-Box / Black-Box – Prinzips

Diese Prinzipien sind fundamental für die Arbeit mit Computern. Sie werden in Kapitel 3 ausführlich erläutert.

→ siehe Kapitel 3 →

Konzept 11

Abwägen zwischen Nutzung des CAS und Handrechnung bzw. Handzeichnung

Dieses Problem ist in jeder Unterrichtssequenz von neuem aktuell. Feste Regeln für Handrechnung / Handzeichnung oder CAS-Rechnen / CAS-Zeichnen sollte man nicht aufstellen. Vielmehr richtet sich das nach der jeweils vorliegenden Unterrichtssituation, aber eben auch den langfristigen Zielen. Hierfür lassen sich einige Empfehlungen geben, die teilweise auch für den Mathematikunterricht ohne CAS gelten:

- **Weg mit allen „Aufgabenkaskaden“ (Terme, Gleichungen, Integrale, Ableitungen, Kurvendiskussionen, ...), also den seitenweise ähnlichen Hand-Aufgaben**
- **Weg mit der Vielzahl von Wertetabellen und den oft ungenauen Handzeichnungen**
- **Hinweis: In Maßen und angemessen eingesetzt, bleibt das Rechnen und Zeichnen von Hand selbstverständlich sinnvoll, insbesondere in den ersten Phasen eines neu zu behandelnden Themenkreises.**

→ mehr dazu siehe Kapitel 3 →

2.4 Wachsende Kompetenz der Lehrperson

Die in 2.3 vorgestellten Konzepte werden CAS-AnfängerInnen selbstverständlich nicht alle sofort beachten können. Die gemeinsame Verfolgung der Konzepte im Unterricht wird erst in einem weit fortgeschrittenen Unterricht mit Computern möglich. Die Kompetenz der Lehrperson wird sich schrittweise erweitern, möglicherweise zeigt ihnen auch die zunehmende Erfahrung, dass sie nicht alle Konzepte verfolgen wollen oder es kommen noch eigene Konzepte dazu. Schließlich sind die hier genannten Konzepte aus einem Bündel von Quellen erwachsen:

- Langwährende sehr vielfältige eigene Erfahrungen
- Aufnahme von in Veröffentlichungen dargestellten Unterrichtserfahrungen
- Berücksichtigung von SchülerInnen-Reaktionen (Beobachtung, mündliche und schriftliche Befragungen)
- Berücksichtigung von Diskussionen auf Tagungen, mit CAS-Arbeitsgruppen und in Lehrerfortbildungs- und Weiterbildungsveranstaltungen
- Der praktischen Arbeit mit LehrerInnen in CAS-Projekten an Schulen

Deshalb nun einige Empfehlungen, wie man die Vielzahl der Konzepte in seinem Unterricht zunehmend berücksichtigen kann. Dazu wird noch einmal die Eingangsabbildung aus 2.3 benutzt und es werden Empfehlungen für die grundlegendsten Konzepte gegeben. Die Abbildung zeigt jetzt Stufungen und eine andere Anordnung der Konzepte.

Beachten sie jedoch, dass man die Konzepte nicht klar voneinander trennen kann (und das auch nicht versuchen sollte). Vielmehr entwickeln sich LehrerInnen- und SchülerInnen-Kompetenzen auch in der Verknüpfung der Konzepte, die im Unterricht häufig auch ganz ungeplant erfolgen kann.

Stufe 1

Konzept 1	Das Wechselspiel zwischen Term, Graph, Tabelle, Text
Konzept 2	Visualisierung
2a	Visualisierung tragender Begriffe und Inhalte
Konzept 11	Rechnen - Abwägen zwischen Nutzung des CAS und Handrechnung

Stufe 2

Konzept 3	Durchgängiges Arbeiten mit Modulen (siehe „Bausteindreieck“)
Konzept 4	Häufige Verwendung von Families / Gesamtheiten (Scharen, Büschel, ...)
Konzept 10	Durchgehende Verwendung und Reflexion des White-Box / Black-Box – Prinzips
Konzept 6	Häufige Arbeitsweise: Neugierig machen - experimentieren – vermuten – begründen

Stufe 3

Konzept 7	Modellbildungsprozesse mit CAS-Hilfe
Konzept 5	Durchgängige Verwendung bestimmter Fachinhalte, die durch CE besonders unterstützt werden, insbesondere Parameterdarstellungen $[x(t), y(t)]$, Matrizen in diversen Anwendungen
Konzept 8	Mathematik auf und mit Bildern

Stufe 4

Konzept 9	Gelegentliches Aufbrechen der üblichen Lehrplanstruktur
Konzept 2b	selbst erstellte Animationen

Versuch einer Zuordnung von Kapiteln zu den Konzepten

Konzepte – Stufungen Hinweis: Die Kapitel enthalten mehrfach auch Ausführungen, insbesondere Beispiele, die zu verschiedenen Konzepten passen. Alle Konzepte werden überblicksmäßig, also kurz in Kapitel 2 beschrieben.		Schwerpunkt- mäßig in (Teil-) Kapitel
Stufe 1		
Konzept 1	Das Wechselspiel zwischen Term, Graph, Tabelle, Text	2
Konzept 2	Visualisierung	4
2a	Visualisierung tragender Begriffe und Inhalte	4
Konzept 11	Rechnen - Abwägen zwischen Nutzung des CAS und Handrechnung	3

Stufe 2		
Konzept 3	Durchgängiges Arbeiten mit Modulen (siehe „Bausteindreieck“)	6, 5,
Konzept 4	Häufige Verwendung von Families / Gesamtheiten (Scharen, Büschel, ...)	5,
Konzept 10	Durchgehende Verwendung und Reflexion des White-Box / Black-Box – Prinzips	3, 6
Konzept 6	Häufige Arbeitsweise: Neugierig machen - experimentieren – vermuten – begründen	9

Stufe 3		
Konzept 7	Modellbildungsprozesse mit CAS-Hilfe	7, 6
Konzept 5	Durchgängige Verwendung bestimmter Fachinhalte, die durch CE besonders unterstützt werden, insbesondere Parameterdarstellungen $[x(t), y(t)]$, Matrizen in diversen Anwendungen	9, 4
Konzept 8	Mathematik auf und mit Bildern	8

Stufe 4		
Konzept 9	Gelegentliches Aufbrechen der üblichen Lehrplanstruktur	9
Konzept 2b	Selbst erstellte Animationen	4

3. Hand contra CAS - White-Box und Black-Box – Wieviel mit dem CAS – wieviel noch von Hand?

3.1 Handwerkliche Fähigkeiten

Eine der in Gesprächen über den Einsatz von CAS im Unterricht am häufigsten gestellten Fragen ist die nach den Anteilen des Computereinsatzes und den noch verbleibenden händischen, also insbesondere den Rechen- oder Zeichenanteilen. Zum Rechnen wird immer wieder die Meinung vertreten,

- a) dass man doch die Kalküle üben müsse und
- b) dass das ja später an der Universität gefordert werde.

Zu a) Das Üben von Kalkülen

Die lange Zeit in den Schulbüchern befindlichen „Aufgabenkaskaden“ haben sich dort aus gutem Grund erheblich reduziert. Sie bringen nämlich nichts für einen nachhaltigen Mathematikunterricht, da sie in der Regel fast nur für die gerade besprochene Thematik nützlich sind und sich zudem durch besondere Langweiligkeit auszeichnen – also die Motivation für den Mathematikunterricht nicht gerade fördern. Nach der nächsten einschlägigen Klassenarbeit werden sich die Fertigkeiten vor dem Hintergrund neuer Themen schnell wieder verflüchtigen. Man wird außerdem auch nie erreichen, dass alle Beteiligten (LehrerInnen eingeschlossen!) zum Beispiel umfangreichere Gleichungen immer ohne Fehler lösen können. Also:

Weg mit den Aufgabenkaskaden zu den durch Algorithmen bestimmten Themen und dafür hin zu mehr Verständnis der Sachverhalte und zu einem verständigen Einsatz eines CAS.

Zu b) Leider unterliegen auch etliche Universitätslehrer den oben geschilderten Fehleinschätzungen. Jedenfalls sind solche Lehrpersonen (auch ihre Anzahl nimmt ab) kein Grund, um an der Schule nicht zeitgemäß zu unterrichten.

Während man sich an vielen Stellen der Notwendigkeit zur Vermeidung unnützer und langweiliger Rechnungen einig ist, wird das Thema „Zeichenaufwand“ kaum thematisiert. Dabei ist die Problematik hier ähnlich, allerdings eigentlich noch leichter zu erkennen. Was bringt die häufige Erstellung fehleranfälliger Wertetafeln? Falsch berechnete Werte führen zu falschen Zeichnungen und behindern den Arbeitsfortgang. Also:

Weg mit den zahlreichen fehleranfälligen Wertetabellen und den falschen Zeichnungen und dafür hin zu viel mehr Visualisierungen durch den Rechner und Interpretationen der erhaltenen Tabellen und Zeichnungen.

Zur ersten Information über diese Thematik benutze ich Auszüge aus einem vieldiskutierten Aufsatz, der in Deutschland und mehrerer anderen Ländern in Europa sowie in den USA veröffentlicht wurde. Der vollständige Aufsatz kann nachgelesen werden in der Zeitschrift MNU 2001, Heft 8.

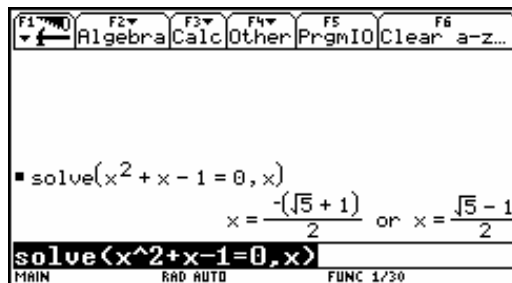
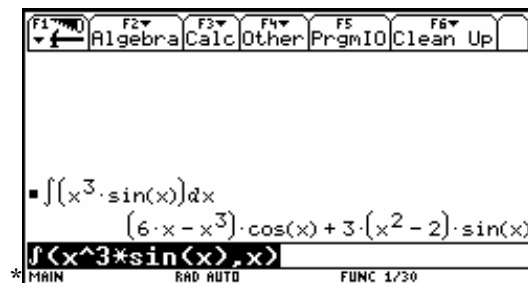
Welche handwerklichen Rechenkompetenzen sind im CAS-Zeitalter unverzichtbar?

Von Wilfried Herget, Helmut Heugl, Bernhard Kutzler, Eberhard Lehmann

Zusammenfassung: Wir gehen der Frage nach, welche handwerklichen Rechenfertigkeiten trotz der Verfügbarkeit algebraischer Taschenrechner und Computer mit Computeralgebra-Systemen (CAS) unverzichtbar sind: Was sollte auch in Zukunft jede Schülerin und jeder Schüler noch „per Hand“, d. h. allein mit Schreibstift und Papier, können? Dieser Text entstand in einer zweitägigen Diskussion der vier Autoren zu diesem Thema, ergänzt und überarbeitet aufgrund der Rückmeldungen verschiedener Kolleginnen und Kollegen. Das vorliegende Ergebnis ist sicherlich eine Herausforderung – wir möchten damit zu einer breiten Diskussion über im Mathematikunterricht zu vermittelnde unverzichtbare, dauerhaft verfügbare Rechenkompetenzen beitragen bzw. eine solche in Gang setzen.

Computeralgebra-Systeme (CAS)

Computeralgebra-Systeme (CAS) sind Rechenwerkzeuge, die die Ausführung algebraischer Rechenkalküle automatisieren. CAS können Terme vereinfachen, Funktionen symbolisch differenzieren und integrieren, Graphen zeichnen, Gleichungen und Gleichungssysteme lösen, Matrizen bearbeiten usw. Kurz: Sie helfen bei den meisten Inhalten, die heute im Fach Mathematik an den Schulen gelehrt werden.



Weit verbreitete CAS an deutschen und österreichischen Schulen sind das Computerprogramm Derive und die Taschenrechner TI-92 und TI-89. ... Solche Werkzeuge werden bald ebenso selbstverständlich sein, wie es heute numerische Taschenrechner sind. Damit werden Aufgaben wie „Differenziere $x^3 \sin^2(4x+5)$ “ ebenso leicht dem technischen Hilfsmittel übertragen werden können, wie dies heute ganz selbstverständlich etwa beim Berechnen von $\cos(1,3786)$ oder $\sqrt{5,67}$ geschieht. Die obigen Bildschirmabdrucke zeigen derartige Möglichkeiten.

Ausgangspunkt: Schriftliche Prüfung ohne Rechner

Wir gehen aus von einer zweigeteilten Prüfung, bei der ein Teil ohne moderne technische Hilfsmittel stattfindet – es darf also nicht einmal ein einfacher wissenschaftlicher Taschenrechner verwendet werden – während beim zweiten Teil Technologie¹ wie insbesondere leistungsfähige Taschenrechner und Computer mit CAS eingesetzt werden dürfen. Dieses Modell einer zweigeteilten Prüfung wird in manchen Ländern, z. B. in Österreich, erprobt; in anderen Ländern, z. B. in England, wird es bereits eingesetzt. Dieser Ansatz *könnte ein Kompromiss* sein, um sowohl den Wünschen der Technologie-Befürworter als auch den Vorbehalten der Technologie-Gegner zu entsprechen... Wir stellen uns im Folgenden eine fiktive *schriftliche* technologie-freie Prüfung vor und suchen nach Aufgaben und Aufgabentypen, die in einer derartigen Prüfung gestellt werden könnten.

Die Grenzziehung zwischen Aufgaben, die bei einer technologie-freien Prüfung gestellt würden, und Aufgaben, die bei einer solchen Prüfung nicht gestellt werden sollten, läuft auf die eingangs gestellte Frage hinaus, welche handwerklichen Rechenkompetenzen Schülerinnen und Schüler heute noch haben sollten. Die *fiktive Prüfungssituation* ist für uns daher Mittel zum Zweck, unsere Diskussion und die dabei erzielten Ergebnisse haben eine weit über Prüfungssituationen hinausgehende Bedeutung.

Das hier angesprochene Problemfeld dürfte fundamental sein für eine Weiterentwicklung des Mathematikunterrichts in den nächsten Jahren und Jahrzehnten. Insbesondere genügt es natürlich nicht, so wie hier allein die Bedeutung der Rechenfertigkeiten neu zu überdenken – der nächste Schritt muss sein, die sich daraus für den Unterricht ergebenden Konsequenzen zu diskutieren...

Drei Töpfe: –T, ?T, +T

Die gesuchte Grenze zwischen Aufgaben, die bei einer fiktiven technologie-freien Prüfung gestellt würden, und Aufgaben, die bei einer solchen Prüfung nicht gestellt werden sollten, ist fließend und hängt von vielen Parametern ab, natürlich auch vom Schultyp. Wir versuchen – eher aus der Sicht von Gymnasiallehrern – eine möglichst allgemeingültige Antwort und schaffen dazu drei „Töpfe“, die wir – T, ?T und +T nennen.

- Der erste Topf, –T (= ohne Technologie), beinhaltet jene Aufgaben, die bei einer technologie-freien Prüfung zu stellen wären. In diesen Topf kommen also all jene Aufgaben, von denen wir erwarten, dass Schülerinnen und Schüler sie ohne Zuhilfenahme irgendeines Taschenrechners oder Computers lösen können.
- Die durch den Topf –T bezeichneten Rechenfertigkeiten sollen ab der 8. Jahrgangsstufe gelten bzw. ab jener Jahrgangsstufe, in der der betreffende Stoff behandelt wird. Diese Rechenfertigkeiten sollen dann über die jeweilige Jahrgangsstufe hinaus *dauerhaft* erhalten bleiben und wirklich *jederzeit* gefordert werden können.
- Der dritte Topf, +T (= mit Technologie), beinhaltet jene Aufgaben, die bei einer solchen Prüfung nicht gestellt werden sollten, d. h. bei der Lösung dieser Aufgaben darf ein leistungsfähiger Taschenrechner oder ein Computer mit CAS verwendet werden.
- Der zweite Topf, ?T, spiegelt unsere Zweifel, unsere unterschiedlichen Einstellungen und zum Teil auch die grundsätzliche Problematik dieses Themas wieder. Bei den in diesem Topf gelandeten Aufgaben gingen die Meinungen der vier Autoren auseinander, oder wir waren uns einig, dass wir keine Zuordnung zu einem der beiden anderen Töpfe vornehmen wollten oder konnten. Dieser Topf kennzeichnet, wie fließend die Grenze für uns (noch) ist.

Wo immer es machbar war, haben wir das Spektrum und die Grenzen eines konkreten Aufgabentyps dadurch abgesteckt, dass wir vergleichbare Aufgabenvarianten für –T und +T angegeben haben....

Differenzieren – langfristige Mindestkompetenzen

	–T (ohne Technologie)	?T	+T (mit Technologie)
01	Diff. nach x : $y = x^4$		
02	Diff. nach x : $y = 7x^2 + 3x + 1$		
03	Diff. nach x : $y = \frac{1}{x^2}$		
04	Diff. nach x : $y = 3$		
05	Diff. nach x : $y = \sqrt{x}$		
06	Diff. nach x : $y = \sin x$	Diff. nach x : $y = x^2 + \cos x$	Diff. nach x : $y = x \sin x$
07		Diff. nach x : $y = 2 \cos x$	Diff. nach x : $y = \sin^2 x$
08		Diff. nach x : $y = 3 \sin 2x$	Diff. nach x : $y = \frac{\sin x}{x}$
09	Diff. nach x : $y = e^x$	Diff. nach x : $y = e^{2x}$	Diff. nach x : $y = 2^x$
10	Diff. nach x : $y = \ln x$		
11	Diff. nach x : $y = x $		

Diese Tabelle kennzeichnet einen weiteren Schwerpunkt der zukünftigen Entwicklung: Gerade im klassischen Analysisunterricht dominieren die Rechenfertigkeiten. Daher ist hier besonderer Veränderungsbedarf beim Einsatz moderner Technologie gegeben.

Höhere Anforderungen in Übungsphasen und Unterricht

Die Aufgaben im Topf +T sind solche, die wir in einer technologie-freien Prüfung nicht stellen würden – aber wir würden derartige Aufgaben auch in einer Prüfung nicht stellen, bei der moderne Rechner verfügbar sind: Denn diese Aufgaben erscheinen uns nur in einem passenden Problem-Zusammenhang als sinnvoll, nicht aber als isolierter Prüfungsteil. Sie wären wohl lediglich im Stande, Fertigkeiten in der Bedienung des Rechners zu testen.

Die von uns in den Topf –T gegebenen Aufgaben beschreiben eine langfristig zu erhaltende handwerkliche Kompetenz. Um dieses Ziel zu erreichen, sollte sehr wohl in der anfänglichen Übungsphase „die Latte entsprechend höher gelegt“ werden, und es könnte in begrenztem Umfang sogar sinnvoll sein, selbst Aufgaben aus +T im Unterricht auch *technologie-frei* zu üben.

Andere wichtige Kompetenzen

Neben der Rechenkompetenz gibt es auch noch andere, wichtige Kompetenzen, die ihre Bedeutung im CAS-Zeitalter behalten oder sogar an Bedeutung gewinnen – jedenfalls unverzichtbar sind ... Beispiele solcher Kompetenzen sind:

- die Kompetenz, Terme zu finden
- die Strukturerkennungskompetenz
- die Testkompetenz
- die Visualisierungskompetenz
- die Kompetenz, Technologie passend einzusetzen
- die Kompetenz, Rechnerarbeit passend zur Aufgabenstellung zu dokumentieren.

Zur Visualisierungskompetenz gehört z. B. die Fähigkeit, eine „richtige Handbewegung“ ausführen zu können, wenn der Verlauf des Graphen von zum Beispiel x^2 oder $\sin(x)$ gefragt ist.

In der Gesamtheit der im Mathematikunterricht zu vermittelnden Kompetenzen kommt der Rechenkompetenz eine wichtige Rolle zu. Sie zu vermitteln ist nicht nur Selbstzweck (dann wäre ihre Bedeutung angesichts leistungsfähiger Rechner sehr in Frage gestellt!), sondern in einem gewissen Rahmen auch erforderlich für den Erwerb und die Nutzung „höherer“ Kompetenzen wie den oben genannten. Daher spielen die genannten und weitere Kompetenzen bei der Bewertung der Bedeutung von Rechenfertigkeiten eine mitentscheidende Rolle und waren deshalb auch Inhalt unserer Diskussion. Zum Teil geht das aus den Kommentaren hervor, die zu einigen Aufgaben gegeben werden.

Mathematikunterricht wird nicht einfacher!

Keineswegs glauben wir, dass der Mathematikunterricht in Zukunft einfacher werden wird – im Gegenteil. Mit dem in den folgenden Tabellen zum Ausdruck gebrachten geringeren Ansprüchen bei handwerklichen Rechenfertigkeiten wird zugleich unsere Überzeugung ausgedrückt, dass CAS bald zu einem Standardwerkzeug des Mathematikunterrichtes und der Mathematikanwender gehören wird. In der Folge wird Mathematik nutzbarer und damit sehr wahrscheinlich auch insgesamt anspruchsvoller, keinesfalls aber trivialer. Wir wollen nach der unglücklichen Diskussion zum Thema „7 Jahre Matheunterricht sind genug“ nicht eine ebensolche zum Thema „Triviale Termumformungen sind genug“ aufkommen lassen. Zentral für uns ist eine Unterscheidung zwischen den Zielen „Rechnungen ausführen können“ (das kann teilweise an den Rechner delegiert werden) und „über Strategien entscheiden können“ (das kann der Rechner *nicht* übernehmen.)

Selbstverständlich haben die folgenden Darlegungen Auswirkungen auf viele Bereiche des Mathematikunterrichts und sein Umfeld: Auf die Unterrichtsführung, auf neuartige Übungsformen, auf Hausarbeiten, Lehrpläne, auf die Unterrichtsinhalte in den späteren Jahrgängen, auf die erforderlichen

Kompetenzen der Lehrenden usw. Wir haben solche Aspekte zwar andiskutiert, aber nicht ausdiskutiert. Sie werden deshalb hier nicht angesprochen.

Unser Ziel: Dauerhaft verfügbare Mindest-Rechenkompetenzen

Es ist unser Ziel, mit diesem Bericht die erforderliche und zum Teil schon überfällige Diskussion über inhaltliche, didaktisch-methodische und organisatorische Konsequenzen des Einsatzes von CAS und anderer Mathematik-Software in Gang zu bringen bzw. zu fördern.

Dieser Text ist daher bewusst herausfordernd, vielleicht sogar provokativ. Es gilt, sich der Herausforderung durch die neuen Möglichkeiten zu stellen und daraus Konsequenzen zu ziehen. Das verlangt insbesondere auch die Bereitschaft, von Vertrautem Abschied zu nehmen, wenn dies als sinnvoll oder sogar unvermeidbar erkannt wird.

Ende der Aufsatzzitate

In den obigen Ausführungen sind diverse Probleme angesprochen, die in den folgenden Teilen des Buches aufgegriffen, präzisiert und direkter auf den Unterricht bezogen werden.

3.2 Die Begriffe „White-Box“ und „Black-Box“

Hinweis: Es ist nützlich, sich vorher noch Kapitel 1.3.3 durchzulesen. Dort wird eine Unterrichtsstunde zu den Begriffen dargestellt.

Bei der Bearbeitung mathematischer Probleme mit Hilfe des Computers werden zunehmend (wie in der Informatik schon länger) Bausteine mit Parametern (Module) verwendet. Hierfür haben Computeralgebrasysteme (CAS) in den letzten Jahren wegen ihrer leichten Verfügbarkeit einen für den Unterricht entscheidenden Beitrag geleistet. Dabei kann es sich um vom System her vorgegebene Bausteine oder vom Benutzer selbst definierte Bausteine handeln. Wir betrachten einige Beispiele (in der Notation des Voyage 200 bzw. TI-92 - Taschencomputers von Texas-Instruments):

Beispiel 1

$(a \cdot (x+h)^2 - a \cdot x^2) / h \rightarrow \text{diffquot}(x,a,h)$ ist ein vom Benutzer definierter Baustein für den Differenzenquotienten der Funktion $y = ax^2$.

Beispiel 2

$\text{limit}(\text{diffquot}(x,a,h),h,0)$ ruft den vordefinierten Baustein „limit“ auf, um den Grenzwert des oben definierten Differenzenquotienten für $h \rightarrow 0$, also $2a \cdot x$, zu berechnen.

Bei einer derartigen Arbeitsweise stellt sich die Frage, ob oder wann man im Unterricht so vorgehen kann. Es ist ja offenbar leicht möglich, auf die beschriebene Weise in zwei Zeilen alle gängigen Ableitungen zu errechnen.

Beispiel 3

$(\sin(x+h) - \sin(x)) / h \Rightarrow \text{diffquot2}(x,h)$ und $\text{limit}(\text{diffquot2}(x,h),h,0) = \cos(x)$.

Beispiel 4

Und es geht sogar noch schneller, wenn man den Baustein d (differentiate) benutzt:

$d(a \cdot x^2, x)$ liefert sofort das Ergebnis $2a \cdot x$.

Offenbar ist in diesen Bausteinen viel von der Mathematik versteckt, für die man im normalen Unterricht entsprechend viel Zeit aufwendet. Wir bezeichnen einen solchen Baustein als „**Black-Box**“. Wir wissen, was man in ihn hineinstecken muss (wie man ihn sinnvoll aufruft), kennen aber keine Details, wie die Ergebnisse ermittelt werden - oder dürfen die Details vergessen.

Für die Unterrichtspraxis ist klar, dass der Einführung einer solchen Black-Box das mathematische Verständnis für ihre Arbeitsweise in der Regel vorangehen muss – zumindest bei den grundlegenden Algorithmen der Schulmathematik. Das mathematische Verständnis für eine Black-Box wird in einer „**White-Box**“ zusammengestellt. – Haben die SchülerInnen jedoch mehrfach diese Vorgehensweise praktiziert – also diese modularen Kompetenzen erworben, so kann gelegentlich auch mit der Black Box begonnen werden oder sogar nur noch mit dieser gearbeitet werden.

Ein Beispiel aus der Differentialrechnung

Was sollte z.B. die White-Box für $d(a \cdot x^2, x)$ enthalten?

- a) Der Begriff des Differenzenquotienten muss den SchülerInnen klar sein: Definition, Veranschaulichung, Aufstellen der Differenzenquotienten, z.B. für $y = x^2$, $y = \sin(x)$ usw.
- b) Die SchülerInnen haben die Grenzwerte einiger Differenzenquotienten ausführlich von Hand errechnet, z.B. für $y = x^2$, $y = -5x^2$ und veranschaulicht. Die Vermutung der Ableitung für $y = ax^2$ wurde rechnerisch bestätigt.
- c) Die SchülerInnen kennen die Definition der Ableitung als Grenzwert des Differenzenquotienten.
- d) Jetzt kann die White-Box mit ihren Handrechnungen verlassen werden. Der Computer übernimmt die Rechnungen. In einer ersten Stufe kann man versuchen, mit dem CAS die Handrechnungen möglichst genau zu simulieren - das ist gelegentlich allerdings nur teilweise möglich. Wir öffnen in diesem Fall eine Zwischenbox (**Grey-Box**), die uns zur Black-Box überleitet. Der TI-92 arbeitet in diesem Fall so:

Eingabe in das CAS	Ausgabe des CAS
$(a \cdot (x+h)^2 - a \cdot x^2) / h$	$a \cdot (2 \cdot x + h)$ <i>Erklärungsbedarf! Der Term ist sofort stark vereinfacht worden. Ein Rückgriff auf die Handrechnung zeigt, was geschehen ist; $h \neq 0$ beachten.</i>
$\text{limit}(a \cdot 2 \cdot x + h, h, 0)$	$2 \cdot a \cdot x$ <i>Die Begründung bleibt dem Benutzer überlassen (siehe Handrechnung)</i>
<i>Zusammengefaßt:</i> $\text{limit}((a \cdot (x+h)^2 - a \cdot x^2) / h, h, 0)$	$2 \cdot a \cdot x$
$d(a \cdot x^2, x)$	$2 \cdot a \cdot x$

- e) Damit sind wir bei der Black-Box angelangt, die wir von nun an guten Gewissens benutzen dürfen.

Die Betrachtungen an diesem Beispiel - und in anderen Fällen ergibt sich die gleiche Problematik - zeigen, dass es im Unterricht ganz wesentlich darauf ankommt, den richtigen (fließenden) Übergang von der White-Box zur Black-Box zu finden. Dieser Übergang findet in einer Grauzone statt, in der auch die Grey-Box enthalten ist.

Die Grauzone ist der didaktisch-methodischer Handlungsspielraum.

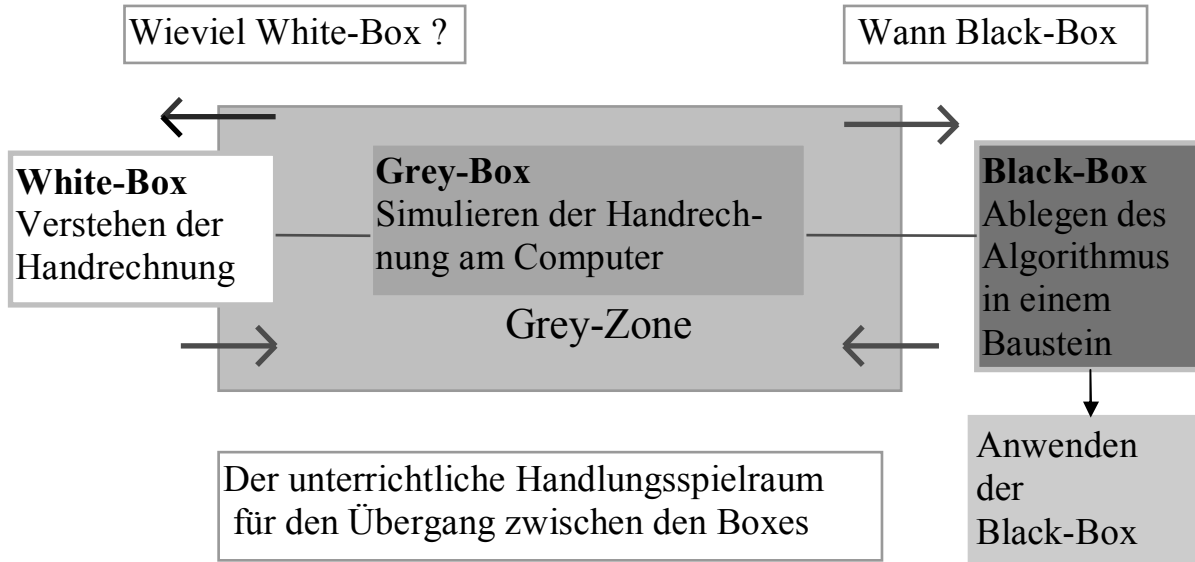


Abbildung 3.2a: Von der „White-Box“ zur „Black-Box“

Die Grauzone kann nun je nach Bedarf verschoben, vergrößert oder verkleinert werden. Für welches Vorgehen sich der Lehrer entscheidet ist u.a. abhängig von der jeweiligen Lerngruppe, der Erfahrung im Umgang mit dem Computer, dem Lehrplan und der zur Verfügung stehenden Zeit. In jedem Fall liegt hier für den Lehrer ein erheblicher Handlungsspielraum, den er letztlich nach eigenen Vorstellungen ausfüllen muss. Die Erfahrung zeigt jedoch, dass man immer auch die Grey-Box in den Lehrgang einbeziehen sollte.

Der selbstdefinierte Baustein $\text{gerade}(x,m,n)$

Diese Black-Box ist aus der Definition $m \cdot x + n \rightarrow \text{gerade}(x,m,n)$ entstanden. Wir zeigen nun einige unterrichtliche Möglichkeiten, die dieser Baustein als Black-Box bietet, siehe Abbildung 3.2b.

Zur Unterrichtspraxis

Im Verlauf des Unterrichts wird man (in Abhängigkeit vom Lehrplan) vermutlich alle Stationen erreichen. Die Startposition wird sich nach den unterrichtlichen Vorstellungen richten.

a) Nehmen wir z.B. an, die Unterrichtseinheit über Geraden beschäftigt sich nach der Einführung der Gleichung mit der Lage von Punkten bezüglich der Geraden. Dann wird man Aufrufe wie $\text{gerade}(5,2,-3)$ oder $\text{gerade}(5,-2,-3)=10$ benutzen. Andere Fragestellungen und damit auch andere Aufrufe schließen sich an.

b) Wiederholt man dagegen etwa in Klasse 11 Geradengleichungen, so kann es sinnvoll sein, mit der allgemeinen Formulierung $\text{gerade}(x,m,n)$ zu beginnen und die Abb. 3.2b von oben nach unten (Top-down) zu entwickeln.

c) Auf jeden Fall sollte man die gesamte Abbildung am Ende der Unterrichtseinheit zur Verfügung haben, da Zusammenfassungen dieser Art immer wertvoll sind, was leider häufig übersehen wird.

Definition der Black-Box als Baustein mit passenden Parametern

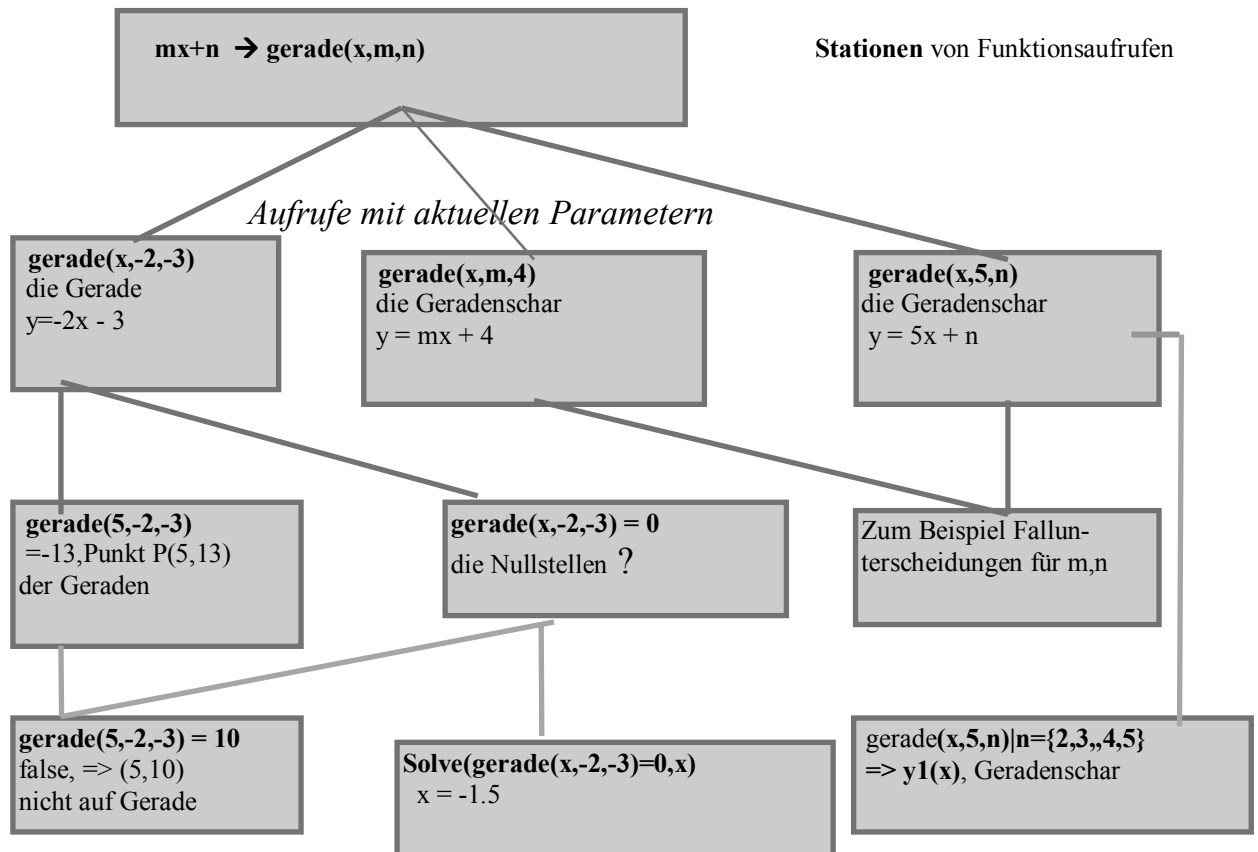


Abb. 3.2b : Einige Stationen möglicher Funktionsaufrufe der Black-Box gerade(x,m,n), Notation TI-92 / Voyage

Bestimmung des Schnittpunkt zweier Geraden mit Bausteinen

Als Beispiel für die Arbeit mit dem Baustein gerade(x,m,n) betrachten wir die Schnittpunktberechnung zweier Geraden G1 und G2 mit G1: $y = 2x+3$, G2: $y = 4x+5$.

Lösung 1: Mit den Bausteinen gerade(x,m,n) und solve

Nach der Definition $m \cdot x + n \rightarrow \text{gerade}(x,m,n)$ kann man so verfahren.

<pre> solve(gerade(x, 1, 2) = gerade(x, 4, 5), x) x = -1 gerade(-1, 1, 2) 1 solve(gerade(x, a, b) = gerade(x, c, d), x) x = -(b-d) / (a-c) gerade(-(b-d) / (a-c), a, b) -(b-d) / (a-c) * a + b </pre>	<div style="border: 1px solid gray; padding: 2px; margin-bottom: 5px;">Zahlenbeispiel</div> <div style="border: 1px solid gray; padding: 2px; margin-bottom: 5px;">Allgemeine Lösung</div> <div style="border: 1px solid gray; padding: 2px;">$a < c !$</div>
---	---

Abb. 3.2c

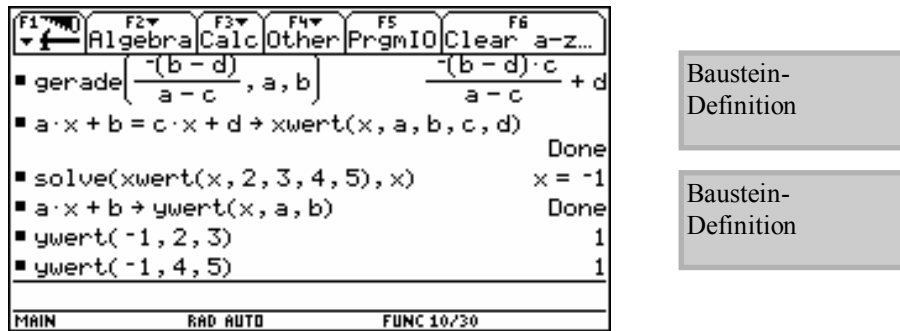
Lösung 2: Mit den Bausteinen xwert(x,a,b,c,d) und solve

Abb. 3.2.d

Lösung 3: Mit dem Baustein rref(M)

Ein weit stärkerer Baustein löst ein Gleichungssystem mit Gauß-Eliminationen:

Nach Eingabe der Matrix M für das obige Gleichungssystem, also von

$$M = \begin{pmatrix} 2 & -1 & -3 \\ 4 & -1 & -5 \end{pmatrix}, \text{ erhält man mit dem Baustein } \text{rref}(M) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \text{ und kann sofort die Lösung } x = -1, y =$$

1 ablesen, wobei man die Kompetenz zum Ablesen der Lösungsmenge aus diesem Endschemata haben muss.

An dem Beispiel wird sehr deutlich, dass die Computerarbeit ein vertieftes Verständnis für die Zusammenhänge erfordert. Die Mathematik wird bei Computereinsatz nicht einfacher! Dieses zeigt sich hier in der Definition und Benutzung passender Bausteine, wobei die SchülerInnen durchaus unterschiedliche Definitionen für das gleiche Problem wählen können. Selbstverständlich müssen derartige Bausteindefinitionen geübt werden. Die Bearbeitung mit dem CAS macht aber auch klar, welche Vorteile sich durch die Verwendung der Parameter ergeben bzw. wo möglicherweise Schwierigkeiten auftreten können.

Eine Bausteinkiste anlegen

- Bausteine haben eine sehr kompakte Form mit viel mathematischem Inhalt. Sie sind geeignet zur Ordnung lokaler oder globaler Zusammenhänge.
- Die Arbeit mit Bausteinen setzt insbesondere ein gutes Verständnis für die Wirkungsweise der Bausteine und für die Bedeutung ihrer Parameter voraus. Wesentliche Hilfe leistet dabei eine Baustein-Formelsammlung (Bausteinkiste, \rightarrow siehe Kapitel 6.5 \rightarrow).
- Der Umfang der Bausteinkiste erhöht sich mit den zunehmenden mathematischen Kenntnissen. Die Bausteinkiste gleicht damit einer gebräuchlichen mathematischen Formelsammlung.
- Die häufige Verwendung von Bausteinen führt zu einer einheitlichen übergeordneten Betrachtungsweise.
- Durch die häufige Benutzung von Bausteinen könnte die Kenntnisse über den Aufbau der dahinterstehenden Funktionsterme verloren gehen. Um dem entgegenzuwirken, empfehlen sich Maßnahmen wie:
 - Jeder Baustein muss informativ dokumentiert sein. Dazu gehört auch ein Beispiel und (wenn möglich) eine passende Veranschaulichung.
 - Die Arbeit mit Bausteinen muss vom Schüler mit Text zum mathematischen Hintergrund begleitet werden.

\rightarrow siehe Kapitel 6 \rightarrow

Zusammenfassung - Problemlösen mit Bausteinen

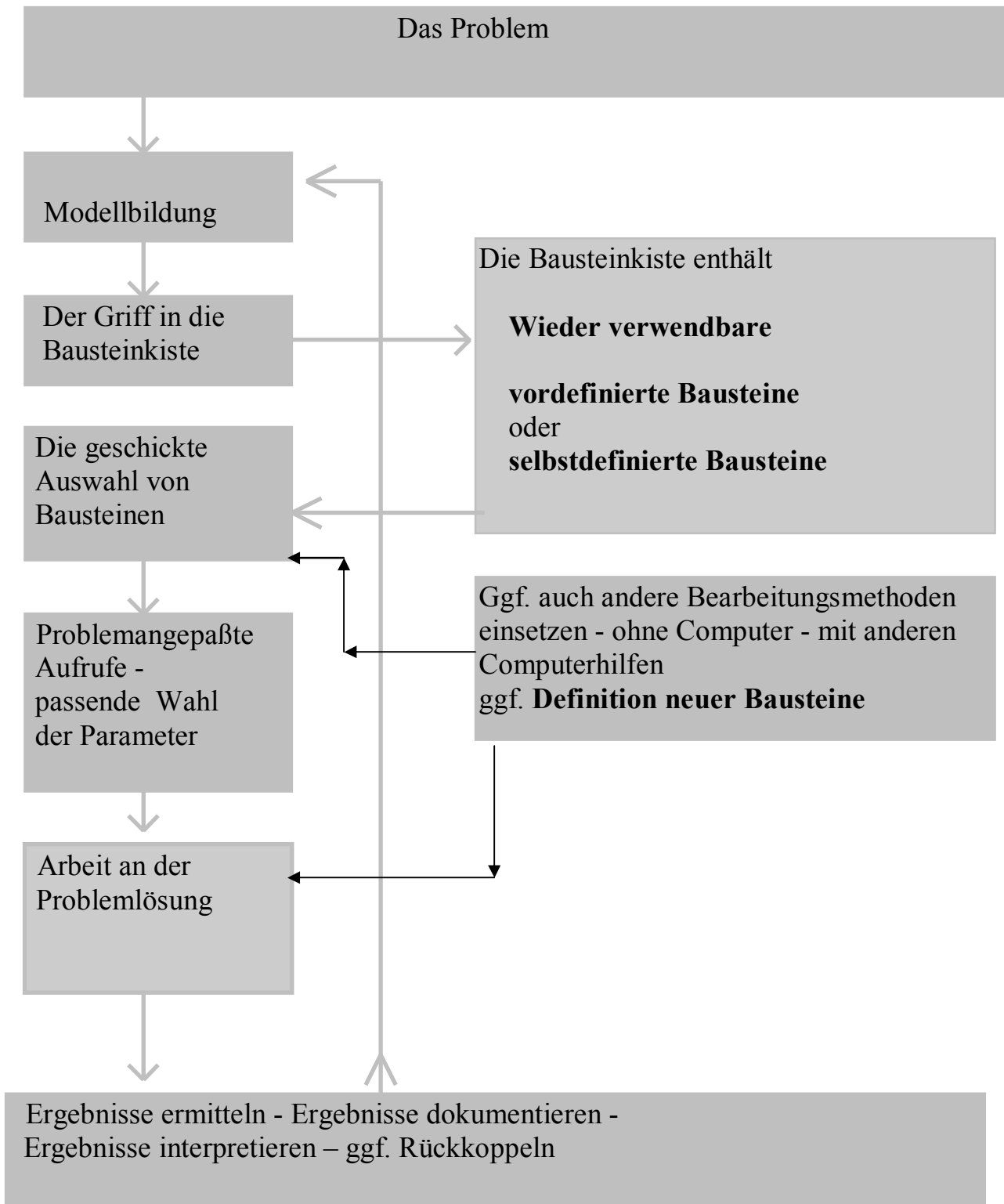


Abb. 3.2.e : Problemlösen mit Bausteinen

3.3 Gleichungen – White-Box – Black-Box

Die Betrachtungen werden nun zunächst durch Überlegungen zum Thema „Gleichungen“ ausgeweitet. Grundlage dazu ist die folgende Abbildung.

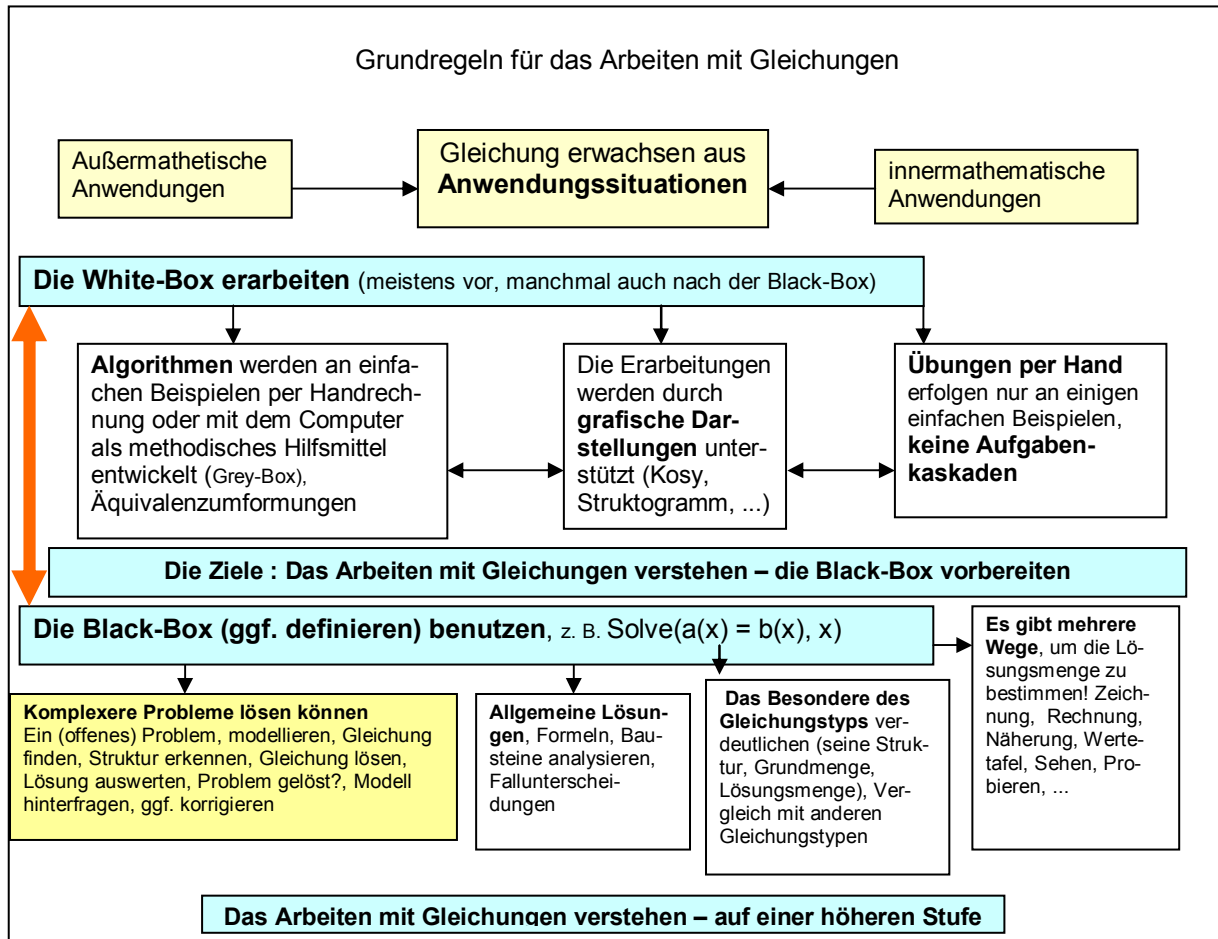


Abb. 3.3a: LGS mit CAS

Lösen von Gleichungen mit CAS

Gleichungslehre ist ein sich durch den gesamten Mathematik-Unterricht der Sekundarstufen 1 und 2 ziehendes Thema. Gerade in diesem sehr algorithmen- und rechenintensiven Bereich leisten Computeralgebrasysteme (CAS) einen wichtigen Beitrag für eine Verbesserung des Unterrichts, insbesondere für die Reduzierung stumpfsinniger Rechenarbeit, aber auch für die Gewinnung von Verständnis, Überblick und Hintergrundwissen. Für die Bearbeitung von Gleichungen (bei Ungleichungen ist es ähnlich) stehen grundsätzlich die folgenden Lösungsmethoden zur Verfügung.

Gleichungen (und auch Ungleichungen) kann man u. a. lösen durch

- Raten von Lösungen, Bestätigen durch Einsetzen in die Gleichung
- Ablesen aus Wertetabellen für die Terme links und rechts ($T_1 = T_2$)
- Graphische Darstellung der Terme T_1 und T_2 (Nullstellen, Schnittpunkte ablesen)
- Exakte Rechenverfahren (Durchführung von Äquivalenzumformungen)
- Benutzung der Anweisung SOLVE bei CAS
- Verfahren zur näherungsweise Berechnung der Lösungen

Je nach Unterrichtssituation wird man sich die passenden Methoden auswählen.

Zur Erläuterung der Abbildung benutzen wir ein Beispiel aus dem Schulbuch Neue Wege 8, S. 175, Übung 23 (Schroedel Verlag 2007, Ausgabe Berlin) mit dem wohlvertrauten Thema „Lineare Gleichungssysteme“.

Die Karten für ein Schulkonzert kosten für einen Erwachsenen 4 Euro und für Schüler 1.50 Euro. Insgesamt wurden 400 Karten verkauft, die eine Summe von 1037.50 Euro erbrachten.

a) Wie viele Karten wurden von jeder Sorte verkauft?

b) Wie teuer müssten die Erwachsenenkarten sein, damit bei gleicher Anzahl mindestens 1500 Euro eingenommen werden.

Unterrichtssituation 1

F1	F2	F3	F4	F5	F6
Algebra	Calc	Other	PrgmIO	Clean Up	
<pre> solve(4·e + 1.5·s = 1037.5 and e + s = 400) s = 225 and e = 175 solve(p·175 + 225 = 1500, p) p = 51/7 solve(p·175 + 225 = 1500, p) p = 7.286 </pre>					
MAIN RAD EXACT FUNC 3/30					

(1) Nach der Aufstellung des Gleichungssystems benutzen wir hier sofort den Baustein SOLVE. - Wir unterstellen damit in diesem Fall, dass die White-Box-Phase (siehe Abbildung) bereits hinter uns liegt. Die CAS-Benutzung bietet sich hier an, weil die Zahlenwerte nicht ganz einfach sind. – Da uns die Rechnung abgenommen wird, können wir uns im Unterricht auf die Erläuterung des Ansatzes und die Interpretation der Ergebnisse konzentrieren.

Unterrichtssituation 2

F1	F2	F3	F4	F5	F6
Algebra	Calc	Other	PrgmIO	Clean Up	
<pre> solve(4·e + 1.5·s = 1037.5 and e + s = 400) s = 225 and e = 175 solve(p·175 + 225 = 1500, p) p = 51/7 solve(p·175 + 225 = 1500, p) p = 7.286 </pre>					
MAIN RAD EXACT FUNC 3/30					

(2) Es ist aber auch möglich, dass der Lehrer oder ein kundiger Schüler die CAS-Lösung demonstriert. - Nun entsteht u.a. die Frage: „Wie kommen die Ergebnisse zustande?“ Damit befinden wir uns in der White-Box-Phase und der Rechner dient hier der Motivation. Gleichzeitig erhalten die Schüler einen ersten Eindruck von dem zukünftigen CAS-Unterrichtseinsatz.

Unterrichtssituation 3

Nach dem Ansatz werden die Gleichungen z.B. mit der Einsetzmethode von Hand ausgerechnet. Der Rechner kann zur Kontrolle dienen.

(3) Bei Verfügbarkeit von CAS ist die Lösung dieses LGS von Hand gerade noch vertretbar. LGS mit un-bequemerem Koeffizienten sollte man dann nicht mehr von Hand rechnen, sondern dem CAS überlassen.

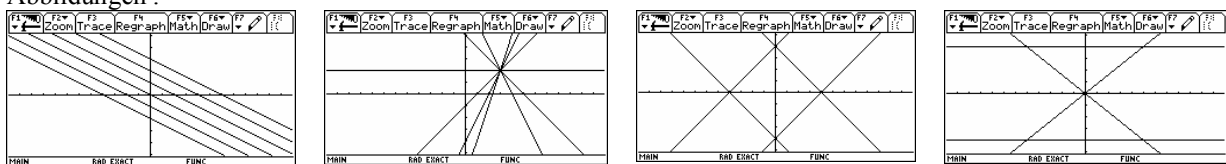
Die CAS-Nutzung in der Black-Box ermöglicht nun

- Übungen zur Modellbildung
- das Durchrechnen komplexer Aufgaben
- die Erzielung eines vertieften Verständnisses der Probleme in Zusammenhang mit LGS, beispielsweise auf LGS-Sonderfälle oder die Herleitung einer Formel mit CAS-Hilfe, siehe unten.

	<p>Nach der allgemeinen Lösung (Nenner ungleich 0), kann mit den Lösungen z. B. ein Baustein $lgs(a1,b1,d1,a2,b2,d2)$ definiert werden, mit dem man dann bequem auch Sonderfälle untersuchen kann (vertieftes LGS-Verständnis).</p>
--	--

Die Betrachtungen zu LGS sollten an vielen Stellen durch Visualisierungen unterstützt werden. So könnte auch die folgende Aufgabe zu dem Bereich „LGS besser verstehen“ gezählt werden, wobei die rechnerische Bestimmung der Lösungsmengen mit der Black-Box „Solve“ erfolgen kann.

Aufgabe: Formuliere Aufgaben zu linearen Gleichungssystemen und ihren Lösungsmengen, passend zu den vier Abbildungen.



Hinweis: Die ersten drei Bilder stammen aus „Neue Wege“, Klasse 8, Ausgabe Berlin, Schroedel-Verlag 2007. Dort heißt die Aufgabe (27, S.88): Etwas zum Puzzlen mit dem Rechner! Kannst Du die Grafiken mit deinem Taschencomputer erzeugen?

Zum Thema Gleichungen wird eine Tabelle aus dem in 3.1 zitierten MNU-Aufsatz von Herget u.a. vorgelegt.

Quadratische Gleichungen – langfristige Mindestkompetenzen

	-T (ohne Technologie)	?T	+T (mit Technologie)
01	Löse nach $x : x^2 = 4$		Löse nach $x : 9x^2 = 4$
02	Löse nach $x : x^2 - 4 = 0$		Löse nach $x : 9x^2 - 4 = 0$
03	Löse nach $x : x^2 - x = 0$		
04	Löse nach $x : x^2 - 4x = 0$	Löse nach $x : x^2 + 4x + 4 = 0$	Löse nach $x : 2x^2 - 5x + 9 = 0$
05	Löse nach $x : x^2 = a$		
06	Löse nach $r : A = 4\pi r^2$		Löse nach $v_0 : x = \frac{1}{2a} \cdot v_0^2$

Die Betrachtungen werden abgeschlossen mit Abbildung 3.2, die die Unterschiede von „LGS mit CAS“ und „LGS ohne CAS – von Hand und mit normalem Taschenrechner“ zeigt. Die Einschätzungen sind kursiv gedruckt. - Man vergleiche Abbildung 3.3a mit Abbildung 3.3b!

Was ist anders? - Mit **CAS** und **ohne CAS**, also nur von Hand?
Die folgende Abbildung gibt dazu einige Antworten.

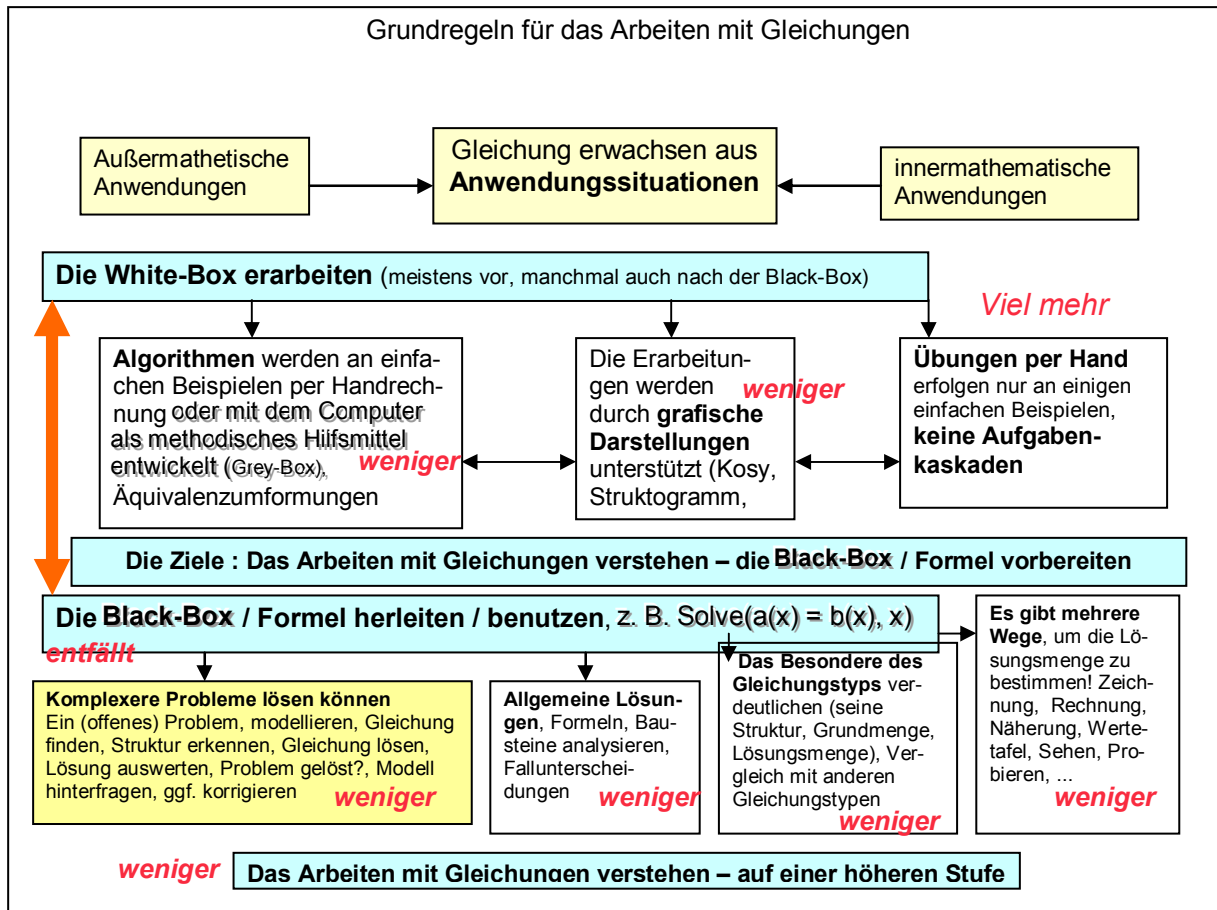


Abb. 3.3b: LGS ohne CAS

Für die Sekundarstufe 2 kann der Einstieg in den Gauss-Algorithmus nach folgendem Prinzip erfolgen.

Lineare Gleichungssysteme mit einem CAS

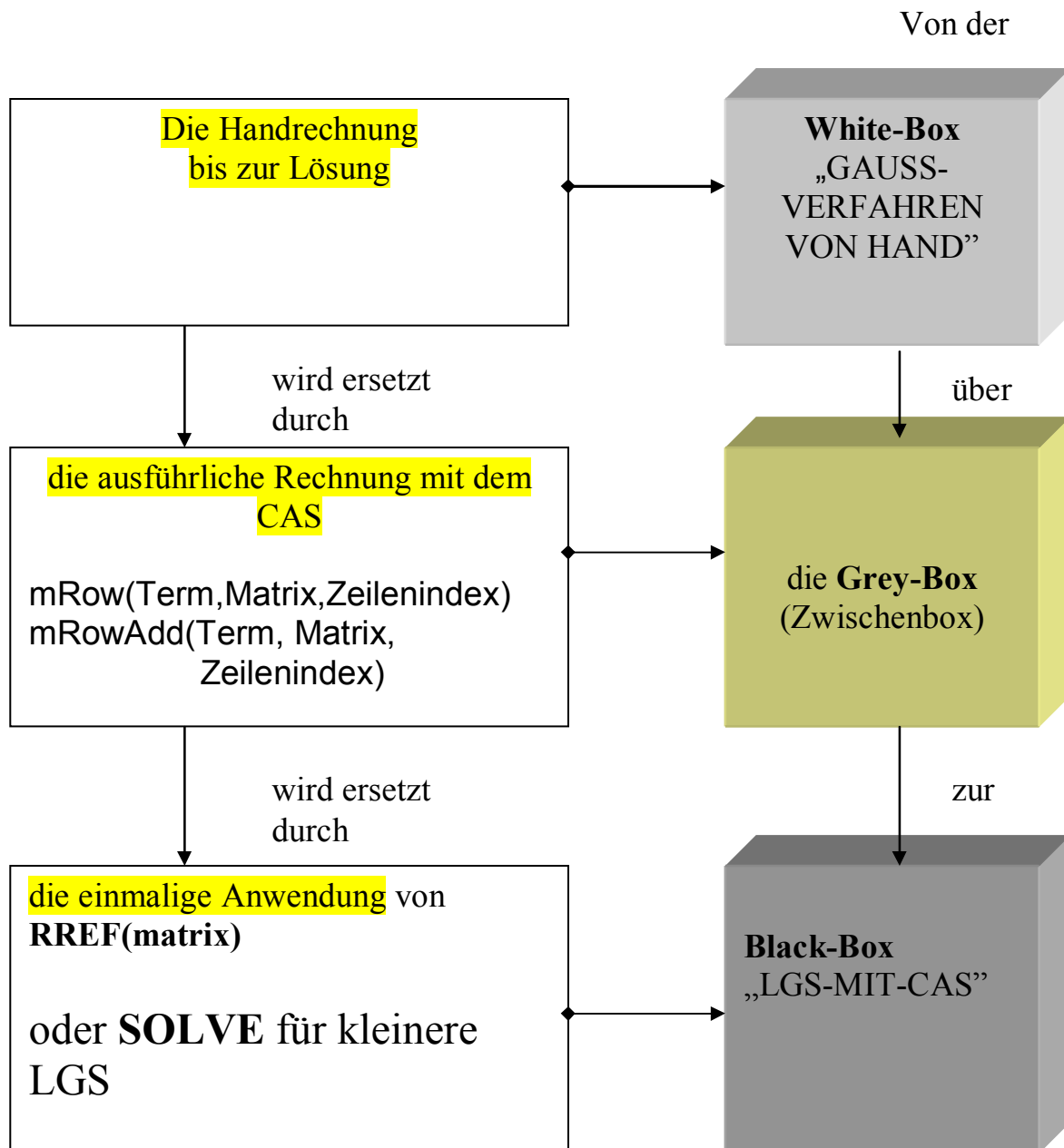


Abb. 3.3c: LGS und Black-Box (Voyage 200)

Zusammengefasst: Grundregeln für das Arbeiten mit Gleichungen

Solve ändert den Unterricht!

a) Algorithmen zur Lösung von LGS werden nur an Beispielen mit handlichen Koeffizienten eingeführt. Schon hier leistet der Rechner wertvolle Hilfestellung beim Kontrollieren von Ergebnissen. Entsprechendes wie für die Algorithmen gilt für die Veranschaulichung von LGS als Geradensysteme. Damit ist die White-Box gesichert. Erste Vertiefungen könnten z.B. darin bestehen, dass der Schüler selbst Gleichungen mit bestimmten Eigenschaften bastelt.

b) Danach wird die Black-Box eingeführt, hier die SOLVE-Anweisung. Nun können komplexere Aufgaben folgen, der Schwerpunkt verlagert sich dabei auf Modellbildungen. Außerdem kann die Black-Box benutzt werden, um vertiefende Betrachtungen zu LGS durchzuführen und möglicherweise auch Hintergrundwissen zur Theorie aufzubauen.

c) Bei Lerngruppen, die diese Vorgehensweise schon öfter erlebt haben, kann gelegentlich auch mit einer Black-Box begonnen werden, die dann je nach Intention aufgeschlossen wird.

Die eben beschriebene Vorgehensweise kann häufig bei rechen- und zeichenintensiven Algorithmen angewendet werden. Beispiele dafür sind in der folgenden Tabelle aufgelistet.

Quadratische Gleichungen	Potenzrechnung	Schwierige Terme	Regression
Iterationen	Matrizenrechnung	Ableitungen	Integrale
Grenzwerte	Stochastische Formeln	Parameterdarstellungen	Koordinatentransformationen

3.4 Andere Kalküle

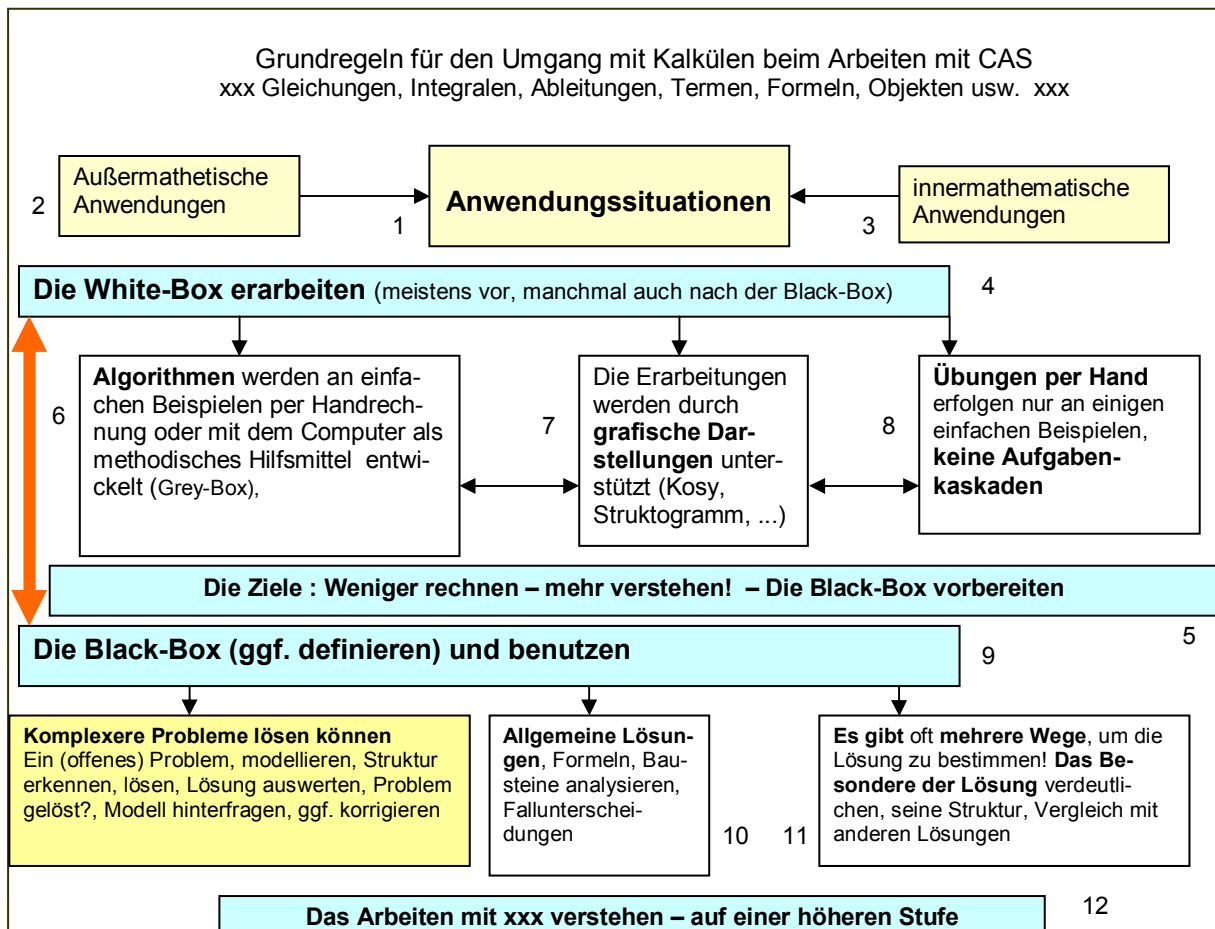


Abbildung 3.4a: Kalküle mit CAS

Die Abbildung wird in dem folgenden Text bezogen auf die angegebenen Zahlen erläutert.

Grundregeln für den Umgang mit Kalkülen beim Arbeiten mit CAS

0 Die Folie schildert ein mögliches Vorgehen im Unterricht, wenn es um die erstmalige Behandlung grundlegender kalkülträchtiger Algorithmen geht, wie z.B. um die Lösung linearer Gleichungssysteme. – Das langfristige Ziel ist in der Regel die Bearbeitung komplexer Probleme in denen das jeweilige Kalkül benötigt wird.

1,2,3 Im Unterricht geht man in der Regel von einem Anwendungsfall aus – inner- oder außermathematisch, in dem das betreffende Kalkül erstmals gebraucht wird.

4, 5 Die Erarbeitung des Algorithmus erfolgt in der White-Box-Phase, Ziel ist aber letztlich die Anwendung des Algorithmus in der Black-Box. Vorher jedoch sollte der Algorithmus in den Grundlagen verstanden sein.

6,7,8 Dazu dienen einfache Problemstellungen – außer- oder innermathematisch, die von Hand bearbeitet werden, aber möglicherweise auch mit dem Computer überprüft werden. Wichtig für das Verständnis sind meistens begleitende grafische Visualisierungen. Es ist aber unnötig, nun zahlreiche Aufgaben von Hand zu rechnen, die Zeit der „Aufgabenkaskaden“ ist vorbei!

Also: Den Algorithmus verstehen – an einfachen Aufgaben anwenden können – und bald danach die Black-Box definieren. Oft ist sie in den Computeralgebrasystemen (CAS) schon vorhanden.

9, 10 Mit Hilfe der Black-Box ist es nun auch leicht möglich Verallgemeinerungen usw. anzugreifen, die einem vertieften Verständnis des Algorithmus dienen können. Auch die nun mögliche Bearbeitung komplexer Probleme, die nun von Handrechnungen der Algorithmen befreit sind, trägt längerfristig zu einem besseren Verständnis der Leistungsfähigkeit der jeweiligen Algorithmen bei.

11 Bei der Problembearbeitung, die oft auf mehreren Wegen, vielleicht auch mit verschiedenen Black-Boxes möglich ist, können nun auch Vergleiche der Struktur und Effektivität von Algorithmen angestellt werden.

Man beachte:

Die hier erläuterten Grundregeln für den Umgang mit Kalkülen beim Arbeiten mit CAS geben damit auch zusätzliche Antworten auf die Frage „wieviel Handrechenfertigkeiten sind noch nötig, wenn ein CAS zur Verfügung steht?“.

3.5 CAS als Rechenknecht - Rechen- und Zeichen-Intensives

Die Vorteile des CAS-Einsatzes bei Zeichnen von Graphen und dem Erstellen von Wertetabellen werden hier in dem Buch an vielen Stellen deutlich und daher an dieser Stelle nicht weiter betrachtet. Wir konzentrieren uns hier auf Rechenintensives und benutzen dazu u.a. Aufgaben aus dem Berliner Zentralabitur 2007.

Beispiel 1: Aus den Berliner CAS-Abituraufgaben, Zentralabitur 2007

Hinweis: Die Aufgaben kann man durch Recherchen oder bei Berliner KollegInnen erhalten. Von Bausteinen ist im Aufgabentext nicht die Rede. Die Hinweise dazu in der Tabelle stammen vom Buchautor.

Aufgabe	Terme in der Aufgabe	Anmerkungen
GK-1A Analysis Hausgiebel	$y = ax^4 + bx^2 + c$ $y = \frac{1}{64}x^4 - \frac{1}{2}x^2 + 4$	LGS mit 3 Variablen, bestimmte Integrale Hinweis: Baustein definieren parabel(x, a, b, c) := $a \cdot x^4 + b \cdot x^2 + c$
LK-1A Analysis Logistisches Wachstum	$n(t) = n_0 \cdot e^{kt}$ $f(t) = \frac{A}{1 + B \cdot e^{-kt}}$	Graphen, Ungleichung, Grenzwert, $f'(t)$, $f''(t)$, Integral Hinweis: Baustein definieren $f(t, k, a, b) = \frac{a}{1 + b \cdot e^{-kt}}$
LK-1B Analytische Geometrie - Steilhang	Ebenengleichung, Normalenvektor, Schnittwinkel, Gerade, Schnitt Gerade / Ebene, Abstandsberechnung, Ebenenschnitt	Diverse LGS, Formeln der analytischen Geometrie für Abstand, Winkel, Normalenvektor
LK-1C Stochastik Auswahltest	Binomialverteilung	Computer weitgehend unnötig

LK-2A Analysis Schar von Log-Funktionen	$f_t(x) = \ln \frac{x^2 + 2t}{4}, t \in \mathbb{R}^+$	Klassische Kurvendiskussion, Integralrechnung Hinweis: Baustein definieren
LK-2B Analysis Volumen einer Birne	$f(x) = 4\sqrt{x} \cdot e^{-\frac{1}{2}x}, x > 0$ $g(x) = \sqrt{a \cdot x + b}$ $f_k(x) = k\sqrt{x} \cdot e^{-\frac{1}{2}x}, x \geq 0, k > 0$	Kurvendiskussionselemente, Integral (Volumen), Hinweis: Bausteine definieren
LK-3A Analytische Geometrie Geradenschar und Kugel	Geradenschar G, $\vec{g}_t \cdot \vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ -1 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} t \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix}$ Ebenengleichung, Schnittpunkt G/E, Kugelgleichung	GS mit 3 Variablen, quadratische Gleichung
LK-3B Analytische Geometrie Geraden	2 Geraden, Schnitt, Schnittwinkel, Abstandsberechnungen, Schargerade $\vec{g}_t \cdot \vec{x} = \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ 4-t \\ t^2-5 \end{pmatrix}$	GS mit 3 Variablen u.a. mit t^2 Hinweis: Baustein definieren $g(r, t) := \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ 4-t \\ t^2-5 \end{pmatrix}$

Abb. 3.5a

Die rechenintensiven CAS-Ansprüche bei diesen Aufgaben sind insbesondere:

- Arbeiten mit komplexen Funktionsterme mit Parametern
- Ableitungen, Integrale, Grenzwerte
- Kurvenschar, Geradenschar
- Gleichungssysteme (linear, quadratisch), teilweise mit Parameter
- **SchülerInnen mit Modulkompetenz werden an verschiedenen Stellen Bausteine mit Parametern definieren und etliche Aufgabenteile mit Bausteinaufrufen bearbeiten!**

→ Siehe hierzu Kapitel 6 →.

Beispielhaft wird hier eine Teilaufgabe der Aufgabe LK-3B gelöst und damit eine komplexe CAS-Rechnung durchgeführt – mit einem Geradenschar-Bausteins $g(r,t)$.

<p>Bei einer Teilaufgabe von LK-3B sind die Lage-möglichkeiten der Geradenschar $g(r,t)$ und der einen Geraden $h(s)$ zu untersuchen.</p> <p>Der Ansatz $g(r,t)=h(s)$ gibt genau einen Schnittpunkt $S(4,-3,2)$ für $t = 1, s = 3$ und $r = -1$. Die weiteren Überlegungen zeigen, dass für $t = 2$ (Nenner = 0) ein weiterer Sonderfall vorliegt, nämlich Parallelität (Vergleichung der Richtungsvektoren von $g(r,2)$ und h). Für alle t außer $t = 2$ und $t = 1$ sind die Schargeraden windschief.</p>	
---	--

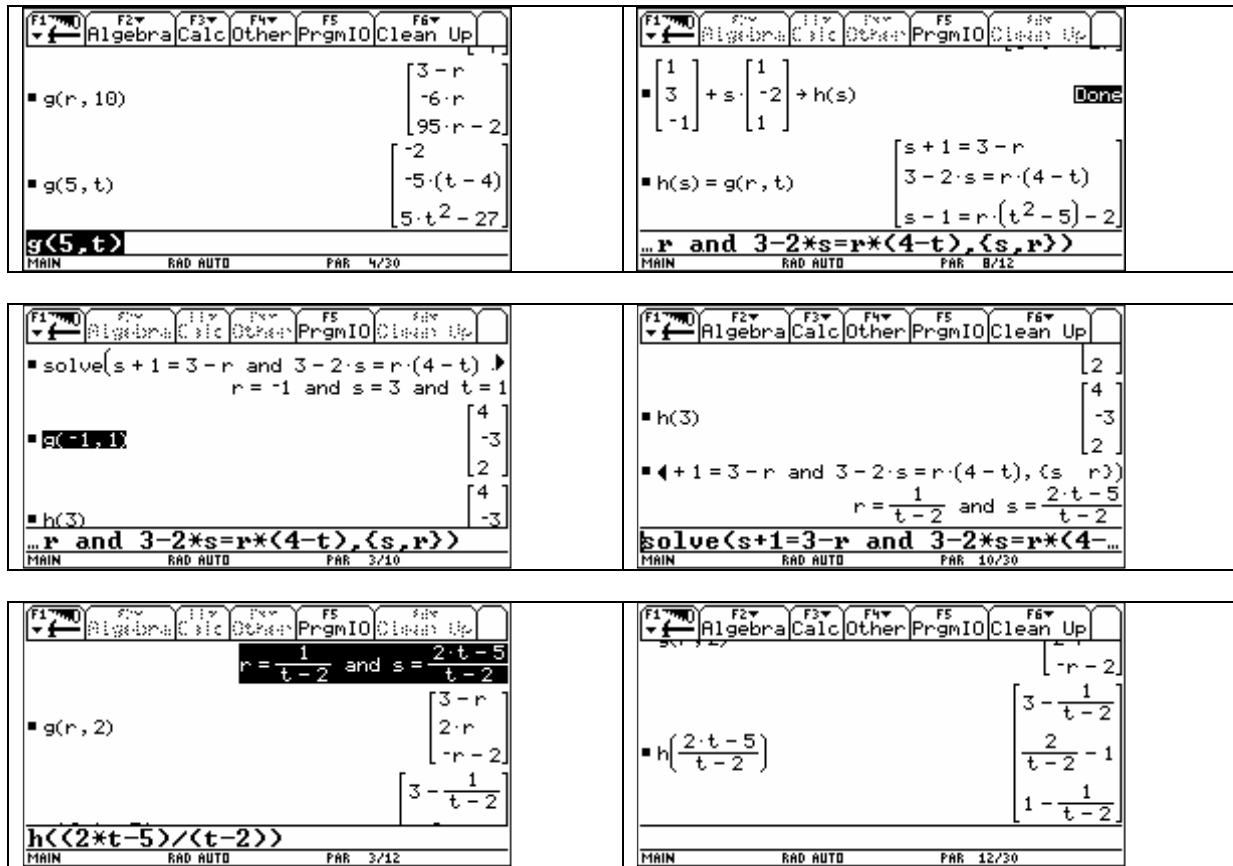


Abb. 3.5b

Beispiel 2: Am Ende des Skatabends wird abgerechnet

The screenshot shows the GameDuell website with a banner for 'Skat Masters 2007 150.000€'. Below the banner, the text reads: 'Das 1. Qualifikations-Turnier ist beendet. renie50, Terrier62, vanipe, ArnoB und HAJOSCHMID haben sich im ersten Turnier des Jahres für das 100.000 Euro Finale im Dezember qualifiziert. Die Sofort-Gewinne in Höhe von insg. 5.000 Euro gingen an die besten 100 Spieler. GameDuell gratuliert allen Gewinnern. Laufzeit: 9. Februar bis 21. Februar 2007'. A table lists the top 6 players with their immediate prizes and points.

Platz	Spieler	Sofort-Gewinn	Punkte
1.	renie50 (Im Finale)	300 Euro	1983
2.	Terrier62 (Im Finale)	250 Euro	1964
3.	vanipe (Im Finale)	200 Euro	1927
4.	ArnoB (Im Finale)	150 Euro	1896
5.	HAIOSCHMID (Im Finale)	100 Euro	1895
6.	hmm305	100 Euro	1876

Abb. 3.5c: Skat im Internet

	Spieler	A	B	C
Sonntag		466	411	231
		536	372	292
		258	528	438
Gesamt Sonntag		1260	1311	961

Aufgabe:

Wenn man um Geld spielt – ein Punkt Differenz: 1 Cent. - Wieviel haben dann A,B und C gewonnen bzw. verloren?

Auch im Internet kann man Skatspielen und die Turniere müssen „abgerechnet“ werden, zumindest wenn es um Geld geht. Wie könnte das gehen? – Eine der Möglichkeiten ist die der Abrechnung mit Matrizen – für 3-Personenspiele in den folgenden Abbildungen.

Hinweis: Näheres zur Mathematik der „Skatspielabrechnung“ in dem Buch Lehmann, E.: Lineare Algebra mit Matrizen und Vektoren, Metzler Verlag 1990, jetzt nur noch als Kopie beim Autor, siehe www.snafu.de/~mirza.

Bei der Skatspielabrechnung von Skatturnieren ist der Rechnereinsatz fast unerlässlich – wegen der umfangreichen Datenmengen und der Häufigkeit der gleichen Berechnungen.

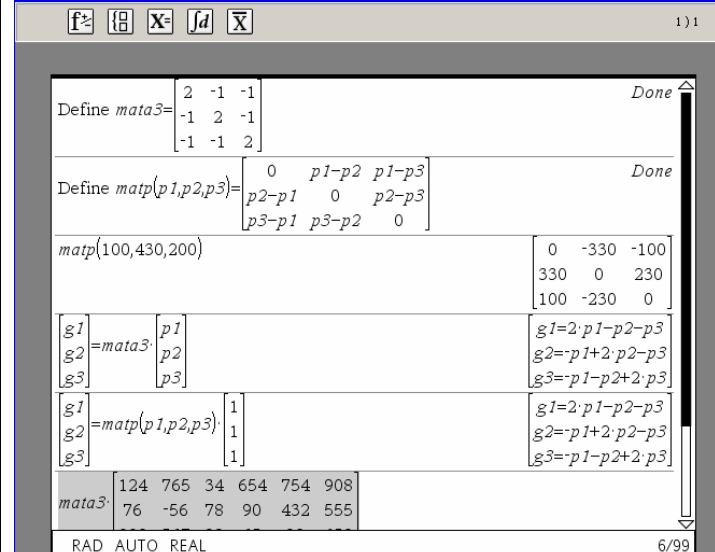
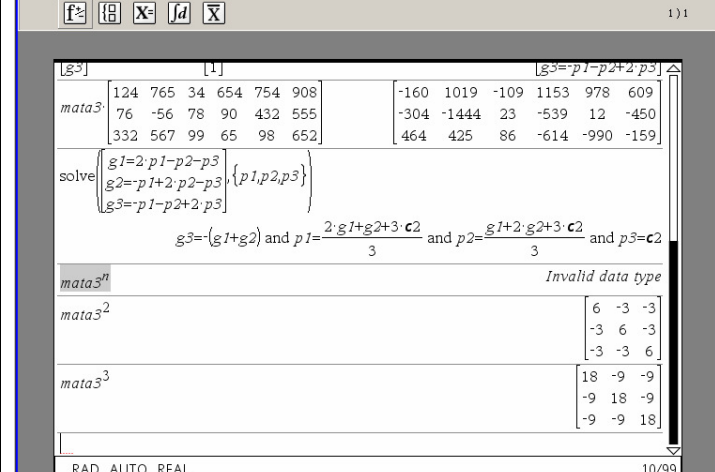
 <p>Define $mata3 = \begin{bmatrix} 2 & -1 & -1 \\ -1 & 2 & -1 \\ -1 & -1 & 2 \end{bmatrix}$</p> <p>Define $matp(p1,p2,p3) = \begin{bmatrix} 0 & p1-p2 & p1-p3 \\ p2-p1 & 0 & p2-p3 \\ p3-p1 & p3-p2 & 0 \end{bmatrix}$</p> <p>$matp(100,430,200) = \begin{bmatrix} 0 & -330 & -100 \\ 330 & 0 & 230 \\ 100 & -230 & 0 \end{bmatrix}$</p> <p>$\begin{bmatrix} g1 \\ g2 \\ g3 \end{bmatrix} = mata3 \cdot \begin{bmatrix} p1 \\ p2 \\ p3 \end{bmatrix}$ $\begin{bmatrix} g1 \\ g2 \\ g3 \end{bmatrix} = matp(p1,p2,p3) \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$</p> <p>$mata3 = \begin{bmatrix} 124 & 765 & 34 & 654 & 754 & 908 \\ 76 & -56 & 78 & 90 & 432 & 555 \end{bmatrix}$</p>	<p>Mit der Matrix $mata3$ kann man 3-Personen-Spiele „abrechnen“.</p> <p>$p1, p2, p3$ sind die von den Spielern $S1, S2, S3$ erreichten Punkte. Spieler 3 muss 100E an $S1$ zahlen, erhält aber 230E von $S2$.</p> <p>Hier sieht man, wie sich die Gewinne all-gemein berechnen (Gewinnvektor), es gibt zwei Rechenwege.</p> <p>Aufgabe: Wie lautet die Abrechnungsmatrix für 4-Personenspiele oder gar für n Personen?</p>
 <p>$mata3 = \begin{bmatrix} 124 & 765 & 34 & 654 & 754 & 908 \\ 76 & -56 & 78 & 90 & 432 & 555 \\ 332 & 567 & 99 & 65 & 98 & 652 \end{bmatrix}$</p> <p>$g3 = (g1 + g2)$ and $p1 = \frac{2 \cdot g1 + g2 + 3 \cdot c2}{3}$ and $p2 = \frac{g1 + 2 \cdot g2 + 3 \cdot c2}{3}$ and $p3 = c2$</p> <p>$mata3^n$ Invalid data type</p> <p>$mata3^2 = \begin{bmatrix} 6 & -3 & -3 \\ -3 & 6 & -3 \\ -3 & -3 & 6 \end{bmatrix}$</p> <p>$mata3^3 = \begin{bmatrix} 18 & -9 & -9 \\ -9 & 18 & -9 \\ -9 & -9 & 18 \end{bmatrix}$</p>	<p>Hier wird nun ein ganzes Skatturnier mit 6 Tischen (Punkte jeweils in den Spalten) abgerechnet.</p> <p>Versuch einer Rekonstruktion des Punktestandes aus den bekannten Gewinnen. Aber da gibt es unendliche viele Lösungen (Parameter $c2$).</p> <p>Innermathematisches Experiment mit den Potenzen von $mata3$.</p> <p>Variation: Wie läuft die Abrechnung bei 4 Personen an einem Tisch?</p>

Abb. 3.5d: Skatturniere abrechnen

4. Visualisieren und Animieren mit dem Computer

4.1 Visualisieren

Die Bedeutung vieler Arten des Visualisierens für den Mathematikunterricht ist bekannt und spiegelt sich auch in den heutigen Schulbüchern. In den allgemeinen mathematischen Kompetenzen finden wir den Aspekt des Visualisierens als K4, siehe Abbildung 4.1a.

Leitideen	Allgemeine mathematisch Kompetenzen	Anforderungsbereiche
L1 Zahl	K1 Mathematisch argumentieren	AI Reproduzieren
L2 Messen	K2 Probleme mathematisch lösen	AII Zusammenhänge herstellen
L3 Raum und Form	K3 Mathematik modellieren	AIII Verallgemeinern und Reflektieren
L4 Funktionaler Zusammenhang	<u>K4 Mathematische Darstellungen</u> verwenden	
L5 Daten und Zufall	K5 Mit symbolischen, formalen und technischen Elementen der Mathematik umgehen	
	K6 Kommunizieren	

Abb. 4.1a

Das Visualisieren von Mathematik kann auf vielfältige Weise erfolgen. Hier in diesem Kapitel geht es um ausgewählte Visualisierungsmöglichkeiten durch den Computer. Bei der Computernutzung wird in der Regel mit den entstandenen fertigen Abbildungen gearbeitet. In einer weiteren (höheren) Stufe werden die Abbildungen von den Schülern selbst hergestellt. Dabei werden jedoch die Möglichkeiten einer Animation der mathematischen Vorgänge und die damit verbundenen Schülerkompetenzen noch wenig beachtet:

Es geht um die Zerlegung des Bearbeitungsprozesses in Teilschritte, die dann wieder in einer passenden Reihenfolge - mit einer didaktisch-methodischen Zielsetzung - zusammengefügt werden, **so dass das Endprodukt in einem dynamischen Vorgang als Animation entsteht.**

Auch auf diesen Aspekt wird unten eingegangen. Zunächst wird aus dem Berliner Rahmenlehrplan für die Sekundarstufe 1 zitiert, um das Feld von K4 aufzuzeigen.

Aus dem Berliner Rahmenlehrplan für die Sekundarstufe I, Seite 11
 2.2 Prozessbezogene mathematische Kompetenzbereiche

- **Darstellungen verwenden**

Die Mathematik bietet verschiedene, sich gegenseitig ergänzende Darstellungsformen: verbale Beschreibungen in geschriebenem Text oder gesprochener Sprache, numerische Darstellungen (z. B. in Tabellenform), graphische Darstellungen (z. B. Figuren, die geometrische, stochastische oder logische Zusammenhänge repräsentieren und Graphen, die funktionale Zusammenhänge darstellen), mathematisch-symbolische Darstellungen (vor allem Variablen und Terme). Mathematisches Arbeiten zeichnet sich durch Interpretieren, Auswählen und Anlegen solcher Darstellungen und durch den flexiblen, problemangemessenen Wechsel zwischen ihnen aus.

Darstellungen verwenden

Prozessbezogene Standards, Lehrplan S.21

Die Schülerinnen und Schüler

- interpretieren verschiedene mathematische Darstellungen (verbale, numerische, graphische und symbolische),
- wählen je nach Situation und Zweck geeignete Darstellungsformen aus oder übersetzen zwischen ihnen,
- erkennen Beziehungen zwischen Darstellungen und reflektieren Unterschiede zwischen ihnen.

Unterschiede hinsichtlich des Anforderungsniveau liegen in

- der Flexibilität des Wechsels zwischen Darstellungen,
- dem Umfang verfügbarer Darstellungsformen,
- dem Ausmaß der Verwendung abstrakter Darstellungsformen,
- dem Grad der Reflexion über Qualitäten von Darstellungen.

In diesem Kapitel werden insbesondere Themen aus den folgenden Bereichen angesprochen:

- Visualisierung elementarer Algorithmen,
- Abbildungsgeometrie – ein weites Feld für Animationen,

Unter dem Thema „Modellbilden“ (Kapitel 7) wird später noch einmal auf Visualisierungen zurückgekommen.

- Mathematische Exkursionen im Garten,
- Firmen-Logos – Modellieren mit den Graphen von Funktionstermen,

Alle genannten Probleme bereichern die üblichen Unterrichtsinhalte durch Arbeit am Computer mit Aspekten wie:

Experimentelles Arbeiten, intelligentes Üben, Entwurf von Animationen, Erforschung der mathematischen Hintergründe, Treffen von Designentscheidungen, Realisierungen mit diversen mathematischen Relationen.

Dabei laufen alle Überlegungen auch darauf hinaus, möglichst viele Eigentätigkeiten der Schüler zu initiieren.

Besonders wichtig sind Visualisierungen funktionaler Zusammenhänge. Hierzu folgen einige Beispiele, die die beiden Aufgabentypen

- von graphischen Visualisierungen zu Texten und
- vom Text zur graphischen Visualisierung

verfolgen.

In diesem Fall wird das Programm TI-Nspire verwendet.

Von graphischen Visualisierungen zu Texten

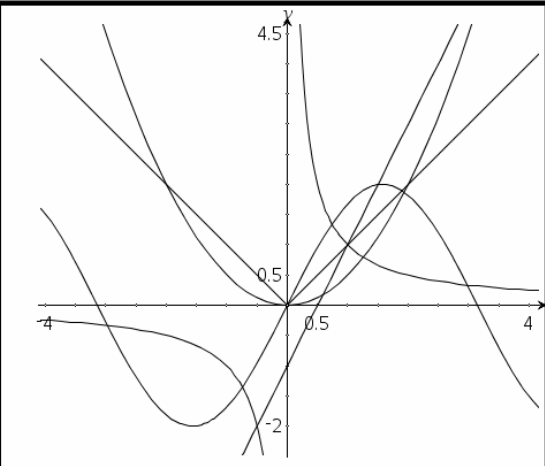
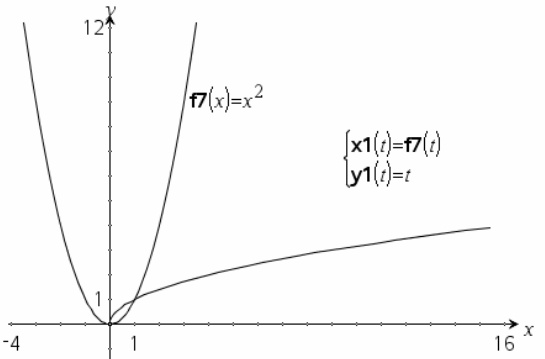
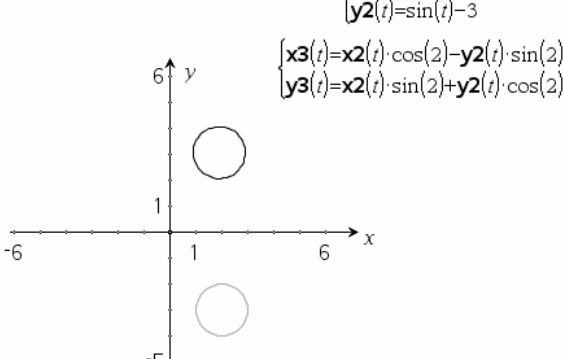
	<p> $f1(x)=2x-1$ $f2(x)=x^{-1}$ $f3(x)=.5x^2$ $f4(x)=2\sin(x)$ $f5(x)= x$ </p> <p>Die linke Abbildung visualisiert die wichtigsten Funktionstypen aus der Sekundarstufe 1 – alle auf einem Bildschirm.</p> <p>Aufgabe(z.B. in Klasse 10): Versuche herauszufinden, um welche Funktionen es sich handelt. Nenne dann jeweils ein Anwendungsbeispiel für jeden Funktionentyp.</p>
 <p style="margin-top: 10px;"> $x1(t)=f7(t)$ $y1(t)=t$ $0 < t < 6.28 \quad tstep=0.13$ </p>	 <p style="margin-top: 10px;"> $x2(t)=\cos(t)+2$ $y2(t)=\sin(t)-3$ $x3(t)=x2(t)\cdot\cos(2)-y2(t)\cdot\sin(2)$ $y3(t)=x2(t)\cdot\sin(2)+y2(t)\cdot\cos(2)$ $x4(t)=$ $y4(t)=$ $0 < t < 6.28 \quad tstep=0.13$ </p>
<p>Aufgabe: Erläutere die Abbildung.</p>	<p>Aufgabe: Stelle einen Zusammenhang her zwischen der Abbildung und den obigen Gleichungen. – Hilfslinien von den Kreismittelpunkten zu (0,0) helfen dir vielleicht.</p>

Abb. 4.1b

Vom Text zur graphischen Visualisierung

1. Visualisiere die Zusammenhänge zwischen der Funktion $y = \sin(x)$ und den ersten beiden Ableitungen.
2. Zeichne zwei Geradenscharen (viele parallele Geraden), die senkrecht aufeinander stehen (die einen Winkel von 30 Grad miteinander bilden).
3. Zeichne den Graphen der Funktion $y = x^3$ als Hüllkurve.
4. Gegeben ist ein Kreis im Koordinatensystem mit dem Mittelpunkt $M(3,4)$. Drehe diesen 18-mal um $(0,0)$.

4.2 Animationen, Weiterentwicklung von Visualisierungen

Animationen sind mehr als die normal üblichen Visualisierungen – sozusagen eine höhere Stufe. Nach einigen Begründungen für den Unterrichtseinsatz von Animationen werden in den Kapiteln 4.3 und 4.4 Beispiele gebracht.

Was für unterrichtliche Vorteile bieten Animationen?

- Die Abfolge in einzelnen Schritten erzeugt Spannung. - Was kommt jetzt? Aufmerksamkeit und Konzentration werden bei einer Animation zunächst auf die einzelnen Objekte gelenkt. - Das sofortige Vorlegen des Gesamtbilds würde die Einzelprobleme verdecken.
- Der Animationsablauf kann beliebig oft wiederholt werden.
- Die Animation kann von den Schülerinnen und Schülern ergänzt werden, z.B. durch besondere Markierungen, Hinzuziehen weiterer Graphen, Löschen von Graphen, Wahl eines anderen Ablaufs usw.
- Der eigene Entwurf von Animationen und die Realisierung sind für Schülerinnen und Schüler äußerst motivierende Aufgabenstellungen, die beiläufig diverse mathematische Überlegungen enthalten.
- Die Arbeitsergebnisse der Schüler lassen sich auf spannende Weise und leicht präsentieren.

Die Bedeutung des eigenen Handelns bei der Benutzung oder der eigenen Gestaltung einer Animation wird in Abbildung 1 verdeutlicht.

Das (mathematische) Bild

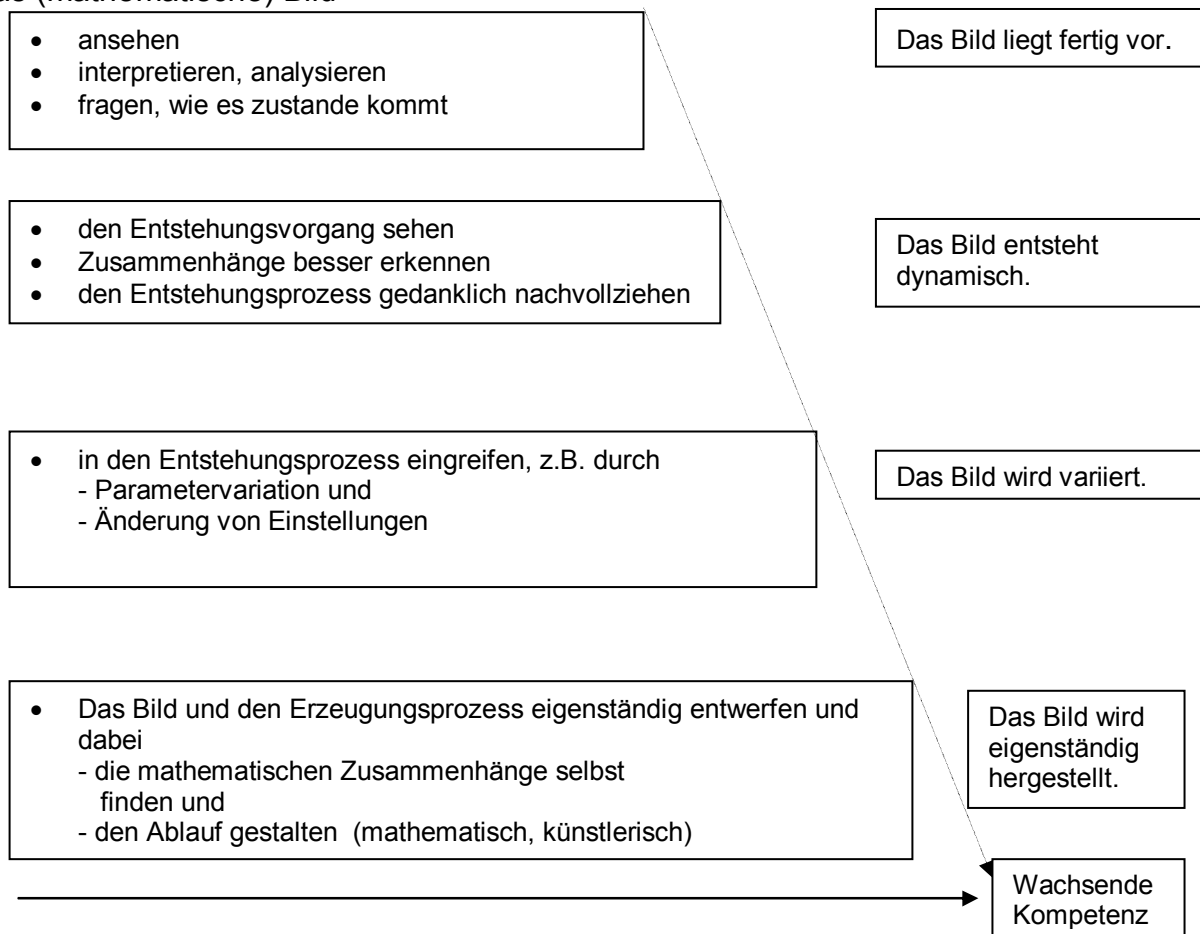


Abb. 4.2.a: Kompetenzen erwerben durch eigenes Handeln bei der Konstruktion einer Animation

Simultanes Zeichnen von Graphen

In bescheidenem Maße kann man auch mit Taschencomputern kleine Animationen entwickeln. Hierzu ein Beispiel, das gerade auch für Grundkurse eine schöne Übung ist: Oft ist es nützlich, Graphen gleichzeitig von links nach rechts zeichnen zu lassen. In dem folgenden Beispiel werden die Graph, Ableitungsgraph und Graph der 2. Ableitung simultan gezeichnet (im y-Editor: F1, Format, Graph Order, simul) . Dabei wurde die Zeichnung abgebrochen (Bild b) und den Schülern in dieser Form vorgelegt. Auch der Bildschirmabdruck a) wird den Schülern gegeben.

Aufgabe 1: Wie gehen die Graphen weiter? Natürlich mit Begründung!
(Zielsetzung: Abhängigkeiten von G_f , $G_{f'}$, $G_{f''}$ verstehen)

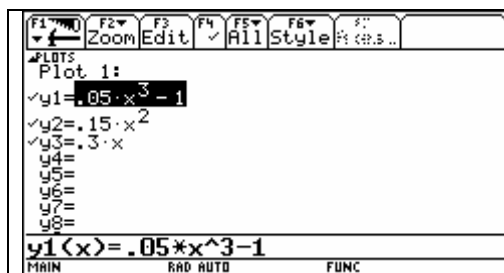


Abb. 4.2b

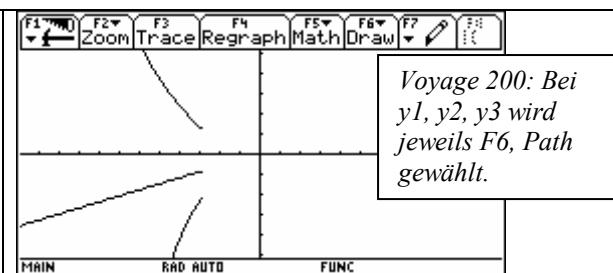


Abb. 4.2c

Einige Variationen zu dieser Aufgabenidee sind

Aufgabe 2: Nachkonstruieren mit dem eigenen Rechner,

Aufgabe 3: Andere Funktionen nehmen (nun muss der Darstellungsbereich beachtet werden),

Aufgabe 4: Nur $G_{f'}$ und $G_{f''}$ geben, G_f zeichnen lassen.

Aufgabe 5: Entwerfen Sie eine Animation, die Zusammenhänge zwischen einem Funktionsgraphen und seinen Ableitungsgraphen verdeutlicht

Mit Hilfe von Parameterdarstellungen (parametric) kann man z.B. auf einfache Weise Graph und Umkehrgraph simultan zeichnen.

```
xt1 = t
yt1 = t^2
xt2 = t^2
yt2 = t
Und das geht für jede Parameterdarstellung!
Siehe hierzu auch Extrakapitel 9.4.1!
```

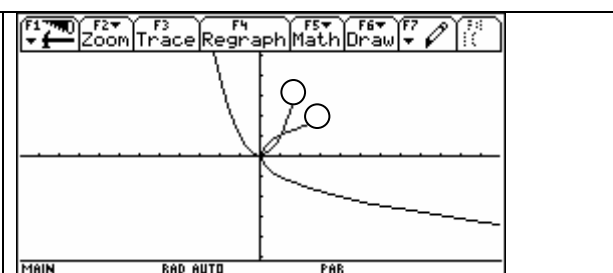


Abb. 4.2d

Selbstverständlich ist der PC besser geeignet, um Animationen herzustellen und ablaufen zu lassen, zumal hier auch Farbe eingesetzt werden kann. Diese kann zu weiteren Differenzierungen in der Gestaltung führen.

Die folgende Abbildung zeigt eine Visualisierung (mit Animation) auf der man auch den Graphen der Abstandsfunktion für die Abstände des Punktes (4,3) von den Punkten der Sinuskurve sieht und interpretieren kann.

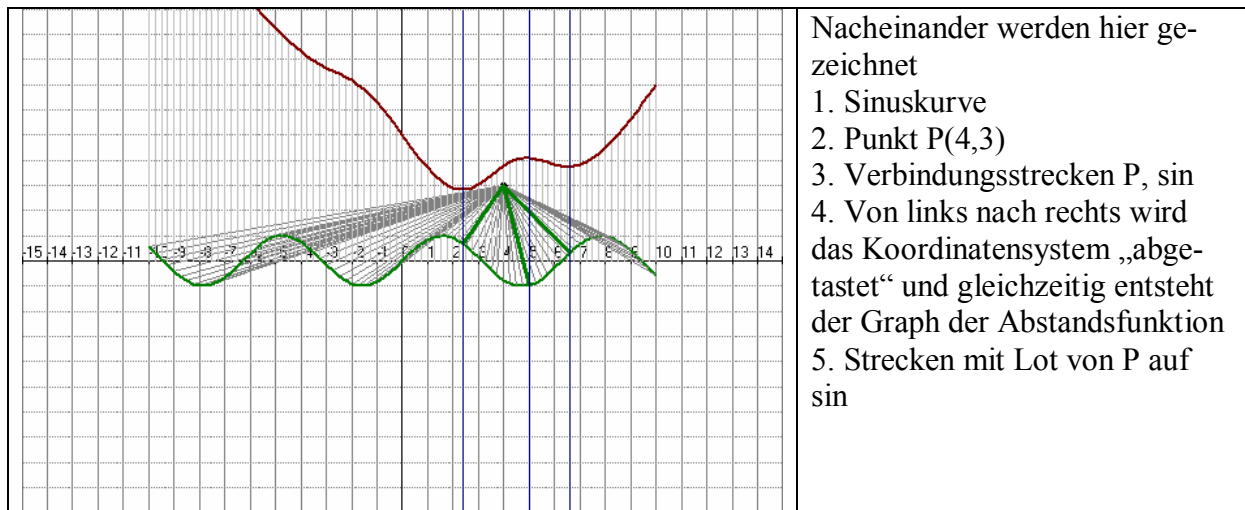


Abb. 4.2e: Veranschaulichung der Abstandsberechnung „Punkt $P(4,3)$ zu den Punkten der Sinuskurve“ – Verstehen der Zusammenhänge

4.3 Eine automatische graphische Kurvendiskussion

Klassische Kurvendiskussionen mit ihrem immer gleichen Bearbeitungsschema sind nicht mehr zeitgemäß für den heutigen Mathematikunterricht. Zu dieser Erkenntnis hat der Computer wesentlich beigetragen, denn er kann in kurzer Zeit

- die gegebene Funktion zeichnen,
- beliebige Wertetabellen aufstellen und
- alle wesentlichen Gleichungen schnell lösen und
- die charakteristischen Werte schnell errechnen.

Noch dazu lassen sich diese Leistungen automatisieren. Die Frage nach der Visualisierung des Ablaufs einer Kurvendiskussion kann allerdings zu einem vertieften Verständnis der Zusammenhänge führen. Hierzu folgen einige Ausführungen.

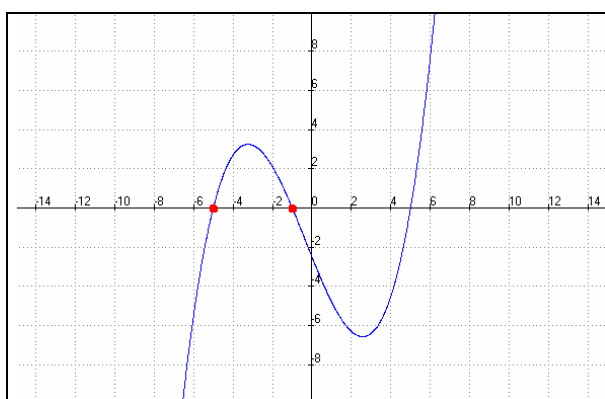


Bild 4.3.a

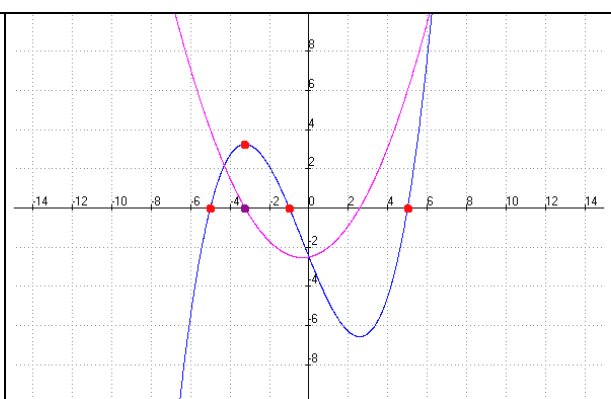
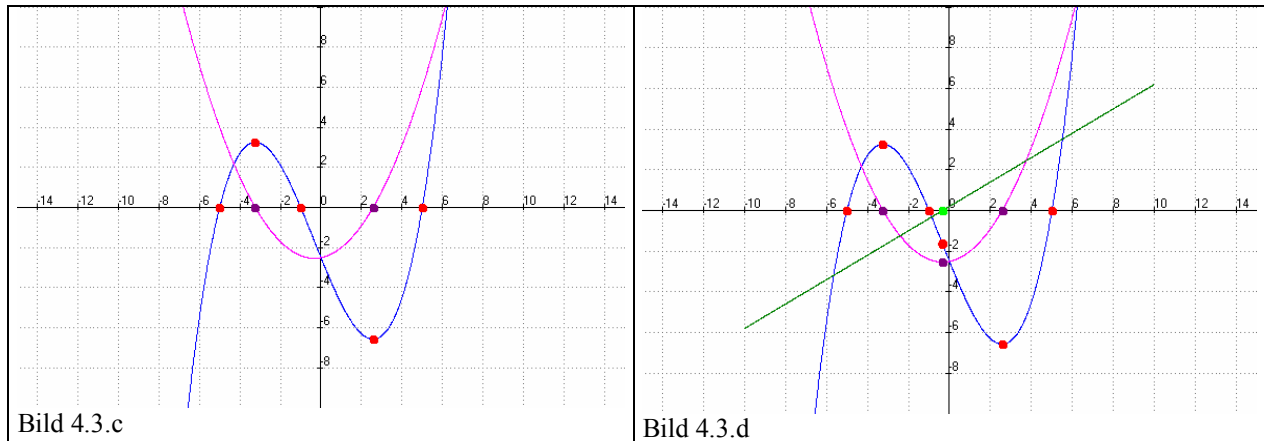


Bild 4.3.b



Die Bilder 4.3.a-d zeigen Ausschnitte aus einer visualisierten automatischen Kurvendiskussion. Der Bildaufbau entsteht in mehreren Animationsschritten. Dabei werden die x-Werte jeweils von links nach rechts durchlaufen und schrittweise entstehen nacheinander:

1. Zeichnung des Funktionsgraphen G_f	2. Suche und Markierung der Nullstellen
3. Zeichnung des Ableitungsgraphen G_f'	4. Suche und Markierung von dessen Nullstellen und damit der relativen Extrempunkte von G_f
5. Zeichnung von G_f''	6. Suche und Markierung von dessen Nullstellen, der relativen Extrempunkte von G_f' und der Wendepunkte von G_f

Diese Vorgänge werden farblich unterstützt und in passender Geschwindigkeit durchgeführt.

Wenn der Schüler diese Animation entwirft, muss er sich der mathematischen Hintergründe bewusst sein und auch mit dem Programm – in diesem Fall ANIMATO - realisieren können.

f1: $0.1 \cdot (a+5) \cdot (a+1) \cdot (a-5)$	Ausgangsfunktion, $a = x$, durch die Bezeichnung a kann $f1$ später an den Stellen a aufgerufen werden (a ist „Pseudoparameter“).
f2: $\{ \text{abs}(f1(a)) < 0.01 : a \}$	Nullstellen suchen
f3: $f2(a), f1(a)$	Nullstellen markieren
f4: $0.1 \cdot (a+5) \cdot (a+1) \cdot (a-5)$	
f5: $(f1(a+0.001) - f1(a)) / 0.001$	1. Ableitung, angenähert
f6: $\{ \text{abs}(f5(a)) < 0.01 : a \}$	Nullstellen von $f5$ suchen (Extremwerte von $f1$)
f7: $f6(a), f5(a)$	Nullstellen von $f1' = f5$ markieren
f8: $f6(a), f1(a)$	Extremwerte von $f1$ markieren
f9: $x, 0$	Nachzeichnen der x-Achse
f10: $(f5(a+0.001) - f5(a)) / 0.001$	2. Ableitung, angenähert
f11: $\{ \text{abs}(f10(a)) < 0.01 : a \}$	Nullstellen von $f'' = f10$ suchen
f12: $f11(a), f10(a)$	Nullstellen von f'' markieren
f13: $f11(a), f5(a)$	Extremwerte von f' markieren
f14: $f11(a), f1(a)$	Wendepunkte von f markieren

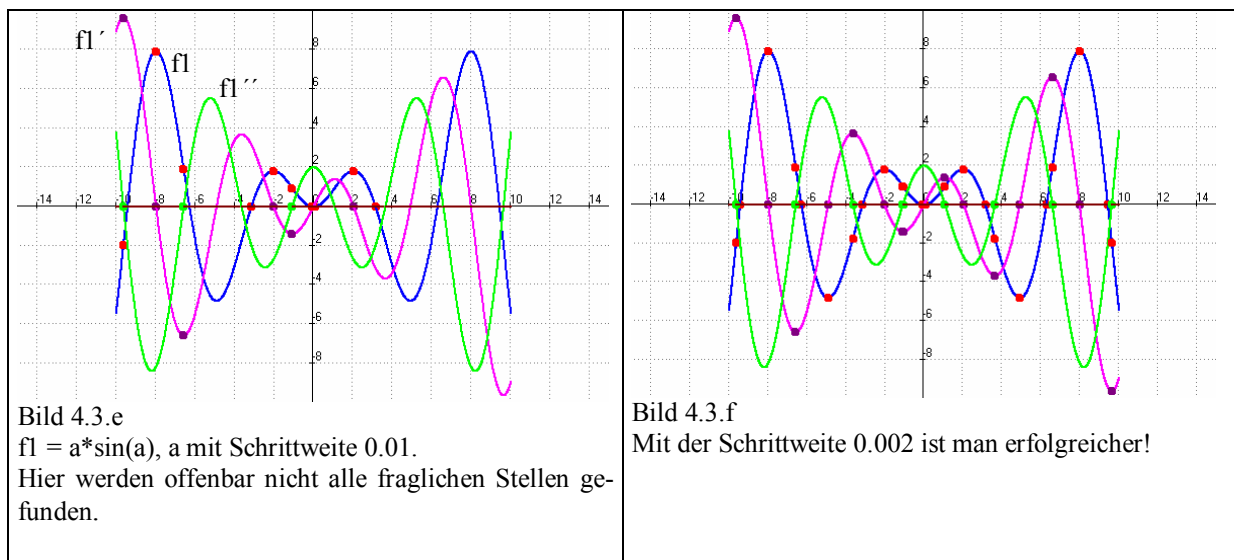
Der Laufbereich der x-Werte ist: $[-10, 10]$, Schrittweite 0.01, 2000 Werte.

Die hier benutzten Algorithmen gelten auch für andere Funktionen, hierfür wäre nur bei $f1$ zu ändern.

Hinweis: Die obige tabellenartige Beschreibung kann als eine Möglichkeit der Dokumentation eines Entwurfs angesehen werden.

Man erkennt, dass hier die eigentlichen Ableitungsfunktionen nicht benutzt werden, vielmehr sieht man bei den Differenzenquotienten-Funktionen $f5$ und $f10$, dass die Ableitungen nur

näherungsweise bestimmt werden. Für die Zeichnung genügt das. Aber die Suche nach Nullstellen kann problematisch werden, auch bedingt durch die Schrittweite bei den x-Werten. Trifft ein x-Wert die Nullstelle oder nicht? Siehe Bild 4.3e.



Die obigen Visualisierungen und Auswertungen können auch die Motivation zur exakten rechnerischen Bestimmung der charakteristischen Werte liefern, wobei man die Rechnung in der Regel einem CAS übergeben wird. Es geht eben zumindest bei höheren Ansprüchen an den Kurs nicht mit (wenn auch beliebig verfeinerbaren) Wertetafeln!

Bezüglich der mathematischen Ziele dieser Visualisierung liegt der Fokus liegt auf der Funktionsuntersuchung und der dabei entstehenden Probleme:

- Auswerten einer Animation
- Probleme beim Suchen nach Nullstellen, Extremwerten, Wendepunkten in einer Wertetafel
- Arbeit mit Ungleichungen
- Funktionsterme, die Schwierigkeiten machen
- Doch lieber rechnen?
- Entwurf einer mathematischen Animation

Weitere Animationen aus der angesprochenen Analysissthematik bieten sich u. a. an für

- das gleichzeitiges Zeichnen von Ausgangsgraph und Ableitungsgraphen (also für den jeweils gleichen x-Wert),
- die Visualisierung des Grenzwerts des Differenzenquotienten einer Funktion (h gegen Null laufen lassen, von links und von rechts)
- die Visualisierung von Reihenentwicklungen (durch Hinzunahme je eines weiteren Gliedes der Reihen)

usw.

4.4 Abbildungsgeometrie – ein weites Feld für Visualisierungen

Immer wenn es darum geht, Objekte in der Ebene oder im Raum an andere Positionen zu bewegen, können uns die Hilfsmittel der Abbildungsgeometrie nützlich sein. Mit Hilfe von Abbildungsmatrizen gelingt es auf einfache Weise Drehungen, Verschiebungen, Spiegelungen, Scherungen usw. durchzuführen. Zur Verdeutlichung der dabei erfolgenden Abbildung der Punkte auf ihre Bildpunkte sind Animationen der Vorgänge besonders geeignet. Erst recht ist das der Fall, wenn mehrere Abbildungen hintereinander durchgeführt werden sollen.

Abbildungsgeometrie als Grundlage der ComputerGraphik bereichert insbesondere den Unterricht in Kursen zur Analytischen Geometrie bzw. Linearen Algebra.

Hierzu folgen nun einige Beispiele.

4.4.1 Hintereinanderausführung von Abbildungen mittels Matrizen Verschieben und Drehen – Drehen und Stauchen

Einige elementare Abbildungen sind auch ohne Matrizen schnell durchgeführt. Dazu gehört beispielsweise die Spiegelung eines Objekts an der Geraden $y = x$, die bekanntlich durch Vertauschen der x - und y -Werte erfolgt. Mit einem CAS ist das leicht möglich, ohne den jeweiligen Term nach der Vertauschung nach y auflösen zu müssen. Man benutzt hierfür einfach den Parameter-Editor (parametric mode). Beim Taschencomputer Voyage 200 geht das so:

Beispiel 1: Umkehrungen

<p>Parameter-Editor, Eingabe Funktion, Umkehrung</p>	
--	--

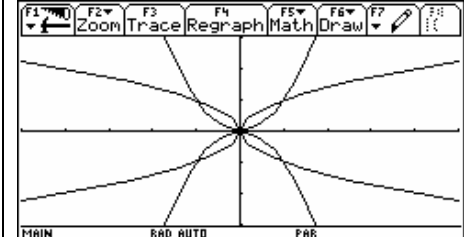
Abb. 4.4.1a


Abb.4.4.1b

Mit diesem Ansatz kann nun Unterricht über Umkehrfunktionen sehr viel inhaltsreicher als ohne Computereinsatz ablaufen, weil man mit jeder Funktion entsprechend arbeiten kann. Die Auflösung nach y ist ja zunächst in der Regel nicht verfügbar.

Beispiel 2: Drehen und Verschieben einer Parabel

	<p>Zunächst wird die Parabel (t, t^2) im parametric mode gezeichnet. Die Abbildungen dieser Parabel finden in den Zeilen $xt2$ und $yt2$. Dabei wird die allgemeine Form einer Drehmatrix benutzt. In üblicher mathematischer Schreibweise:</p> $\# \begin{pmatrix} xt2(t) \\ yt2(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos(u) & -\sin(u) \\ \sin(u) & \cos(u) \end{pmatrix} * \begin{pmatrix} xt1(t) \\ yt1(t) \end{pmatrix}$
--	---

	<p>Mit der Gleichung # beherrscht man nun ein weites Feld von Drehungen auch anderer Graphen, es sind lediglich xt1 und yt1 zu ändern oder auch u anders zu wählen. Im Beispiel ist $u = \{0, \pi/2, \pi, 1.5\pi, 2\pi\}$.</p>
---	---

 <pre> tmin=6.28318530718 tmax=6.28318530718 tstep=1.59269908169873 xmax=11.9 xmin=-11.9 xsc1=1 ymax=5.1 ymin=-5.1 ysc1=1 </pre>	<p>Bei Zeichnungen im Parameter-Modus sind die Darstellungsbereiche von t abhängig.</p>
---	---

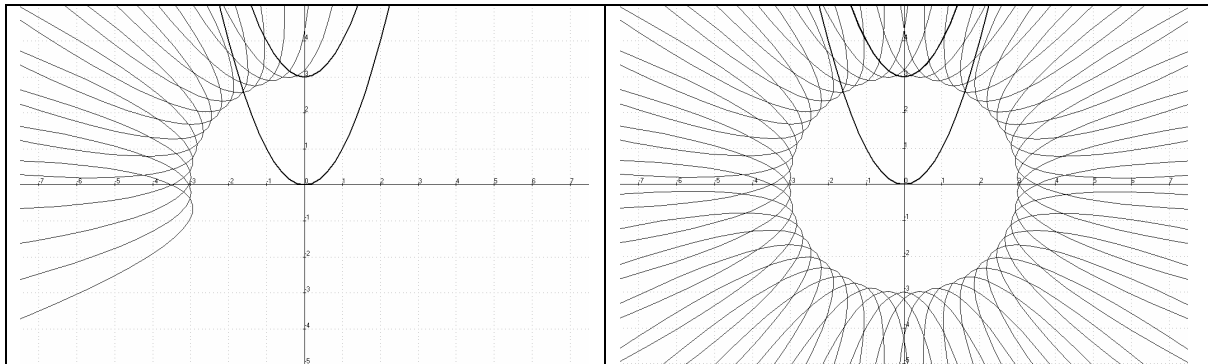


Abb. 4.4.1c und 4.4.1d: Verschieben der Normalparabel und mehrfache Drehung des Bildes – c) Zwischenergebnis, d) Endergebnis.

Die benötigte Mathematik lässt sich in der Abbildungsgleichung

$$\begin{pmatrix} \tilde{x}(t) \\ \tilde{y}(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos(u) & -\sin(u) \\ \sin(u) & \cos(u) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} t \\ t^2 + 3 \end{pmatrix} \text{ zusammenfassen. Dabei ist } u \in [0, 2\pi].$$

Einsatzmöglichkeiten dieses Beispiels im Unterricht ergeben sich ab Klasse 10, wenn die Winkelfunktionen bekannt sind bis hin zu Kursen zur linearen Algebra, in der die Abbildungsgeometrie zu einer wesentlichen Bereicherung der analytischen Geometrie mit ihren immer wiederkehrenden Geraden und Ebenen führt. Die angegebene Drehmatrix wird an geeigneter Stelle hergeleitet. Sie kann auch leicht durch andere, schon früher zugängliche Matrizen ersetzt werden, wie z. B. durch Matrizen zur Spiegelung an den Koordinatenachsen oder der Geraden mit $y = x$ oder einer einzigen Drehung um 90° .

Beispiel 3: Abbildung eines Kreises durch eine Matrix – Anlass zu einem Projekt

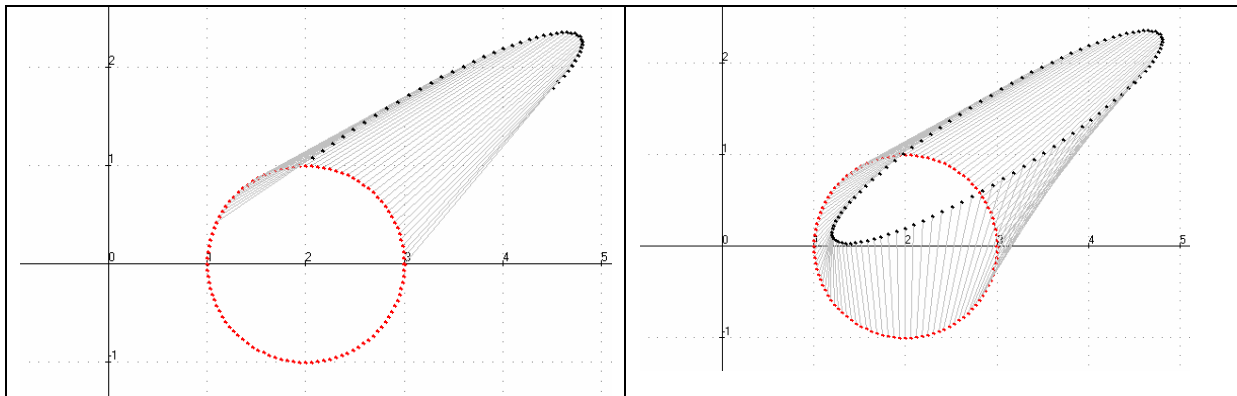


Abbildung 4.4.1e

Abb. 4.4.1f

Die hier ablaufende Animation „Zeichne den abzubildenden Kreis – ziehe Strecken zu den Bildpunkten – trage die Bildpunkte ein“ hat den Vorteil, dass die SchülerInnen die Punktzuordnungen sehen. An ausgewählten Punkten kann dann nachgerechnet werden. Die eingegebenen Terme sind:

f1: $\cos(t)+2$	
f2: $\sin(t)$	
f3: f1,f2	abzubildender Kreis
f4: $1.5*f1+1*f2, 0.6*f1+1*f2$	Strecken
f5: $1.5*f1+1*f2, 0.6*f1+1*f2$	Bildfigur

Für diesen Ansatz bietet sich die Durchführung eines Projekts an, bei dem die einzelnen Schülergruppen die Aufgabenstellung variieren können. Dafür sind dann weitere Abbildungsmatrizen geeignet, deren Wirkung untersucht werden kann. Oder das Ausgangsobjekt kann variiert werden.

Beispiel 4: Mehrfache Drehstreckung einer Ellipse

Diese Aufgabe ist Teil einer Abituraufgabe aus der Abbildungsgeometrie, die im Rahmen eines Lineare Algebra / Analytische Geometrie behandelt wurde.

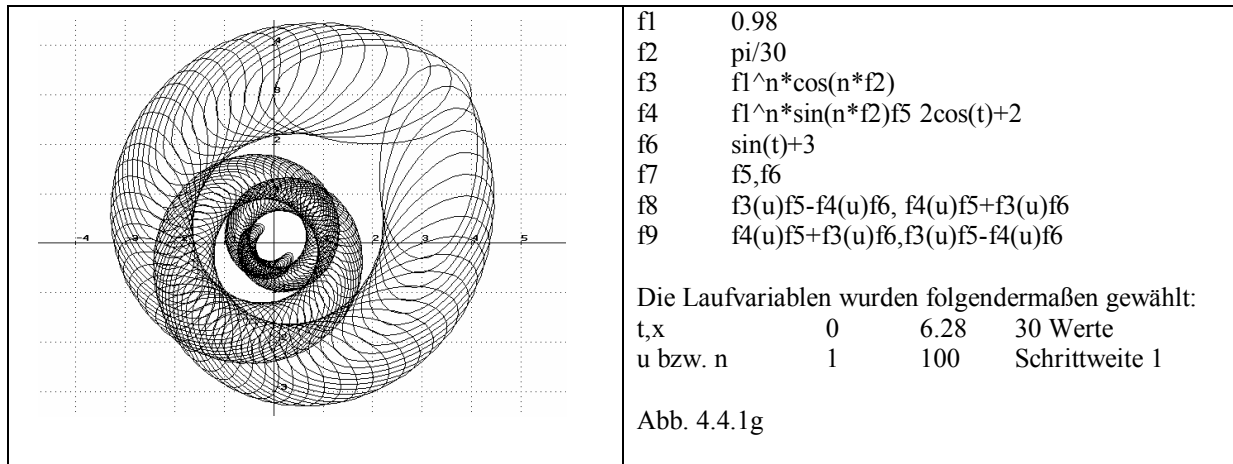
Aufgabenstellung:

Die Anlage enthält eine Graphik, erstellt mit dem Ihnen bekannten Funktionenplotter / Animationsprogramm, sowie Daten zur Erstellung der Graphik. - Erläutern Sie die Graphik und ihren Entstehungsprozess unter Aspekten der Abbildungsgeometrie. (ca. 30')

Hinweise:

- Beginnen Sie mit der Beschreibung der Ausgangsellipsen (diese jeweils farblich markieren).
- Notieren Sie in Ihrer Bearbeitung Terme und Bausteine in der üblichen mathematischen Notation (Matrizen usw.).
- Strukturieren Sie Ihre Erläuterungen durch geeignete Nummerierungen der betrachteten Aspekte.

Hinweis: Es wurde nacheinander, also nicht simultan gezeichnet.



Die Erläuterung der Lösung erfolgt hier durch einen Auszug aus dem Erwartungshorizont der damaligen Abituraufgabe.

Aufgabenteil , Lösungsskizzen, Erwartungen			Bewertungseinheiten, Anforderungsbereiche, Erläuterungen
f_1	0.98	<i>Streckfaktor</i>	AB1 AB2 AB3 <i>Für die Erläuterung der Zeichnung sind ca. 30 Minuten vorgesehen. - Es handelt sich um die Drehstreckung einer Ellipse (f_7) mit Hilfe der ersten 100 Potenzen der Drehstreckmatrix D $0.98^n \cdot \begin{bmatrix} \cos(n \cdot 6^\circ) & -\sin(n \cdot 6^\circ) \\ \sin(n \cdot 6^\circ) & \cos(n \cdot 6^\circ) \end{bmatrix}$. Die Schüler erkennen das aus dem gegebenen Plot-Programm in Verbindung mit der Abbildung und beschreiben die Auswirkung in Textform unter Benennung der Terme und der Verknüpfung der einzelnen Programmelemente. Hierfür werden insgesamt 12 BE vergeben</i> 4 BE, AB 1 für Erkennen grundlegender Elemente 5 BE, AB 2 für Erkennen der Zusammenhänge 3 BE, AB 3 für schwierige Zusammenhänge, wie eigenständiges Erkennen, welche Auswahl von f_1 bis f_9 hier gezeichnet wird, worin sich f_9 von f_8 unterscheidet, warum die Ellipsen immer kleiner werden
f_2	$\pi/30$	<i>Drehwinkel 6°</i>	
f_3	$f_1^n \cdot \cos(n \cdot f_2)$	$0.98^n \cdot \cos(n \cdot 6^\circ)$	
f_4	$f_1^n \cdot \sin(n \cdot f_2)$	$0.98^n \cdot \sin(n \cdot 6^\circ)$	
<i>Drehstreckmatrix, Elemente (1,1) und (2,1)</i>			
f_5	$2\cos(t)+2$	<i>Urbild x-Wert</i>	
f_6	$\sin(t)+3$	<i>Urbild y-Wert,</i>	
f_7	f_5, f_6	<i>um $v_x=2, v_y=3$ verschobene Ellipse</i>	
f_8	$f_3(u)f_5-f_4(u)f_6, f_4(u)f_5+f_3(u)f_6$		
f_9	$f_4(u)f_5+f_3(u)f_6, f_3(u)f_5-f_4(u)f_6$		
<i>Matrix</i> $D^n \cdot \text{Urbild}, \begin{bmatrix} f_3 & -f_4 \\ f_4 & f_3 \end{bmatrix} \cdot \text{Urbild}$			

Die folgenden vier Abbildungen dokumentieren den Ablauf der Animation mit einigen Zwischenergebnissen.

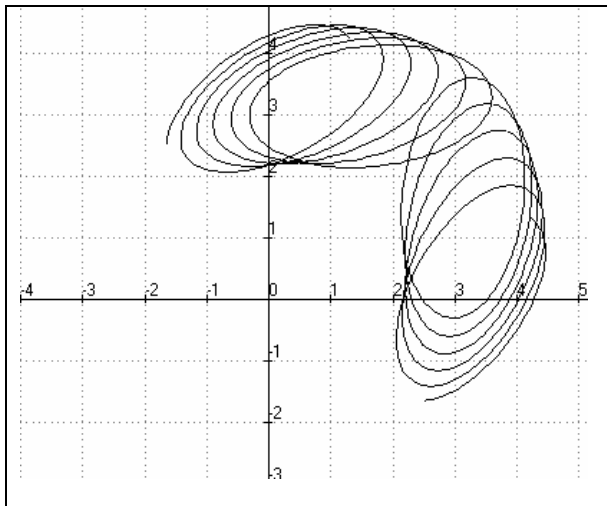


Abb. 4.4.1h

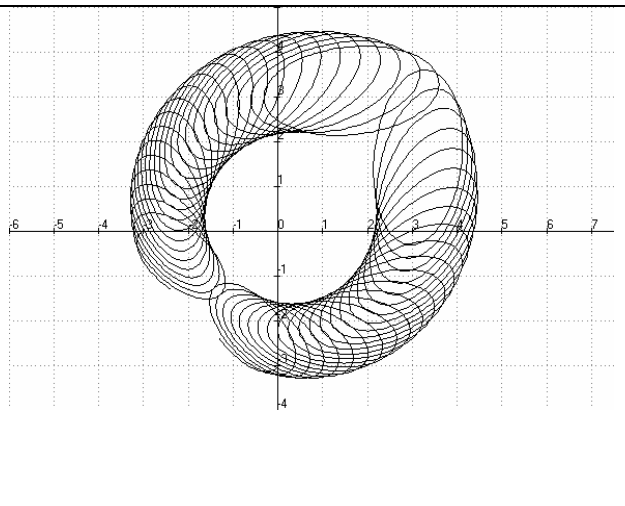


Abb. 4.4.1i

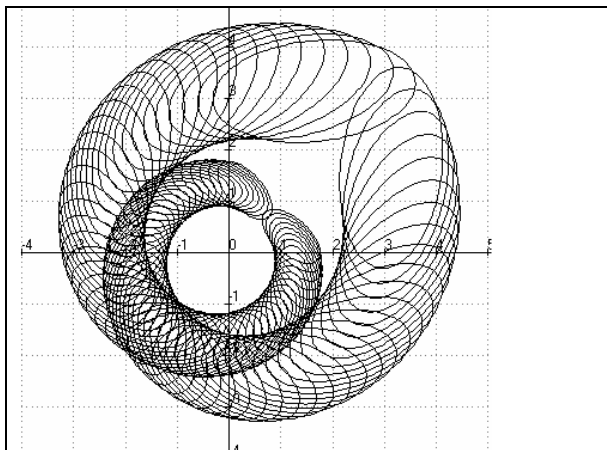


Abb. 4.4.1k

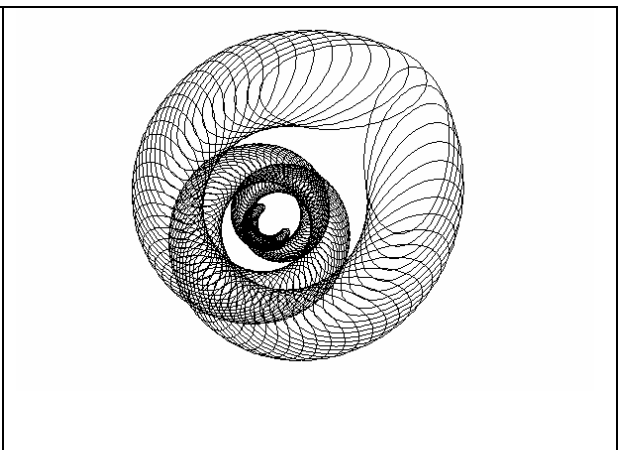


Abb. 4.4.1m

4.4.2 Achsenspiegelung animieren

Das Problem: Eine Figur soll an einer beliebigen Achse gespiegelt werden.

An diesem Beispiel soll gezeigt werden, wie mathematische Überlegungen mit einer Formelherleitung von Hand (ggf. auch mit Computerhilfe), Designüberlegungen und die Realisierung mit dem Computer vernetzt sind. Für den (Leistungskurs-) Schüler eine interessante und spannende Aufgabe.

So soll es werden – ein Auszug aus der Animation:

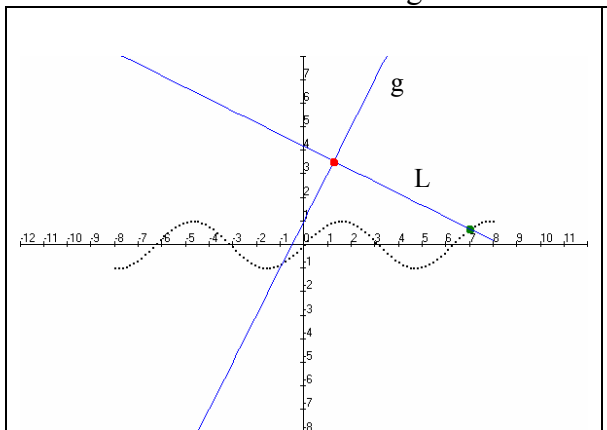


Abb.4.4.2a: Spiegelung der Sin-Kurve an $g: y = 2x + 1$

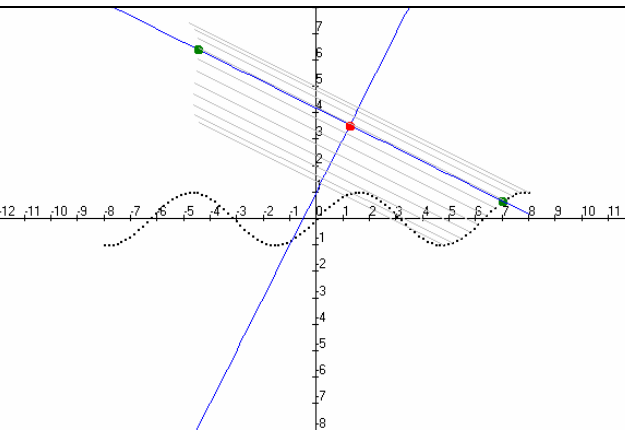


Abb.4.4.2b: Einen Punkt spiegeln, dann die anderen auch

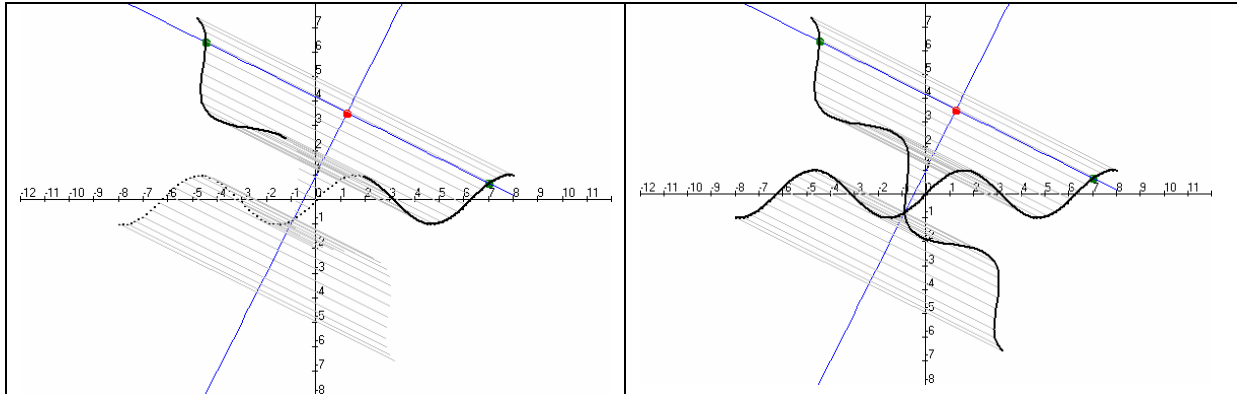


Abb. 4.4.2c: Urbild- und Bild gleichzeitig zeichnen

Abb.4.4.2d: Die Spiegelung an g ist fertig

Der Entwurf

Die Abbildungen 4.4.2a-d ergeben sich bei der Animation der Zeichenvorgänge. Hierzu sind selbstverständlich einige Vorüberlegungen nötig. Die Reihenfolge der Zeichnung soll folgendermaßen erfolgen:

- 1) Zeichnung der Urbild-Kurve f in Form vieler einzelner Punkte (z. B. $y = \sin(x)$)
- 2) Einzeichnen der Spiegelachse g (z. B. $y = 2x+1$)
- 3) Wahl eines Punktes P auf f , diesen fett markieren
- 4) Ziehen der Lotgeraden L von P auf g
- 5) Markierung (fett) des Schnittpunktes M von L und g
- 6) Markierung (fett) des Spiegelpunktes P' von P (er liegt auf L)
- 7) Verbindung vieler Punkte auf f mit vielen Punkten auf der Bildkurve f'
- 8) Gleichzeitiges Nachzeichnen (kräftige Farbe) der Kurven f und f'

Bei den kursiv gedruckten Teilen sind Herleitungen der Terme nötig!

Damit ist die Animation fertig.

- Zusatzwunsch: Die Animation soll so erstellt werden, dass sie auch für eine andere Funktionen bzw. für andere Spiegelachsen ablauffähig ist!

Der hier vorgelegte Plan zeigt ein Wechselspiel zwischen Designüberlegungen für die Darstellung der Vorgänge, der Verwendung mathematischer Grundlagen, der Herleitung einer passenden Formel (siehe unten) und der Realisierung mit der Software. Der Plan wird im Unterricht nicht etwa vom Lehrer vorgelegt, sondern kann von den Schülern in dieser oder einer abgewandelten Form erstellt und realisiert werden (die Software ist den Schülern bekannt). In einer anderen Unterrichtssituation kann die fertige Animation auch als Demonstration erfolgen, an der die Schüler die Mathematik erarbeiten.

Weg 1: Das wird geschehen in einem Wechselspiel zwischen Entwurf in Teilen, Visualisierung, Korrektur, Fortsetzung, usw. bis der Plan schließlich aufgeschrieben werden kann (Bottom-Up-Entwurf)

Weg 2: Die Schüler legen den Plan vorher fest (Top-Down-Entwurf) und realisieren ihn danach.

Nach einer längeren Arbeitsphase – je nach Vertrautheit mit dem zur Verfügung stehenden Programm könnte das Arbeitsergebnis so aussehen:

<p>f1: $a \cdot x + b$ <u>f2: -2</u> <u>f3: 1</u> f4: $1(f_2, f_3)$ f5: a <u>f6: $\sin(a)$</u></p> <p>f7: $(2 \cdot (f_2 \cdot (f_6 - f_3) + f_5)) / (f_2 \cdot f_2 + 1) - f_5$ f8: $(2 \cdot (f_2 \cdot (f_2 \cdot f_6 + f_5) + f_3)) / (f_2 \cdot f_2 + 1) - f_6$ f9: f5, f6, f7, f8 f10: f7, f8</p> <p>Es folgt der Animationsteil <u>f13: 3</u> f14: f6(3) f15: f13, f14 f16: $(2 \cdot (f_2 \cdot (f_{14} - f_3) + f_{13})) / (f_2 \cdot f_2 + 1) - f_{13}$ f17: $(2 \cdot (f_2 \cdot (f_2 \cdot f_{14} + f_{13}) + f_3)) / (f_2 \cdot f_2 + 1) - f_{14}$ f18: $f_{14} + (-1/f_2) \cdot (x - f_{13})$ f19: $(f_{16} + f_{13}) / 2, (f_{17} + f_{14}) / 2$ f20: f16, f17</p> <p>hierzu gehören noch die Einstellungen für die einzelnen Animationsschritte wie Reihenfolge, Geschwindigkeit, Farbe.</p>	<p>Die unterstrichenen Terme können für andere vorgegebene Kurven variiert werden, ohne dass die Animation darunter leidet.</p>	<p>f1 Spiegelachse, f2 Wert für a f3 Wert für b f4 die Gerade $y=2x+1$ (in diesem Fall) f5 Urbild x-Wert, f6 Urbild y-Wert (zu spiegelndes Objekt, hier Sinus-Kurve) f7 Bild x'-Wert, f8 Bild y'Wert f9 Strecken: Von Bildpunkten zu Urbildpunkten f10 Bildfigur zeichnen</p> <p>Es folgt der Animationsteil spezieller Punkt P für Veranschaulichung, x-Wert der y-Wert dazu Zeichnung des Punktes Spiegelpunkt x-Wert Spiegelpunkt y-Wert Senkrechte zu f4, durch f15, Lotgerade L Schnittpunkt M Alle Spiegelpunkte zeichnen (wie f10)</p>
--	---	--

Abb. 4.4.2e: ANIMATO-Datei

Herleitung der benötigten Terme und der Abbildungsgleichung – mit CAS-Einsatz

Wir wiederholen das Problem: Eine Figur soll an einer beliebigen Achse gespiegelt werden!

1) Gegeben sind die Spiegelachse g mit der Gleichung $y = a \cdot x + b$ und eine Funktion f mit der Gleichung $y = f(x)$. Wir suchen den Term der an g gespiegelten Funktion h .

2) Lösungsidee

Zunächst Errechnung des Punktes $M(x_m, y_m)$ auf g durch Schnitt von g mit der Lotgeraden L zu g von einem Punkt $P(x, y)$ auf dem Graphen von f , siehe Abbildung 4.4.2a:

Für den Schnittpunkt M gilt :

$$ax_M + b = y_P - \frac{1}{a}(x_M - x_P), \text{ also } x_M \left(a + \frac{1}{a}\right) = y_P - b + \frac{1}{a}x_P \text{ und damit } x_M = \frac{ay_P - ab + x_P}{a^2 + 1}.$$

$$\text{Andererseits ist } x_m = \frac{x_P + x'_P}{2}, \text{ also } x'_P = 2x_M - x_P = 2\left(\frac{ay_P - ab + x_P}{a^2 + 1}\right) - x_P.$$

Und für y'_P wird

$$y_m = \frac{y_P + y'_P}{2}, \text{ also } y'_P = 2y_M - y_P = 2(ax_M + b) - y_P = 2\left(a \frac{ay_P - ab + x_P}{a^2 + 1} + b\right) - y_P.$$

Zusammengefasst:

$$x'_P = 2\left(\frac{ay_P - ab + x_P}{a^2 + 1}\right) - x_P;$$

$$y_p = 2\left(a \frac{ay_p - ab + x_p}{a^2 + 1} + b\right) - y_p.$$

Diese Terme erkennt man in Abbildung 5 wieder unter den Funktionsnamen f7 und f8. Die hier durchgeführte Hand-Herleitung kann an verschiedenen Stellen durch Einsatz eines CAS ersetzt werden – angesichts der Komplexität der Rechnung eine wesentliche Hilfe!

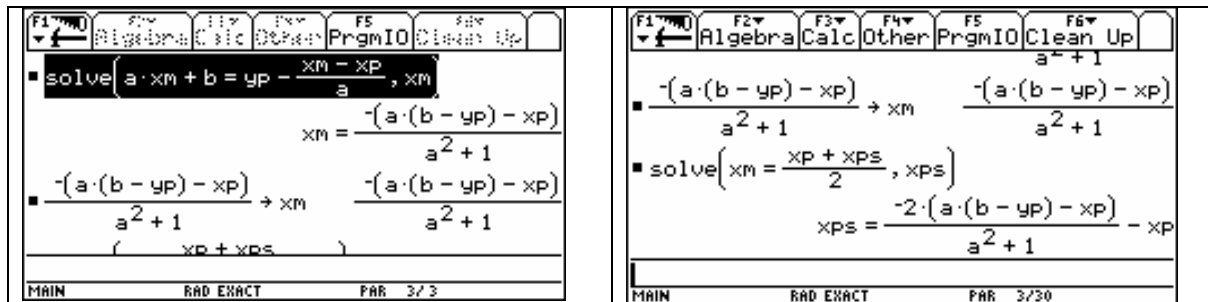


Abb. 4.4.2f und 4.4.2g: Berechnung von x_m und des x -Werts x_{ps} für den Bildpunktes

Entsprechend kann man für den y -Wert vorgehen:

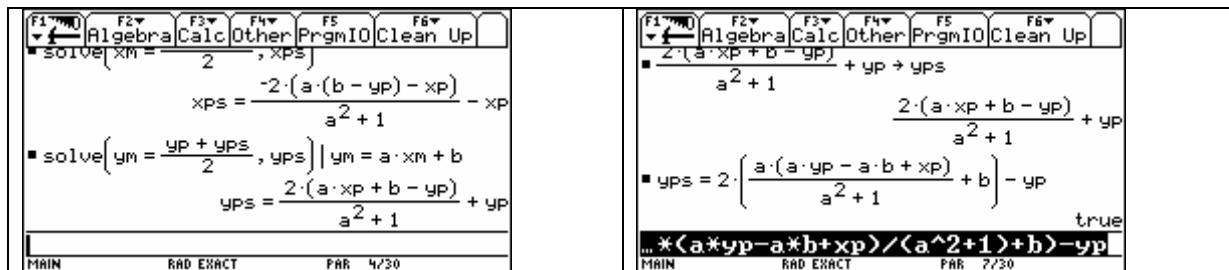


Abb. 4.4.2h Berechnung von y_{ps}

Abb.4.4.2i Vergleich mit dem Hand-Rechenergebnis

Die folgenden Abbildungen zeigen Endergebnisse von Animationen mit anderen vorgegebenen Graphen.

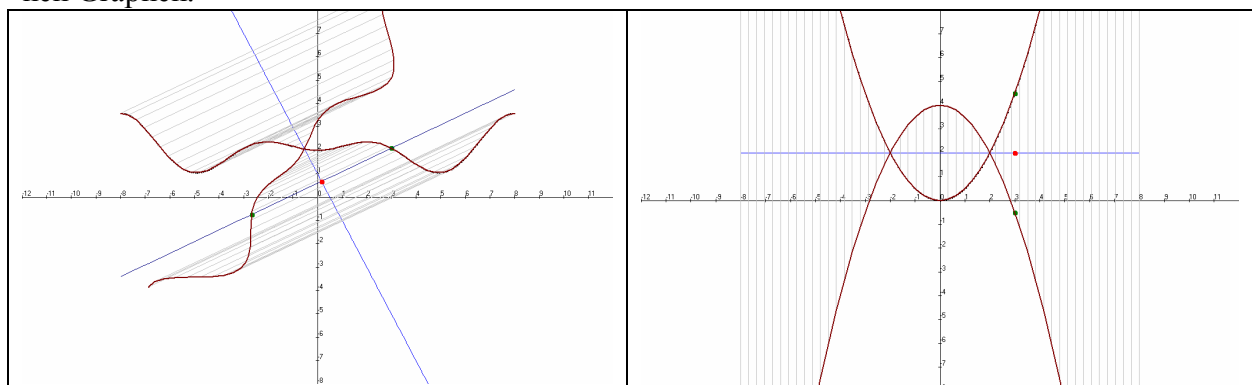


Abb. 4.4.2j: $y = \sin(x) \cdot x \cdot 0.2 + 2$

Abb. 4.4.2k : $y = 0.5x^2$

Aus den obigen allgemeinen Formeln ergeben sich einige Sonderfälle

- Spiegeln an der Geraden mit der Gleichung $y = x$.
- Spiegeln an der y -Achse usw.

Die Abbildungen können in vielfacher Weise genutzt werden: Interpretieren z.B. in Gruppenarbeit, Änderung des Ablaufs, ergänzen, selbst herstellen usw.

Zusammenfassung

Mit den oben unterbreiteten Inhalten und den dargestellten methodischen Möglichkeiten kann der Mathematikunterricht in allen Klassenstufen wesentlich bereichert werden. Die Einsatzmöglichkeiten der einzelnen Ansätze sind vielfältig:

Üben erworbener Kenntnisse und Fähigkeiten, besseres Verstehen mathematischer Zusammenhänge, Entdecken neuer Objekte und Zusammenhänge, Durchführen von Entwurfsarbeiten für Visualisierungen / Animationen und deren Realisierung, Entwerfen von Präsentationen, Erlangen von Souveränität in der Verwendung der benutzten Software usw..

Die angesprochenen Unterrichtsvorschläge beruhen auf langjährigen positiven Erfahrungen des Autors, die auch durch häufige Schülerbefragungen belegt sind.

Da an verschiedenen Stellen des Beitrags ein spezielles Animationsprogramm verwendet wurde, werden abschließend einige markante Eigenschaften des Programms zusammengestellt. Die oben unterbreiteten Vorschläge können – passend variiert - selbstverständlich auch mit anderer Software realisiert werden, Eine ausführliche Dokumentation zu ANIMATO findet man auf der Homepage [2].

Eigenschaften des Animationsprogramms ANIMATO zur Unterstützung dynamischer Vorgänge und Animationen

- (1) Wahl der Reihenfolge des Zeichnens der Graphen
- (2) Auch simultanes Zeichnen von Graphen
- (3) Ziehen von Strecken auch zwischen Punkten von Graph zu Graph
- (4) Farbwahl für die Graphen, verschiedene Strichstärken
- (5) Einstellen der Zeichengeschwindigkeit
- (6) Graphen punktweise zeichnen oder Punkte verbinden
- (7) Verwenden von Parametern
- (8) Schnelle Variierbarkeit in der Darstellungsart
- (9) Wahl geeigneter Zeichenbereiche
- (10) Verfügbarkeit vieler Animationsschritte, Festlegung von Wartezeiten dazwischen
- (11) Für jeden Animationsschritt können eigene Optionen festgelegt werden
(etwa 5, 6, 10)
- (12) Eingabe von Transformationsgleichungen mit Wirkung auf alle Terme, z.B. Umrechnung in Polarkoordinaten oder Eingabe von Drehungen
- (13) Laden von Hintergrundbildern, z.B. mathematische Abbildungen oder Bildern von Digitalkameras, Wahl von Hintergrundfarben

Literatur / Software

[1] Lehmann, Hergen: Animationsprogramm ANIMATO, Berlin 2003 – früher DOS-Version HL-PLOT

[2] Lehmann, Eberhard: Homepage www.snafu.de/~mirza

5. Families

5.1 Mit dem Computer Kurvenscharen erschließen

In den deutschen Mathematik-Curricula werden für Analysis-Kurse Kurvenscharen gefordert. In der Tat ist das ein herausforderndes Thema gerade auch für den Einsatz von CAS. An solchen Scharen kann man weit mehr lernen als an einem einzelnen Objekt. Hier gibt es etwas zu ordnen, zu gestalten, zu vergleichen, zu entdecken und Anlässe weiter zu forschen. Dabei ist stets auch der Umgang mit Parametern gefordert. Über solche gängigen Kurvenscharen hinaus führe ich hier den Begriff der „Family“ ein.

Families - das sind Objekt-Scharen, Objekt-Büschel usw., die irgendwie zusammengehören - bieten dem mathematischen Betrachter in der Regel mehr als einzelne Objekte!



Abb.5.1a : Ein Platz in Portugal mit Families (Steinpflaster, Giebelreihen, Türme, Fenster, ...)

<p>dieses</p> <p>oder vielleicht dieses?</p>	<p>Welches Bild ist herausfordernder für Schülerfragen?</p> <p>Diese Bilder rufen nach der Verwendung von Parametern!</p>	
<p>Abb.5.1.b: Geradenschar, Kreisscheibe</p>		<p>Abb.5.1.c: Überlagerte Scharen von Sinuskurven</p>



Abb.5.1.d: Museumsdecke (München)



Abb.5.1.e: Balkongitter in Ostuni, Italien

Der Entwurf und die Untersuchung von Families bieten sich für sehr verschiedenartige mathematische Fragestellungen an.

Families

- erfordern den Computereinsatz
- lassen sich mit der Grafik eines CAS oder mit Funktionenplottern leicht erzeugen
- entstehen aus Termen mit Parametern
- entstehen durch abbildungsgeometrische Vorgänge
- regen zum Fragen an
- sind schön – sie können zu phantastischen (Kunst-) Bildern führen
- lassen sich vergleichen (und Vergleiche sind eine wichtige Methode)
- führen durch Überlagerungen zu interessanten Moire-Bildern (siehe z.B. Abbildung 5.1.c)
- sind in der Realität zu finden (siehe Fotos).

Die einzelnen Objekte von Families

- gehören irgendwie zusammen
- haben oft gemeinsame Eigenschaften
- lassen sich ordnen (Fallunterscheidungen)

Es gibt also genügend gute Gründe, CAS für diese Objekte einzusetzen. Sie finden in dem vorliegenden Buch zahlreiche Beispiele für Families. Hier werden zwei Probleme mit Kurvenscharen betrachtet.

Families



Gläser-Family (Fassungsvermögen, begrenzende Kurven, Design)



Baustein-Family (Rauminhalte, Kurven, einordnen)



Golfball-Family
(Wieviel Golfbälle passen in das Auto?)



Werkstück-Formen-Family (Formen kennen)



Baumdiagramm-Family,
Wappen in Ostuni, Apulien



Wappen in Verona

Beispiel 1 – Zwei Geradenscharen im Unterricht der Sekundarstufe 1

Eine offene Aufgabenstellung

Arbeitsblatt 1

Wahlpflichtfach Klasse 9, am 9.10.2000

Mögliche Arbeitsformen: Partnerarbeit / Gruppenarbeit / Einzelarbeit / Fortsetzung auch als Projekt möglich.

Arbeitsauftrag

Erläutere schriftlich die folgende Abbildung! - Die Arbeitsergebnisse werden eingesammelt und vorge-tragen! - Hinweis: Von Interesse sind auch die Gleichungen der Geraden!

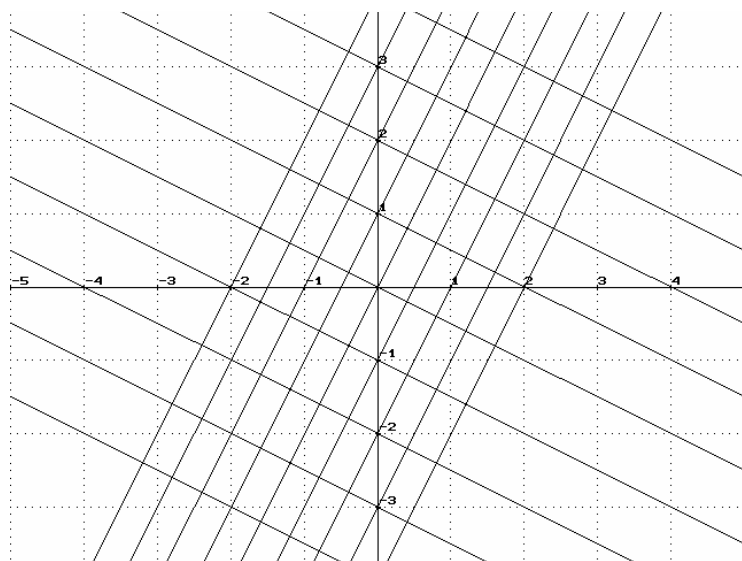


Abbildung 5.1f

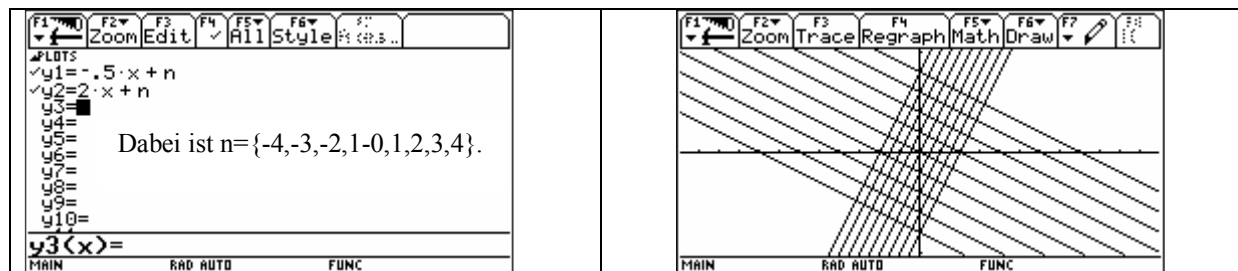


Abb. 5.1-g,h: Geradenscharen mit dem Voyage 200

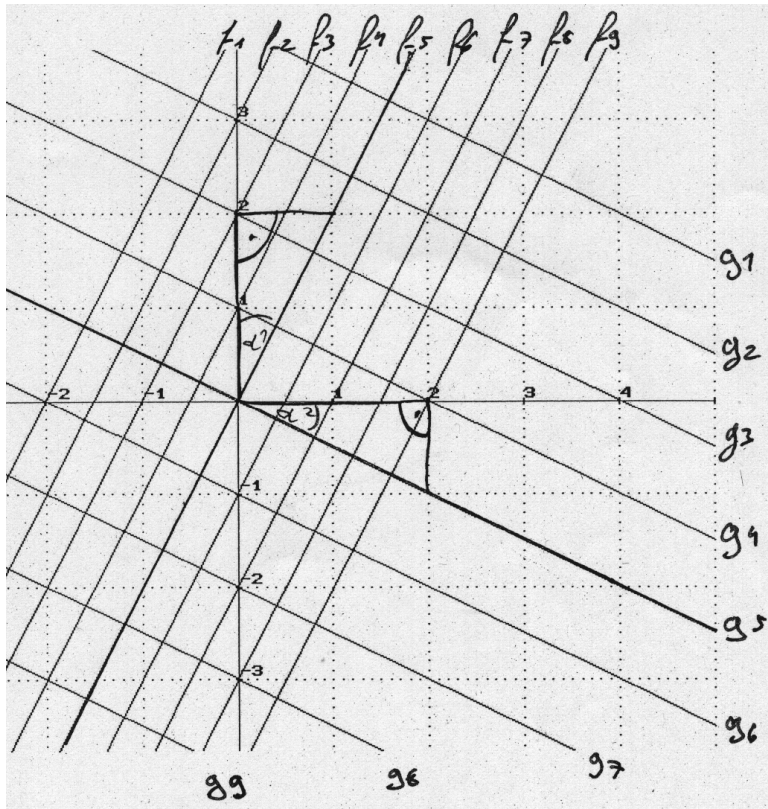
Die Problemstellung wurde auch in einem Lehrer-Workshop unter dem Aspekt der Bewertung offener Aufgaben behandelt. Dabei wurde vorher auch die Meinung der SchülerInnen eingeholt. Hierbei zeigten diese eine erstaunliche Kompetenz.

Die Meinung der SchülerInnen zur Bewertung

Welche Gesichtspunkte sollten angesprochen werden?	Was ist bei der Bewertung zu beachten?
<ul style="list-style-type: none"> • neun steigende und neun fallende Geraden • parallele Geraden • gleicher Anstieg der Geraden • Geraden stehen senkrecht zueinander • zwei Geraden verlaufen durch den Ursprung • Gleichungen der Geraden 	<ul style="list-style-type: none"> • Anzahl der genannten Gesichtspunkte • Kreativität (Art der Zusammenstellung der Gesichtspunkte) • Skizzen • Begründungen

<ul style="list-style-type: none"> • gleicher Abstand auf den Achsen • es entsteht ein Recheckmuster (64) • Steigungsdreieck 	<ul style="list-style-type: none"> • mathematische Richtigkeit • äußere Form • Gewichtung der Punkte
---	---

Schülerbearbeitungen
Bearbeitung 1



Die Geraden $g_1, g_2, g_3, g_4, g_5, g_6, g_7, g_8$ und g_9 sind parallel zueinander, was sich aus den Geradengleichungen ergibt, z. B.:

$$g_5 = -\frac{1}{2}x + 0$$

$$g_6 = -\frac{1}{2}x - 1$$

$$g_7 = -\frac{1}{2}x - 2$$

D. h. der Anstieg ist immer $-\frac{1}{2}$. Alle Geradengleichungen unterscheiden sich also nur durch das absolute Glied, wodurch bewiesen ist, dass die Geraden parallel zueinander sind. Außerdem ist zu erkennen, dass sie immer im gleichen Abstand parallel sind. Alle Geraden g sind jeweils um eine Einheit entlang der y -Achse horizontal verschoben.

Analog gilt für alle f -Geraden, dass sie auch parallel und eine Einheit verschoben sind, jedoch entlang der x -Achse (vertikal). Die Geradengleichungen sind:

$$f_5 = 2x + 0$$

$$f_6 = 2x - 1$$

$$f_7 = 2x - 2$$

D. h. der Anstieg ist immer 2.

1) g_5 und f_5 stehen in einem rechten Winkel zueinander, damit auch alle anderen Geraden (Parallelen):

Dies ergibt sich aus der Kongruenz der beiden markierten Dreiecke (nach SWS).

Damit ist $\alpha_1 = \alpha_2$ und somit die Geraden um denselben Winkel gegenüber dem Koordinaten

Kommentar des Lehrers

Erfreulich sind hier die eigenständige Benennung der Geraden und die Überlegungen zur Geradensteigung mittels Einzeichnung von Hilfsdreiecken.

Parallelität der g -Geradenschar

Richtige Geradengleichungen

Eine Begründung der Parallelität

Verschiebung auf y -Achse erkannt

falsch (nur um eine halbe Einheit verschoben)

Richtige Geradengleichungen

Rechter Winkel zwischen den Scharen erkannt.

Eine schöne Begründung! Der Satz des Schülers endet: „Da die x - und die y -Achse senkrecht aufeinander stehen, folgt (1).“

Bearbeitung 2

Im Koordinatensystem wird ein Gitternetz abgebildet. Es besteht aus neun parallel zueinander verlaufenden Geraden die jeweils den gleichen Abstand voneinander haben (Abstand = $0,7 \text{ cm}$) und die gleiche Steigung besitzen ($y = 2x + t$). Auf diesen neun Geraden liegen andere neun Geraden im 90° Winkel. Auch diese besitzen die gleiche Steigung ($-\frac{0,5}{1}x + t = y$) und den gleichen Abstand voneinander (Abstand = $1,4 \text{ cm}$). Jede Gerade $y = 2x + t$ schneidet alle Geraden $y = -\frac{0,5}{1}x + t$ und umgekehrt. Zusammen ergeben sie ein Gitternetz.

Kommentar des Lehrers

Interpretation als Gitternetz
Parallelität

Abstand offenbar gemessen,
allgemeine Gleichung angegeben,
Laufbereich für t fehlt.

Rechter Winkel genannt.
Zweite Schar allgemein richtig.
Laufbereich fehlt.

Abstand gemessen.
Hinweis auf Schnittpunkte.
Wiederholung.

Die Erwartungen des Lehrers	Gewichtung (1, 2, ..), Bemerkungen Aspekt nennen (1), bei Begründung (2)
- Erkennen zweier paralleler Geradenscharen	1
- Passende Bezeichnungen in der Zeichnung	2
- Gleichungen einzelner Geraden	1, 2 je nach Anzahl (für jede Schar)
- Geradengleichungen allgemein (mit Laufbereich)	3 (für jede Schar)
- Gitternetzstruktur erkennen	1
- Rechte Winkel als Schnittwinkel erkennen	1
- Geradenschnittpunkte erkennen, einige nennen	1, 2
- Geradenschnittpunkte teilweise berechnen	2, geschah nirgends, obwohl im Klassen- unterricht durchgenommen
- Verschiebung der Geraden auf den Achsen um 1 LE bzw. um $1/2$ LE	2
- Beurteilung des Gesamteindrucks	1

Die Erwartungen des Lehrers werden ergänzt durch die Ideen der SchülerInnen!

Was die SchülerInnen zusätzlich nannten oder durchführten	Bewertungseinheiten
- Begründung für rechtwinkligen Schnitt	3
- Messung von Abständen zwischen der Parallelen	1

Die Durchsicht einer Schülerarbeit

Erreichte Bewertungseinheiten

Im Koordinatensystem wird ein Gitternetz abgebildet. Es besteht aus neun parallel zueinander verlaufenden Geraden die jeweils den gleichen Abstand voneinander haben (Abstand = $0,7\text{ cm}$) und die gleiche Steigung besitzen ($y = 2x + t$). Auf diesen neun Geraden liegen andere neun Geraden im 90° Winkel. Auch diese besitzen die gleiche Steigung ($y = \frac{-0,5}{1}x + t = y$) und den gleichen Abstand voneinander (Abstand = $1,4\text{ cm}$). Jede Gerade $y = 2x + t$ schneidet alle Geraden $y = \frac{-0,5}{1}x + t$ und umgekehrt. Zusammen ergeben sie ein Gitternetz.

1
1
1
1, 1
2
1
2
1, 1
Summe
12 BE

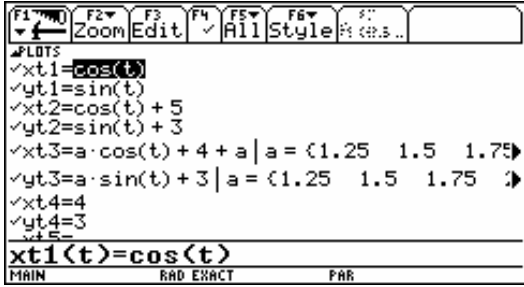
Erreichte Anzahl an Bewertungseinheiten: 12

Beispiel 2 – Zeichne möglichst viele Kreise durch den Punkt P(4, 3)

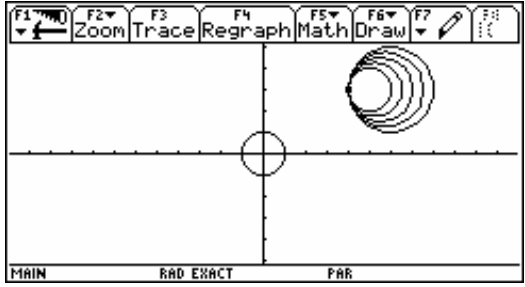
Voraussetzung für die eigenständige Bearbeitung dieser offenen Aufgabe mit vielen Lösungsmöglichkeiten könnte die Kenntnis zum Zeichnen des Einheitskreises sein, siehe links. Dieser hat den Mittelpunkt (0,0) und u.a. die Kreispunkte (-1,0) und (1,0). Kreise zeichnet man am besten in Parameterdarstellung.

Eine Bearbeitungsmöglichkeit:

Der Einheitskreis geht z. B. durch den Punkt (-1, 0). Wenn wir ihn um 5 Einheiten nach rechts und 3 Einheiten nach oben schieben könnten, hätten wir zumindest einen Kreis durch (4, 3). Die weitere Bearbeitung steht in den folgenden Bildern.

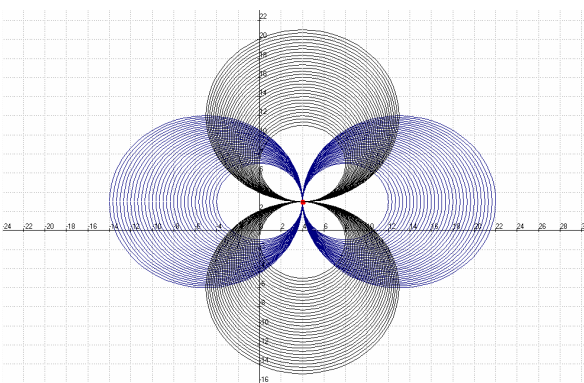


Die Terme im Parameter-Editor

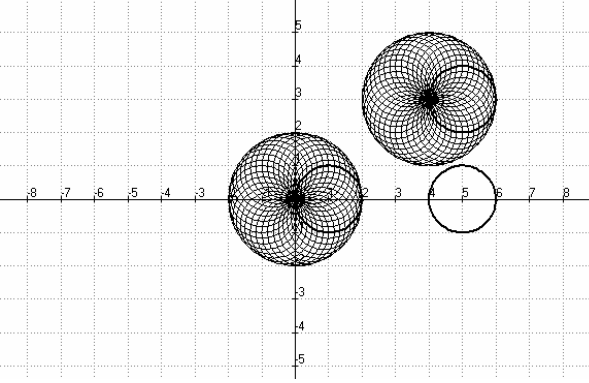


Die Visualisierung der Terme links

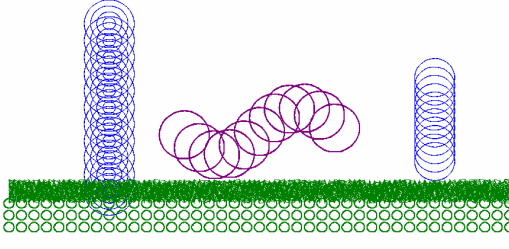
Nachdem das geschafft ist – vermutlich in experimenteller Arbeitsweise (Versuch und Irrtum), wächst auch bei den SchülerInnen der Wunsch, solche Kreisbüschel ebenfalls an anderen Punkten entstehen zu lassen. Dabei können schöne Bilder gestaltet werden, was man jedoch nun besser am PC durchführt – hier mit dem Programm ANIMATO.



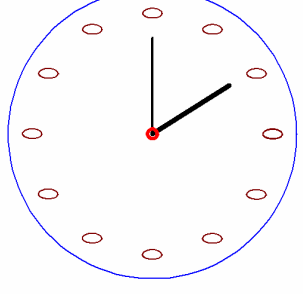
4 Kreisbüschel, ein gemeinsamer Punkt



Hier wurde ein Kreis um (0,0) bzw. (4,3) gedreht

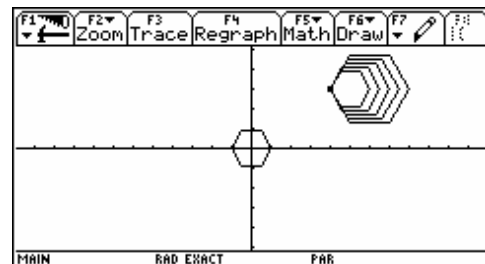
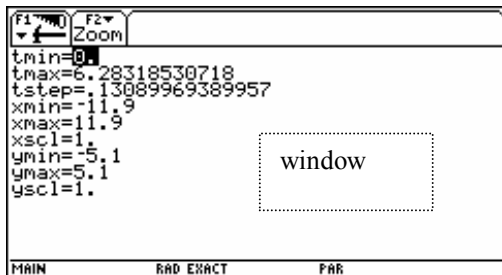


Szene aus Kreisen



Übergang vom Kreis zur Ellipse

Aufgabenvariationen



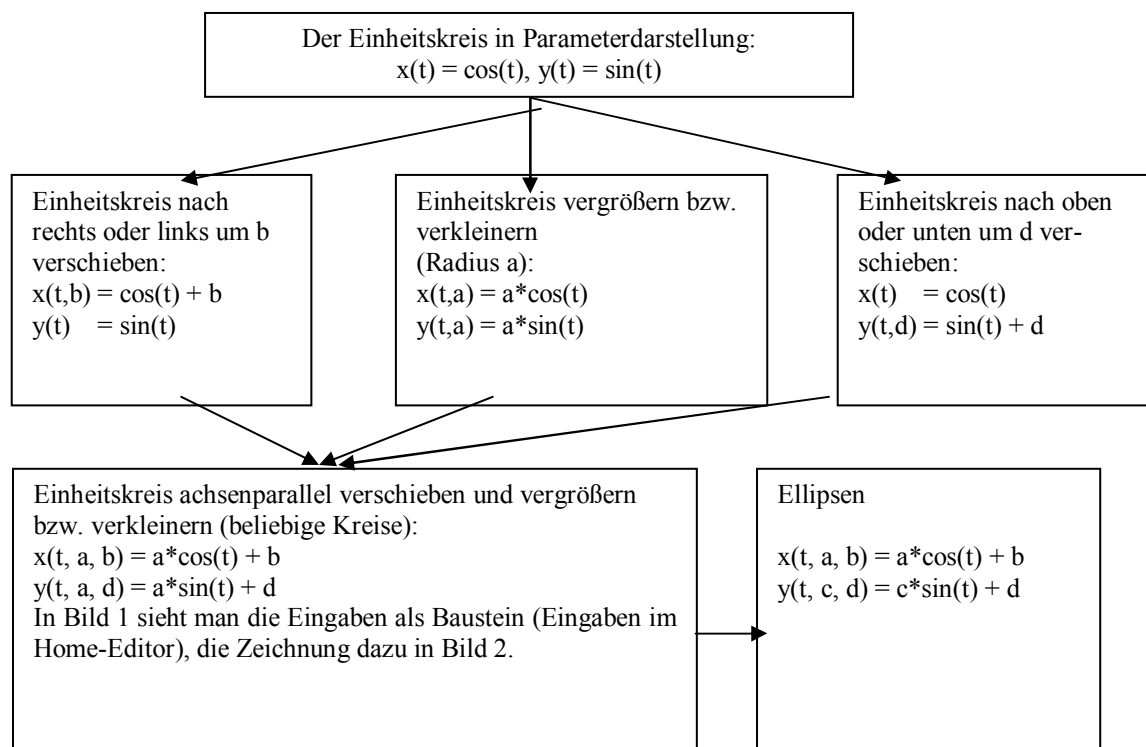
- Kannst du dir vorstellen, wie die Sechsecke entstanden sind?
- Wahl symmetrisch liegender Punkte, durch die Kreisbüschel gezeichnet werden sollen
- Zeichne möglichst viele Parabel durch 2 Punkte
- Zeichne den Graph zu $x(t) = \cos(3t)$, $y(t) = \sin(t)$. Experimentiere dann mit ähnlichen Ansätzen.

Zusammenfassung 1

Mit dem Ansatz „Zeichne möglichst viele Graphen (Geraden, Parabeln, Kreise, sin-Kurven usw.) lassen sich sehr ertragreiche kleine Projekte initiieren!“

Zusammenfassung 2 – Kreis in Parameterdarstellung

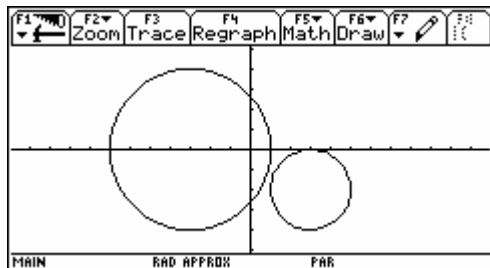
Wenn man lange genug mit den obigen Ansätzen experimentiert hat, kommt man vielleicht zu dem folgenden Überblick – andererseits kann man diesen auch zu weiteren Übungen benutzen.



F1	F2	F3	F4	F5	F6
Algebra	Calc	Other	PrgmIO	Clean Up	
<ul style="list-style-type: none"> ■ $c \cdot \sin(t) + d \rightarrow ykreis(t, c, d)$ Done ■ $a \cdot \cos(t) + b \rightarrow xkreis(t, a, b)$ Done ■ $xkreis(t, 2, 3) \rightarrow xt1(t)$ Done ■ $ykreis(t, 2, -2) \rightarrow yt1(t)$ Done ■ $xkreis(t, 4, -3) \rightarrow xt2(t)$ Done ■ $ykreis(t, 4, 0) \rightarrow yt2(t)$ Done ■ $ykreis(1, 4, 0)$ 3.36588 					
MAIN		RAD APPROX		PAR 21/20	

Eingaben im Home-Fenster

- Die Eingabe des Bausteins.
- Zwei Bausteinaufrufe:
Kreisradien = 2 bzw. 4.
- $ykreis(1,4,0) = 4 \cdot \sin(1) + 8 = 3.36588$, das ist der y-Wert des Kreises für den Bogen der Länge 1.



Ausgabe im Grafik-Fenster

F1	F2	F3	F4	F5	F6	F7	F8
Zoom	Edit	All	Style	CRS...			

```

PLOTS
x1=xkreis(t,4,0)
yt1=ykreis(t,2,-2)
xt2=xkreis(t,4,-3)
yt2=ykreis(t,4,0)
xt3=
yt3=
xt4=
yt4=
xt5=
yt5=
xt6=
yt6=
yt4(t)=

```

MAIN		RAD APPROX		PAR	
------	--	------------	--	-----	--

So sieht der y-Editor aus.

Wir können nun

- Kreise in beliebiger Lage im Koordinatensystem darstellen,
- Ellipsen darstellen, deren Achsen parallel zu den Koordinatenachsen sind,
- passende Bausteine definieren, die die verwendeten mathematischen Hilfsmittel zusammenfassen und deren Aufrufe viele Darstellungsmöglichkeiten mit Kreisen und Ellipsen zulassen.

5.2 Families bilden - Kurvenmengen und Anderes ordnen

Im Unterricht gibt es immer wieder Anlässe, um betrachtete Objekte zu einer Menge mit gleichen oder ähnlichen Eigenschaften zu einer „Family“ zusammenzufassen bzw. eine Menge unter bestimmten gemeinsamen Aspekten zu betrachten.

Families bilden



Abb.5.2a Entwurf eines Tellers mit einer Kreis-Family im Hintergrund (Foto)

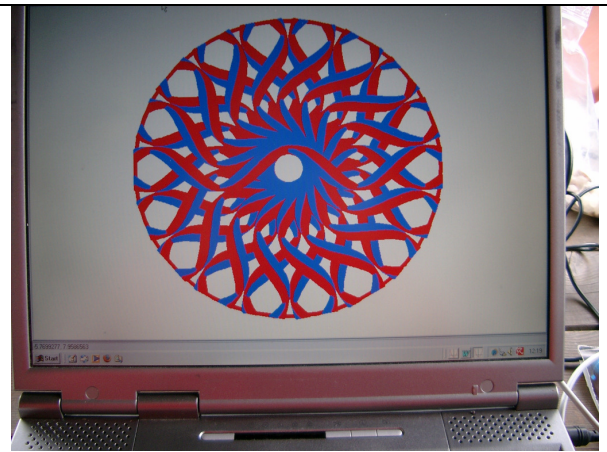


Abb.5.2b Eine Schar von Sinuskurven gedreht (ANIMATO-Bild)

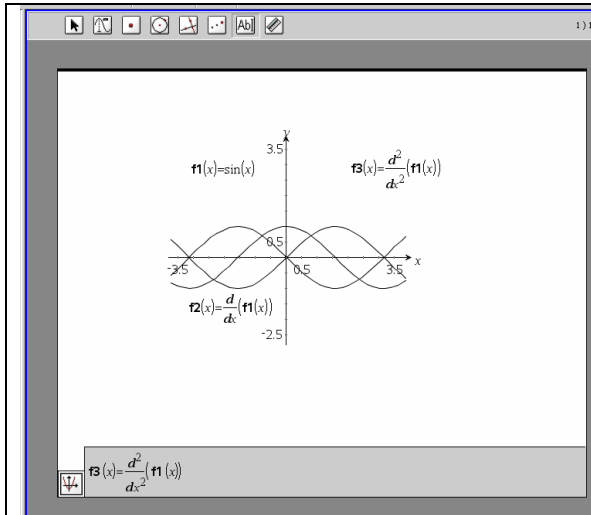


Abb.5.2c Welcher Graph gehört zu welcher Funktion? (TI-Nspire-Bild)

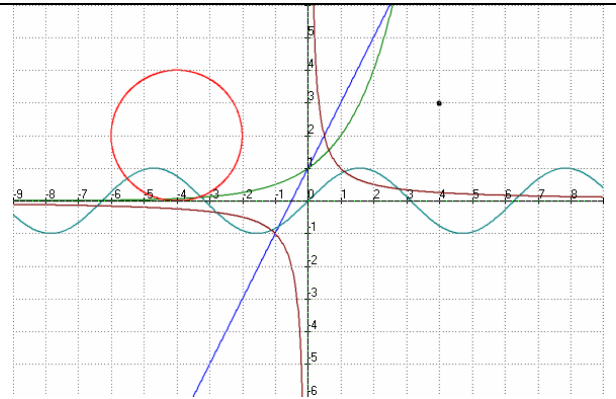
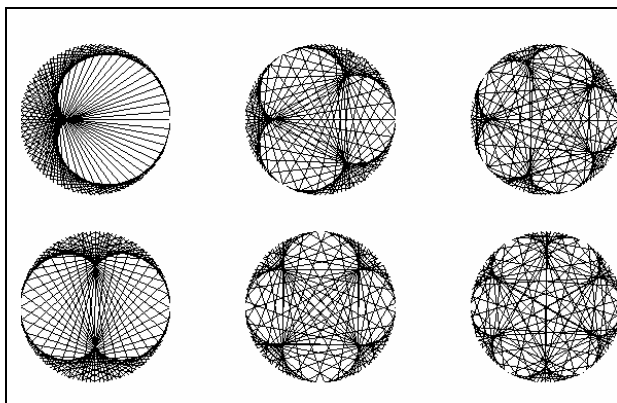


Abb.5.2d Hier werden die Graphen zu Gerade, Kreis, Exponentialfunktion, Sinuskurve, gebrochen-rationale Funktion unter dem gemeinsamen Aspekt „Abstand Punkt – Kurve“ betrachtet.

Kardioiden-Family



So entsteht die Familie, die mittels des Parameters a über den Bildschirm verteilt wird.

- f1: $a + \cos(b \cdot t)$
 - f2: $a + \sin(b \cdot t)$
 - f3: f1(-3, 1), f2(3, 1), f1(-3, 2), f2(3, 2)
 - f4: f1(-3, 1), f2(0.5, 1), f1(-3, 3), f2(0.5, 3)
 - f5: f1(0, 1), f2(3, 1), f1(0, 4), f2(3, 4)
 - f6: f1(0, 1), f2(0.5, 1), f1(0, 5), f2(0.5, 5)
 - f7: f1(3, 1), f2(3, 1), f1(3, 6), f2(3, 6)
 - f8: f1(3, 1), f2(0.5, 1), f1(3, 7), f2(0.5, 7)
- (ANIMATO-Bild)

Zufallszahlen-Families

Zufallszahlen werden zu Simulationen benötigt. Dabei geht man in der Regel von der grundlegenden Anweisung „random“ aus (bei manchen Programmen auch in anderer Syntax, wie z.B. rand()), die Zufallszahlen aus dem Intervall [0,1[erzeugt. Diese können dann durch geeignete Abbildungsterme in andere Bereiche transformiert werden, die durch die vorliegende Simulationsaufgabe bestimmt werden. Die folgenden Voyage-Abbildungen zeigen einige solcher Bereiche.

```

F1 F2 F3 F4 F5 F6 F7
Zoom Edit All Style
PLT:
✓xt8=rand()
✓yt8=rand()
✓xt9=floor(3·rand()) + 1
✓yt9=floor(2·rand())
✓xt10=2·rand()
✓yt10=-.5·rand()
✓xt11=t
✓yt11=floor(2·rand()) - 1
xt12=
MAIN RAD AUTO PAR
    
```

Abb.5.2e

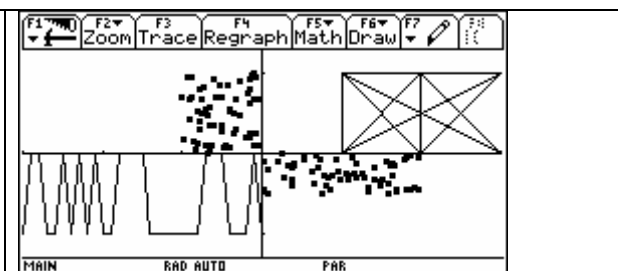


Abb.5.2f

F1	F2	F3	F4	F5	F6	F7	F8
Setup	Cell	Header	Del	Row	Ins	Row	
t	xt8	yt8	xt9	yt9	xt10		
0.	-.4598	.63033	3.	0.	.74266		
.01	-.7582	.14891	1.	1.	.23395		
.02	-.635	.24992	2.	1.	1.8059		
.03	-.6141	.75995	3.	1.	1.3352		
.04	-.9941	.9223	2.	1.	.33296		
.05	-.341	.83646	2.	0.	.79356		
.06	-.1119	.39333	3.	0.	.05658		
.07	-.2556	.84888	2.	0.	.59382		
t=0.							
MAIN RAD AUTO PAR							

Abb.5.2g

F1	F2	F3	F4	F5	F6	F7	F8
Setup	Cell	Header	Del	Row	Ins	Row	
t	yt9	xt10	yt10	xt11	yt11		
0.	0.	.74266	-.4523	0.	1.		
.01	1.	.23395	-.4959	-.01	0.		
.02	1.	1.8059	-.3726	-.02	-1.		
.03	1.	1.3352	-.1778	-.03	-1.		
.04	1.	.33296	-.4934	-.04	0.		
.05	0.	.79356	-.1105	-.05	-1.		
.06	0.	.05658	-.0333	-.06	-1.		
.07	0.	.59382	-.1872	-.07	-1.		
yt11(t)=-1.							
MAIN RAD AUTO PAR							

Abb.5.2h

Aufgabe 1: Welche Terme, Graphen und Tabellen von Abb.5.2e bis 5.2h gehören zusammen?

Aufgabe 2:

Auf einer Party treffen sich 5 Personen. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass genau 2 davon im 4. Jahresquartal Geburtstag haben? - Bearbeiten sie das Problem durch Simulation und veranschaulichen sie diese.

Lösung: Die Jahresquartale können durch die Zufallszahlen aus $M=\{1,2,3,4\}$ simuliert werden. Da es 5 Personen sind, benötigen wir viele 5-Tupel, die jeweils aus Elementen aus M bestehen.

Die Elemente von M erhält man u.a. mit dem Term $\text{floor}(4 \cdot \text{rand}()) + 1$, siehe xt12 in Abb.5.2j (mit Voyage 200).

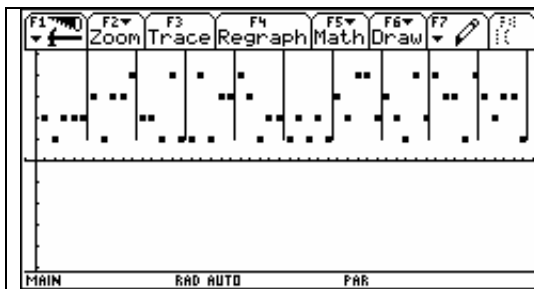


Abb. 5.2i

```

F1 Setup F2 Zoom F3 Edit F4 All F5 Style F6 F7 F8
PLOTS
✓xt12=t
✓yt12=floor(4·rand()+1
✓xt13=5·i+.4|i={1 2 3 4 5 6}
✓yt13=t
xt14=
yt14= xt13: Trennstriche zwischen
xt15= den 5-Tupeln
yt15=
xt16=
yt16=
xt17=
yt17=
yt14(t)=
MAIN RAD AUTO PAR
    
```

Abb. 5.2j

In Abb. 5.2i sind die Daten zu 5er-Gruppen getrennt, man hat die oberste Zeile ins Auge zu fassen und sieht in der obersten Zeile (y = 4) in 2 Gruppen gerade 2 Schüler, die im 4. Quartal geboren sind. Bisher ist das in 2 von 10 5-Tupeln der Fall. Ein erster Schätzwert für die Wahrscheinlichkeit ist also 0.2. Nun wären noch viele weitere Versuche durchzuführen. Man fasst dazu die Werte in der Tabelle für yt12 zu 5-Tupeln zusammen und wertet diese aus.

```

F1 Zoom
tmin=1
tmax=50.
tstep=1.
xmin=-1.
xmax=51.
xsc1=1.
ymin=-5.1
ymax=5.1
ysc1=1.
MAIN RAD AUTO PAR
    
```

Abb.5.2k: Einstellung im Window

F1	F2	F3	F4	F5	F6	F7	F8
Setup	Cell	Header	Del	Row	Ins	Row	
t	xt12	yt12					
1.	1.	2.					
2.	2.	3.					
3.	3.	2.					
4.	4.	1.					
5.	5.	3.					
6.	6.	1.					
7.	7.	3.					
8.	8.	1.					
t=6.							
MAIN RAD AUTO PAR							

Abb.5.2l: Werte in Spalte yt12 auswerten

Ein anderer CAS-Ansatz steht in Abbildung 5.2.m

	<p>Hierbei werden mit Hilfe des seq-Befehls 5-Tupel erzeugt, die man leicht auf 2 Vieren untersuchen und zählen kann. So hat man das Datenmaterial noch schneller zur Hand.</p>
--	---

Abbildung 5.2.m: Zufallszahlen 5-Tupel

Parabelberge

Es sind für die SchülerInnen motivierende Aufgabenstellungen, die viel Mathematik üben und darüber hinaus auch experimentelle Entwurfsarbeiten erfordern:

- Zeichne Landschaften mit deinem CAS oder
- erstelle dein persönliches Logo oder
- zeichne Gesichter usw.



Abb.5.2n: Auf dem Weg zu Gebirgsgraphen

Hier lautet die Aufgabenstellung:

Aufgabe: Erstelle eine Parabel-Berglandschaft! Benutze dein CAS.

Bearbeitung: Die ersten „Berggraphen“ könnten sein:

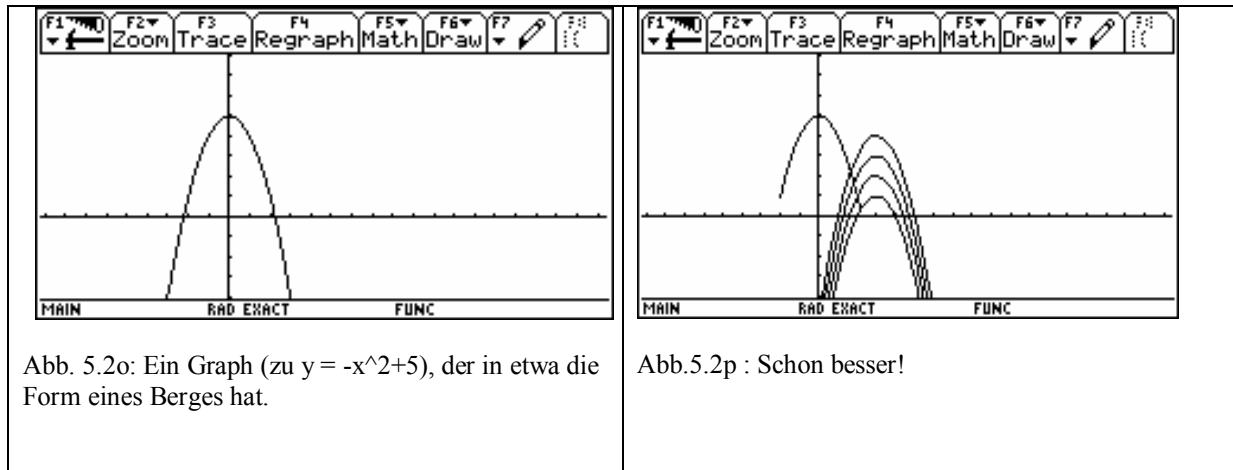


Abb. 5.2o: Ein Graph (zu $y = -x^2+5$), der in etwa die Form eines Berges hat.

Abb.5.2p : Schon besser!

Es wäre allerdings noch schöner, wenn die Parabelberge auf der x-Achse stehen würden. Und vielleicht kann man noch weitere Berge zeichnen.

Eine weitere Bearbeitungsmöglichkeit:

Hier wird eine Lösung gezeigt, die mit dem Animations-Plotter ANIMATO erstellt wurde. Diese Lösung soll nun ausführlicher dargestellt werden, weil hier ein Baustein mit Parametern benutzt wurde. In ähnlicher Weise kann man auch z.B. mit DERIVE arbeiten.

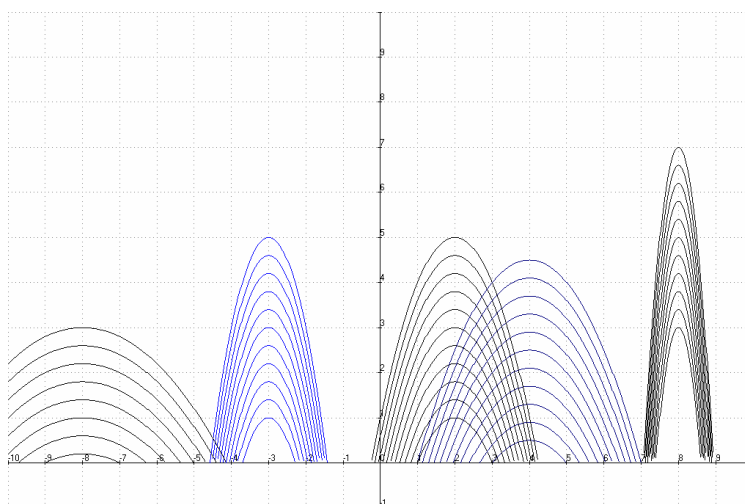


Abb.5.2q: Parabelgebirge im Koordinatensystem – dieses könnte man noch beseitigen

Der folgende Auszug ist das Protokoll des eingegebenen Programms und der Bildschirm-daten. Rechts steht eine Erläuterung.

$$f1 = -a \cdot (x-b)^2 + c$$

```
f2={f1(1,2,u)>0:f1(1,2,u):undef}
f3={f1(2,-3,u)>0:f1(2,-3,u):undef}
f4={f1(0.5,4,u-0.5)>0:f1(0.5,4,u-0.5):undef}
f5={f1(0.2,-8,u-2)>0:f1(0.2,-8,u-2):undef}
f6={f1(8,8,u+2)>0:f1(8,8,u+2):undef}
f7={f1(1,2,1)>0:f1(1,2,1):undef}
f8={f1(1,2,1)>0:f1(1,2,1):undef}
```

```
xmin= -10
xmax= 10
ymin= -1
ymax= 10
xgrid= 1
ygrid= 1
-name=
-range0= -10,0.02,1000 1000 x-Werte
-range1= 1,0.4,10 10 u-Werte von 1 an und in 0.4-Schritten
```

Unter f1 steht ein Baustein mit den drei Parametern a, b, c. Er beschreibt Parabeln

- a: Steilheit
- b: Verschiebung längs der x-Achse
- c: Verschiebung längs der y-Achse.

f2 bedeutet: Wenn die y-Werte f1(1,2,u) größer als 0, dann die Werte zeichnen, sonst nicht. Dabei ist die Parameterbelegung:

a=1, b=2, c=u und u nimmt die Werte 1, 1.04, 1.08 usw. bis 5 an (siehe links)

Mathematik ordnen

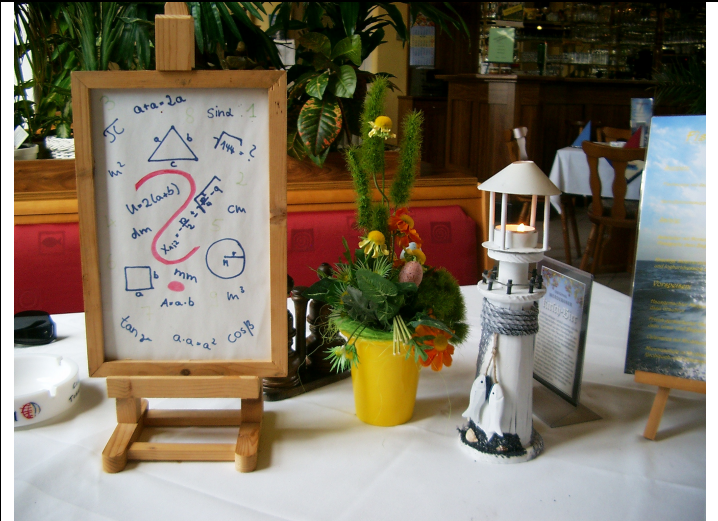


Ein alter Briefkasten in Windhoek (Namibia)

- In den Briefkasten kommt alles ungeordnet hinein.
- Später wird geordnet und die Post weiter versandt.
- Was sind die Ordnungsprinzipien bei der Post?
- Kann man mit diesen Prinzipien auch in der Mathematik etwas anfangen?



Klötzchen-Family, Klötzchen zusammenbauen / ordnen



Mathematische Zusammenhänge zwischen den Eintragungen auf der Tafel (in einem Restaurant) finden / ordnen



Die Kreisfiguren sollen nachgezeichnet werden! Ordne sie nach dem Schwierigkeitsgrad der Zeichnung für dich. Kannst du einige Figuren mit deinem CAS erzeugen? Teilt euch die Arbeit auf.



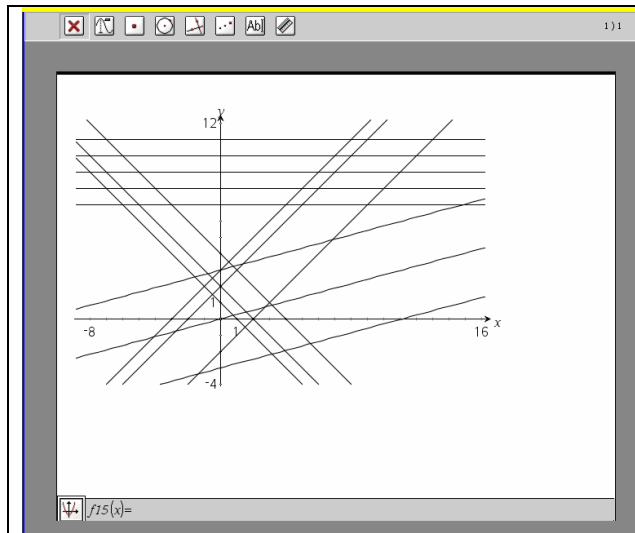
Ordne die hier sichtbaren mathematischen Elemente. Bringe sie auf deinen CAS-Bildschirm. - Parallele Sinuskurven, Sinuskurven gespiegelt an $y = x$, ausgefüllte Kreise, Zufallspunkte (klein und groß)

Als zu erwerbende oder zu übende Kompetenzen und Fertigkeiten werden bei den hier angesprochenen Fragestellungen u.a. verfolgt – auch abhängig von der Klassenstufe:

- Argumentieren: Ordnen nach vorgegebenen oder selbstgewählten Ordnungsprinzipien und begründen
- Darstellungskompetenz: Funktionen bzw. Funktionenklassen erkennen
- Erkennen von Zusammenhängen
- Darstellungskompetenz: Selbst ähnliche komplexe Bilder erzeugen und dem Mitschüler vorlegen

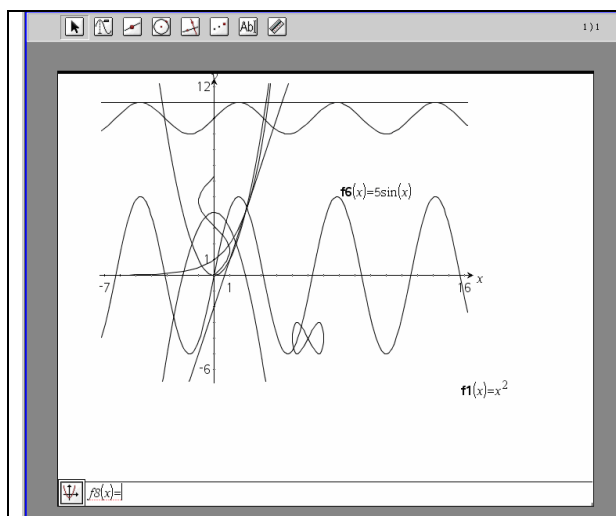
Aufgabe

Bringen sie Ordnung in das „Kurvenchaos“ auf den folgenden Bildern des Taschencomputers TI-Nspire. Was sind ihre Ordnungsprinzipien?



1) Das Bild wird vorgegeben. – Die SchülerInnen werden die jeweils parallelen Geraden entdecken (Scharen S1 bis S4) und können innerhalb einer Schar Gleichungen aufstellen und den Steigungswert feststellen.

2) Die SchülerInnen können solche Bilder auch selbst entwerfen und ihren Mitschülern zur Bearbeitung vorlegen.



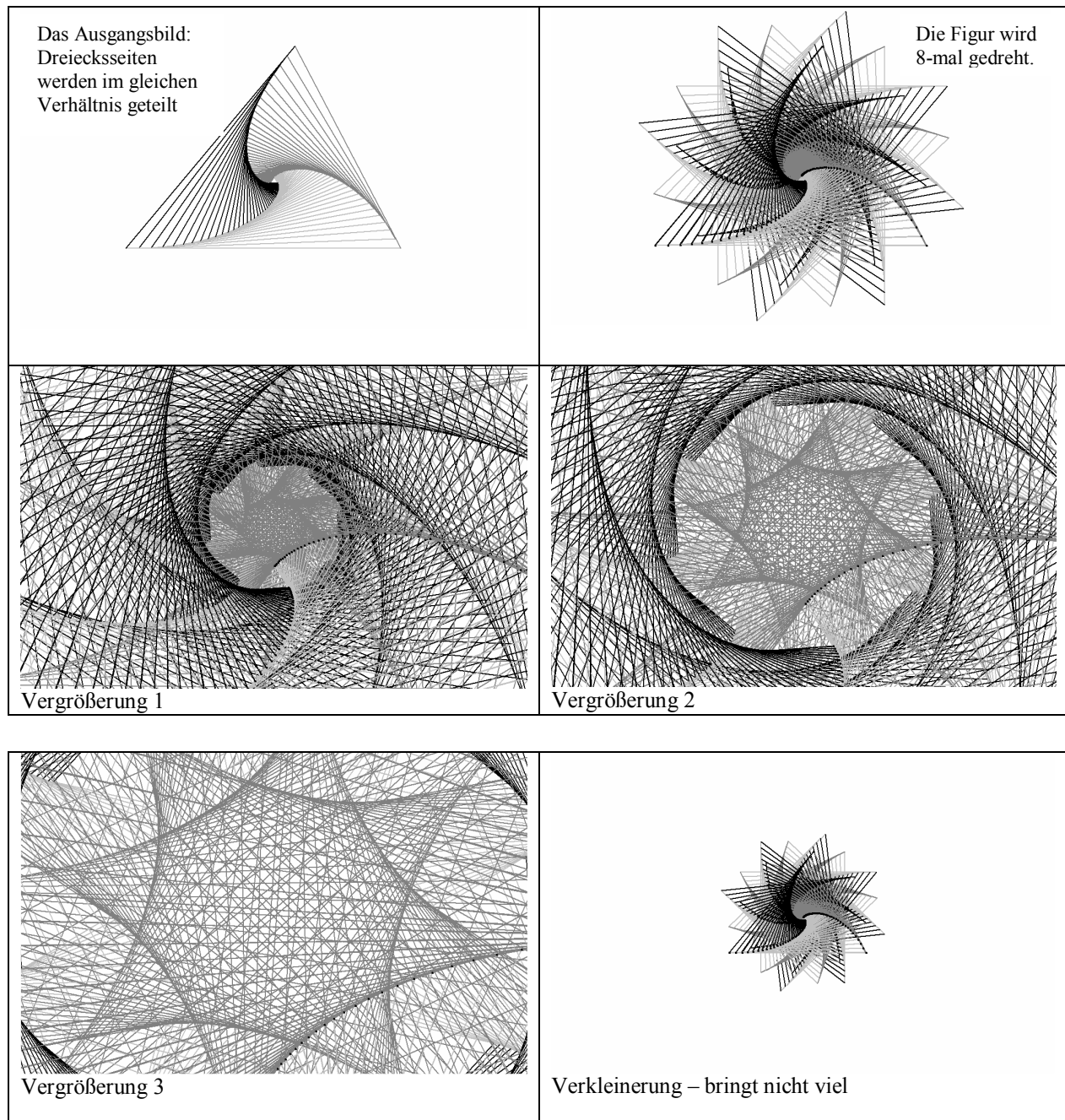
Übung in der Sekundarstufe 2.
Wie lauten die Gleichungen der Graphen?

Glas-Family



- Gläser zählen (geht es auch noch anders?)
- Gläser anordnen
- Volumina
- Platzbedarf

Muster entdecken – Zoomen, vergrößern, verkleinern



Mit diesen, bislang wenig beachteten Möglichkeiten des Vergrößern und Verkleinern von Abbildungen gelangt man zu überraschenden Bildern und zu neuen Fragestellungen und Einsichten, die man vorher kaum erwartet hat.

- Handelt es sich z.B. bei Vergrößerung 3 um zwei ineinanderliegenden Astroiden?
- Der Übergang von der Ausgangsfigur zur Drehung lenkt die Betrachtung auf abbildungsgeometrische Möglichkeiten, die der Analytischen Geometrie der Schule neue Impulse geben können.

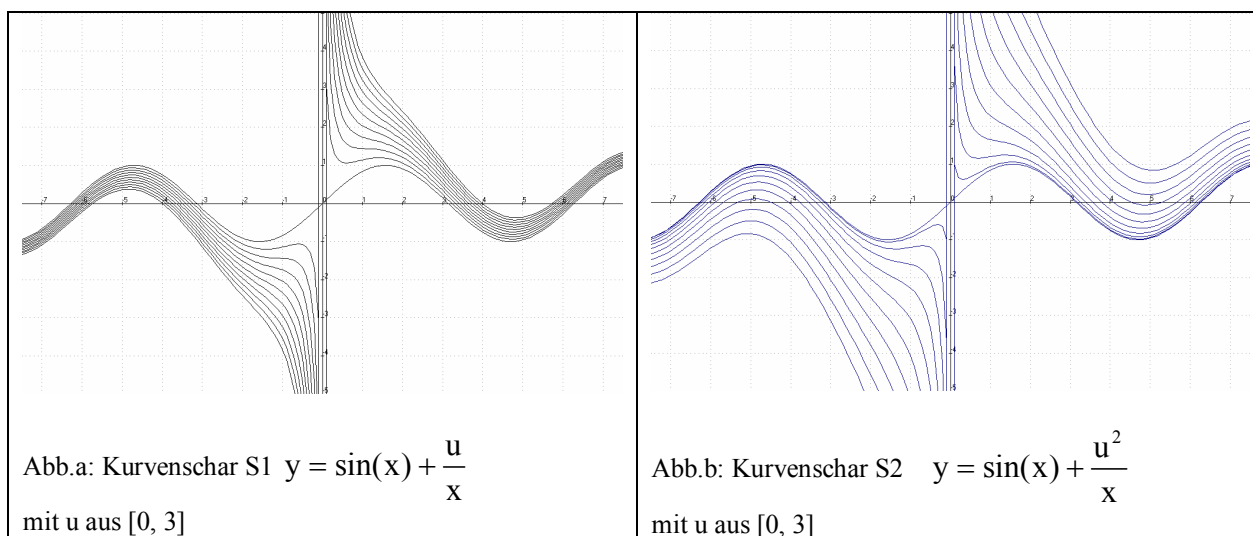
5.3 Vergleichen von Kurven, Kurvenscharen und Tabellen

Die Methode des Vergleichens von Objekten aller Art (Lösungen, Kurven, Kurvenscharen, Beweisen, Bilder usw.) wird im Mathematikunterricht i.a. zu wenig beachtet und ist dennoch sehr fruchtbar.

Als erstes Beispiel betrachten wir zwei Kurvenscharen und erschließen daraus einige charakteristische Eigenschaften.

Beispiel 1 – Zwei Kurvenscharen werden verglichen

Gegeben sind die beiden Kurvenscharen S1 $y = \sin(x) + \frac{u}{x}$ und S2 $y = \sin(x) + \frac{u^2}{x}$



1. Vergleichen Sie die beiden Scharen, ohne Rechnungen.
2. Die Scharen haben zwei gemeinsame Kurven K1 und K2 – welche sind das?
3. Geben Sie eine Formel an für Berechnungen von Flächeninhalten
 - 3.1 zwischen den beiden Kurven K1 und K2,
 - 3.2 zwischen je einer Kurve aus S1 und S2 bei gleichem u
 - 3.3 zwischen je einer beliebigen Kurve aus S1 und S2

Bearbeitung zu 1: Man kann z.B. die Kurven zu den u-Intervallenden betrachten.

	S1 $y = \sin(x) + \frac{u}{x}$	S2 $y = \sin(x) + \frac{u^2}{x}$
u = 0	$y = \sin(x)$	$y = \sin(x)$
u = 3	$y = \sin(x) + \frac{3}{x}$	$y = \sin(x) + \frac{9}{x}$
u = 1	$y = \sin(x) + \frac{1}{x}$	$y = \sin(x) + \frac{1}{x}$
Hinweis: Übrigens macht die Berechnung von Extremwerten usw. Probleme mit manchen CAS. Probieren sie es aus!	Wählt man ein u für S1 (z.B. u=3), so erhält man die gleiche Kurve in S2, wenn man dort den Wert $\sqrt{u^2}$ wählt (also z.B. $\sqrt{9}$).	Wählt man für beide Kurven den gleichen Bereich [0,3] und die gleiche Schrittweite h, so ergeben sich gleiche Kurven nur für u = 0 und u = 1.

Bearbeitung zu 2 und 3:

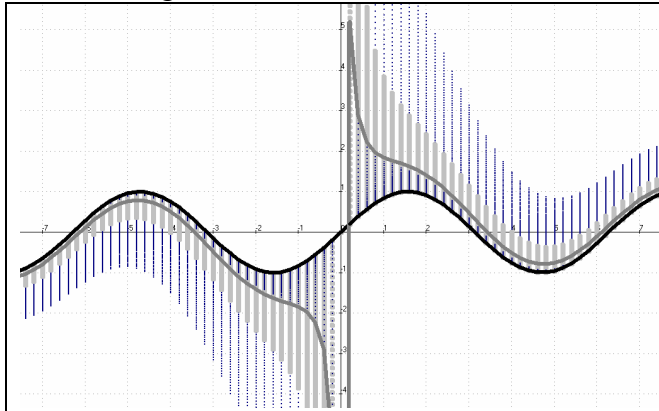


Abb.c: Hier sieht man S1 und S2 gleichzeitig und auch die gemeinsamen Kurven

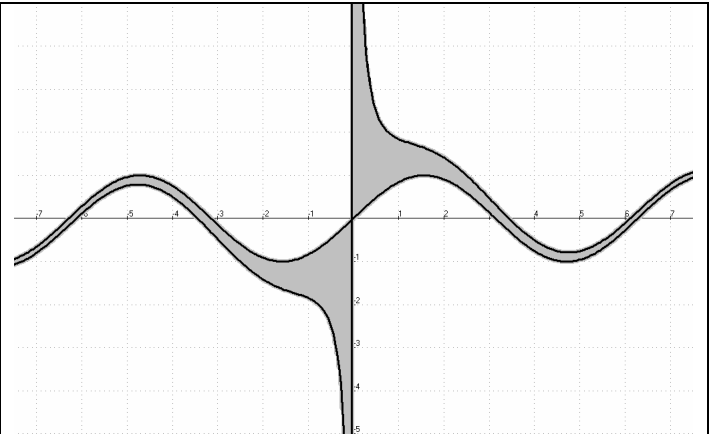
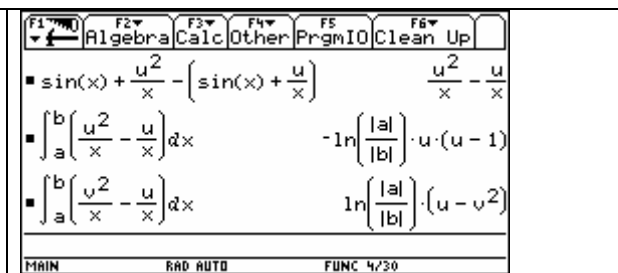
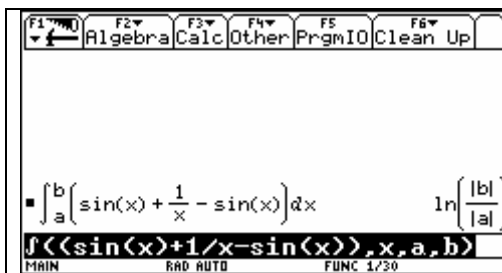


Abb.d: Die gemeinsamen Kurven sind $y = \sin(x)$, $u=0$, und $y = \sin(x) + \frac{1}{x}$, $u=1$



Die Rechnungen für Aufgabe 3 ergeben die Formeln in den beiden Voyage-Bildern. Auch hier sind Fallunterscheidungen bezüglich der auftretenden Parameter angesagt.

Die Vergleichsideen von Beispiel 1 lassen sich auf andere Kurvenscharen übertragen bzw. weiter variieren. Insgesamt ergibt sich durch Vergleich der Scharen mit passenden Problemstellungen ein kleines Unterrichtsprojekt, in dem vorhandene Kenntnisse angewendet und geübt werden können, aber aufgrund der offenen Fragestellungen auch Vertiefungen möglich sind.

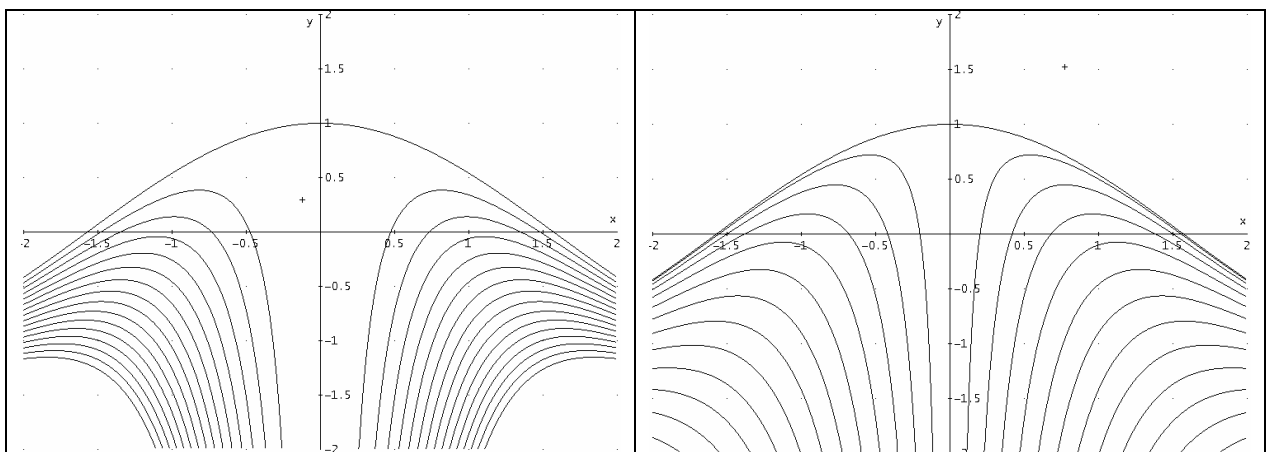
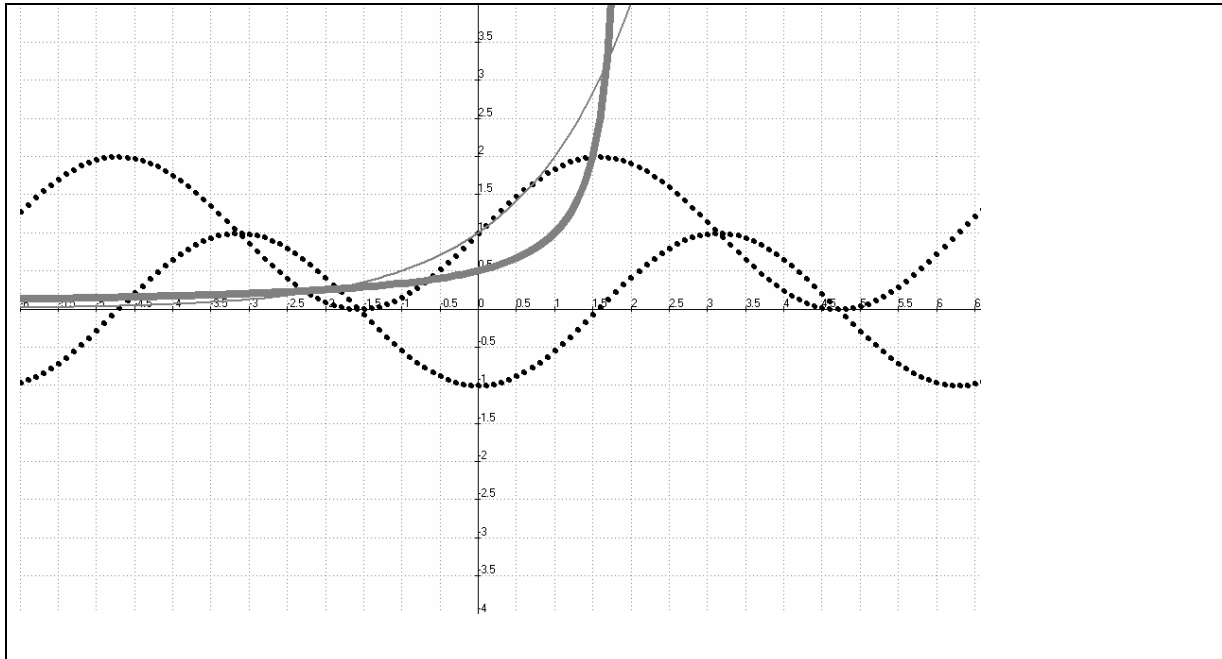


Abb. e, f: Weiterarbeiten – die Ableitungsgraphen $y = \cos(x) - \frac{u}{x^2}$ und $y = \cos(x) - \frac{u^2}{x^2}$

Beispiel 2 – Kurven-Family

- Rekonstruieren sie die Abbildung mit ihrem CAS.
- Vergleichen sie die Graphen, indem sie ihre Eigenschaften in der Tabelle unter dem Bild notieren.
- Versuchen sie f2 so zu ändern, dass f1 entsteht (entsprechend mit f3, f4).



f1: $\sin(x)+1$	Text ...
f2: $\cos(x-3.14)$	
f3: 2^x	
f4: $\{(x-2)<0.01:-1/(x-2):undef\}$	

Die Aufgaben a) und b) können als Übung mit den gegebenen Funktionen aufgefasst werden, Teil c) führt zu einem experimentellen Arbeiten und vertieft damit a), b).

Wichtig: Mit Aufgaben dieser Art wird auch die sonst in der Regel übliche Beschränkung auf jeweils eine Funktionenklasse beseitigt – ein Ansatz, der sich an verschiedenen Stellen des Curriculums durchführen lässt.

Beispiel 3 - Die Ableitung von $y = \ln(x)$ mit Computerhilfe

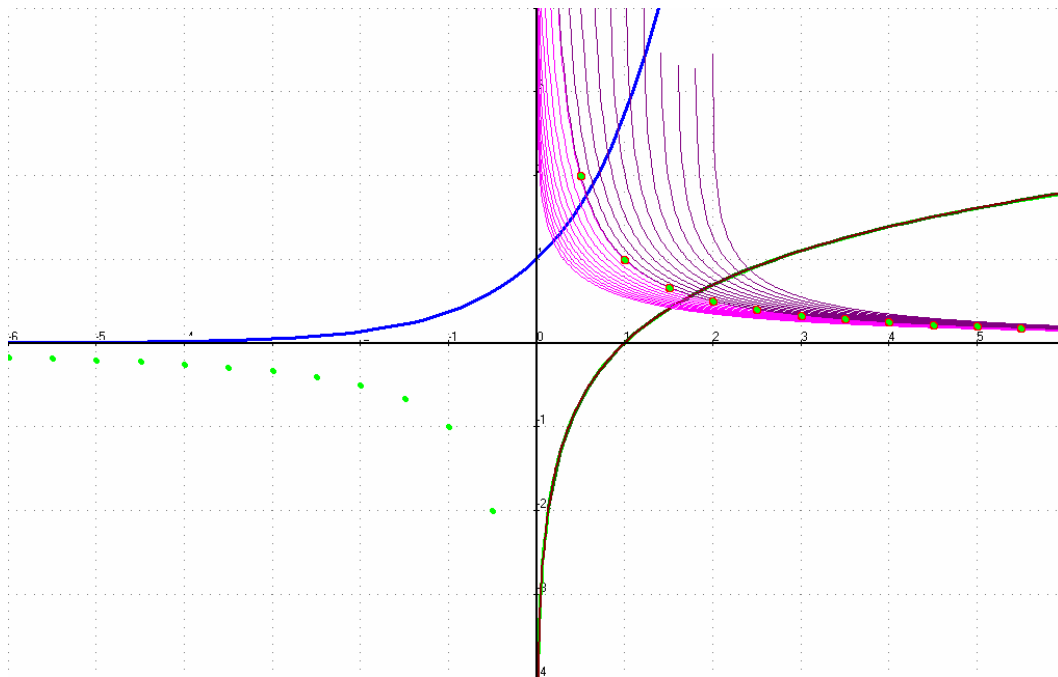
Dieses unterrichtserprobte Beispiel ist auch für einen Grundkurs gut geeignet.

Die Stundenidee:

- 1) Bekanntlich ist $y = \ln(x)$ die Umkehrung von $y = e^x$.
- 2) Der Graph der Ableitung von $y = \ln(x)$ kann angenähert durch den Graphen des Differenzenquotienten DQ von $y = \ln(x)$ für sehr kleines h dargestellt werden.
- 3) Aus dieser Darstellung erwächst die Vermutung, dass die Ableitung von $y = \ln(x)$ gleich $\frac{1}{x}$ ist.

Der Graph zu $y = \frac{1}{x}$ scheint das zu bestätigen, denn er liegt auf DQ.

- 4) Der Vergleich der Tabellen zu den Graphen von $y = \frac{1}{x}$ und DQ gibt die schon (fast) endgültige Gewissheit.



Die Ableitung von $y = \ln(x)$

Im Unterricht kann die Entstehung der Abbildung demonstriert werden, besser ist der Entwurf durch die SchülerInnen. Wir zeigen nun drei CAS-Versionen.

Version mit dem Animationsprogramm ANIMATO

- 1) Mit der Visualisierung des Ableitungsgraphen zu $y = e^x$ durch Differenzenquotienten wird Bekanntes wiederholt oder die Idee neu eingeführt.

f7: e^a
 f8: $(f7(t+u)-f7(t))/u$
 f9: $(f7(t-u)-f7(t))/(-u)$
 f10: e^{at}

für u wird eine Folge gewählt, die gegen 0 läuft.

bekanntlich ist in diesem Fall die Ableitung wieder die e -Funktion

2)

f11: $f_7(a), a$ f12: $\ln(a)$	2) Die Umkehrung zu $y = e^x$ wird $y = \ln(x)$ genannt.
-----------------------------------	--

3)

f13: $(f_{12}(t+u)-f_{12}(t))/u$ f14: $(f_{12}(t-u)-f_{12}(t))/(-u)$ f15: $(f_{12}(t+0.00001)-f_{12}(t))/0.00001$	Visualisierung des Ableitungsgraphen zu $y=\ln(x)$ Graph und Wertetafel zeigen: Die Ableitung scheint wohl $y = 1/x$ zu sein – auch eine andere Vermutung kann ausprobiert werden..
---	--

4)

f16: $\{a>0:1/a:\text{undef}\}$ f19: $1/x$	Also wird $y=1/x$ gezeichnet, Vergleich der Graphen von f15 und f19 und der Wertetafeln
---	---

x,t	f15	f19		x,t	f15	f19
-6	?	-0.16666667	f15 und f19 vergleichen!	0.5	1.99998 2	
-5.5	?	-0.18181818		1	0.999995	1
-5	?	-0.2		1.5	0.66666444	0.66666667
-4.5	?	-0.22222222		2	0.49999875	0.5
-4	?	-0.25		2.5	0.3999992	0.4
-3.5	?	-0.28571429		3	0.33333278	0.33333333
-3	?	-0.33333333		3.5	0.28571388	0.28571429
-2.5	?	-0.4		4	0.24999969	0.25
-2	?	-0.5		4.5	0.22222198	0.22222222
-1.5	?	-0.66666667		5	0.1999998	0.2
-1	?	-1		5.5	0.18181802	0.18181818
-0.5	?	-2		6	0.16666653	0.16666667
0	?	?				

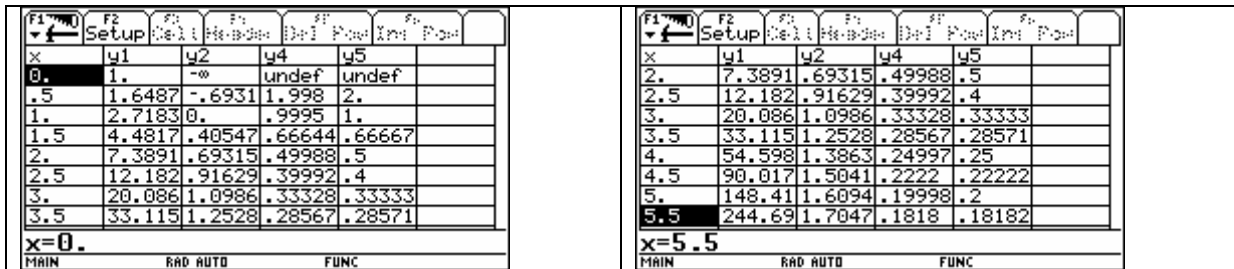
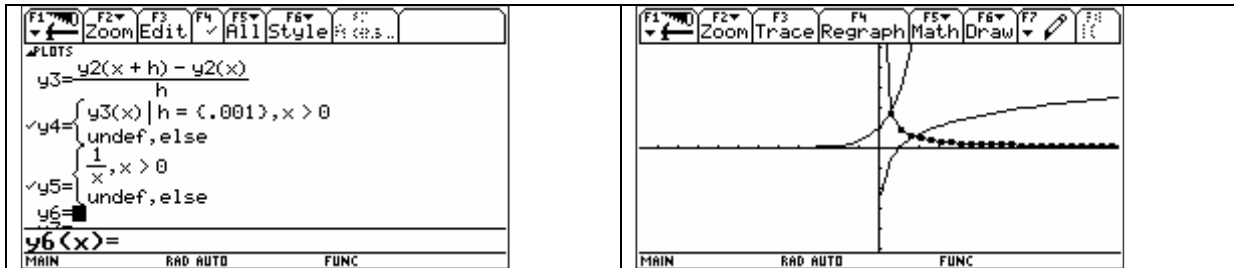
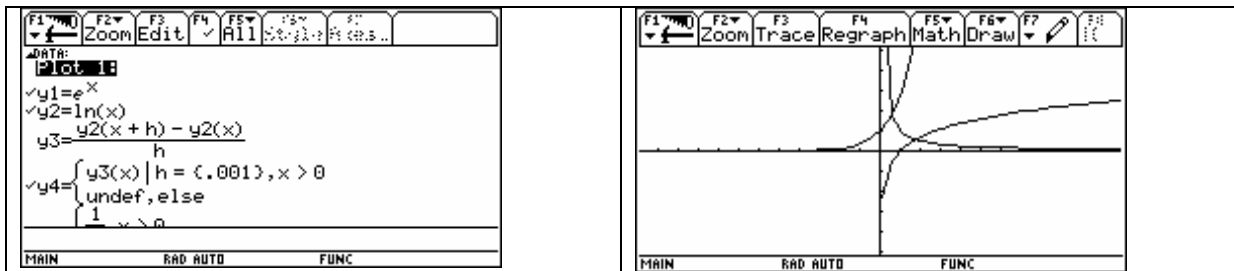
Damit ist der Grundkurs sicher überzeugt. Für den Leistungskurs kann es z.B. so weitergehen:

5)

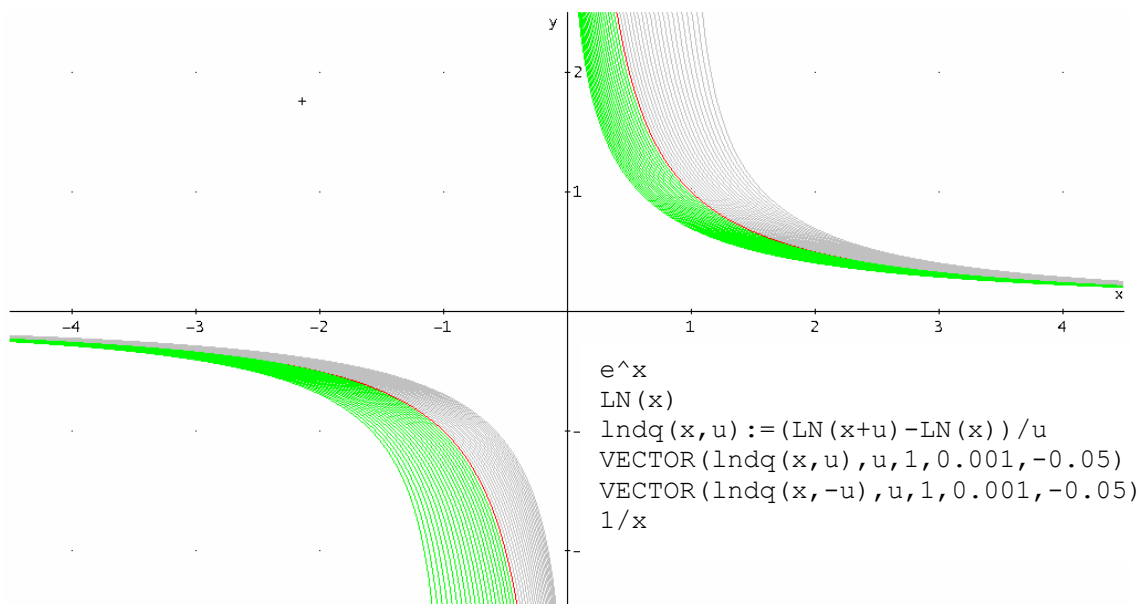
Geringfügige Werteabweichungen zeigen: Man sollte vielleicht doch noch $(\ln(x))' = 1/x$ rechnerisch in einem Beweis zeigen. Das kann z.B. so geschehen:

Beweisführung	Erläuterung durch die S
$y=e^x$, Umkehrung $y=\ln(x)$	Funktion und Umkehrf. verkettet (immer $\Rightarrow x$)
Ansatz: $e^{\ln(x)} = x$?
$[e^{\ln(x)}]' = x'$?
$e^{\ln(x)} * [\ln(x)]' = 1$	Äußere * innere Ableitung, Kettenregel
$x * [\ln(x)]' = 1$?
Also $[\ln(x)]' = 1/x$?

Version mit Voyage 200 (Text entsprechend wie oben)



Version mit DERIVE 6 (Text entsprechend wie oben)



Zusammenfassung: Entsprechend geht das auch mit anderen Ableitungen! Das sollte man deutlich herausstellen!

6. Modules (Bausteine) - modulare Kompetenzen

6.1 Das Modulkonzept

Wir haben schon in Kapitel 2 (Nachhaltigkeit) gehört, dass das Modulkonzept (oder auch Bausteinkonzept) zu den nachhaltigen CAS-Konzepten gehört. Kapitel 3 gab wichtige Informationen über Black-Boxes in Zusammenhang mit dem Problemkreis „Von Hand oder mit CAS?“. Hier folgen nun Details und Anregungen für den Unterricht.

Für eine ausführliche Beschäftigung mit dem Bausteinprinzip verweise ich auf meine Veröffentlichungen dazu (siehe u.a. meine Homepage www.snafu.de/~mirza), insbesondere auf

- *Lehmann, Eberhard: Mathematiklehren mit Computeralgebrasystem-Bausteinen, Franzbecker-Verlag, Hildesheim 2002*
- *Lehmann, Eberhard: Mathematikunterricht mit Parametern in der Sekundarstufe 1, Schroedel-Verlag, Hannover 2002*

jeweils mit zahlreichen Unterrichtsbeispielen.

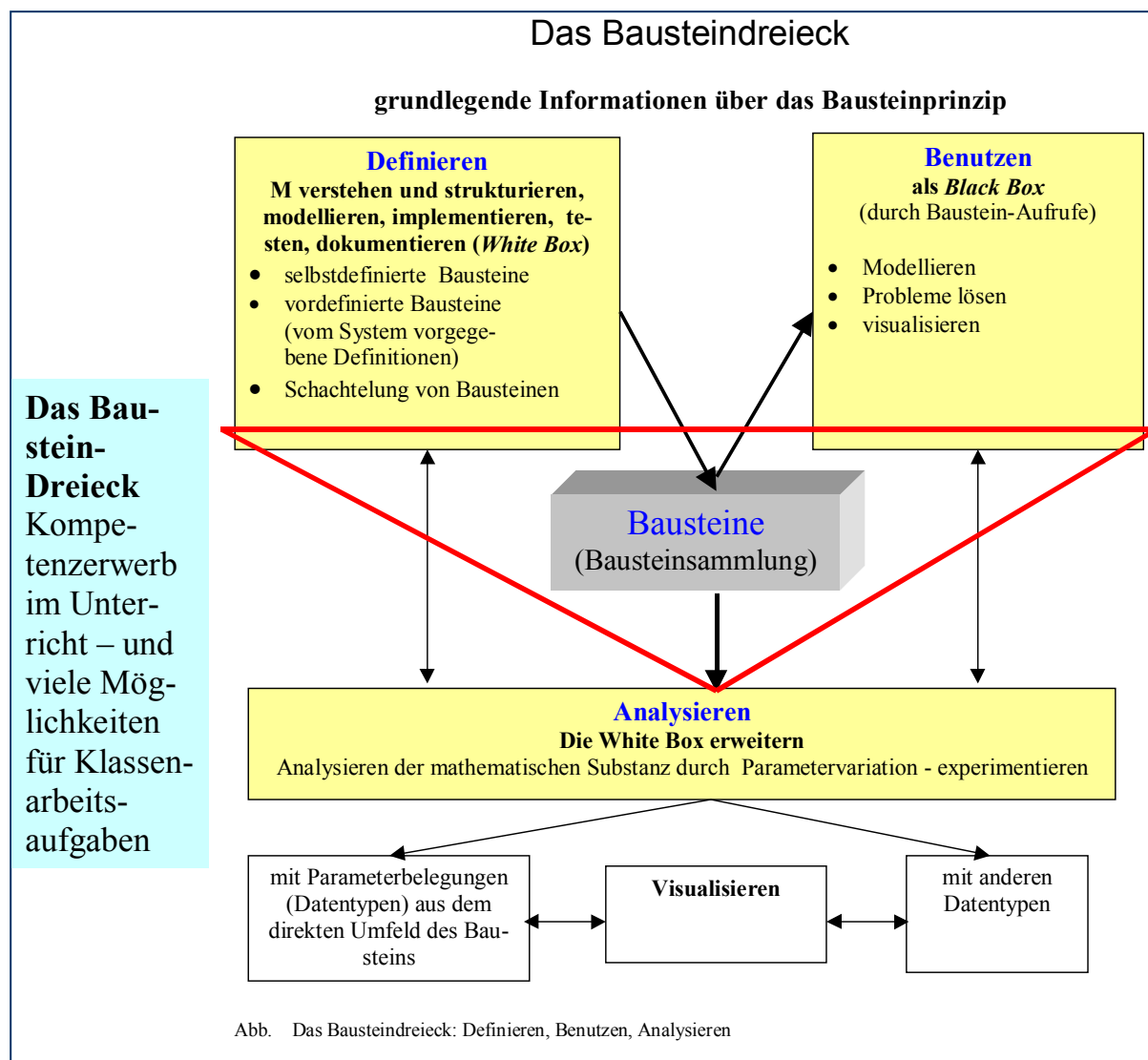


Abbildung 6.1a: Das Bausteindreieck – Definieren, benutzen, analysieren

Grundlegend für das Arbeiten mit Modulen / Bausteinen ist das **Bausteindreieck**, siehe Abbildung 6.1a. Die Ecken des Dreiecks markieren die grundsätzlichen didaktisch-methodischen

Möglichkeiten, nämlich das eigene Definieren von Bausteinen (zusätzlich zu den vom System vorgegebenen Bausteinen), das Anwenden in vielfältigen inner- und außermathematischen Situationen und die Analyse von Bausteinen – in Abhängigkeit von den gewählten aktuellen Parametern.

Bausteindefinition

Module mit Parametern werden von vielen Computersystemen bereitgestellt oder können vom Benutzer selbst definiert werden. Beispiele werden weiter unten gebracht. Abbildung 6.1b zeigt an zwei Beispielen, wie man die Definition von Bausteinen durchführen kann.

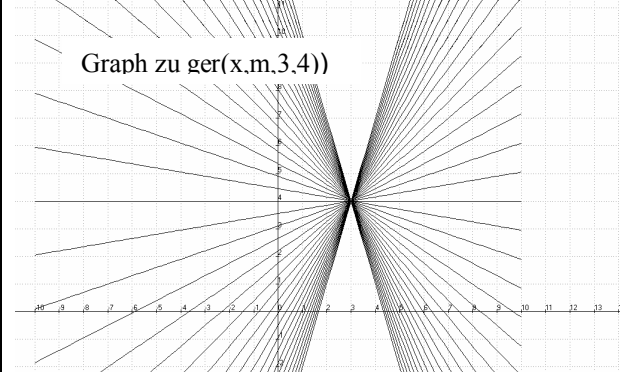
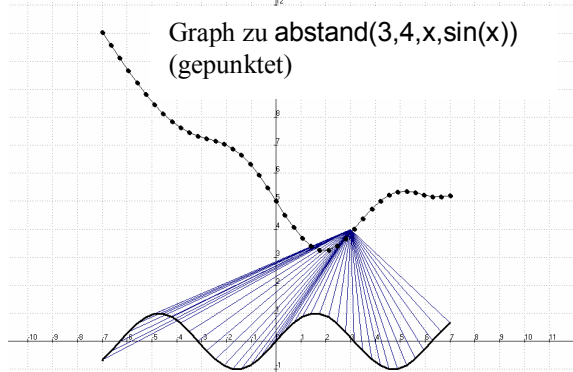
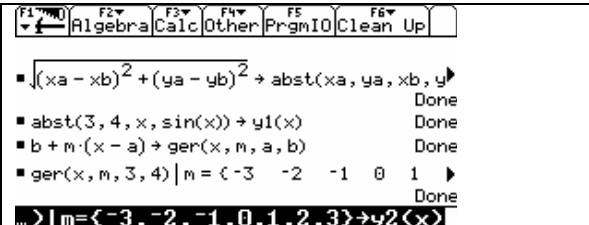
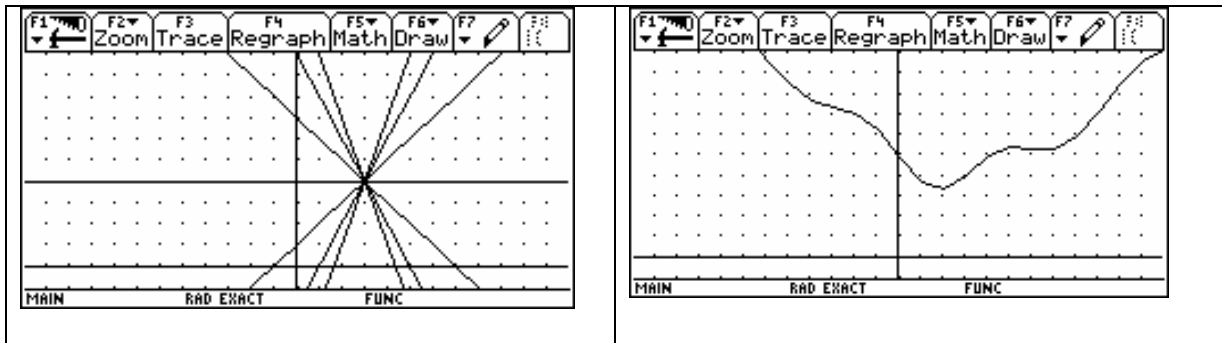
<p>Aufgabe: Zeichne viele Geraden durch den Punkt P(3,2). Für diese und viele andere Aufgabenstellungen benötigt man etwa schon ab Klasse 8 die Punkt-Steigungsform einer Geraden $y - b = m \cdot (x - a)$ bzw. $y = b + m \cdot (x - a)$. Wir definieren also</p> <p>Baustein-Definition $ger(x,m,a,b):= b+m \cdot (x-a)$</p> <p>Baustein-Aufrufe sind z.B. $ger(1,2,3,4)$, Ergebnis ist $4+2 \cdot (1-3)$, also 0</p> <p>$ger(x,m,3,4)$, Ergebnis ist der Term $4+m \cdot (x-3)$, das sind für m aus R alle Geraden durch P(3,4)</p>	<p>Aufgabe: Bestimme den kürzesten Abstand des Punktes P(4,3) von der Sinuskurve. Für die Abstandsberechnung ist offenbar die bekannte Formel für den Abstand zweier Punkte nützlich. Wir definieren also:</p> <p>Baustein-Definition $abstand(ax,ay,bx,by):= \sqrt{(ax-bx)^2+(ay-by)^2}$</p> <p>Baustein-Aufrufe sind z.B. $abstand(1,2,3,4)$ $abstand(3,4,x,\sin(x))$</p>
	

Abb. 6.1b: Definition zweier Bausteine und Visualisierungen (Animato)

Für den Voyage 200 kann man so vorgehen:

	<p>Abb. 6.1c: Definition zweier Bausteine und Visualisierungen (Voyage 200)</p>
---	--



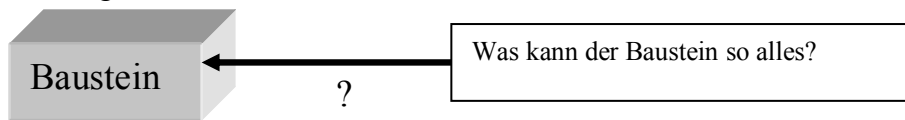
Visualisierung von $ger(x,m,3,4)$

Visualisierung von $abst(3,4,,x,\sin(x))$

Baustein-Analyse

- Die Untersuchung eines Bausteins auf seine Eigenschaften führt zu einem vertieften Verständnis für den Arbeitsbereich des Bausteins und damit für seine Leistungsfähigkeit.
- Zudem ist die Analyse von Bausteinen eine gute Gelegenheit zum experimentellen Lernen!

Hat man einen Baustein mehrfach benutzt und einige seiner Anwendungsmöglichkeiten erkannt, besteht möglicherweise der Wunsch, in den Baustein hineinzublicken:



Ein Beispiel:

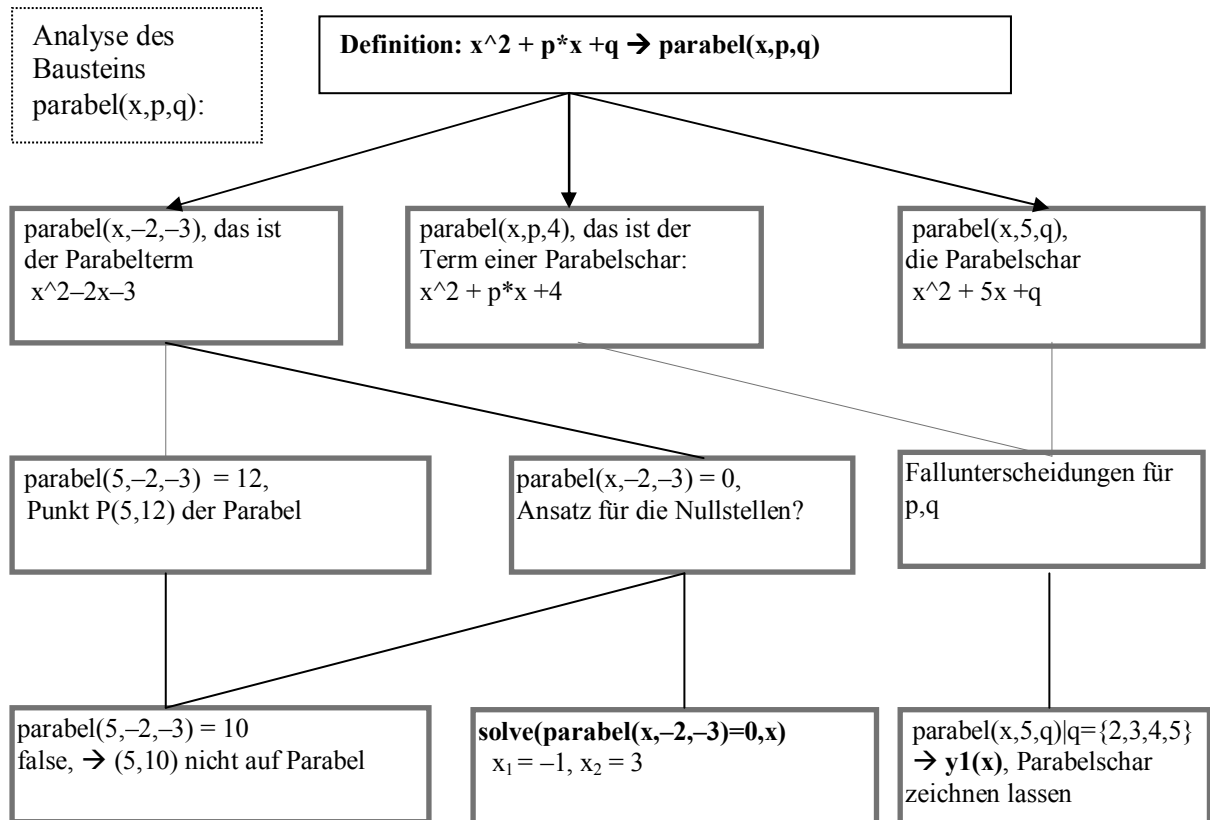


Abb. 6.1d: Analyse eines Parabel-Bausteins -Beispiele für Bausteinaufrufe

Kennenlernen von Bausteinen

Bausteine kann man sich von verschiedenen Seiten nähern, unter anderem so:

Bottom up–Vorgehensweise

Ein Baustein entsteht aus einer Aufgabenserie mit einander ähnlichen Termen oder Figuren. Weitere Bausteinaufrufe erweitern die Kenntnisse.

Baustein als Black-Box

Ein Baustein ist schon bekannt oder wird vorgegeben und für Anwendungen benutzt

Top down–Vorgehensweise

Ein vorgegebener Baustein wird analysiert durch eine Vielzahl von Aufrufen und Beobachtung der Wirkung.

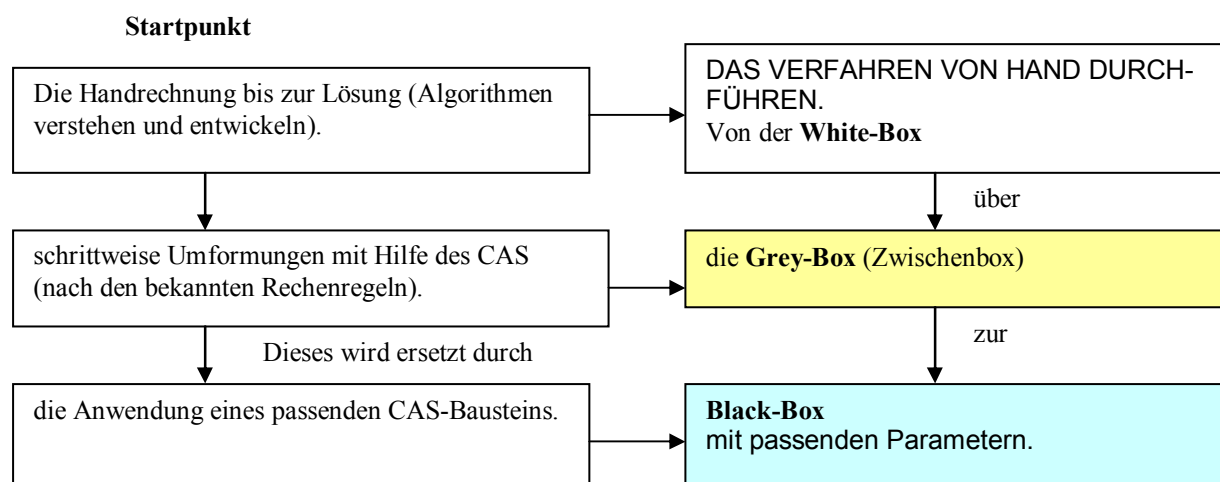


Abb. 6.1e: Von der White-Box zur Black-Box

Die Abbildungen 6.1e und 6.1f zeigen Wege zur Einführung und Arbeit mit Bausteinen.

(1) Ein Baustein wird schrittweise entwickelt – bis er als Black-Box „abgelegt“ werden kann.

Aber auch der folgende Weg ist möglich:

(2) Ein Baustein, der in Form einer Black Box vorliegt, wird analysiert – eine White-Box entsteht. Hinweis: Man beachte den Startpunkt und die Pfeilrichtungen.

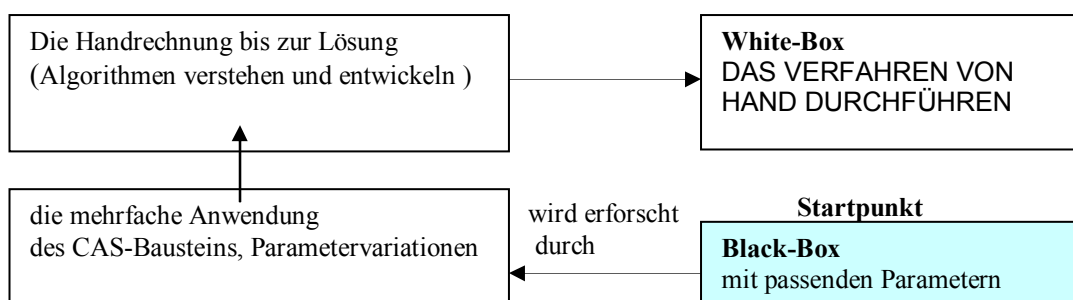


Abb. 6.1f: Von der Black-Box zur White-Box – auch das geht

Beispiel 1: Ein Abstandsbaustein

Eine Einsatzmöglichkeit eines vielfach verwendbaren Abstandsbausteins (seine Definition ist schon in Klasse 9 erfolgreich: Abstand zweier Punkte, siehe Kapitel 6.2) zeigt die Abbildung 6.1g.

Im Leistungskurs (siehe auch Kapitel 6.3) bearbeitet jede der Projektgruppen die Fragestellung „kürzester Abstand des Punktes (5,3) vom Graphen“ für einen anderen Funktionsterm. Alle können den Abstandsbaustein entsprechend selbst definieren oder den schon vorliegenden Baustein benutzen. Die Solve-Anweisung wird allerdings bei den einzelnen Termen auf unterschiedliche Interpretationen führen. Die Abschlussdiskussion führt dann zu weiteren Fragestellungen.

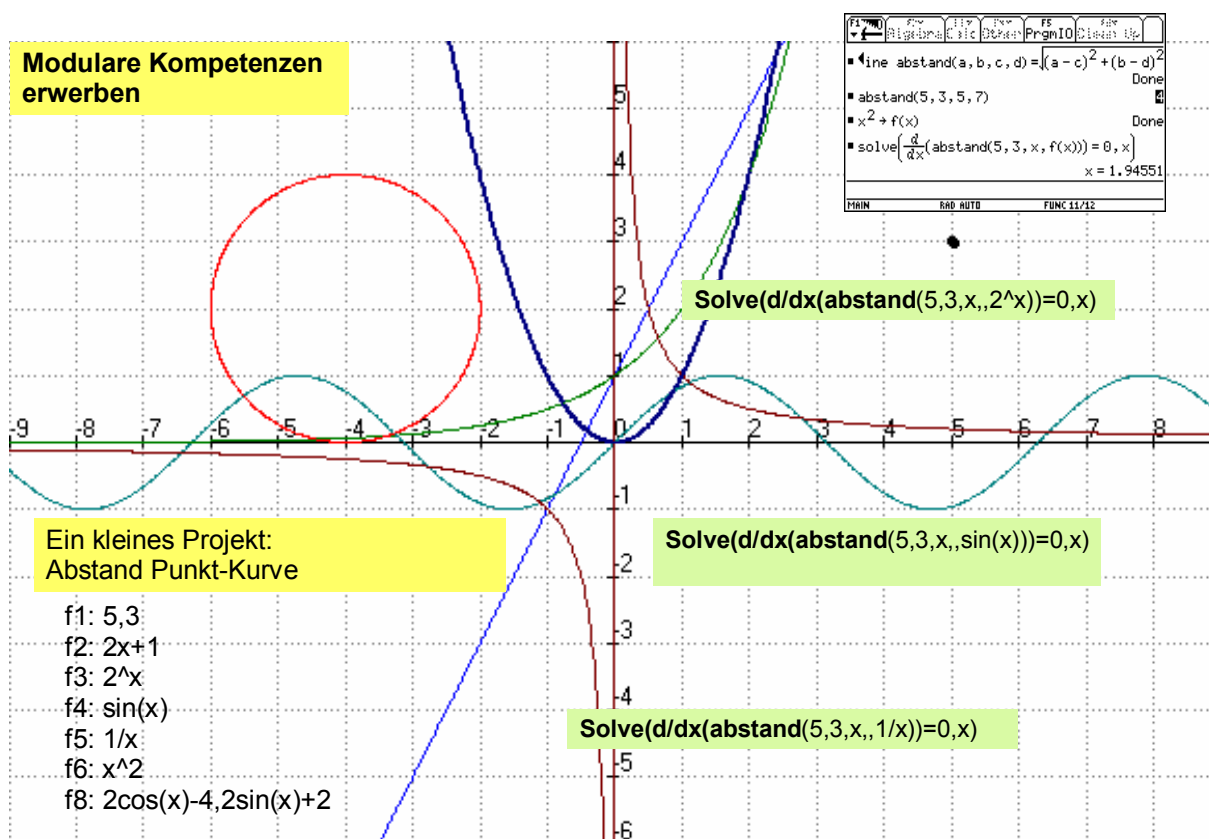


Abbildung 6.1g: Ein Abstandsbaustein

→ siehe Kapitel 6.3 →

Beispiel 2: Ein Zufallsbaustein

Im Bereich der Stochastik kann man u.a. den Zufallsbaustein von Abbildung 6.1h verwenden. Mit ihm kann man diverse Zufallspunkt-Transformationen durchführen, eine schöne Übung und gut geeignet das Verständnis für die in der Stochastik häufig verwendeten Simulationen zu vertiefen.

Ein dazu passendes Beispiel arbeitet mit dem parametric-mode des Voyage 200.

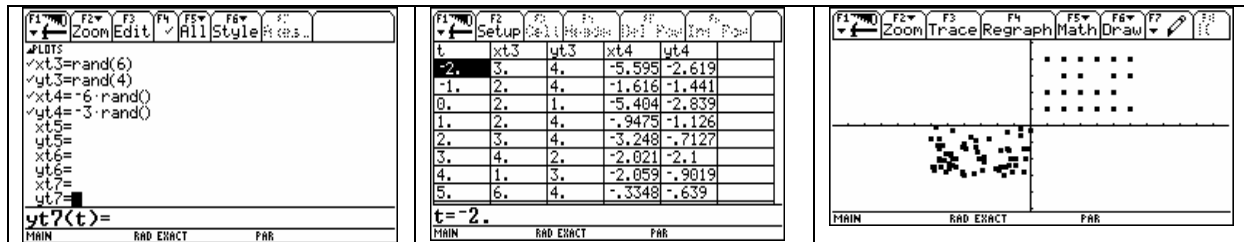
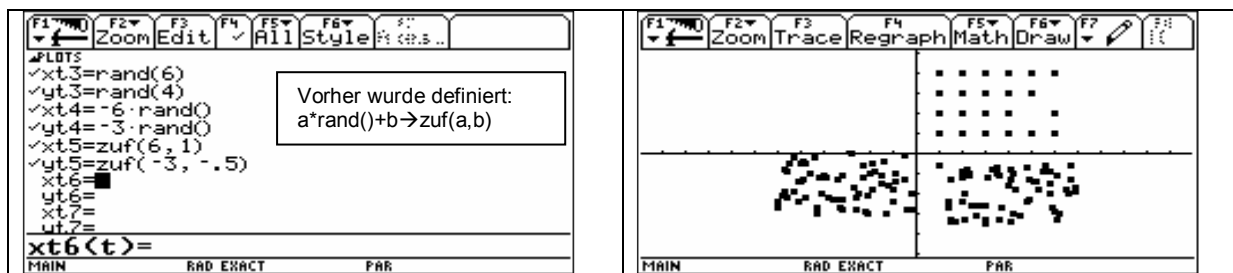
Abb. 6.9: Wie gehen solche Transformationen mit der Benutzung eines Bausteins der Form $a \cdot \text{rand}() + b$?

Abb. 6.1h: Ohne Baustein – mit Baustein

Was sagen Schüler zum Bausteinprinzip?

Thomas Kolonko (Leistungskurs M, Klasse 13, Jahr 2000) meint :

„Im Allgemeinen sind Bausteine eine sehr sinnvolle Anwendung, wenn es darum geht, **ein Problem schnell und immer wieder zu lösen**. Da der Baustein vom Benutzer selbst erarbeitet werden muss und **der Baustein in der Regel eine allgemeine Lösung** ist (Baustein mit Variablen), ist es eine gute Übung, um allgemeine Lösungsansätze herauszufinden.

Mit einem Baustein lässt es sich wunderbar **experimentieren, d.h. mit wenigen Handgriffen kann man verfolgen, wie sich eine Funktion oder Anderes verändern**, wenn man $\cos(x)$ statt $\sin(x)$ oder e^x einsetzt. Hier ist für den Benutzer eine große Möglichkeit gegeben, um das Verhalten von Funktionen zu studieren. Auch die **Möglichkeit, zwei Bausteine miteinander zu verbinden**, lässt für den Benutzer eine Reihe von Möglichkeiten offen.“

Diese Äußerungen zeigen, dass sich durch die ständige Verwendung des Prinzips zahlreiche Vorzüge bei der Arbeit mit einem CAS ergeben. **Diese gegenüber einer mehr konventiellen Arbeit mit CAS zusätzlichen modularen Kompetenzen verschaffen damit auch den Schülern, die das Vorgehen kennen, Vorteile gegenüber anderen Schülern. Das macht sich dann z.B. auch bei einem CAS-Zentralabitur bezahlt.**

6.2 Ein CAS-Abstandsbaustein in Klasse 9 - Stundenentwurf

Voraussetzungen: Die Schüler haben bereits mit dem Taschencomputer TI-92 gearbeitet.
Grobziele: Anwendung des Pythagoras, Einführung in die CAS-Baustein-Technik.

Stundenentwurf	Planung	Tatsächlicher Ablauf
	<p>(1) Einstieg: Schüler zeichnen mehrere Punkte an die Tafel (in beliebiger Position). – Lehrer fragt: Wie weit ist es von A nach B?</p>	<p>(1) Der Einstieg wurde auch so durchgeführt. Schüler skizzieren die Punkte in ihr Heft. Schüler schlagen das Messen vor. Ein anderer Schüler X spricht von Koordinatensystem.</p>
	<p>(2) Tafel: Andere Abstandsberechnungen, Skizzen <i>Diese Phase soll dazu dienen, das Thema „Abstandsberechnungen“ für die S auf eine breitere Basis zu stellen, also nicht gleich auf den Abstand zweier Punkte mit Pythagorasberechnung zu reduzieren.</i> Lehrer diktiert einen Text, der auf die Bedeutung von Abstandsberechnungen hinweist.</p>	<p>(2) Die S-Vorschläge werden an der Tafel festgehalten, z. B. Punkte auf einer Kugel, Entfernung zweier Städte, Erde-Mond, Entfernung zweier Wohnungen. – Skizzen erfolgten nicht. Die S schreiben mit in ihr Heft. Lehrer diktiert: „Abstandsberechnungen verschiedener Art werden häufig benötigt!“ - Die Stunde erhält ihr Thema: „Entfernung zweier Punkte“</p>
	<p>(3) An der Tafel wird der (kürzeste) Abstand von A nach B berechnet. Lehrer zeigt dazu eine Folie und verteilt den Arbeitsbogen, siehe unten.</p> <p>(3a) Erst Zahlenlösung für Abstand AB, dann Formel $2^2 + 5^2 = e^2, \text{ also } e = \sqrt{29}$</p> <p>(3b) Allgemein, Formel herleiten $(x_a - x_b) = -4 - -2 = -2$ $(y_a - y_b) = -3 - +2 = -5$ $(x_b - x_a) = -2 - -4 = 2$ $(y_b - y_a) = 2 - -3 = 5$ Quadrieren für Pythagoras, also ist die Reihenfolge egal.</p> <div style="background-color: #e0e0e0; padding: 5px; border: 1px solid black; width: fit-content;"> $\text{abstand(AB)} = \sqrt{(x_b - x_a)^2 + (y_b - y_a)^2}$ </div>	<p>(3) Die Idee des Arbeitsbogens wird vom L fallen gelassen auf Grund der obigen Äußerung von X. Die Idee von X (s.o.) wird vom Lehrer aufgegriffen: L: „Wie meinst du das mit dem Koordinatensystem?“ S: „Kann ich das Kosy auch schief zeichnen?“ S zeichnet ein schiefes Kosy ein, x-Achse durch 2 Punkte, siehe Tafelabbildung unten. - L lässt die Wahl des Kosy von Ss begründen. Noch ein zweites Kosy in anderer Farbe wird eingezeichnet (das zeigt die Willkürlichkeit der Wahl des Kosy). - Dann wird mit dem ersten Kosy weitergearbeitet. L setzt Klammern (,..) an die Punkte B und C (stummer Impuls). - S führen Einheiten ein, setzen passende Werte in die Klammern. B(), C(). - S errechnen BC mit dem ihnen bekannten Pythagoras (siehe linke Spalte).</p>
	<p>(4) Lehrerdemonstration mit dem TI-92 auf dem View-Screen</p> <p>Lehrer: Unsere Bausteindefinition! Weil so oft benötigt!</p> <div style="background-color: #e0e0e0; padding: 5px; border: 1px solid black; width: fit-content;"> $\sqrt{(x_a - x_b)^2 + (y_a - y_b)^2} \rightarrow \text{abst}(x_a, x_b, y_a, y_b),$ </div> <p>Es werden Bausteinaufrufe, z.B. : $\text{abst}(-4, -3, -2, 2)$ durchgeführt. Bestätigung der Handrechnung an der Tafel.</p> <p>- Weitere Aufrufe mit den anderen Punkten zeigen, wie effektiv der Baustein ist. - Lehrer diktiert einen Text. Unterscheide zwischen Bausteindefinition und Bausteinaufrufen.</p>	<p>(4) Hier mündet der Stundenablauf in die geplante Phase (4) ein. Diese Phase verläuft wie geplant.</p> <p>Die Schüler führen die Definition auch an ihrem Rechner durch.</p> <p>S arbeiten an ihrem Rechner.</p> <p>S schreiben mit. Markieren den Text (weil der wichtig ist!).</p>
	<p>(5) Hausarbeit aus dem Arbeitsbogen</p>	<p>L verteilt den Arbeitsbogen</p>

Hinweis:

Bei der Anwendung eines Bausteins, also den Baustein-Aufrufen ist selbstverständlich die Reihenfolge der Parameter wichtig. In der obigen Stunden wurde definiert

$$\sqrt{(x_a - x_b)^2 + (y_a - y_b)^2} \rightarrow \text{abst}(x_a, x_b, y_a, y_b), \text{ also erst die } x\text{-Werte, dann die } y\text{-Werte.}$$

Möglicherweise ist die folgende Definition günstiger:

$$\sqrt{(x_a - x_b)^2 + (y_a - y_b)^2} \rightarrow \text{absta}(x_a, y_a, x_b, y_b), \text{ also erst die die Werte für A, dann für B.}$$

Jedenfalls wurden die Schüler auf die Bedeutung der Reihenfolge hingewiesen, was aber für sie ohnehin klar schien.

Erweiterung der Abstandsuntersuchungen

Die obigen Stundeninhalte lassen sich schon in Klasse 9 noch erweitern, indem z.B das Problem „Abstand Punkt / Gerade“ betrachtet wird. Wenn man das an dieser Stelle zu anspruchsvoll empfindet, könnte es auch in der Sekundarstufe 2 weitergehen, siehe Kapitel 6.3..

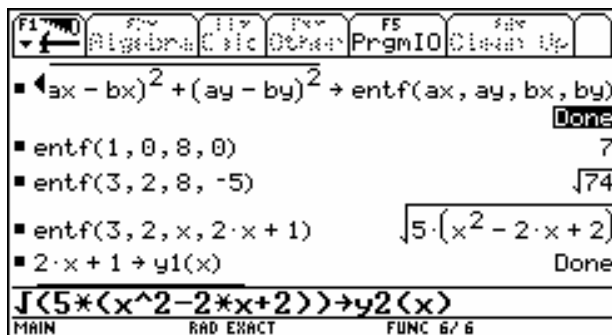


Abb. 6.2a

- Herleitung der Formel und Definition des Bausteins in Klasse 9
- Bausteinaufruf:
Abstand (1,0) zu (8,0)
Abstand (3,2) zu (8,-5)

Neue Idee Ein Punkt bleibt fest, für den zweiten Punkte wird eine Punktmenge genommen.

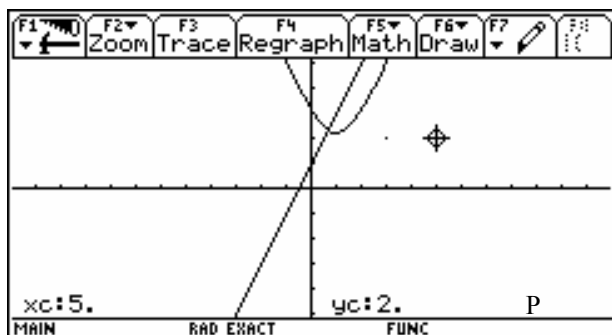


Abb. 6.2b

Was bedeutet das?

Graphische Veranschaulichung:

$$y_1(x) = 2x + 1$$

$$y_2(x) = \text{Siehe Abb. 6.2c}$$

Punkt (3,2)

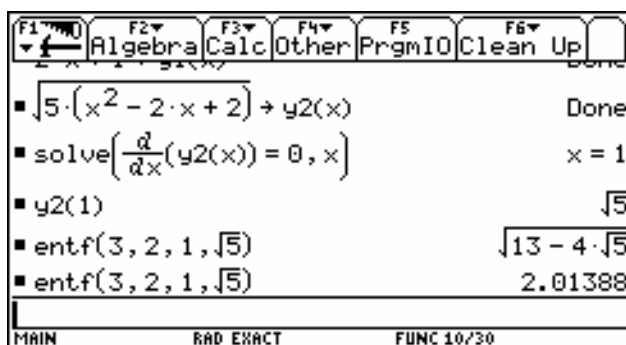


Abb. 6.2c

Deutung der Abbildungen 6.2a bis 6.2c

Zwecks besserer Veranschaulichung solle man hier zum PC übergehen (Funktionenplotter, DERIVE oder TI-Nspire).

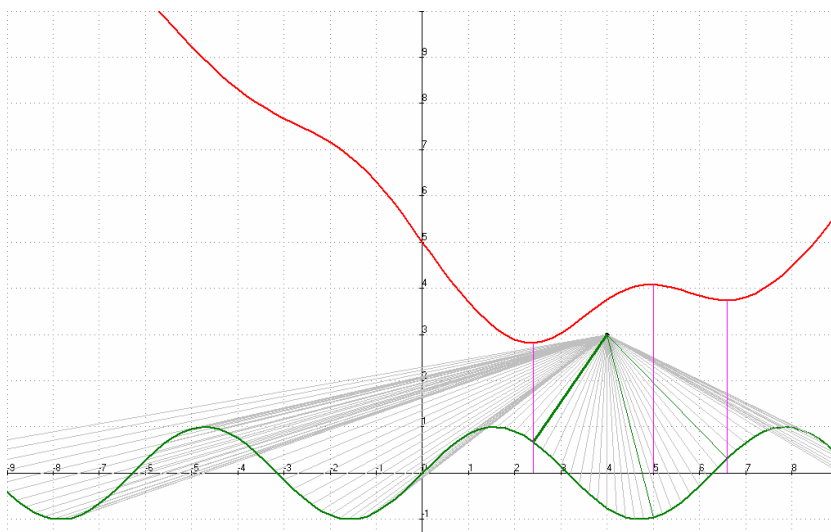
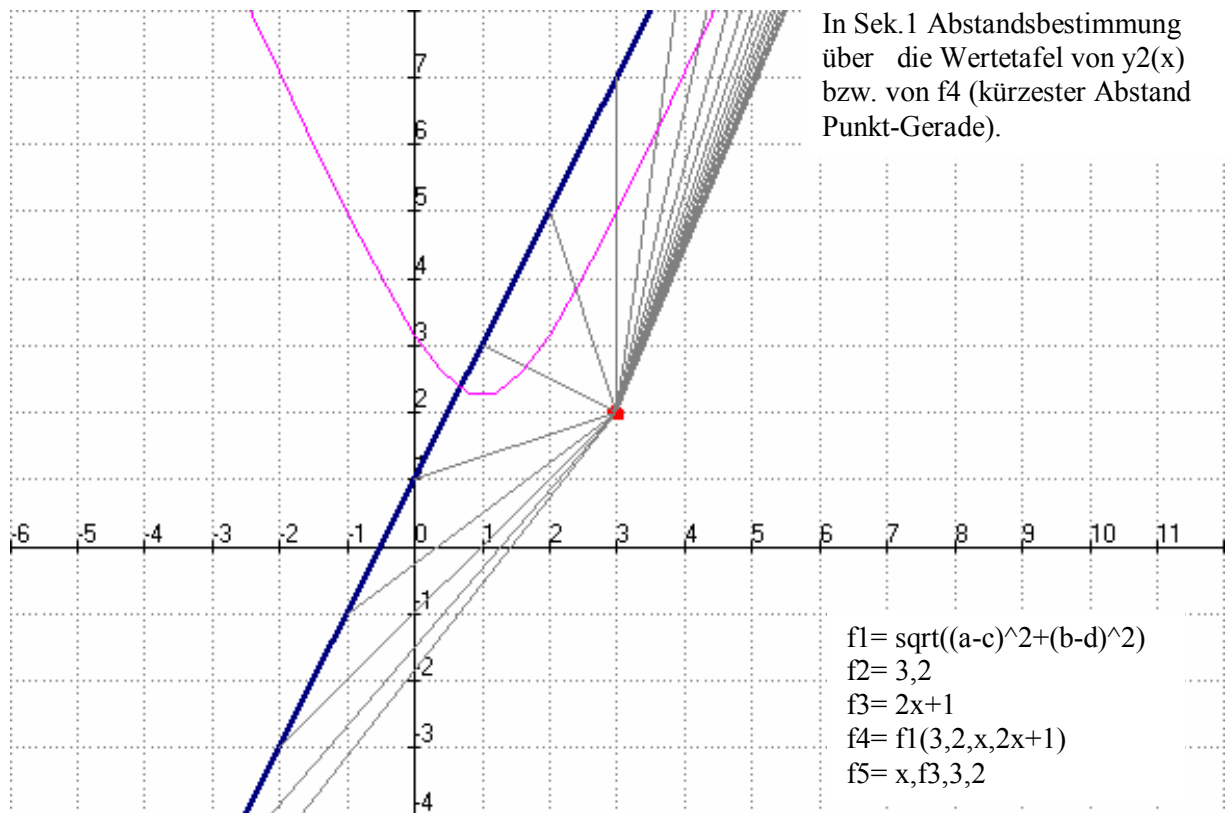


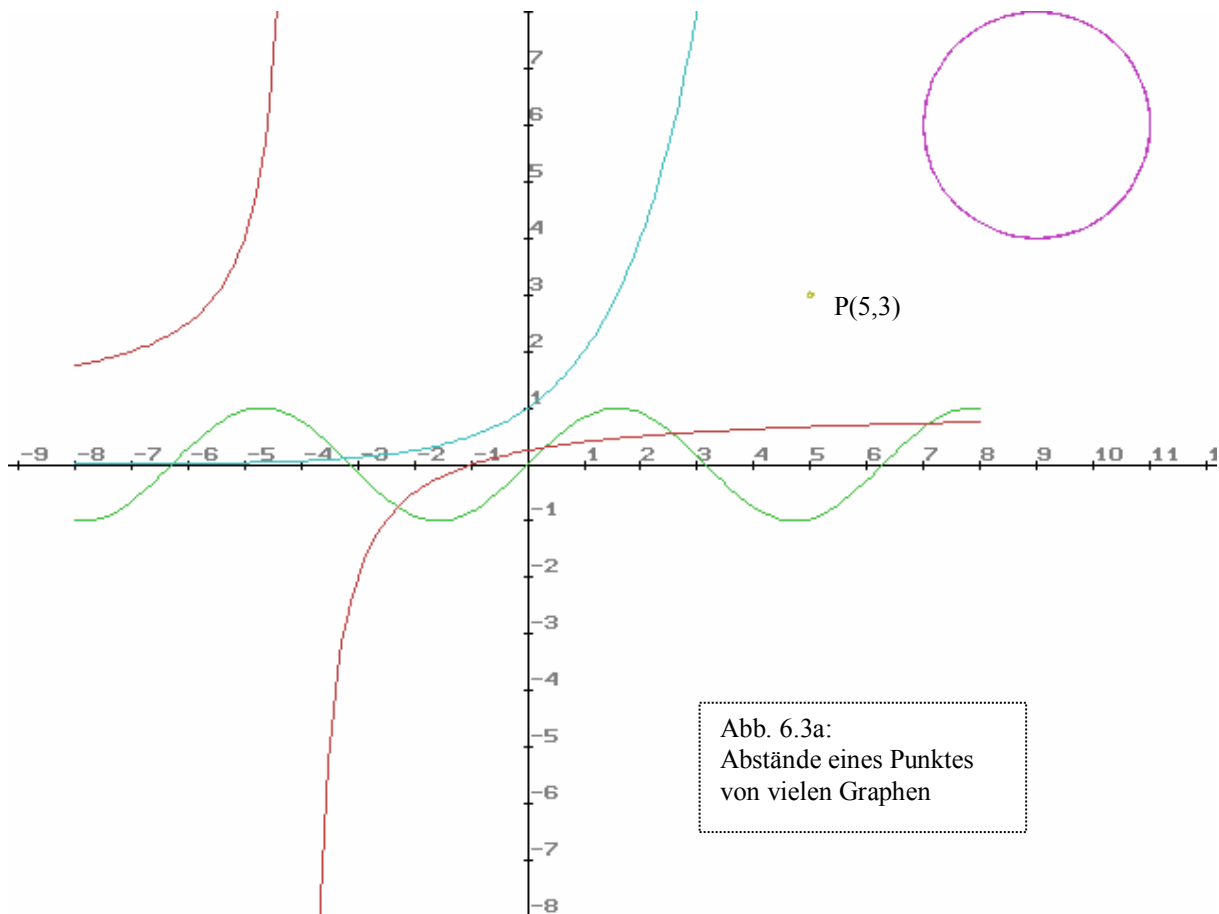
Abb. 6.2d: Animation der Abstandsberechnung mit Zeichnung des Graphen der Abstandsfunktion

Aufgabe: Erläuterung von Abbildung 6.2d

6.3 Modellierung eines Abstandsproblems im Leistungskurs mit Hilfe eines Bausteins – Projekt

Hinweis: Dieses Beispiel schließt an die Abstandsproblematik in Kapitel 6.2 an und ist auch für die Betrachtungen in Kapitel 7 (Modellierung) geeignet.

Arbeitsblatt LK-MA-1, LEH, 6.1.2000



Aufgabenstellung:

Gegeben sind die Funktionen bzw. Relationen

$$f_1(x) = \sin(x),$$

$$f_2(x) = 2^x,$$

$$f_3(x) = (x + 1)/(x + 4),$$

$$f_4: 2 \cdot \cos(t) + 9, 2 \cdot \sin(t) + 6,$$

ihre Graphen sowie der Punkt $P(5, 3)$.

Bestimme jeweils den Punkt auf den Graphen, der von P den kleinsten Abstand hat.
(Arbeit in 5 Gruppen mit 4 Schüler/innen)

Eine kürzlich durchgeführte Unterrichtssequenz in einem Analysis-Leistungskurs hatte das Thema:

Ermittle den kürzesten Weg vom Punkt P(3,5) zum Graphen, siehe obiges Arbeitsblatt mit der Abbildung 6.3a.

Das Problem wurde als kleines Projekt angegangen - jede Gruppe befasste sich mit einem Graphen. Insgesamt ergab sich der folgende Ablauf:

- Problemstellung
- Gruppeneinteilung, Themenwahl
- Gruppenarbeit, alle Hilfsmittel erlaubt, insbesondere Benutzung des CAS des TI-92.
- Für „schnelle“ Gruppen: Entwurf einer Simulation des Problems mit dem Funktionenplotter PLOT11
- Vortragen der Ergebnisse, Diskussion
- Herausarbeiten der Gemeinsamkeiten und der Unterschiede
- Konstruktion eines Bausteins für alle Teilprobleme
- Erprobung des Bausteins

Projektlauf

Im Folgenden werden einige der genannten Phasen, insbesondere auch die, in denen Bausteine wichtig waren, genauer dargestellt.

Problemstellung

Hierzu wird auf das Arbeitsblatt, siehe vorige Seite, verwiesen.

Gruppenarbeit

Jeder Gruppe wurde einer der abgebildeten Graphen zugeordnet.

Lösungen

Schon die Aufgabenstellung, der ja bei allen Gruppen die selbe Abbildung zugrunde lag, ließ vermuten, dass hier gleiche oder ähnliche Bausteine helfen könnten. Beim Vortragen der Lösungen wurde das noch deutlicher. Die Lösungen wurden teilweise als reine Zahlenlösungen angegeben, andere Gruppen arbeiteten möglichst lange allgemein. Hier wird die Situation nach der Bausteindefinition näher geschildert.

Zunächst ging es für alle Gruppen um einen Abstandsbaustein für zwei Punkte P(a, b) und Q(c, d).

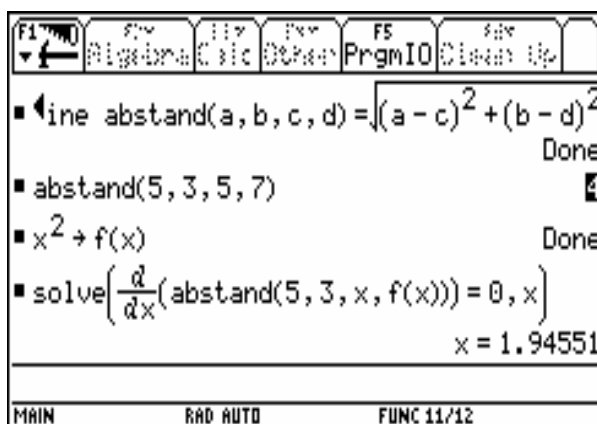


Abb. 6.3b: Lösung der x^2 -Gruppe

Erläuterungen

Definition des Bausteins
 $\text{abstand}(a,b,c,d)$

Test des Bausteins für die Punkte (5,3) und (5,7). Da die x-Werte gleich sind, muss sich 4 (Längeneinheiten) ergeben.

Erste Ableitung bilden und gleich Null setzen. SOLVE löst die Gleichung und berechnet den x-Wert des Kurvenpunktes, der den kleinsten Abstand von P hat.

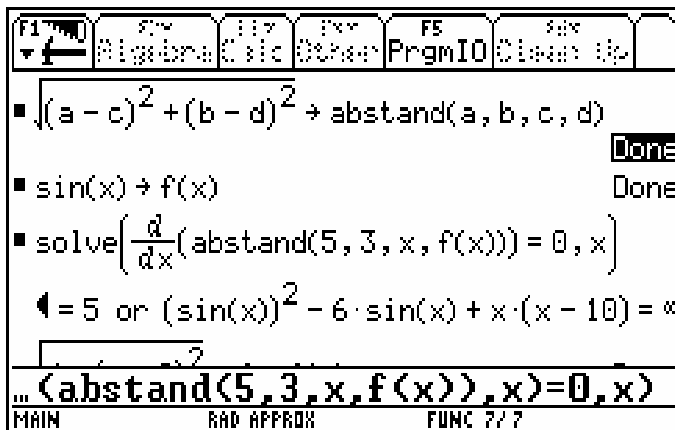


Abb. 6.3c: Lösungsversuch der sin(x)-Gruppe

Erläuterungen

Bausteindefinition

$\sin(x)$ wird unter dem Namen $f(x)$ gespeichert

Lösungsversuch: Ableitung der Abstandsfunktion Null setzen. Der Versuch mit diesem Ansatz scheitert. Anderer Lösungsweg: Siehe unten, Abbildung 6.3e.

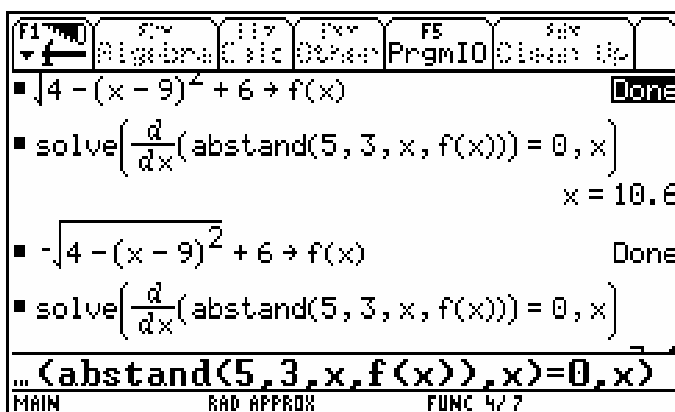


Abb. 6.3d: Lösung der Kreis-Gruppe

Oberer Halbkreis

$x_1(\text{min})$

Unterer Halbkreis
(Fortsetzung in Abb. 4.2-e)

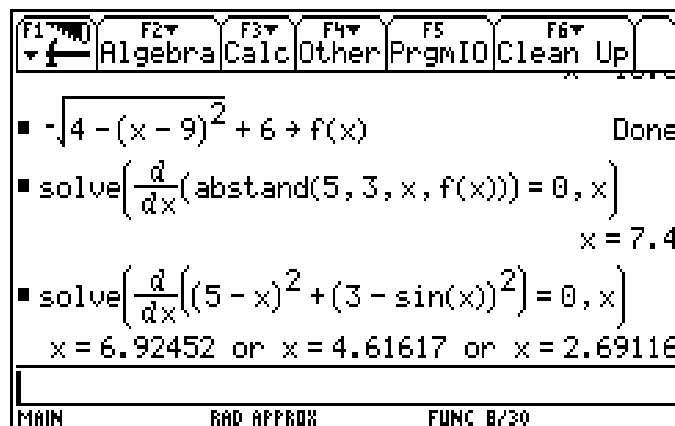


Abb. 6.3e: Lösung der Kreis-Gruppe

Unterer Halbkreis

Ableitung gleich Null setzen

Lösung der Gleichung, $x_2(\text{min})$
Ein zweiter Versuch der sin(x)-Gruppe. Hier ermittelt das CAS drei Punkte-Kandidaten für den minimalen Abstand.

Hinweis: Die Kreisgruppe hatte sofort erkannt, dass sie ihre Aufgabe ohne Differentialrechnung auf elementare Weise lösen konnte. Eine solche Lösung wurde von der Gruppe auch vorgetragen. Die erhaltenen Ergebnisse wurden erst später durch die hier dokumentierte Bausteinlösung bestätigt.

Ergebniszusammenstellung

Funktion	D(min) minimaler Abstand	x(min)	y(min)
$\sin(x)$ Trigonometrische Funktion	3.077	6.92452 (4.61617), (2.69116) diese Werte kommen nicht in Frage	0.598
2^x Exponentialfunktion	3.161	2.02	4.059
$x = 2\cos(x) + 9$ $y = 2\sin(x) + 6$ Kreis	3	7.4 (10.6)	4.8
$(x+1)/(x+4)$ Gebrochen-rationale Funktion	2.332	5.0847, rechter Ast, (-4.76662), x-Wert für den kürzesten Abstand zum linken Ast	0.6698

Zusammenfassend können wir feststellen:

Prinzipiell können alle Abstandsaufgaben der Art „kürzester Abstand Punkt $P(a,b)$ zum Graphen von $y = f(x)$ “ mit den folgenden Bausteinen bearbeitet werden:

- (1) $\text{SQRT}((a-c)^2 + (b-d)^2) \rightarrow \text{abstand}(a,b,c,d)$
- (2) Funktionsterm $\rightarrow f(x)$
- (3) $\text{SOLVE}(d/dx(\text{abstand}(a,b,x,f(x))), x) = 0, x)$

Dabei müssen Sonderfälle beachtet werden.

Diese Sonderfälle betreffen z. B. die Lage des Punktes $P(a,b)$ und die Art der Funktionen bzw. Relationen. Auch lässt sich die Lösung manchmal auch elementarer finden.

Das Besondere an der geschilderten Unterrichtsreihe:

- Die Schülergruppen erhalten sehr ähnliche Aufgaben, die sich prinzipiell alle mit dem gleichen Ansatz bearbeiten lassen. So versteht später jede Gruppe den Vortrag der anderen Gruppen.
- Abgesehen von Sonderfällen, erweist sich eine für alle Gruppen gemeinsame Bausteinlösung als verbindendes Element
- Der Baustein abstand und der Term für $f(x)$ können rationell für weitere anfallende Berechnungen (Abstände, Funktionswerte) benutzt werden.

Aber:

- Die unterschiedlichen Funktionsterme führen zu unterschiedlichen Gleichungstypen, die sich dann leicht oder auch weniger leicht mit dem CAS lösen lassen.
- Teilweise ergeben die Gleichungen mehrere Lösungswerte, so dass weitere Überlegungen über den richtigen x -Wert nötig sind.

6.4 Programmieren im Mathematikunterricht

Was ist „Programmieren“?

„Unter Programmieren versteht man zum einen den Vorgang der Programmerstellung und zum anderen das Teilgebiet der Informatik, das die Methoden und Denkweisen beim Entwickeln von Programmen umfasst.“ (Informatik-Duden, Duden-Verlag 1993, S.549)

Computeralgebrasysteme, z. B. DERIVE 6, stellen in der Regel Elemente des imperativen und des funktionalen Programmierens zur Verfügung. Prozedurale oder imperative Programmiersprachen sind nach einem ablauforientierten Sprachkonzept konstruiert. Ein Programm stellt eine Folge von Anweisungen dar. Der Programmierer muss also in zeitlichen Abläufen denken und seine Problemlösung aus nacheinander auszuführenden Schritten aufbauen. Charakteristisch sind das Variablenkonzept und Begriffe wie Unterprogramme (Prozeduren), Wertzuweisungen, Schleifen, bedingte Verzweigungen usw.

*„Programme berechnen Funktionen, die Eingabedaten in Ausgabedaten abbilden. In der funktionalen Programmierung beschreibt man daher die Beziehungen zwischen Ein- und Ausgabedaten mit Hilfe mathematischer Ausdrücke, indem man elementare Ausdrücke für einfache Funktionen zugrundelegt und hieraus mit Operationen, die auf Funktionen definiert sind, komplexere Funktionen darstellt. ... **Ein Programm besteht aus einer Menge von Ausdrücken, die Funktionen definieren.** Eine Berechnung ist die Anwendung einer Funktion auf eine Liste von Werten oder Ausdrücken.“ (Informatik-Duden, Duden-Verlag 1993, S. 545.)*

Damit ist das funktionale Programmieren näher an den Begrifflichkeiten der Mathematik als das imperative Programmieren.

An den Erläuterungen erkennt man, dass der Entwurf von Programmen mit bestimmten Methoden und Denkweisen (Problemzerlegung, strukturiertes Programmieren, objektorientiertes Programmieren, funktionales Programmieren usw.) erfolgt, von denen der Mathematikunterricht profitieren kann, die aber dort teilweise nur bedingt eigenes Thema sein können. Der Vorgang der Programmerstellung soll jedoch im Mathematikunterricht nicht in den Vordergrund rücken.

Kennzeichen des Programmierens mathematischer Fragestellungen sind u.a.:

- Analysieren von Algorithmen,
- Entwerfen von Algorithmen
- Konstruieren von Prozeduren und Funktionen (Bausteinen),
- Konstruieren von Wiederholungsschleifen,
- Berücksichtigung spezieller Bedingungen (Fallunterscheidungen),
- Finden geeigneter Parameter,

Wozu im Mathematikunterricht programmieren?

Die Programmierung erfolgt u. a.

- zur Lösung spezieller Probleme, die sich nicht mit dem CAS elementar (z. B. durch Verwendung vordefinierter oder selbstdefinierter Bausteine) bearbeiten lassen,
- Herstellung von Black-Boxes zum Zweck der
 - Mehrfachverwendung und zur
 - Förderung experimentellen Arbeitens,
- zur Analyse von Algorithmen.

Vorsicht! - Bedenken gegen das Programmieren im Mathematikunterricht

- Viele Lehrer scheuen sich vor dem Programmieren! Die Schülerspezialisten können es besser!
- Vielen, insbesondere leistungsschwachen SchülerInnen fällt das Programmieren schwer!
- Programmieren führt wegen mancher Misserfolge zur Demotivation von SchülerInnen!
- Programmieren verstärkt die Unterschiede in der Leistungsfähigkeit von Schülern!
- **Programmieren ist zeitaufwendig und kann sich leicht verselbstständigen! – Noch eine Erweiterung, noch schönere Ausgaben, noch eleganteren Weg usw..**

- **Es gibt im CAS genügend andere Möglichkeiten, um Problemlösungen zu finden oder „Programmierziele“ zu erreichen!**

Programmieren im CAS

Aus Sicht der Schulmathematik brachten die Computeralgebrasysteme eine Antwort auf die oben genannten Probleme bezüglich der Akzeptanz des Programmierens.

- Sie enthalten nämlich **fertige Bausteine**, in denen die Algorithmen versteckt sind, und lassen die **Definition neuer Bausteine** zu. Damit lässt sich der Umfang des Programmierens erheblich zurückdrängen! Mittels der Bausteine kann es nun auf einer höheren, aber doch einfacheren Ebene stattfinden.
- Viele Problemlösungen lassen sich durch kleine funktionale Programme finden. **Elemente funktionalen Programmierens** finden sich in CAS-Systemen, aber auch in anderen Softwaresystemen, wie z. B. dem in dieser Arbeit mehrfach benutzten Animationsprogramm ANIMATO oder dem Raytracing-Programm POV-Ray. Diese Systeme vereinfachen für den Schüler das Programmieren auch dadurch, dass sich Eingaben häufig sofort grafisch visualisieren lassen. So ist eine sofortige Kontrolle der Programmierarbeit möglich.
- Mit der Verfügbarkeit von CAS ist also die Notwendigkeit des Schreibens von Programmen im Unterricht drastisch gesunken. Das ist für den Mathematikunterricht eine sehr positive Entwicklung.

Vernachlässigung algorithmischer Aspekte?

Mit der Möglichkeit, Black-Boxes zu verwenden, verliert allerdings der durch das Programmieren in den Vordergrund gerückte algorithmische Aspekt an Bedeutung. Es ist jedoch für das Verständnis mathematischer Sachverhalte durch die Schüler unumgänglich, ausgewählte Algorithmen zu kennen. Hier ist in erster Linie an die mathematischen Standardalgorithmen im Schulunterricht zu denken. Will man Algorithmen studieren, so ist man jedoch nicht unbedingt auf die Realisierung in einer Programmiersprache angewiesen. Vielmehr geht das auch durch grafische Darstellungsformen wie z. B. Flussdiagramme und Struktogramme oder durch die Analyse von Bausteinen.

Unterrichtserfahrungen und viele Beiträge zum Computereinsatz im Mathematikunterricht weisen nach, dass sich mit dem Computer die Möglichkeiten experimentellen Arbeitens erheblich vergrößert haben. Damit verbessert sich auch die Situation bezüglich der Verwendung heuristischer Methoden.

CAS-Programmierfans

Angesichts dieser Entwicklung verwundert es, dass einige Lehrer sich offensichtlich dem Programmieren in CAS verschrieben haben. Hierfür ist eine Programmiersprache nötig, die z.

B. vom CAS des Voyage 200 in einer Form angeboten wird, die bei längeren Programmen leicht zu den längst von der Informatik abgelehnten „Spaghetti-Codes“ führt.

Die folgenden Programmbeispiele dienen dazu, einige Abgrenzungen zwischen Problemlösungen ohne bzw. mit Programmen zu ermöglichen.

Das Schreiben von Programmen im Programmierer des TI-92 bzw. Voyage 200

Schon bei dem folgenden kleinen Programm sind einige Programmierkenntnisse nötig.

```

: F1 F2 F3 F4 F5 F6
: Control I/O Var Find... Mode
:satz(a,b,d)
:Prgm
:ClrIO
:For i,1,d,1
:seq(rand(a),k,1,b)→c
:Disp c
:EndFor
:EndPrgm
:|
MAIN RAD AUTO FUNC

```

Abb. 6.4a

(6	4	1	2	1	5	5	5	4	6	4	3)
(5	4	2	3	6	3	2	2	5	4	5	4)
(3	4	1	6	4	1	4	2	2	4	6	2)
(2	2	5	6	5	2	5	1	5	5	3	4)
(2	4	6	2	4	5	6	3	2	4	3	2)
(5	1	5	2	1	4	2	2	2	3	5	5)
(5	5	6	2	4	3	2	3	3	3	4	4)
(6	4	4	3	6	2	5	1	2	2	2	6)

MAIN RAD AUTO FUNC 9/30

Abb. 6.4b

Beispiel 1: satz(a,b,d), Erzeugung von Würfelzahlen

Mit diesem kleinen Programm können u.a. Würfelzahlen erzeugt werden, aus denen man ablesen kann, wann ein vollständiger Satz erreicht ist (jede Würfelzahl muss mindestens einmal vorkommen). Der Aufruf: satz(6, 12, 8) liefert die obige Tabelle. Eine automatische Auswertung ist hier nicht programmiert.

Beispiel 2: trapez(a,b,n), Flächeninhaltsberechnung

Hier wird eine Trapezformel zur näherungsweisen Flächeninhaltsberechnung zwischen Graph und x-Achse definiert. Der Anspruch ist hier schon erhöht.

```

Func
  Local h, term1, term2, i
  (b-a) / n → h
  f(a) + f(b) → term1
  Σ(f(a+i*h), i, 1, n-1) → term2
  h/2*(term1 + 2*term2)
EndFunc

```

Beispiel 3: drawtrap(a,b,n), Trapeze auf den TI-Bildschirm zeichnen

Hier wird die Grenze des Programmierens für einen normalen Mathematikurs deutlich überschritten. Ein derartiges Programm sollte bestenfalls vom Lehrer oder von kompetenten Schülern (z. B. aus Informatikkursen) hergestellt werden. Es kann dann aber von allen benutzt oder auch als Demonstrationsprogramm eingesetzt werden.

```
drawtrap(a,b,n),
Prgm
Local h,i
@Festlegung des x-Achsen-Bereiches
a-(b-a)/10 → xmin
a+(b-a)/10 → xmax
@Zeichnen der Funktion
CrlDraw
Graph f(x)
(b-a)/n → h
@Zeichnen der Trapeze
For i, 0, n-1
Line a+i*h, 0, a+i*h, f(a+i*h)
Line a+(i+1)*h, 0, a+(i+1)*h, f(a+(i+1)*h)
Line a+i*h, f(a+i*h), a+(i+1)*h, f(a+(i+1)*h)
EndFor
EndPrgm
```

**Beispiel 4 – Folgen mit den Elementen 0 und 1
Programmierung in DERIVE 5**

Derive 5 Eingaben und Ausgaben	Erläuterungen
#1 f2(n) := If n = 0 0 f2(n - 1) + FLOOR(2·RANDOM(1))	Definition der Funktion f2(n): Anfangswert f2(0)=0, ansonsten den Vorgänger nehmen und jeweils eine Zufallszahl 0 oder 1 addieren. n ist die Wortlänge der Bit-Folge
#2 f2(7) #3 5	Test: Eine Bit-Folge der Länge 7 enthält hier 5 Einsen.
#4 VECTOR(f2(10), i, 1, 10) #5 [5, 4, 6, 6, 3, 5, 5, 5, 5, 6]	10 Bitfolgen (i=1..10) der Länge 10 enthielten 5, 4, 6, ... Einsen.
#6 VECTOR(FLOOR(2·RANDOM(1)), i, 1, 10) #7 [0, 0, 0, 1, 0, 1, 1, 0, 1, 0]	Beispiel für eine Bit-Folge der Länge 10. Hier sind es 6 Nullen und 4 Einsen.

Beispiel 5 – Programmieren mit Funktionen – Iteration

Als Beispiel wird ein Problem aus der Marktforschung betrachtet.

Das Problem

Ein Marktforschungsinstitut wurde von einem Verlag damit beauftragt, das Kaufverhalten der Käufer von zwei neu aufgelegten, wöchentlich erscheinenden Computerzeitschriften A und B des eigenen Verlages zu untersuchen, um so Hilfen für spätere Produktions- und Vertriebsentscheidungen zu liefern. A und B unterscheiden sich in der Aufmachung und in der fachlichen Orientierung (mehr Software, mehr Hardware). Sie enthalten jedoch auch Artikel und Werbung, die ähnlichen Inhalts sind. Konkurrenzzeitschriften gibt es noch nicht.

Das Institut ermittelt mit Hilfe statistischer Untersuchungen, dass zwischen den beiden Zeitschriften wöchentliche Wechsel der Käufer stattfinden, die sich durch die Übergangstabelle S wie folgt beschreiben lassen:

Übergang von Woche n zu Woche (n+1), Wechsel zwischen den Zeitschriften:

	zu	A	B	
von A	10%	90%		Beispielsweise kaufen also (von Woche zu Woche)
von B	85%	15%		20% der A-Käufer nun die Zeitschrift B.

Anfangs (in Woche 0) kauften 2000 Kunden die Zeitschrift A und 3000 Kunden die Zeitschrift B.

Wie entwickeln sich die Käuferzahlen in Woche 1, Woche 2, ... langfristig?

Lösung:

Das Problem wird gleich allgemein für (2,2)-Übergangsmatrizen bearbeitet.

Typisch für funktionales Programmieren ist die Verwendung rekursiv definierter Funktionen.

Beispiel 5 berücksichtigt diesen Aspekt, verwendet außerdem das Bausteinprinzip. Abbildung 6.4c stellt den Verlauf einer Markow-Kette mit unterschiedlichen Startwerten dar.

Wir betrachten die Markow-Kette mit der Übergangsmatrix $S = \begin{bmatrix} p(11) & p(12) \\ p(21) & p(22) \end{bmatrix}$

und der (n-1)-ten Verteilung $V(n-1) = \begin{bmatrix} x(n-1) & y(n-1) \end{bmatrix}$.

Für die n-te Verteilung gilt $V(n) = V(n-1) * S$, also

$$\begin{aligned} x(n) &= p(11)*x(n-1) + p(21)*y(n-1) \\ x(n) &= p(11)*x(n-1) + p(21)*(1-x(n-1)) \end{aligned}$$

Daraus entsteht die Rekursionsformel $x(n) = (p(11) - p(21))*x(n-1) + p(21)$.

Für die Herleitung kann man natürlich auch ein CAS benutzen (hier TI-Nspire):

The screenshot shows the TI-Nspire CAS interface with the following input and output:

```

matp:= $\begin{bmatrix} p11 & p12 \\ p21 & p22 \end{bmatrix}$ 
vn:= $\begin{bmatrix} xn & yn \end{bmatrix}$ 
wn:=vn*matp
wn[1,1]
wn[1,1]:= $p11*xn+p21*yn$  |  $p12*xn+p22*yn$ 

```

The output shows the expression for $wn[1,1]$ as $p11*xn+p21*yn$. Below this, the user has entered the substitution $yn=1-xn$, resulting in the expression $p11*xn+p21*(1-xn)$.

Below the calculator window, there is a text box with the following explanation:

In der ersten Zeile wird die Übergangsmatrix matp allgemein definiert. vn ist die n-te Verteilung der Kette. Dann liefert $wn:=vn*matp$ die (n+1)-te Verteilung. Deren erstes Element $wn[1,1]$ wird ausgewählt und anschließend beachtet, dass stets $xn+yn=1$. So ergibt sich schließlich $wn[1,1]=p11*xn+p21*(1-xn)$.
 Bemerkung: Dieser Term wäre noch umformbar zu $wn[1,1]=(p11-p21)*xn+p21$

Für das obige Beispiel ergibt sich also der Term $x(n) = (0.1 - 0.85))*x(n-1) + 0.85$. Schon Hier erkennt man – wie auch schon an der hergeleiteten Formel, dass die in der Aufgabe genannten Startwerte in dem Term gar keine Rolle spielen.

In ANIMATO kann man für die graphische Darstellung den Baustein f1 definieren:

f1: $\{a=0:u:(b-c)*f1(a-1)+c\}$	Wenn $a = 0$, dann Anfangswert u (u kann man mehrere Anfangswerte durchlaufen lassen!), sonst $(b-c)*f1(a-1)+c$ rechnen (gemäß der obigen Formel).
f2: $f1(a, 0.1, 0.85)$	Bei f2 wird der Baustein aufgerufen. Das ist der obige Term $x(n) = (0.1 - 0.85)*x(n-1) + 0.85$
f5: $(b-c)^a * u + c * (1 - (b-c)^a) / (1 - (b-c))$	2. Lösungsweg: f5 und f6 dienen zur Kontrolle von f1 und f2. – Hier steht ein entsprechender Baustein in expliziter Darstellung .
f6: $f5(a, 0.1, 0.85)$	f6: ruft diesen Baustein mit den gleichen Werten wie oben auf. Dabei gelten folgende, an anderer Stelle vorgenommene Einstellungen: a: Von 0 bis 20, Schrittweite 1 u: 0, 1/3, 2/3, 1, Anfangswerte

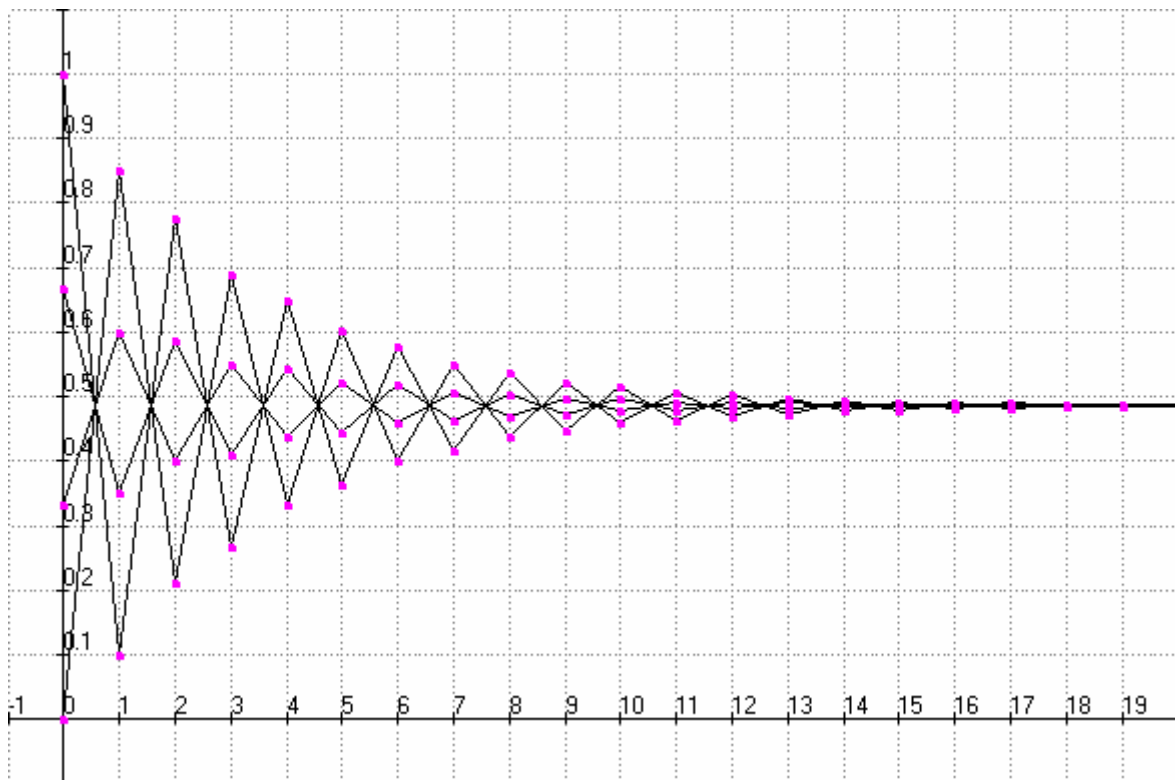


Abb. 6.4c: Konvergenz der Markow-Kette – unabhängig vom Startwert. Hier wurden für die Zeitschrift 1 die Startwerte (Anfangswerte) 100%, 67%, 33%, 0% gewählt.

Langfristig kaufen also etwa 48% die Zeitschrift A.

Beispiel 6 – Programmieren mit Funktionen – Iteration in DERIVE 5

Wie kompakt und leistungsfähig Bausteinaufrufe sein können, zeigt auch die Benutzung von „iterates“, einem vordefinierte Baustein in dem CAS-System DERIVE 5.

iterates(x^2, x, t, 3) liefert die Funktionsterme t , t^2 , t^4 , t^8 . In der üblichen mathematischen Schreibweise bedeutet das:

$$x_1 = t$$

$$x_{n+1} = x_n^2 \quad \text{für } n = 1 \text{ bis } 3.$$

Erstellen einer Animation als Programmierprojekt

Man kann bekanntlich einen Programmablauf schrittweise als Animation entstehen lassen, indem man den im Programm notierten Termen passende Laufbereiche, Laufzeiten und andere Eigenschaften, z. B. Farben zuordnet. Über Animationen wurde in Zusammenhang mit Visualisierung bereits in Kapitel 4 gesprochen – siehe z.B. Kapitel 4.4.2 mit der Animation von Geradenspiegelungen.

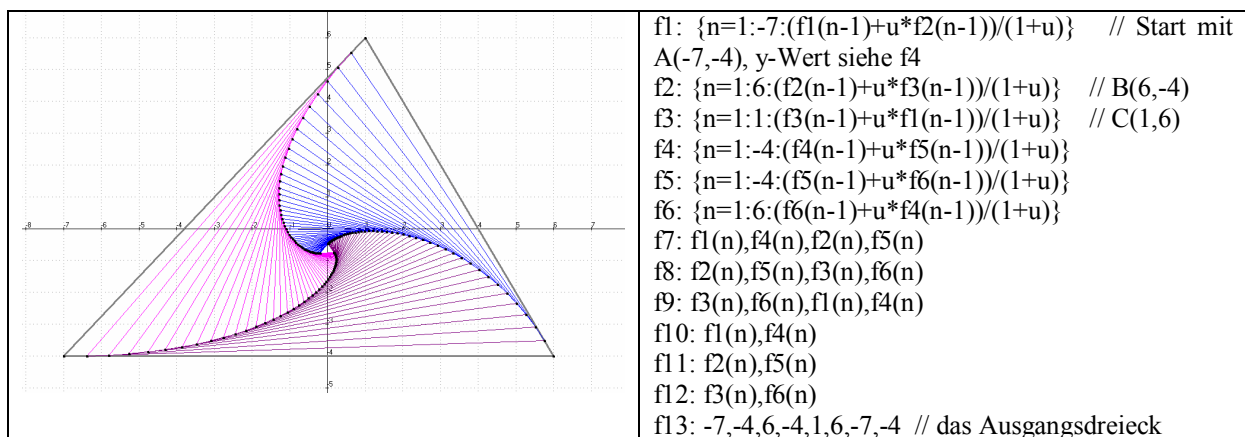
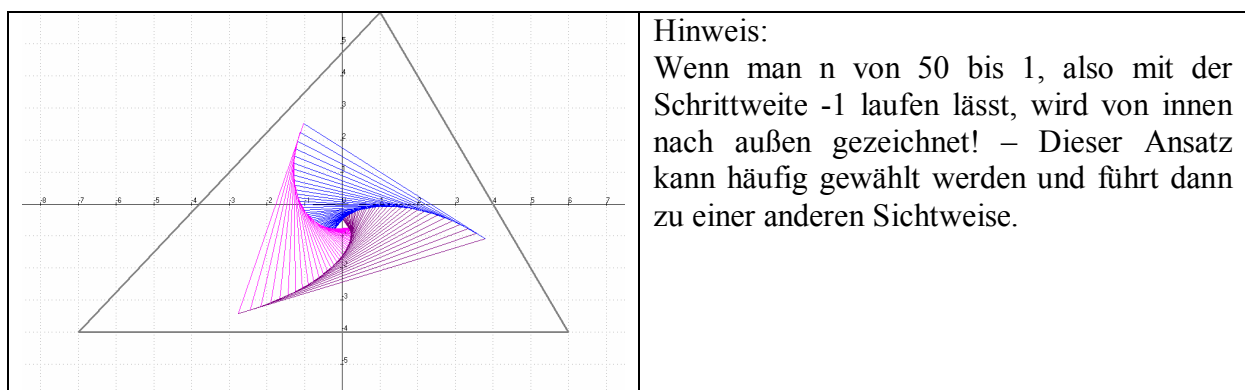


Abb.6.4d: Teilverhältnisse im Dreieck, jeder Iterationsschritt führt zu einem neuen kleineren Dreieck, n läuft von 1 bis 50, das Teilverhältnis u ist hier gleich 0.05. Beide Bereiche können schnell geändert werden.



Auf der folgenden Seite wird gezeigt, dass man das Erstellen einer derartigen Animation auch als Programmierprojekt auffassen kann.

Programmieren mit Funktionen/Relationen im Animationsprogrammingsystem ANIMATO

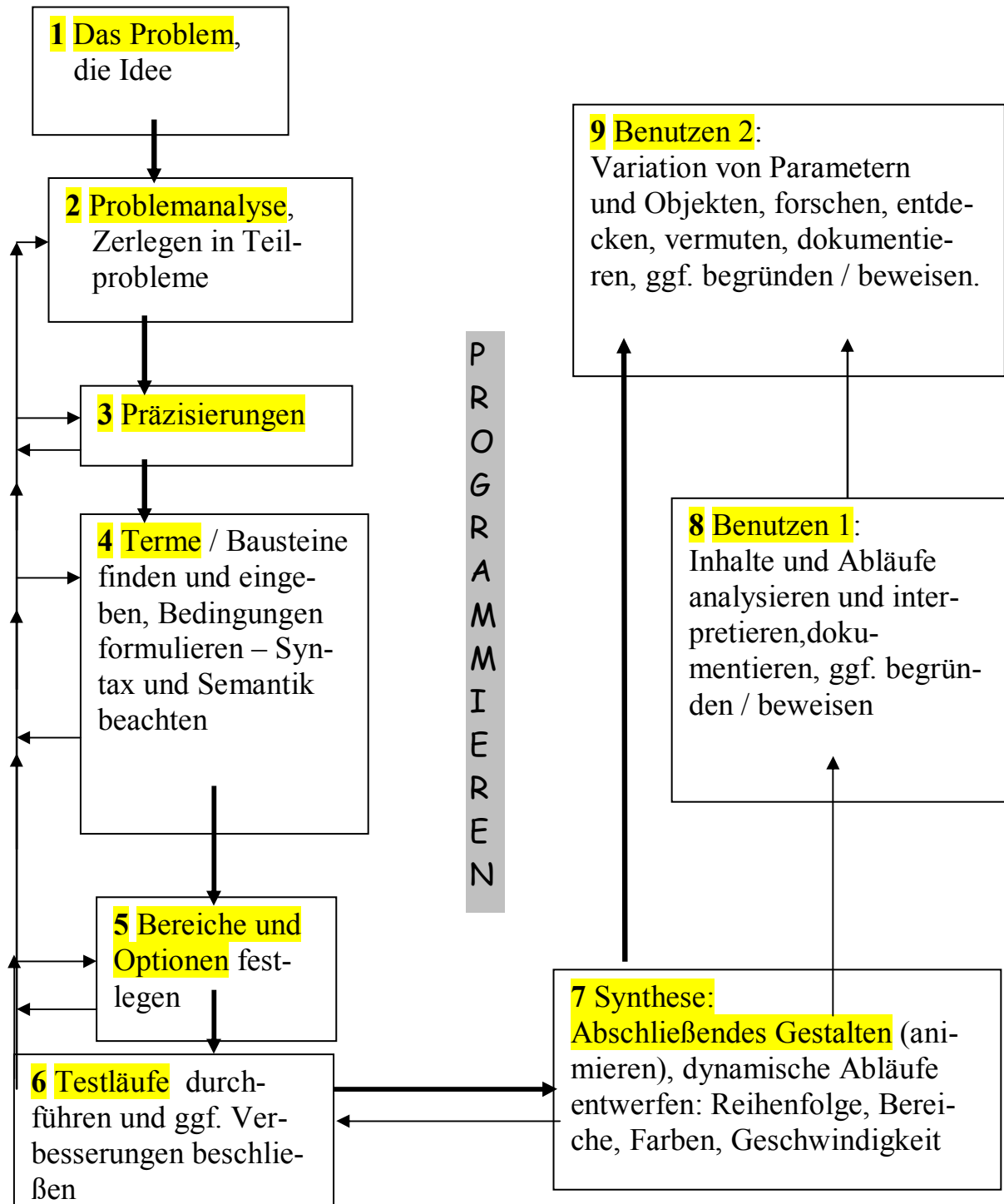


Abb.6.4e: Animationen als Programmierprojekt

Abschließend wird eine Empfehlung zur Rolle des Programmierens im Unterricht vorgelegt.

Baustein- und Programmieraktivitäten im M-Unterricht (in CAS)	Im Leistungskurs	In Klasse 11, im Grundkurs	Im Klassenunterricht 7–10 (Aktivitäten von 7 bis 10 ansteigend)
Benutzen (Aufrufen) fertiger Bausteine; z. B. $seq(i^2, i, 1, 10)$	ja	ja	ja
Selbstdefinieren und Benutzen von Bausteinen (Funktionen) mit Parametern; z. B. $m * x + n \rightarrow gerade(x, m, n)$	ja	ja	ja
Experimentieren mit Bausteinhilfe	ja	ja	ja
Analyse von Bausteinen durch Parametervariationen	ja	gelegentlich bis häufig	gelegentlich bis häufig
Analyse von Baustein-Algorithmen	häufig	gelegentlich	gelegentlich
„10-Zeilen-Programme“ benutzen (Demonstration, experimentieren)	ja	ja	ja
„10-Zeilen-Programme“ analysieren: Algorithmen, Parametervariation	häufig	selten	selten
„10-Zeilen-Programme“ programmieren (Programmeditor benutzen)	gelegentlich	nein	nein
„Viele-Zeilen-Programme“ benutzen	ja	selten	nein
„Viele-Zeilen-Programme“ analysieren	gelegentlich, auch Teilalgorithmen betrachten	nein	nein
„Viele-Zeilen-Programme“ programmieren (Programmeditor benutzen)	nein, bestenfalls Schülerspezialisten	nein	nein

Abb.6.4f: Übersicht zum Benutzen und Konstruieren von Programmen im Mathematik-Unterricht

Zusammenfassung

Auf das Schreiben von Programmen im CAS-Programmeditor (und erst recht in einer anderen Programmiersprache) sollte in normalen Mathematikkursen aus folgenden Gründen weitgehend verzichtet werden:

- Die Phasen der Entwicklung des Computereinsatzes im Mathematikunterricht der Schule zeigen, dass das Programmieren für eine weite Verbreitung des Computers im Unterricht hinderlich war. Ein großer Teil der Lehrenden wollte sich nicht damit befassen. Programmieren ist auch für die Lernenden schwer und zudem zeitaufwändig. Diese Einschätzung gilt auch heute noch.
- Das Erstellen längerer Programme in CAS-Systemen leidet unter den gleichen Mängeln wie seinerzeit am PC, etwa in BASIC. Es führt schnell zu unübersichtlichen Programmen mit den bekannten „Spaghetti-Codes“, die der Informatiker mit Recht ablehnt. Längere Programmierphasen in Computeralgebrasystemen sind daher für den normalen Mathematikunterricht ein eher belastender Rückschritt. Diese Aussage schließt jedoch nicht aus, dass gelegentlich geeignete SchülerInnen auch Programme als Black-Boxes zur Verwendung für ihre MitschülerInnen bereitstellen und zuweilen über deren Konstruktion berichten.
- Die oben genannten Gründe waren es ja (neben vielen anderen), die zur Entwicklung leichter zu bedienender Mathematik-Software und insbesondere von Computeralgebrasystemen geführt haben.
- Programmieren im Mathematikunterricht bedarf des kompetenten Lehrers, der die Chancen des Programmierens, aber auch die Gefahren übertriebenen Programmierens richtig einschätzen kann.
- Als Alternativen für umfangreiches Programmieren im CAS-Programmeditor bieten sich an:
 - a) Benutzung vor- und selbstdefinierter Bausteine (siehe u. a. Beispiel 6). Diese können vielseitig verwendet werden, etwa zur Problemlösung, zum Experimentieren und zum Analysieren der in ihnen verborgenen mathematischen Inhalte.
 - b) Funktionales Programmieren in kleinem Umfang. Hierbei können insbesondere rekursive Programme verwendet werden.

Abbildung 6.4f fasst wesentliche Aspekte zusammen und gibt Unterrichtsempfehlungen für den Umgang mit CAS-Bausteinen und der Programmerstellung im CAS.

6.5 Bausteinkisten ersparen das Programmieren

Angesichts der Bedeutung der Modulkompetenz liegt die Idee nach sich eine Baustein-Formelsammlung (Bausteinkiste) über die Schuljahr hinweg anzulegen. Hierfür folgen einige Vorschläge.

Bausteinkiste 1-A (Beispielsammlung ausgewählter Bausteine)

Hinweis: Es handelt sich nur um eine Auswahl von Bausteinen, die in der Sekundarstufe 1 eingeführt werden können. Im Buch befinden sich weitere Anwendungen

Bausteindefinition Sy im System definiert, E eigene Definition	Sys-tem Eigen.	Aufrufbeispiel , Erläuterung Die Möglichkeiten für Aufrufe sind überall sehr vielfältig → siehe Bausteinanalyse, Kapitel 6
Factor(...)	Sy	Factor(124), Ergebnis $2^2 \cdot 31$, Faktorisierung (schon in Klasse 5 verwendbar)
Ger1(x,m,n) := $m \cdot x + n$ Ger2(x,m,a,b) := $b + m(x-a)$	E E	Ger1(x,m,3), alle Geraden durch (0,3) mit Steigung m (ein Geradenbüschel) Ger2(x,-1,3,4), Gerade durch den Punkt (3,4) mit der Steigung -1
Solve(...)	Sy	Gleichungen lösen Solve($2x+y = 1$ and $x-y = 1$, x) x-Wert des Schnittpunkts zweier Geraden
Bino(a,b,n) := $(a+b)^n$	E	Binomische Formeln Bino(a,-b,2), Ergebnis $a^2 - 2a \cdot b + b^2$
Para1(x,a,b,c) := $a \cdot x^2 + b \cdot x + c$	E	Para1(x,1,0,c), alle Parabeln der Form $y = x^2 + c$
Para2(x,a,b,c) := $a \cdot (x-b)^2 + c$	E	Para2(1,2,3,4), y-Wert an der Stelle $x=1$ der Parabel $y = 2 \cdot (x-3)^2 + 4$, also $y = 12$
Pytha(a,b,c) := $a^2 + b^2 = c^2$		Pytha(3,4,5), die Gleichung $9+16 = 25$, Ergebnis true, Prüfung, ob pythagoräische Zahlen
Abst(ax,ay,bx,by) := $\sqrt{(ax-bx)^2 + (ay-by)^2}$	E	Abst(2,3,x, x^2-1), alle Abstände des Punktes (2,3) zu den Parabelpunkten von $y = x^2$
Seq(...)	Sy	Seq(factor(n^2+n+11 ,n,1,9,1)), Syntax Voyage 200, alles Primzahlen?
Sinu(t,a,b,c,d) := $a \cdot \sin(b \cdot t + c) + d$	E	Sinu(t,1,1,0,d), gezeichnet ist das eine Parallelen-schar zu $y = \sin(t)$, ja nach Menge für d
Coss(t,a,b,c) := $(c^2 = a^2 + b^2 - 2a \cdot b \cdot \cos(t))$		Cosinus-Satz, Anwendung Solve(coss(30,2,3,c),c), Berechnung von c

Abb. 6.5a

Bausteinkiste 2-A (Beispielsammlung ausgewählter Bausteine)

Hinweis: Es handelt sich nur um eine Auswahl von Bausteinen, die in der Sekundarstufe 2 eingeführt werden können. Im Buch befinden sich weitere Anwendungen. In der Sek.2 wird man noch mehr mit Bausteinen arbeiten, auch weil die mathematischen Ansprüche komplexer werden. Dem tragen auch die vom System her angebotenen Bausteine Rechnung.

Bausteindefinition S im System definiert, E eigene Definition	System Eigen.	Aufrufbeispiel , Erläuterung Die Möglichkeiten für Aufrufe sind überall sehr vielfältig → siehe Bausteinanalyse, Kapitel 6
Die Bausteinkiste 2-A erscheint unten in Form eines Bildschirmabdrucks aus dem CAS TI-Nspire	S	Erläuterungen siehe unten

Abb. 6.5b

	<p>Eigene Definition eines Bausteins für Differenzenquotienten</p> <p>- Bausteinaufruf mit sin(x)</p> <p>Systembaustein <i>sum</i></p> <p>Systembaustein <i>limit</i></p> <p>Systembaustein für Ableitungen</p>
--	---

Abb. 6.5c

Die folgende Abbildung gibt einen Überblick über etliche Untermenüs des TI-Nspire, in denen systemdefinierte Bausteine angeboten werden.

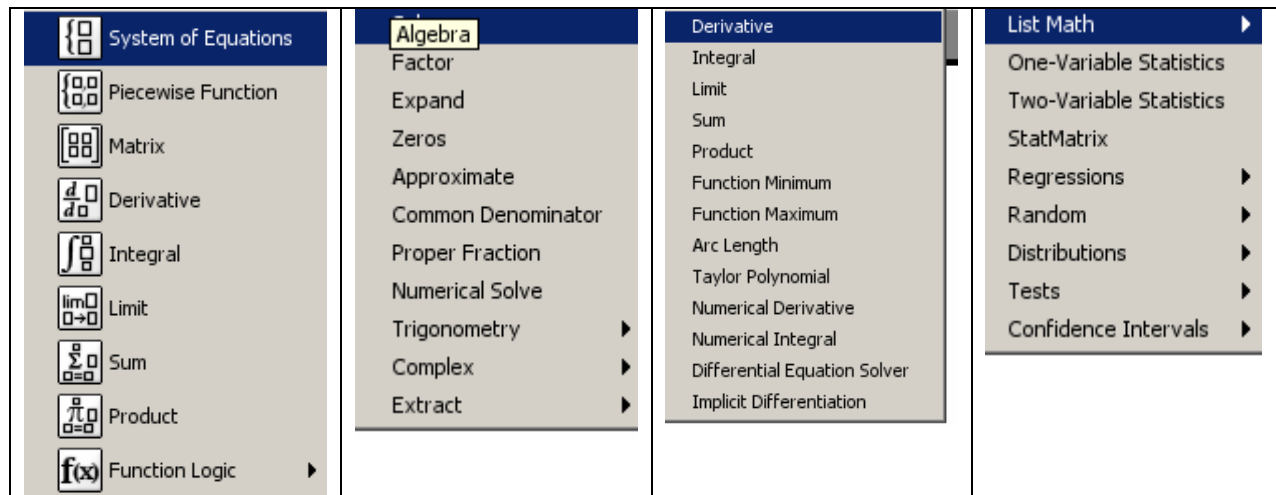


Abb. 6.5d: Einige vordefinierte Module im CAS TI-Nspire

Mit den Beispielen dürfte klar geworden sein, in welchem Ausmaß Bausteine / Module in CAS berücksichtigt sind, was unter einer Bausteinkiste verstanden werden kann und wofür sie nützlich ist.

Weitere Literatur zur Arbeit mit Bausteinen

- [1] E. Lehmann: Wieviel White-Box und wann Black-Box - Mathematik mit Computeralgebra-Bausteinen des TI-92 - *Mathematik in der Schule, Heft 3/1998, Pädagogischer Zeitschriftenverlag Berlin*
- [2] E. Lehmann: Lineare Algebra mit dem TI-92, Handreichung mit weitgehender Verfolgung des Bausteinprinzips - *Texas Instruments 1998*
- [3] E. Lehmann: Mathematik mit Bausteinen und ihren Parametern - *PM, Praxis der Mathematik, Heft 3/1999, Aulis-Verlag Köln*
- [4] E. Lehmann: Mathematikunterricht mit einem Computeralgebrasystem - Analyse des Bausteins Binobau $(a,b,n):=(a+b)^n$ - *MNU, Der mathematische und naturwissenschaftliche Unterricht, Heft 5, 1999, Dümmler-Verlag Köln*

7. CAS-Projekte - Modellieren mit CAS-Hilfe

Die Kompetenzen für das Modellieren können an kleinen, besonders aber an komplexeren Problemstellungen erworben und geübt werden. Im zweiten Fall ist Projektarbeit gut geeignet. Wir beginnen deshalb hier mit Betrachtungen zur CAS-Projektarbeit, dann folgen Beispiele verschiedenen Umfangs.

7.1 Kompetenzerwerb bei Projekten – CAS-Projekte

Modellbildung bei komplexen Systemen

In den Naturwissenschaften und der Technik dienen häufig Experimente dazu, Informationen zur Bestätigung oder Widerlegung von Hypothesen zu gewinnen. Modelle werden dagegen oft zur Lösung von Aufgaben eingesetzt, deren Durchführung am Original selbst grundsätzlich oder mit Schülerkenntnissen nicht möglich oder zu aufwendig ist.

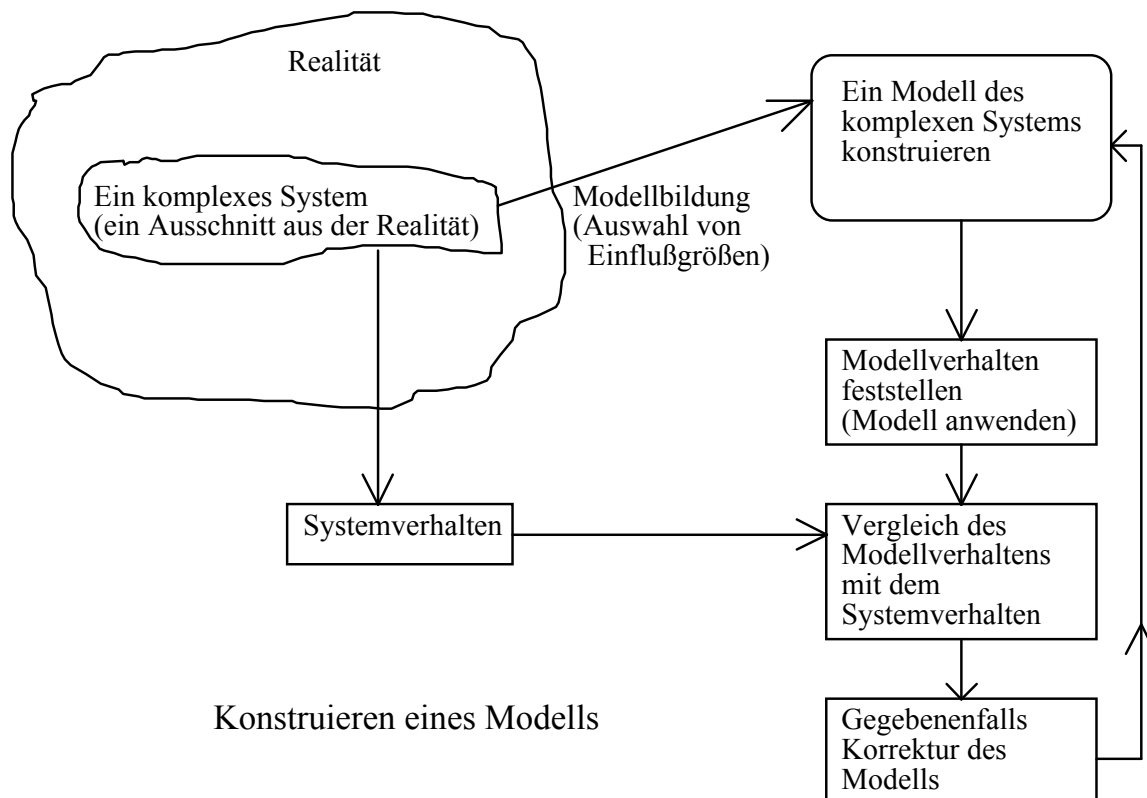


Abb. 7.1a: Modelle konstruieren

Der Projektbegriff

Projekt (lat.) bedeutet *Plan*, *Vorhaben* oder auch *Entwurf*.

Der Projektbegriff ist damit so allgemein, dass er in den verschiedensten Zusammenhängen außerhalb und innerhalb der Schule verwendet werden kann, wovon dann auch in Büchern, Zeitschriften, Zeitungen usw. reichlich Gebrauch gemacht wird. In dieser Arbeit geht es um Projektarbeit an Schulen. Bekanntlich findet auch dort Projektarbeit in sehr unterschiedlichen Ausprägungen statt. Genannt seien z. B. Projektstage, Projektwochen, Projekte über ein Kurssemester, Projekte über mehrere Unterrichtsstunden hinweg – fachbezogen oder fachübergreifend.

In der Regel geht es bei Projekten um für den jeweiligen Bereich komplexe Aufgabenstellungen, die dann im Gegensatz zu Routineaufgaben auch mit besonderen Organisationsformen und Methoden bearbeitet werden müssen.

Ein Phasenmodell für Mathematik-Projekte

Phase 0: Projektvorbereitung

(Vorkenntnisse, organisatorischer Rahmen, vorhandene Software, ...)

Phase 1:

- Offene (komplexe) Problemstellung (meistens durch den Lehrer, möglichst gebietsübergreifend oder fachübergreifend)
- Brainstorming
- Ordnen: Zerlegung des Problems in Teilprobleme
- Auswahl von Teilproblemen zwecks Bearbeitung, Präzisierung
- Festlegung der Teamstruktur, Gruppeneinteilung

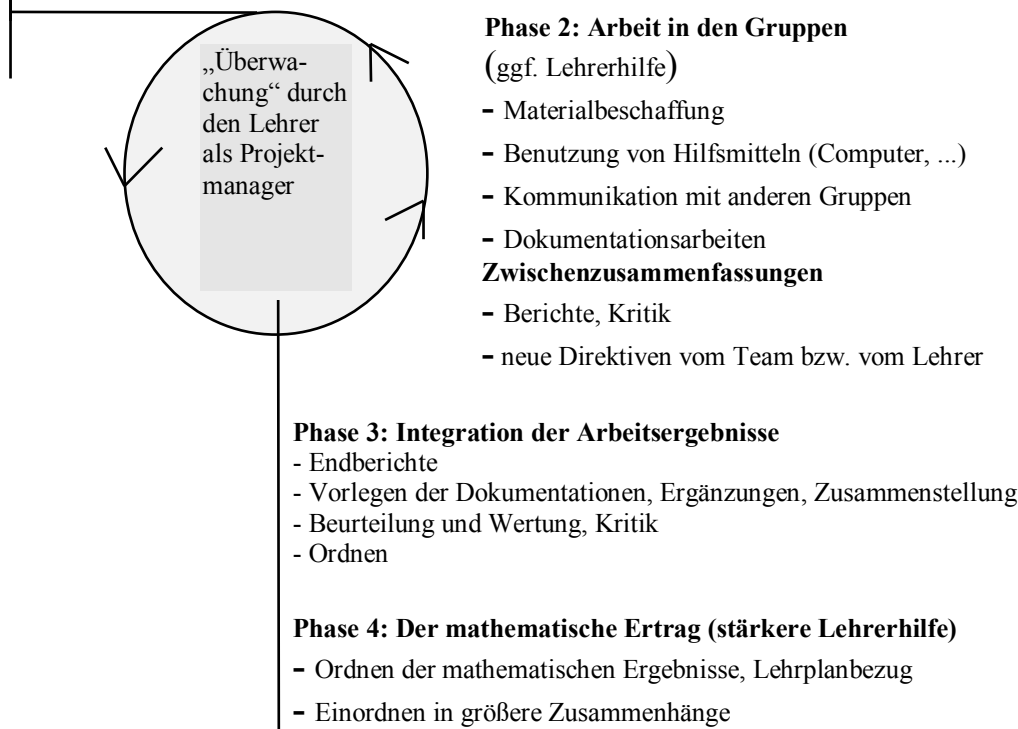


Abb. 7.1b: Ablauf eines mathematischen Projekts

In einem konkreten Projekt kann der Projektablauf auch andere Formen annehmen. Dennoch nennt die Abbildung wichtige Aspekte für viele Projekte.

Die obigen Bemerkungen zeigen bereits, dass es wenig fruchtbar ist, den Projektbegriff genauer zu definieren. Wir werden uns für unsere schulischen Projekte vielmehr darauf beschränken, besondere Intentionen von Projektarbeit zu benennen, um so eine Abgrenzung gegenüber dem sonstigen Unterricht vorzunehmen zu können.

Projektziele - warum Projekte im Mathematikunterricht?

Im Mathematikunterricht überwiegt in der Regel die relativ eng an den Inhalten des Lehrplans ausgerichtete Arbeit. Die behandelten Themen haben meistens eine geringe Weite, problemorientierte, offene Ansätze sind selten. Die vorherrschende Unterrichtsform ist das Unterrichtsgespräch. Ein mathematisches Projekt, in dem ein Team an einem komplexen Problem (realitätsnah oder innermathematisch) arbeitet, setzt ein entsprechendes Engagement des Lehrers voraus und erfordert einigen Mut desselben.

Mut

- zur Abweichung von engen Lehrplanvorgaben
- zu einem großzügigeren Zeitrahmen
- zu einer anderen, aufwendigeren Unterrichtsform
- sich neuen Anforderungen didaktisch-methodischer Art zu stellen
- einen möglicherweise ungewissen Ausgang zu erleben
- zur Bewältigung überraschender Situationen und Probleme

Projektunterricht kann für die Beteiligten besonders interessant sein. Er bringt aber auch etliche Schwierigkeiten mit sich – auf diese wird unten näher eingegangen. Zunächst werden einige Intentionen von Projektunterricht formuliert, die nicht nur auf den Mathematikunterricht zutreffen; sie werden diesen dabei aber besonders berücksichtigen.

Projektunterricht ist eine besondere Arbeitsform, die ihre eigenen Ziele hat. Mit der Projektarbeit werden neben dem Erwerb mathematischer Kompetenzen auch allgemeine Kompetenzen angestrebt, u. a.:

Teamfähigkeit entwickeln

- einzeln und im Team Entscheidungen treffen können
- Kritikfähigkeit zu eigener und fremder Arbeit entwickeln
- Artikulationsfähigkeit entwickeln
- Notwendigkeit und Sinn von Arbeitsteilung einsehen
- selbstständig arbeiten können
- Erlangen von Planungskompetenz
- diverse Arbeitsmittel benutzen und zur Verfügung stehende Ressourcen richtig einschätzen können
- das Gewinnen und Auswerten von Informationen üben
- gemeinsam gewonnene Arbeitsergebnisse in das Projekt integrieren können
- Bewusstmachen des Lern- und Arbeitsprozesses in einer sozialen Gruppe
- Bewusstmachen der benutzten Arbeitsmethoden
- Erzeugung von Produkten zur eigenen Verwendung oder zur Benutzung durch andere Personen bzw. Lerngruppen
- Überwindung des Auseinanderfallens von Theorie und Praxis sowie festgelegter schulischer Fächergrenzen durch Berücksichtigung fächerübergreifender Aspekte.

Projektziele, Kompetenzen

Spezielle, auf den Anwendungsbereich oder die Realität bezogene Ziele sind:

- Komplexität realer Problemstellungen erkennen können
- die Auswirkungen unterschiedlicher Designentscheidungen einschätzen können.

Die obigen Zielsetzungen für Projekte im Mathematikunterricht werden gerade zurzeit besonders unterstützt durch die Forderungen nach einer offenen Unterrichts- und Aufgabekultur im Mathematikunterricht, wie sie in den Modulen des BLK-Projekts „Steigerung der Effi-

zienz des mathematisch-naturwissenschaftlichen Unterrichts“ (SINUS-Modellversuch) sichtbar wurden.

Produktorientierung

Projekte sollten produktorientiert sein, in der Regel ist nur so der Antrieb für die Schüler vorhanden, um ein längeres Projekt durchzustehen. Dabei geht es u. a. um die Dokumentation der Projektarbeit und das Aufbereiten der Ergebnisse, z. B. mit Textverarbeitung und Grafik. Für Mathematikprojekte (Entsprechendes gilt für alle Fächer) sind z. B. folgende Formen der „Veröffentlichung“ und der Präsentation möglich:

(1) Aushang von Projektergebnissen auf Tafeln im Klassenraum oder an anderen geeigneten Stellen in der Schule oder auch bei auswärtigen Veranstaltungen.

(2) Zusammenfassung der Ergebnisse in einem kleinen „Projektbuch“, das jeder Projektteilnehmer erhält. Das Projektbuch kann aber auch noch zur Präsentation andernorts dienen oder gar gegen ein kleines Entgelt (Auffrischung der Klassenkasse) abgegeben werden.

(3) Benutzung des Projektbuches in anderen Lerngruppen.

(4) Veröffentlichung einer Projektbeschreibung in der Schülerzeitschrift, vielleicht sogar in einer Fachzeitschrift.

(5) Die Erfahrungen zeigen, dass sich die Schüler zur Dokumentation des Projektes in zunehmendem Maße der neuen Medien bedienen:

- Benutzung eines Textverarbeitungsprogramms,
- Einfügen von CAS-Bildern,
- Scannen von Bildern,
- Herstellen von Grafiken mit Grafikprogrammen usw.

Diese Ansätze führen dann auch dazu, dass beispielsweise

- Ergebnisse in das Internet gestellt werden,
- Dokumentationen (und eventuell Programme) auf eine Diskette oder eine CD gebracht werden.

Die Rolle eines CAS in der Projektarbeit

Insbesondere aufgrund der Produktorientierung wird auch die Rolle eines CAS deutlich:

- In der Hilfestellung des CAS beim Zeichnen und Rechnen,
- in den Phasen experimentellen Arbeitens,
- beim Finden neuer Ansätze,
- in den Bildern der Dokumentation,
- bei der Ergebnispräsentation,
- bei dem Erwerb etlicher oben genannten Kompetenzen.

Die Rolle des Lehrers bei Projektarbeit

Aus größeren Projekten, etwa auch aus dem Informatikunterricht, ist der Begriff des Projektmanagements bekannt. Er erweist sich als nützlich, wenn es darum geht, die hier gegenüber verbreiteteren Unterrichtsformen andersartigen Aufgaben des Lehrers zu verstehen. So ergibt sich eine erweiterte Sichtweise.

Ein **Projektmanager** hat die Aufgabe, das Projekt zu führen und zu verwalten. In der Schule wird der Projektmanager in der Regel die unterrichtende Lehrperson sein. Unter günstigen Bedingungen können gelegentlich auch verständige Schüler (mit pädagogischem Geschick) Projektleiter sein. Der Projektmanager ist verantwortlich für die Organisation und Vorgehensweise der Projektgruppe und muss in der Lage sein, Probleme zu erkennen, sich um sie zu kümmern und sich mit seinen Mitarbeitern um systematische, konstruktive Lösungen zu bemühen.

Bei mathematischen Projekten hat der Lehrer insbesondere folgende Aufgaben zu übernehmen:

- Auswahl des Projektthemas, jedenfalls in den meisten Fällen,
- Aufteilung in Gruppen, ggf. in Zusammenarbeit mit den Schülern,
- Leitung bei der Präzisierung von Aufgabenstellungen,
- Leitung gemeinsamer Diskussionen,
- Organisation von Zwischenberichten,
- Bereitstellung von den Schülern nicht bekannten mathematischen und anderen Hilfsmitteln,
- Bereitstellung von Medien,
- Hilfestellung
 - durch Hinweise auf geeignete Computerprogramme und Bedienungshinweise,
 - beim Finden schwieriger Ansätze,
 - in mathematischen Detailfragen,
 - bei der Dokumentation.

Der Lehrer als
Projektmanager

Die Rolle der SchülerInnen

Auch die Schülerrolle verändert sich gegenüber der von ihnen im normalen Unterricht erwarteten Rolle. Man darf deshalb nicht erwarten, dass die in einer Lerngruppe erstmalige Anwendung der Projektmethode von den Schülern sofort in der gewünschten Weise praktiziert werden kann. Umso wichtiger ist es, den Schülern bei ihrem Projekt das Besondere dieser Arbeitsform zu verdeutlichen.

In einer Befragung nach einem mathematischen Projekt in Klasse 11 über „Abbildungsgeometrie mit Matrizen“ schreibt ein Schüler zu den Aspekten „Rolle des Schülers“ und „mathematische Erkenntnisse“:

„Rolle des Schülers: Die Schüler konnten als Individuen arbeiten und ihre Persönlichkeit entwickeln. Die Schüler konnten frei arbeiten und hatten nicht diesen Druck des Lernens. Der Lehrer gab den einzelnen Gruppen nur Hinweise, wie die Aufgabe besser oder überhaupt zu lösen sei. Die Teamarbeit spielt bei der Projektarbeit eine große Rolle. Die Schüler mussten aufeinander eingehen, haben gelernt, Formeln, Beweise und Behauptungen zu konstruieren, was nicht immer leicht war.

Die Projektarbeit hat viele Vorteile: Das Lernen in kleinen Gruppen fällt leichter, der Unterricht ist lockerer und vieles mehr. Aber auch die Nachteile sind nicht zu übersehen. Die einzelnen Teams fixieren nur bestimmte Themen und dadurch muss das, was von den anderen Gruppen zusammengestellt wurde, nachgearbeitet und erlernt werden (z. B. für die Klausur).

Meiner Meinung nach ist Gruppenarbeit eine gute Sache, denn durch sie fällt die Schule nicht mehr als Last auf, sondern man geht gerne zu diesem Unterricht (sogar in der 6. Stunde). Die Gruppenarbeit war zwar toll, aber immer geht das nicht, denn man muss auch lernen in einer großen Gruppe

(Klasse) auszukommen, insbesondere für das Studium, da wird auch nicht in Gruppenarbeit erlernt, sondern der Professor übernimmt diese Aufgabe.

Da ich nur wenig Kenntnisse am Computer habe (vom Spielcomputer einige Kenntnisse), fand ich die Arbeit mit den Computerprogrammen recht gut, und sie war nicht so trocken, wie gewöhnlicher Unterricht. Durch sie habe ich neue Kenntnisse in Sachen Programmen bekommen. Die interessanteste Arbeit war die Arbeit am Computer. Die Graphen und Abbildungen, die man anhand des Programms PLOT11 erstellen konnte – das war für mich faszinierend.

Mathematische Erkenntnisse: Beweisführungen, Erstellen von Formeln."

In der Tat schult projektartiger Unterricht in besonderem Maße die Selbstständigkeit der Schüler und fördert ihr Selbstbewusstsein. Der Lehrer muss sich ohnehin mehr auf selbstständigere und kenntnisreiche Schüler einstellen, insbesondere wenn es um die Nutzung der neuen Medien geht.

Teamfähigkeit – eine Schlüsselqualifikation

Teamfähigkeit gehört heute zu den Schlüsselqualifikationen vieler Berufe. Darauf muss in der Ausbildung reagiert werden. Teamfähigkeit bedeutet

- kooperatives Arbeiten und Konfliktbewältigung in einer Gruppe, insbesondere
 - Artikulationsfähigkeit zum Vertreten eigener Meinungen und
 - Aufnahmefähigkeit für andere Meinungen sowie
 - Kritikfähigkeit eigener und fremder Arbeit gegenüber entwickeln,
- Notwendigkeit und Sinn von Arbeitsteilung einsehen.

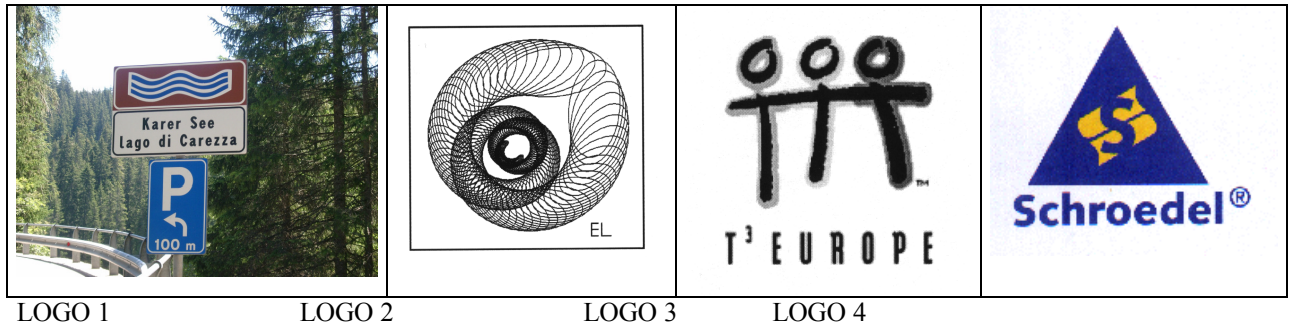
7.2 Firmen-Logos entwerfen – Modellieren mit den Graphen von Funktionstermen

Dankbare Objekte für den Mathematikunterricht und gut geeignet zum Modellieren sind Firmen-Logos, etwa von Autofirmen, die oft geeignete mathematische Objekte enthalten. Für Logos bieten sich mehrere Verwendungsmöglichkeiten an, zum Beispiel:

- Vorgeben der Logo-Graphik, das Analysieren derselben, das Nachkonstruieren und ggf. Ändern der Graphik mit geeigneter Software
- Entwerfen einer eigenen Logo-Graphik unter vorgegebenen Bedingungen, etwa einem „Auftrag“ an eine Firma, die Logos anbietet (Internet!).

Die Thematik ist auch gut geeignet für eine fachübergreifende Projektarbeit, wobei die Klassenstufe von Klasse 7 bis 13 gehen kann, je nach Berücksichtigung verschiedener Funktionsklassen - bis hin zur Verwendung von Parameterdarstellungen.

Jede Firma und viele Institutionen haben ihr eigenes LOGO, das in der Regel von einem Designer entworfen wurde. Die folgenden Abbildungen zeigen einige Beispiele:



Andeutung des fachübergreifenden und Anwendungsaspekts

Firmen oder Werbeagenturen beauftragen üblicherweise ausgebildete Graphiker oder eine Designagentur mit dem Entwurf eines Firmen-Logos. So wirbt z.B. die ART-Webagentur Berlin im Internet (<http://www.art-x.de/firmenlogos.htm>, aufgerufen am 20.10.2005) u.a. mit folgendem Text für ihre Logo-Herstellung:

„Wir entwickeln Ihr Firmenlogo! Teilen Sie uns Ihre Wünsche mit und wir liefern die Ideen! Unsere studierten Berliner Graphikerinnen entwickeln über 4 verschiedene Designvorschläge in jeweils 3-4 Varianten. Aus diesen Ideen entsteht dann in ständiger Absprache mit Ihnen das finale Logo.“

Was genau bekommen Sie für Ihr Geld?

Im Logo-Preis enthalten sind: 3-4 Designvorschläge in jeweils 3-4 Varianten per E-Mail

- *Weiterentwicklung dieser Entwürfe zum finalen Logo*
- *Das finale Logo im Datei-Format JPG/JPEG für Internet und Word*
- *Eine fertige Druckdatei im Format EPS/Postscript auf CD per Post*
- *Die Exklusivrechte an der finalen Version Ihres Logos*
- *10 % Rabatt auf Erstellung und Druck Ihrer Geschäftspapiere*

Wie ist der Ablauf bis zum fertigen Logo?

- 1. Sie stehen in direktem telefonischen Kontakt mit unserer Graphikerin.*
- 2. Die Graphikerin führt mit Ihnen ein umfangreiches Briefing durch.*
- 3. Die ersten Entwürfe erhalten Sie nach ca. 3 Werktagen in verschiedenen Farb und Stil-Varianten per E-Mail zugesandt.*
- 4. Nach Absprache mit der Graphikerin wird aus den Entwürfen eine von Ihnen gewünschte Zusammenstellung in mehreren Varianten weiterentwickelt.*
- 5. In Absprache mit Ihnen entsteht daraus das finale Logo.“*

Diese Auszüge aus der Werbung zeigen einige Aspekte der professionellen Entwicklung von Firmenlogos, siehe auch <http://de.wikipedia.org/wiki/Firmenlogo>.

Wir entwerfen ein Firmen-Logo

Grundlage für die Logo-Gestaltung ist eine Analyse des Istzustands der zu beliefernden Firma. Bei der Herstellung sollten folgende Aspekte beachtet werden:

1. Unverwechselbarkeit: Ein Logo transportiert das spezielle Firmen-Image und soll nicht mit anderen Assoziationen besetzt sein.

2. Verständlichkeit: Das Logo soll auf die Tätigkeit des Unternehmens hinweisen. Das kann durch ein graphisches Symbol und/oder die Auswahl einer passenden Schrift geschehen.

3. Einprägsamkeit: Was einfach ist, ist auch einfach zu merken! Erfolgreiche Firmen-Zeichen wie z. B. die von Audi, Toyota und Nike sind so einfach, dass sie fast jeder auswendig nachzeichnen kann.

4. Lesbarkeit: Wird auch mit Worten gearbeitet, sollten diese bei jeder Verwendungsart gut lesbar sein. Das Logo muss auch auf einem [Fax](#), als [Stempel](#) oder auf einem [T-Shirt](#) gestickt noch gut erkennbar sein und gut aussehen.

Das hier dargestellte Beispiel benutzt eine Aufgabe aus dem „Fachbrief Mathematik Sek.II - Musteraufgaben für das Zentralabitur“ (Christian Baensch, Senatsverwaltung für Bildung, Jugend und Sport, I D 7, 18.August 2005 – erarbeitet von einer Aufgabengruppe des Berliner LISUM), der einige Musteraufgaben (hier für CAS-Einsatz) für das kommende Zentralabitur in Berlin enthält. Von der Aufgabe wurden hier allerdings nur die Funktionsterme und der folgende Einleitungstext übernommen.

„Eine Firma, die vegetarische Fitness-Lebensmittel herstellt, hat bei einem Designer die Entwicklung eines Firmenlogos bestellt. Es soll wie ein stilisiertes Blatt aussehen. Das Logo soll nicht nur gedruckt, sondern auch zu Werbezwecken auf Küchenhandtücher gestickt werden. Für diese maschinelle Verarbeitung muss das Logo von Funktionsgraphen berandet sein.“

Der Designer formt das Logo mithilfe der Funktionen f und g mit den Gleichungen

$f(x) = \ln(3 + x) - \ln(3 - x)$ und $g(x) = (x - 2)^3 + 3$. Das Logo ist die Fläche, die von den Graphen der Funktionen f und g eingeschlossen wird.“

Anmerkung: In der Regel werden die Designfirmen keine Funktionsgleichungen, sondern andere Hilfsmittel benutzen (in der Schule kommen z.B. auch Graphikprogramme in Frage). Die Verwendung von Relationen ist hier ein fruchtbarer Kompromiss im Interesse der mathematischen Zielsetzung.

Die Bearbeitung

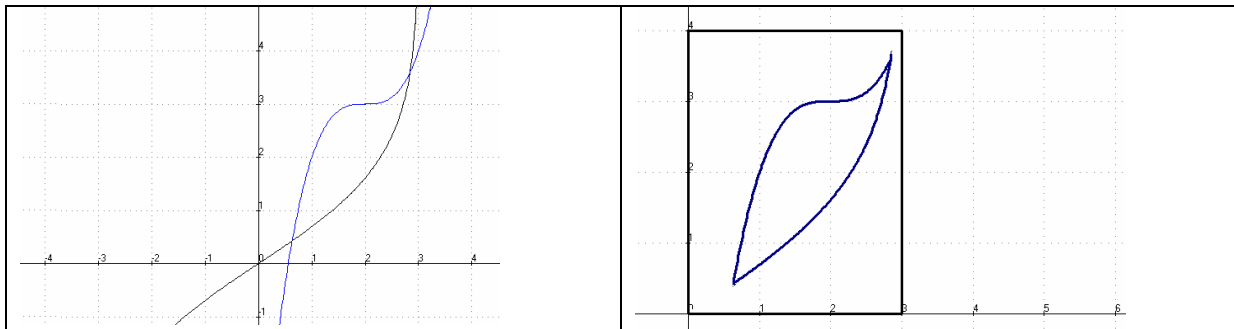


Abb. 7.2a: Die Funktionsgraphen zu f und g

Abb. 7.2b: Abstrahieren, Phase 1

1. Sehen wir uns zunächst die Funktionsgraphen an, siehe Abbildung 7.2a.

2. Das Blatt entsteht durch Abschneiden von Teilen des Funktionsgraphen. Dazu brauchen wir die Schnittpunkte der Graphen. Ein CAS liefert uns die Werte $x_{S1} \approx 0,6295$ und $x_{S2} \approx 2,8389$. Außerdem könnte man das Logo in das Rechteck $(0,0)$, $(3,0)$, $(3,4)$, $(0,4)$, $(0,0)$ legen. Das führt dann zu Abbildung 7.2b.

3. Die Fläche zwischen den Kurven sollte man ausmalen; und das Koordinatensystem wird auch nicht mehr benötigt. Abbildung 7.2c entsteht.

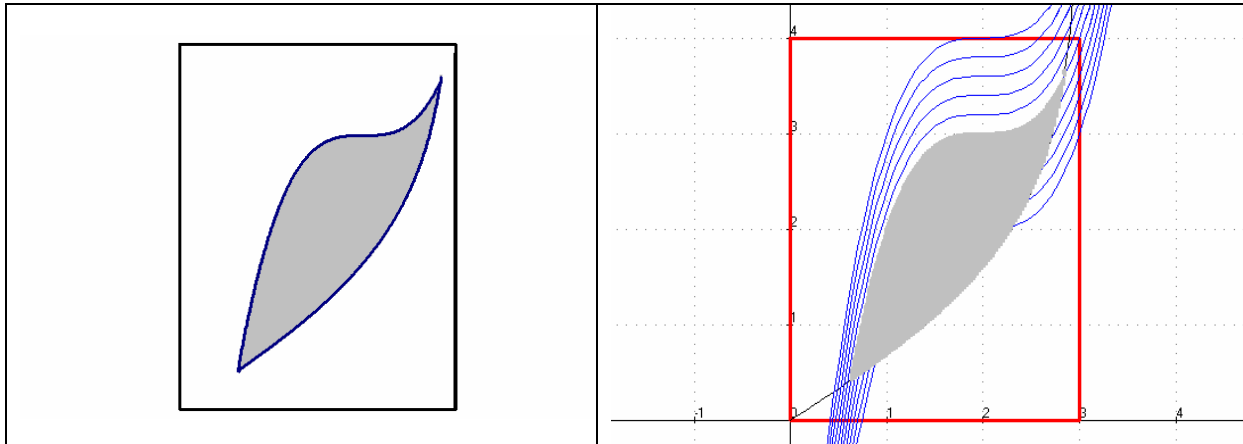


Abb. 7.2c: Abstrahieren, Phase 2

Abb. 7.2d: Weitere Möglichkeiten

4. Die Blattform lässt sich auf verschiedene Weise variieren. In Abbildung 7.2d sind noch die Graphen von $h(x) = (x - 2)^3 + 3+u$ mit u aus $[-1, 1]$, Schrittweite 0.2 eingezeichnet. Damit wird die Logo-Form verkleinert bzw. vergrößert. Der Auftraggeber kann nun sein finales Logo aus mehreren Vorschlägen auswählen. - Als Erweiterung der Aufgabenstellung können auch leicht andere Funktionsklassen benutzt werden.

Abschließend zur Idee des Logos einige Anregungen für mathematische Logos:

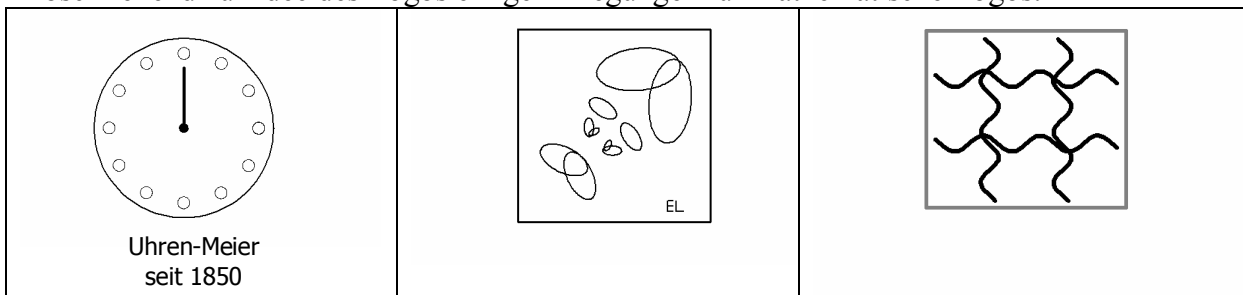


Abb.7.2e: Logo einer Uhrmachers

Abb.7.2.f: Logo eines Blumenladens

Abb.7.2.g: Logo für das Sinus-Projekt

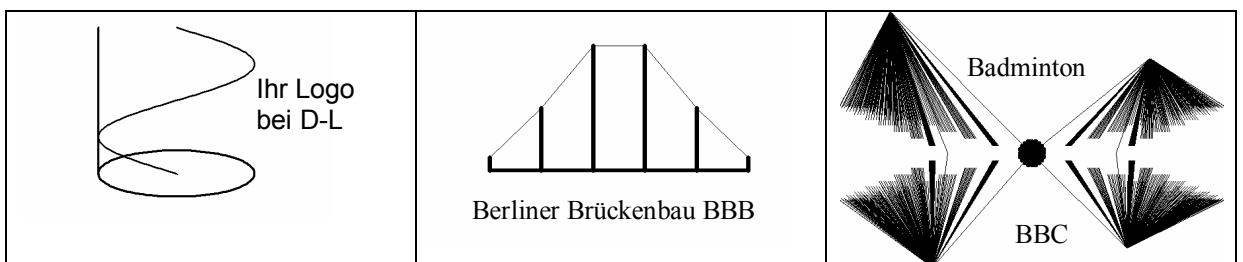


Abb.7.2h: Designer-Logo

Abb.7.2i: Logo für Brückenbau-Firma

Abb.7.2j: Für Badminton-Center

Bei einem Projekt mit der hier geschilderten Projektidee erwirbt der Schüler diverse mathematische, aber durch die praxisbezogene Themenstellung auch außermathematische Kompetenzen.

7.3 Eine mathematische Exkursion im Garten

Computeralgebrasysteme erweitern die Möglichkeiten von Visualisierungen auch dadurch, dass sie verschiedene Koordinatensysteme zulassen und damit den Vorrat an verwendbaren Relationen erheblich vergrößern. Dazu gehören in erster Linie Parameterdarstellungen – siehe u.a. Kapitel 9.4.1. Die einfachsten Beispiele hierfür sind schon in der Sekundarstufe 1 angesiedelt:

Parameterdarstellung von Geraden (Klasse 8), Umkehrfunktionen (Klasse 9), Einheitskreis (Klasse 10) – siehe z.B. in den Schulbüchern „Neue Wege“ (Schroedel-Verlag, 2000, hier für die Klassen 8-10)). In Klasse 10 und in der Sekundarstufe 2 können weitere Relationen dargestellt werden. Im Folgenden wird auch gezeigt, wie man das Entstehen von Parameterkurven aus den $x(t)$ - und $y(t)$ -Termen durch Animationen visualisieren kann und damit ein vertieftes Verständnis bei den Schülern erreichen kann.

Mit den auch bei den Schülern weit verbreiteten Digitalkameras erschließt sich dem Mathematikunterricht auf einfache Weise eine neue Welt an Unterrichtsmöglichkeiten – siehe auch Kapitel 8:

- Suchen – Finden – FotoGraphieren
- Modellieren – Realisieren – Animieren
- Verallgemeinern - Forschen – Entdecken
- Dokumentieren – Zusammenfassen
- Präsentieren -Veröffentlichen

Das Modellierungsprojekt „Exkursionen im Garten“ ist ein Beispiel dafür.



Abb.7.3a: Besondere Blüten – Suchen – Finden - Fotografieren

Ein erstes Blütenmodell lässt sich vielleicht schon im gleichen Garten finden! Es handelt sich um die beliebten Windmühlen, die in vielen Gärten stehen. Diese stellen mit ihrer abstrakten Darstellung bereits eine erste Modellierung der Blüten dar und weisen auf mathematische Modellierungen am Computer hin.

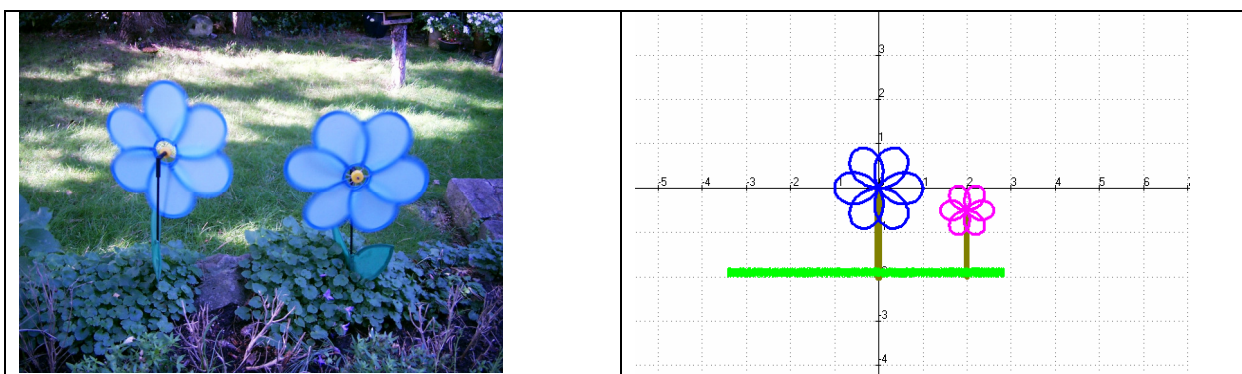


Abb.7.3b: Modell 1, noch im Garten

Abb.7.3c: Modell 2, jetzt als Computeranimation

Zur mathematischen Modellierung erweisen sich Parameterdarstellungen mit Winkelfunktionen besonders geeignet. Die benötigten Terme kann man in experimenteller Arbeit finden, Variationsmöglichkeiten haben die SchülerInnen eventuell schon bei den Lissajous-Figuren kennen gelernt.

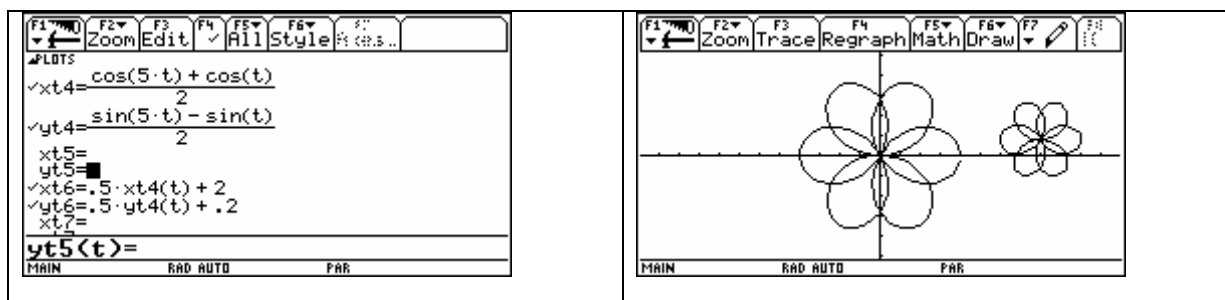


Abb.7.3d Realisierung zweier Blütenblätter (Voyage 200)

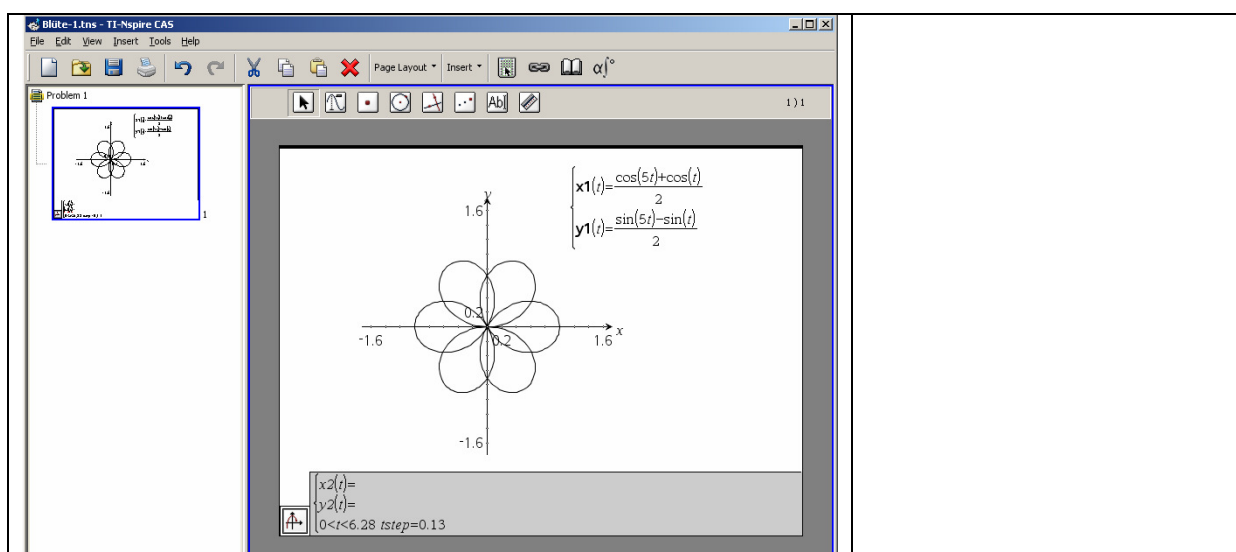


Abb.7.2e Realisierung eines Blütenblattes (mit TI-Nspire)

Die Animation der Blütenblätterentstehung führt zu vertieftem Verständnis der Terme.

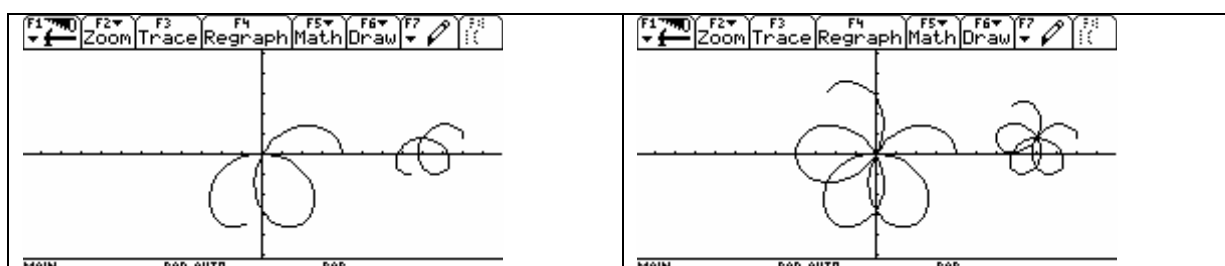


Abb.7.3f,g: Realisierung zweier Blütenblätter (Voyage 200)

Das schrittweise Entstehen der Blütenblätter aus den einzelnen Termen lässt sich mit ANIMATO noch weit besser visualisieren, indem man die Funktionen $x(t)$, $y(t)$ und die Parameterdarstellung zu $[x(t), y(t)]$ auf ein Bild zeichnen lässt. Man betrachte hierzu die Abbildungen 7.3h bis j.

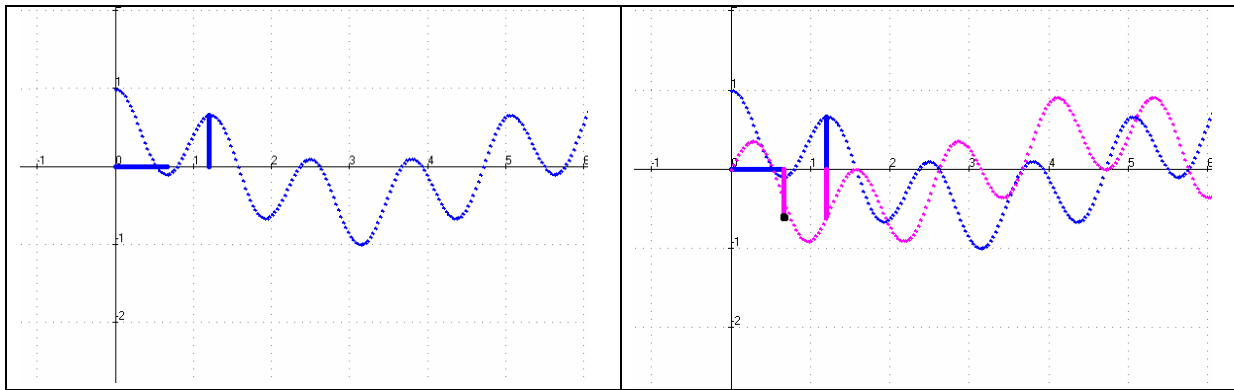


Abb. 7.3h

Die beiden Abbildungen 7.3h sind Zwischenausgaben des Animationsvorgangs. Man sieht in der linken Abbildung den Graphen von $x(t)$. Ein y -Wert (hier an der Stelle $x = 1.2$) wird markiert und als x -Wert $x(1.2)$ des Graphen $(x(t), y(t))$ übernommen. Anschließend (Abb. rechts) wird $y(t)$ gezeichnet. Man sieht $y(1.2)$ und trägt diesen Wert als y -Wert zu dem schon gefundenen x -Wert ein. Damit ist ein Punkt des Graphen $(x(t), y(t))$ gewonnen. In der gleichen Weise kann mit allen Werten verfahren werden, so dass schließlich die Abbildung 7.3i entsteht.

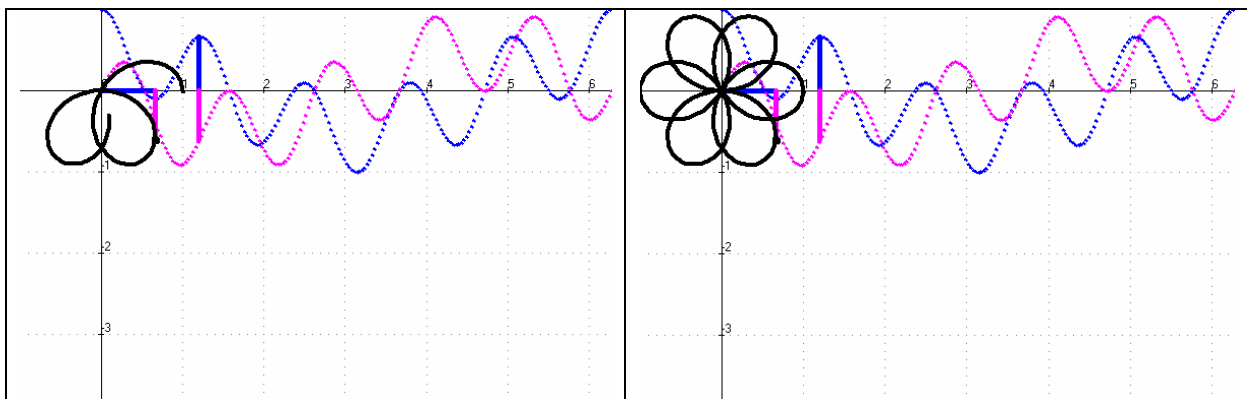


Abb.7.3i

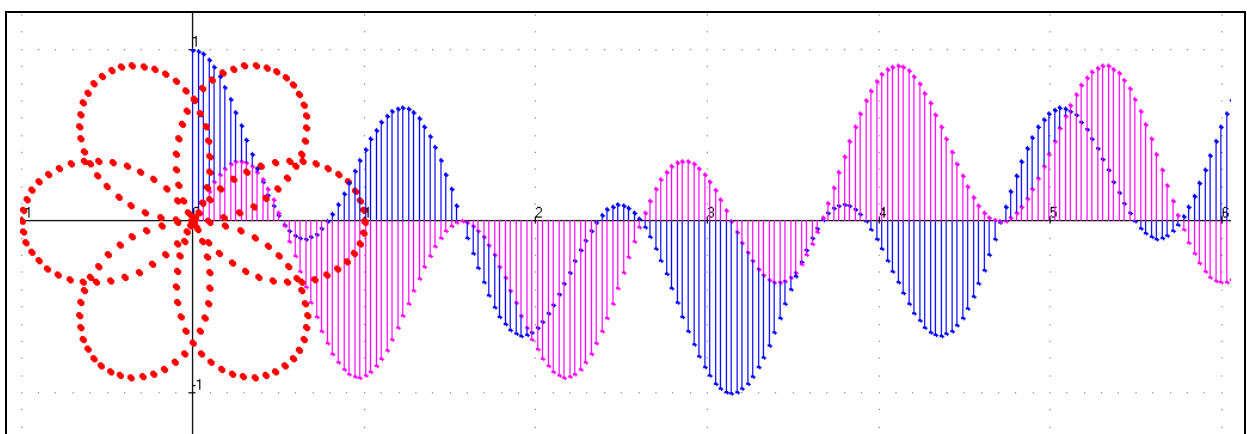


Abb. 7.3j: Die Blütenblätter entstehen als Animation Dazu wurden acht Schritte angesetzt.

Die eingegebenen Terme waren

f1: $(\cos(5a)+\cos(a))/2$ f2: $(\sin(5a)-\sin(a))/2$	Die f1-Werte werden die neuen x-Werte, die f2-Werte werden die neuen y-Werte (statt t wird hier a geschrieben, um im Folgenden auf diesen Parameter zurückgreifen zu können).
f3: 1.2,0,1.2,f1(1.2)	Strecke PQ mit P(1.2,0), Q(1.2, f1(1.2))
f4: 0,0,f1(1.2),0	Strecke
f5: 1.2,0,1.2,f2(1.2)	Strecke
f6: f1(1.2),0,f1(1.2),f2(1.2)	Strecke
f7: f1(1.2),f2(1.2)	Punkt
f8: f1(t),f2(t)	Der gesamte Graph.

Die einzelnen Objekte entstehen als Animation in acht Schritten in für die einzelnen Schritte getrennt festlegbarem Tempo. - In entsprechender Weise lassen sich alle Kurven in Parameterdarstellung animieren. Die wesentlichen Änderungen sind lediglich andere Terme bei f1 und f2.

Anmerkungen zur unterrichtlichen Umsetzung der Animation

Beim Ablauf der Animation – man kann den Vorgang zwischendurch beliebig anhalten – kann die Interpretation durch die Schüler etwa so erfolgen:

a) Der erste Graph wird gezeichnet. Da die y-Werte die neuen x-Werte werden sollen, erkennt man, dass diese Werte zwischen -1 und 1 liegen. Es gilt also für die Parameterkurve: $D = [-1, 1]$. Entsprechend sieht man an Hand der zweiten Kurve, dass $W = [-1, 1]$.

b) Nun kann man sich einzelne x(t)- und y(t)-Werte herausgreifen und die zugehörigen Punkte der neuen Kurve einzeichnen, so wie es die Animation vorführt. Dazu kann man einen Arbeitsbogen mit den beiden Ausgangsgraphen benutzen.

c) Erst dann setzt man die Animation fort und lässt die Blütenkurve vollständig entstehen. Selbstverständlich gibt es bei dem vorhandenen Material mehrere Möglichkeiten der unterrichtlichen Umsetzung.

Experimentieren - auf dem Weg zu einem „Blüten-Baustein“

Die Schüler stellen nun selbst die nahe liegende Frage, wie man die Anzahl der Blütenblätter steuern kann. Offenbar ist es bei der obigen Lösung das Argument $5t$, allgemein $b*t$. Und die Größe der Blätter scheint abhängig zu sein von den Koeffizienten a vor den Klammern. Die Lage der Blüte ist bestimmt durch die Parameter c . - Ein allgemeiner Ansatz ist also offenbar

$$x(t, a_x, b_x, c_x) = a_x (\cos(b_x t) + \cos(t)) + c_x$$

$$f2: a*(\cos(b*t)+\cos(t))+c$$

$$y(t, a_y, b_y, c_y) = a_y (\sin(b_y t) + \sin(t)) + c_y$$

$$f3: a*(\sin(b*t)-\sin(t))+c$$

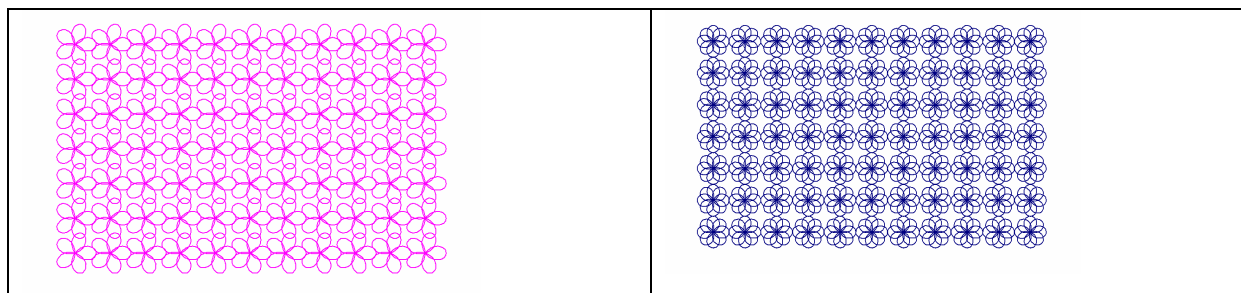


Abb.7.3j: „Blütenmeer 1“ (5 Blütenblätter, $b = 4$)

Abb.7.3k: „Blütenmeer 2“ (8 Blütenblätter, $b = 7$)

$f_2: a*(\cos(b*t)+\cos(t))/2+c$ $f_3: a*(\sin(b*t)-\sin(t))/2+c$ $f_4: f_2(1,5,0), f_3(1,5,0)$ $f_5: f_2(0.6,5,2), f_3(0.6,5,-0.5)$ $f_6: f_2(0.5,7,u), f_3(0.5,7,v)$	$x(t)$ allgemein $y(t)$ allgemein Blüten wie oben als Test Blütenmeer 1 mit u aus -5 bis +5, Schrittweite 1 und v aus -3 bis +3, Schrittweite 1
--	---

Unterrichtsziel

Das beherrschende Unterrichtsziel ist hier die aus der Verallgemeinerung folgende Definition eines CAS-Bausteins (hier mit 3 Parametern a, b, c und der Laufvariablen t) und dessen Verwendung durch unterschiedliche Zuweisungen von Parameterwerten, die dann u. a. zu den oben dargestellten „Blütenmeeren“ führen.

Zusammenfassung

Der Garten erweist sich hier als Fundgrube für andere mathematische Objekte, die dann zum Modellieren einladen. Gut geeignet für einen solchen Ansatz sind auch Kunstobjekte oder Objekte in der Architektur. In jedem Fall ist diese Art der Modellierung gerade für die nicht so leistungsstarken Schüler einfacher, als wenn komplexe Anwendungsprobleme aus anderen Bereichen vorliegen – und ein Bezug zur Lebenswelt ist ja auch hier vorhanden. Vorteilhaft ist, dass der Weg zu einem Modell hier jeweils nur kurz ist, mit in der Regel schnellen Erfolgserlebnissen.

Die Projektergebnisse können auch in anderen Zusammenhängen genutzt werden!

Muster mit Blüten kommen in der Realität u.a. vor auf Tischdecken, Tapeten, Kacheln usw., siehe die folgende Bildergalerie.



7.4 CAS-Projekt – der Trapez-Baustein $\text{Trap}(a,b,h)$

Computeralgebrasysteme bieten neue Möglichkeiten für den Mathematikunterricht und gerade auch für Projektarbeit.

Bei der Bearbeitung mathematischer Probleme mit Hilfe des Computers werden zunehmend (wie in der Informatik schon länger) Bausteine verwendet. Hierfür haben in letzter Zeit die Computeralgebrasysteme (CAS) einen für den Unterricht entscheidenden Beitrag geleistet. Dabei kann es sich um vom System her vorgegebene Bausteine oder vom Benutzer selbst definierte Bausteine handeln.

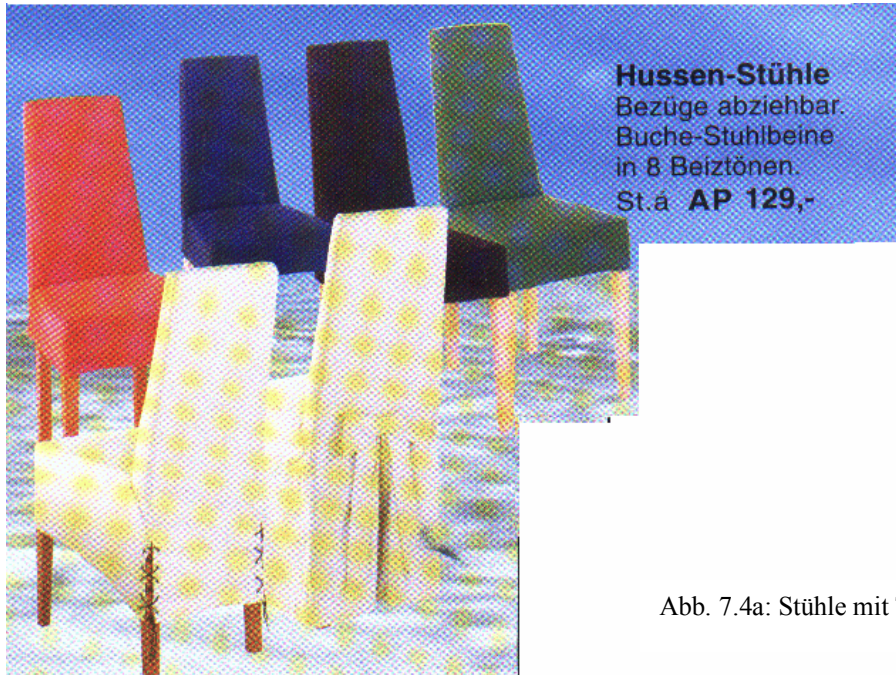


Abb. 7.4a: Stühle mit Trapezflächen

Es soll nun gezeigt werden, wie sich ein Projekt entwickeln kann, wenn man den Baustein $\text{Trap}(a,b,h) := \frac{a+b}{2}h$ zur Verfügung hat.

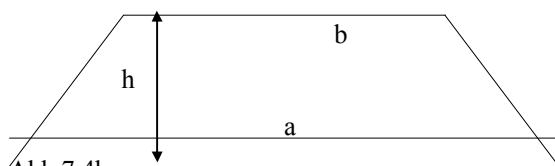


Abb.7.4b

Der Flächeninhalt eines (nicht notwendig gleichschenkligen) Trapezes berechnet sich bekanntlich nach der Formel $A = \frac{a+b}{2}h$.

Da diese Formel für diverse Aufgabenstellungen benötigt wird und auch aus anderen unterrichtsmethodischen Gründen (siehe unten) erscheint es sinnvoll, einen für diesbezügliche Fragestellungen geeigneten Baustein einzuführen. Da der Flächeninhalt von den drei Parametern a, b, h abhängig ist, wird definiert:

$$\text{Trap}(a,b,h) := \frac{a+b}{2}h.$$

Dieser Baustein kann nun aufgerufen werden, beispielsweise mit $\text{Trap}(2,4,3)$. Damit wird die Trapezfläche für $a=2$ LE, $b=4$ LE und $h=3$ LE berechnet; Ergebnis: 9 FE.

Der Projektansatz besteht nun darin, den Baustein durch verschiedene Aufrufe zu analysieren und ggf. passende Veranschaulichungen zu entwickeln.

Der Lehrer hat sich mit den dem Baustein steckenden Möglichkeiten vertraut gemacht hat. Die folgende Abhandlung zeigt einige Möglichkeiten, die dann auch gleichzeitig für die Bearbeitung durch einzelne Schülergruppen geeignet sind. **In dem vorliegenden Fall ergibt sich ein kurzes „Trapezprojekt“, das in ersten den Ansätzen nicht unwesentlich vom Lehrer gesteuert wird, dann jedoch den SchülerInnen viel Freiraum lässt.**

Grobplanung des Projektablaufs

Dauer des Projekts: Bis zu 10 Stunden

Stunde 1: Einführungsstunde	Vorstellung des Bausteins, erste gemeinsame Ansätze für die Bausteinanalyse. Formulierung der Gruppenthemen, Gruppenbildung
Stunden 2, 3: Gruppenarbeit	Erforschung des Bausteins entsprechend den Aufträgen, Veranschaulichungen, erste Dokumentationsarbeiten
Stunde 4: Gruppenarbeit	Dokumentation in Textform, Plakatherstellung
Stunde 5: Gruppenarbeit	Aufgabenkonstruktion
Stunde 6,7: Plenum	Vorstellen der Ergebnisse
Stunde 8: Alle gemeinsam unter Leitung eines Schülers	Zusammenstellung eines Aufgabenheftes, Team aus allen Gruppen
Stunde 9: Plenum	Gemeinsame Entwicklung einer Überblicksdarstellung, siehe Abbildung, der mathematische Gehalt

Am Anfang der zweiten Stunde werden folgende Projektgruppen gebildet - in diesem Fall vom Lehrer so festgelegt:

Projektgruppe 1

In Trapezbaustein soll ein Parameter variabel bleiben, während die beiden anderen mit geeigneten Zahlen zu belegen sind. Analysiere die inhaltliche Bedeutung entsprechender Aufrufe und suche nach Veranschaulichungsmöglichkeiten zur Darstellung der Sachverhalte. Ggf. kann auch der dir bekannte Funktionenplotter benutzt werden.

Projektgruppe 2

Unter den Begriff „Trapez“ fallen als Sonderfälle auch einige andere Figuren. Untersuche, wie sich aus dem Trapezbaustein Flächeninhaltsformeln für solche Figuren ergeben.

Projektgruppe 3

Diese Gruppe soll Aufgaben erarbeiten, die mit Hilfe des Bausteins und dem Befehl SOLVE bearbeitet werden können. Die Aufgaben können aus Schulbüchern entnommen und entsprechend umgestellt werden.

Einige Ansätze für die Projektgruppen 1 bis 3

Hinweis: Für die Veranschaulichungen betrachten wir gleichschenklige Trapeze.

$\text{Trap}(2,4,h)$ liefert uns Trapezflächen in Abhängigkeit von der Höhe h . Zeichne solche Trapeze!

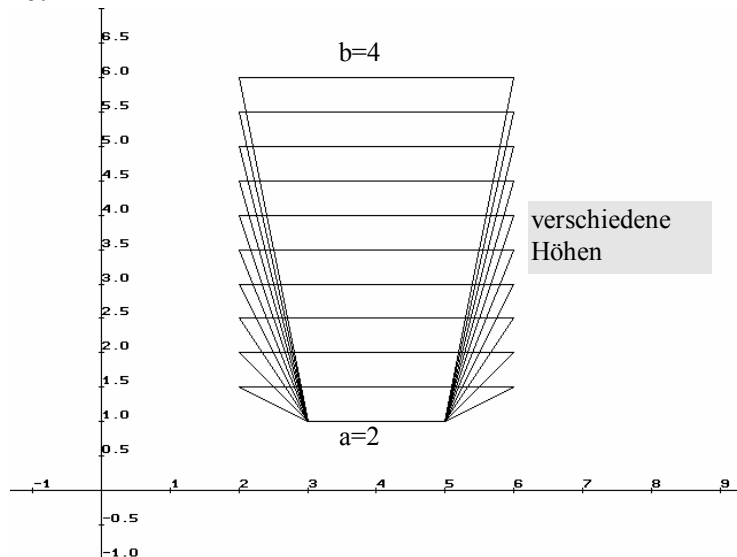


Abb.7.4c: Trapeze mit den Seitenlängen 2 und 4 und beliebiger Höhe

$\text{Trap}(a,4,3)$ liefert uns Trapezflächen in Abhängigkeit von der Grundseite a , Zeichnung der Trapeze!

Die Zeichnung 7.4d stellt weitere Fragen, wie z.B.

- Wie verändert sich a ?
- Was geschieht für $b=0$?
- Wie würde die Zeichnung für feste $a=2$ und $h=3$, aber für variables b aussehen?

$\text{Trap}(2,4,x) \rightarrow y1(x)$ (in der Syntax des TI-92 der Firma Texas Instruments) liefert uns einen Graphen, der uns Trapezflächen in Abhängigkeit der Höhe x zeigt.

$\text{Trap}(x,y,3)$

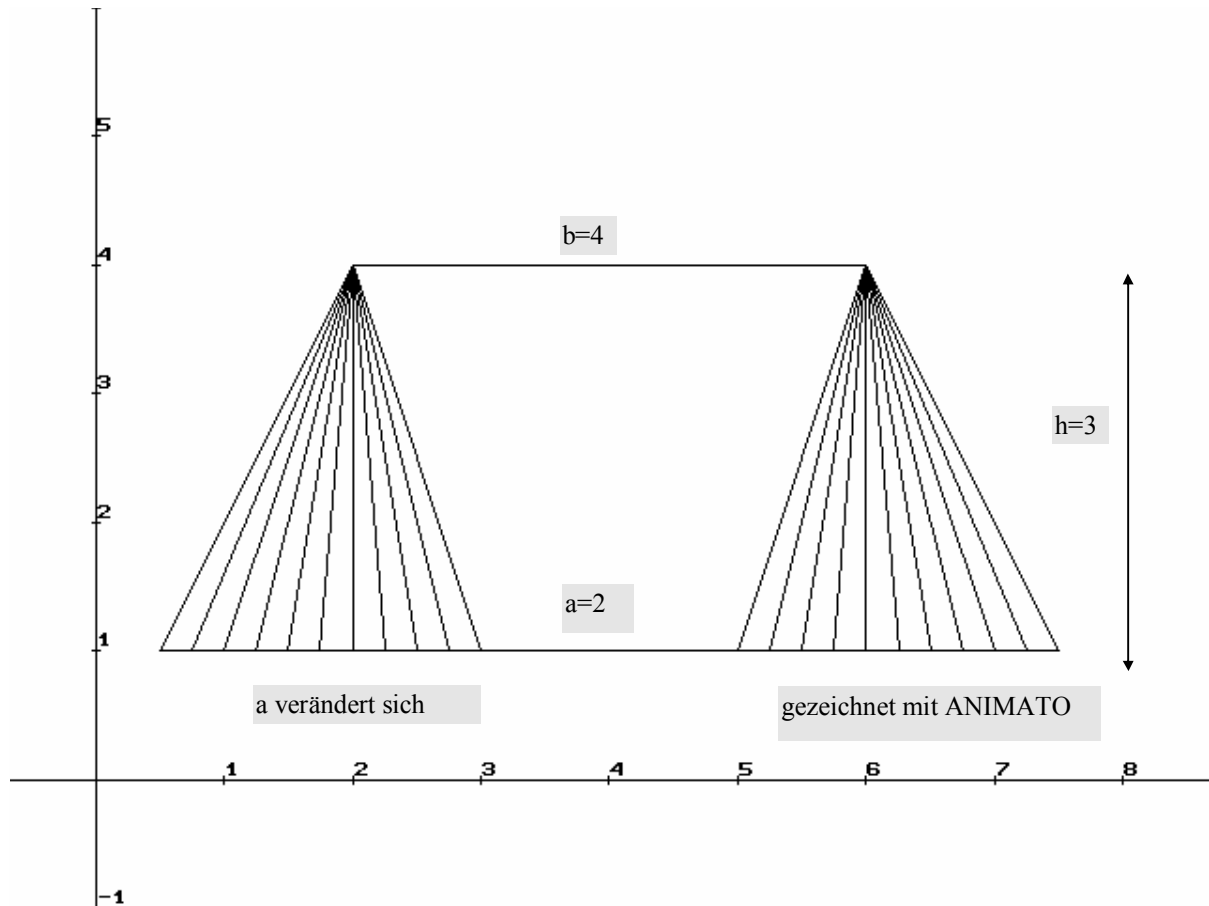
bringt eine 3-dimensionale Darstellung (die Ebene $z = 1.5x + 1.5y$)

$\text{Trap}(a,a,a)$

ergibt die Fläche eines Quadrates mit der Seitenlänge a

$\text{Trap}(g,0,h)$

Flächenformel für ein Dreieck mit der Grundseite g und der Höhe h

Abb.7.4d: Viele Trapeze mit $b=4$, $h=3$

Für den Taschencomputer TI-92 lassen sich die obigen Aufrufe durch die folgenden Eingaben erzeugen:

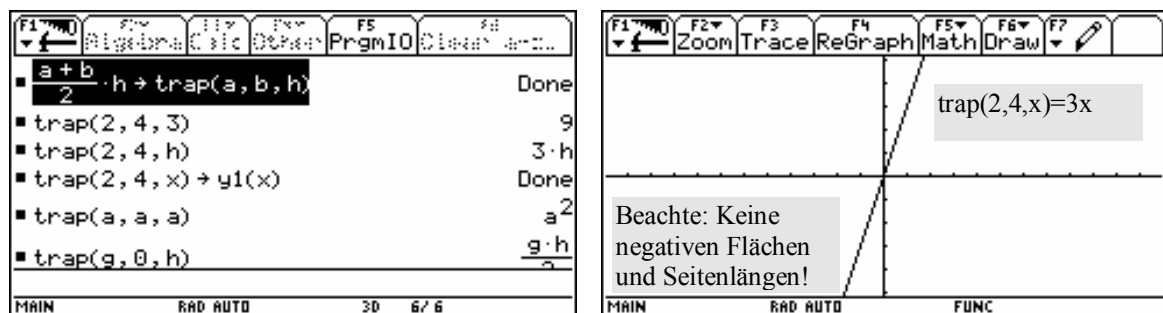


Abb.7.4e: Protokoll der Arbeit mit dem Taschencomputer

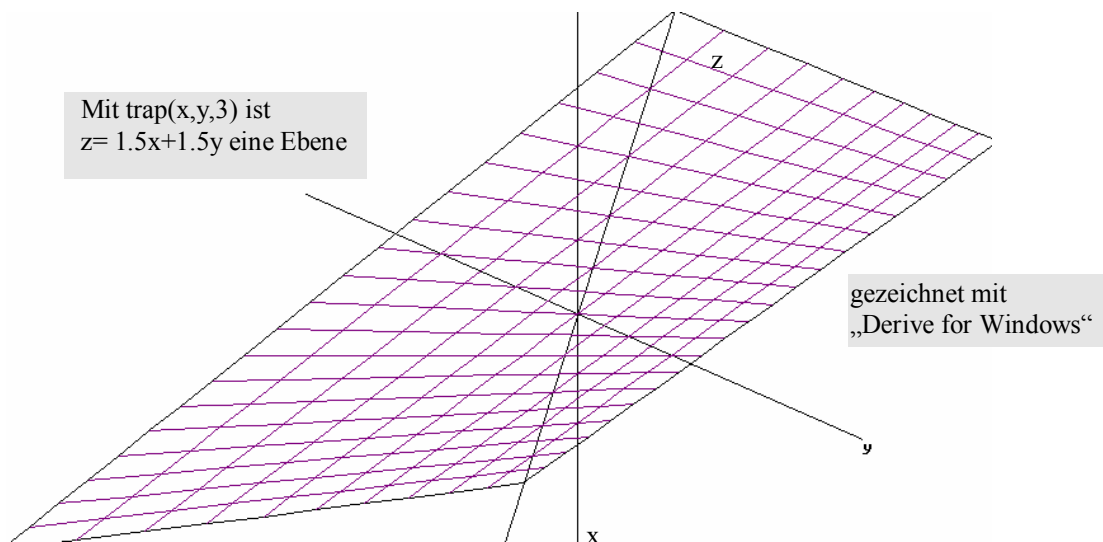


Abb. 7.4f: Bausteinaufruf mit zwei Variablen

Aufgaben mit Anwendung von „Solve“ auf den Baustein „Trap“

Aufgabe 1:

Gegeben ist ein Trapez mit dem Flächeninhalt $A= 18$ FE und den Seitenlängen $a=12$ LE und $b= 1$ LE. Wie groß ist die Höhe des Trapezes?

Lösung:

$\text{Solve}(18=\text{Trap}(12,1,h),h)$ ergibt den Wert $h=36/13$

Aufgabe 2:

Gegeben ist ein Trapez T1 mit $a=4$, $b=9$ und $h=3$. Nenne weitere Trapeze mit der Höhe $h=3$, die den gleichen Flächeninhalt haben.

Lösung:

$\text{Solve}(\text{trap}(4,9,3) = \text{trap}(a,b,3),a)$ führt zur Lösung $- b+13 = a$. Für ganzzahlige Lösungen kann b offenbar die Werte $1,2,3,\dots,12$ annehmen. Entsprechend ergibt sich $a = 12,11,10,\dots,1$.

Aufgabe 3:

Was bedeutet der Aufruf $\text{Solve}(18=\text{Trap}(a,a,h),h)$?

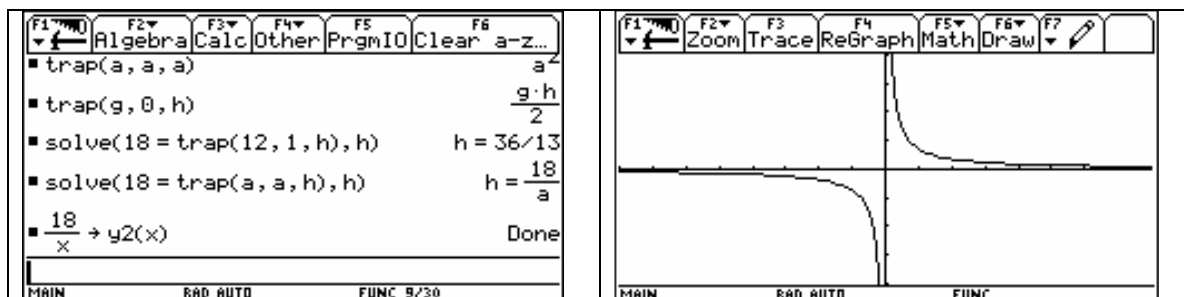


Abb.7.4g: Arbeitsprotokoll zu Aufgabe 3

Der Graph zu $y = \frac{18}{x}$ zeigt die Höhe in Abhängigkeit von den (gleichlangen) parallelen Seiten bei gegebenem Flächeninhalt des Trapezes.

Die obigen Beispiele zeigen, dass der Baustein $\text{Trap}(a,b,h) := \frac{a+b}{2}h$ eine ihm eigene Mathematik-Welt enthält, die wir in einem Projekt erforschen können. Versuchen wir eine Strukturierung der vielen Baustein-Aufrufe. Wir erhalten einen Ausschnitt (über Flächeninhalte) aus der „Mathematik am Trapez“, der uns gleichzeitig Vorschläge für eine Einteilung in Schülergruppen liefert.

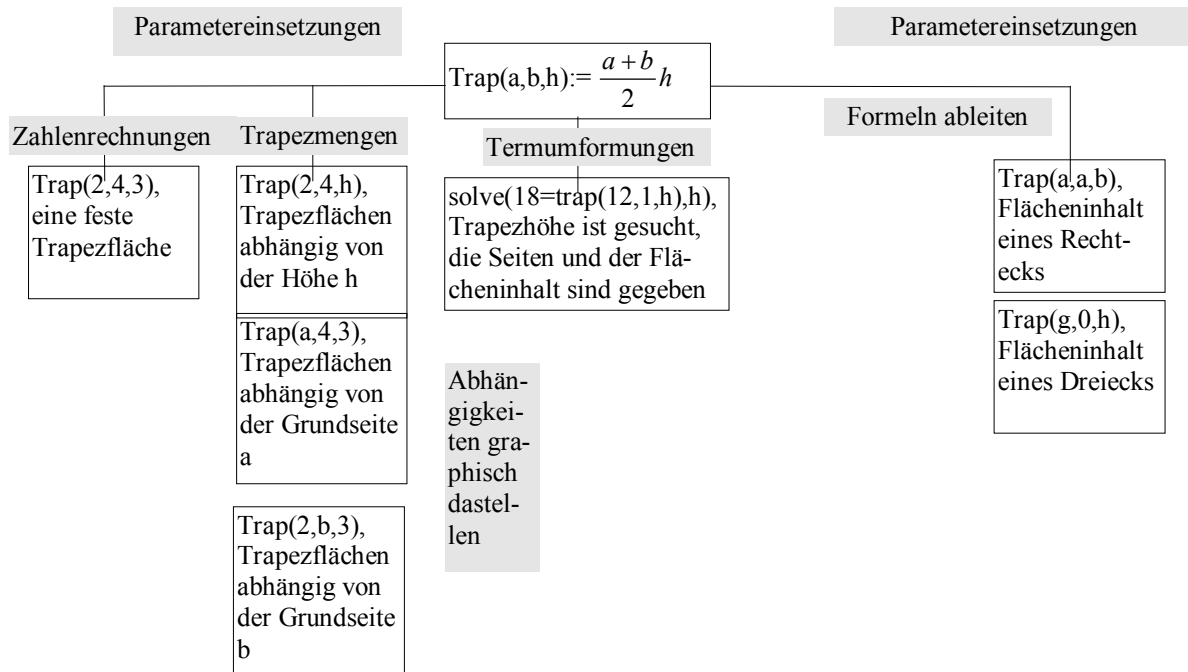


Abb.7.4h: Mathematik am Trapez bei Benutzung des Bausteins $\text{Trap}(a,b,h)$

Von der White-Box zur Black-Box, siehe auch Kapitel 6

Das Beispiel ist auch gut geeignet, um den Schülern die Konstruktion einer Black-Box näher zu bringen: Offenbar ist in derartigen Bausteinen viel von der Mathematik versteckt, für die man im normalen Unterricht entsprechend viel Zeit aufwendet. Diese Welt erschließt sich uns durch Bausteinaufrufe. Bevor wir dazu fähig sind, muss es jedoch erst einmal zur Definition des Bausteins kommen. Das bedeutet für $\text{Trap}(a,b,h)$ z.B. den folgenden Ablauf:

- (1) Eine konkrete Fragestellung, die auf die Herleitung der Flächeninhaltsformel

$$A = \frac{a+b}{2}h \text{ für das Trapez führt.}$$

- (2) Einige Aufgaben zur Benutzung der Formel mit Handrechnung festigen ihren Gebrauch -- noch befinden wir uns in der White-Box der Trapezformel.

- (3) Definition des Bausteins: $\text{Trap}(a,b,h) := \frac{a+b}{2}h$

- (4) Der Baustein ist nun (und auch für später) zur Bearbeitung weiterer Aufgaben freigegeben - der Baustein ist zur Black-Box geworden.

Black-Box: Wir wissen, was man in die Black-Box hineinstecken muss, d.h. wie man sie sinnvoll aufruft, um passende Ergebnisse zu erhalten. Wir brauchen aber keine Details, wie die Ergebnisse ermittelt werden - oder dürfen die Details vergessen.

Für die Unterrichtspraxis ist klar, dass der Einführung einer solchen Black-Box das mathematische Verständnis für ihre Arbeitsweise in der Regel vorangehen muss. Das mathematische Verständnis für eine Black-Box wird in einer „**White-Box**“ zusammengestellt.

7.5 Unterrichtseinheit - Maschinenüberwachung modellieren

Es soll gezeigt werden, dass Markow-Ketten mit mehr als zwei Zuständen interessante Untersuchungsobjekte sind. Gegenüber früheren Unterrichtsvorschlägen und Veröffentlichungen hierzu können nun zusätzlich Computeralgebrasysteme (CAS) eingesetzt werden, was zu neuen unterrichtlichen Möglichkeiten führt.

In dem Beitrag sollen besonders folgende Aspekte berücksichtigt werden:

- **Modellbildungsvorgang**
- **gebietsübergreifende Lösungsansätze**
- **Praxisrelevanz**
- **der Einsatz von Computeralgebrasystemen**

Problem: Maschinenüberwachung

Eine Instandsetzungsabteilung kontrolliert den Maschinenpark von vier Maschinen gleichen Typs zu äquidistanten Zeitpunkten. In einer Periode zwischen zwei aufeinanderfolgenden Zeitpunkten kann die Instandsetzungsabteilung bis zu zwei Maschinen wieder betriebsfähig machen. Die reparierten Maschinen werden zum nächstmöglichen Kontrollzeitpunkt wieder in Betrieb genommen. Der Ausfall einer Maschine erfolgt unabhängig vom Ausfall der anderen und auch unabhängig vom Zeitpunkt der zuletzt vorgenommenen Reparatur. Für jede Maschine sei $p = 0.1$ die Wahrscheinlichkeit dafür, dass sie während einer Periode ausfällt. Zu Beginn seien 3 Maschinen betriebsfähig.

Mit welchen Wahrscheinlichkeiten sind langfristig gesehen 0,1,2,3,4 Maschinen betriebsfähig?

Die folgende Darstellung ist so aufbereitet, dass ein möglicher Modellbildungsvorgang deutlich wird.

Modellbildung

Schritt 1: Aufbau der Übergangsmatrix, Festlegung der Zustände, Veranschaulichung

Schritt 2: Elemente der Übergangsmatrix, Veranschaulichung

Schritt 3: Langfristige Entwicklung des Systems, mehrstufige Übergangswahrscheinlichkeiten

Schritt 4: Der Einsatz eines CAS, der Baustein Übergangsmatrix $\Rightarrow ma(p,q)$

Schritt 5a1: Bildung der Potenzen von $ma(p,q)$

Schritt 5a2: Interpretation der Ergebnisse aus Schritt 5a1

Schritt 5b1: Stationäre Verteilung, Fixvektor, Lösung eines LGS

Schritt 5b2: Interpretation der Ergebnisse aus Schritt 5b1

Schritt 6: Weitere Modellrechnungen und deren Interpretation

Schritt 7: Funktionale Abhängigkeiten

Schritt 8: Simulation der Maschinenüberwachung

Modellbildung, Schritt 1

Festlegung der Zustände, Aufbau der Übergangsmatrix, Veranschaulichung

Für das System lassen sich **Zustände** festlegen, zwischen denen das System hin- und her pendelt. Im vorliegenden Fall sind die Anzahlen betriebsfähiger Maschinen geeignet. Die Daten

für den Wechsel zwischen den einzelnen Zuständen lassen sich in so genannten **Übergangsmatrizen** zusammenfassen.

1) Wir gehen davon aus, dass 5 Zustände vorhanden sind:

Z0 keine Maschine betriebsfähig Z1 eine Maschine betriebsfähig
 Z2 zwei Maschinen betriebsfähig Z3 drei Maschinen betriebsfähig
 Z4 vier Maschinen betriebsfähig.

Damit hat die Übergangsmatrix die Form

von/nach	Z0	Z1	Z2	Z3	Z4
Z0					
Z1					
Z2					
Z3			#		
Z4					

Übergang von Z3 nach Z2

Abb.7.5a: Struktur der Übergangsmatrix

Da zu Anfang 3 Maschinen betriebsfähig sein sollen, kann man die **Anfangsverteilung** als **Wahrscheinlichkeitsvektor** in der Form $(0 \ 0 \ 1 \ 0 \ 0)$ schreiben.

Z0 Z1 Z2 Z3 Z4

In der Regel ist es nützlich, sich die Vorgänge zu veranschaulichen, um so Modellvorstellungen leichter entwickeln zu können. In Anlehnung an die Idee der Baumdiagramme kann das hier z.B. folgendermaßen geschehen:

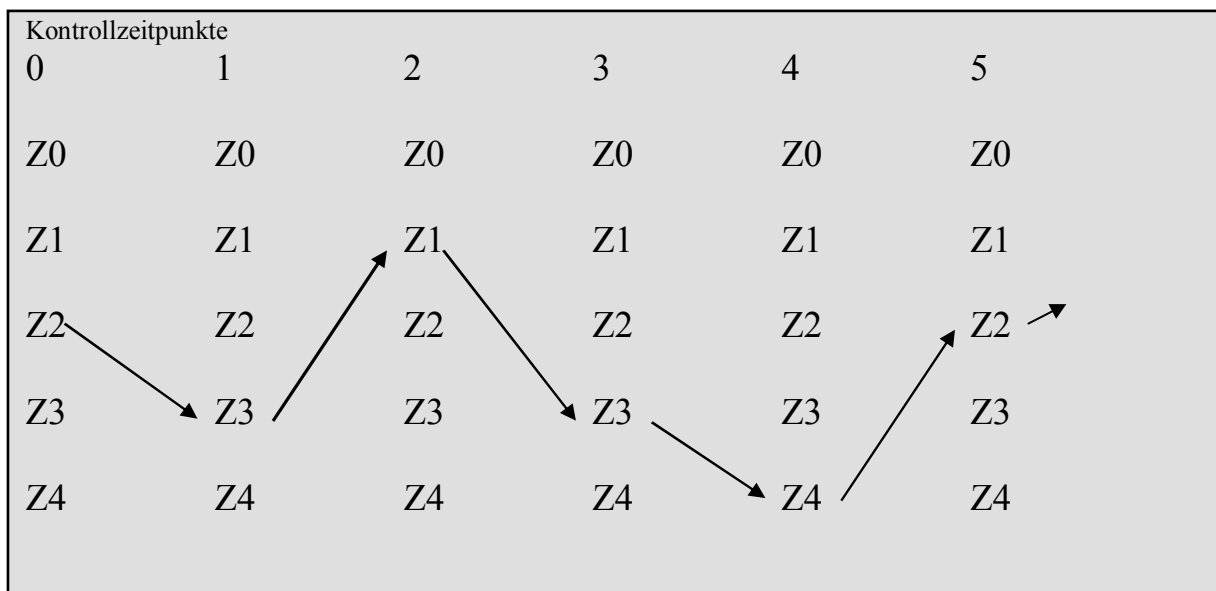


Abb.7.5b : Einer von vielen möglichen Wegen durch das Kontrollsystem, die **Zustandskette** (Z2, Z3, Z1, Z3, Z4, Z2, ...

Modellbildung, Schritt 2

Die Elemente der Übergangsmatrix, Veranschaulichung

Es ist jeweils zu beachten, dass eine gewisse Anzahl von Maschinen ausfallen kann und dass je nach Vorhandensein defekter Maschinen bis zu zwei davon repariert werden können.

a) Die Berechnung wird zunächst am Beispiel des Übergangs Z3 nach Z4 gezeigt.

Wenn drei Maschinen betriebsfähig sind, darf für die nachfolgende Periode keine Maschine ausfallen, um Z4 zu erreichen!. Außerdem macht ja die Instandsetzungsabteilung die vorher defekte (eine) Maschine wieder betriebsfähig (laut Voraussetzung). Also ist die Übergangswahrscheinlichkeit $P(Z3 \text{ nach } Z4) = q^3$.

b) Für $Z3 \text{ nach } Z2$ gilt: $P(Z3 \text{ nach } Z2) = 3 \cdot p^2 \cdot q$, denn es muss Folgendes geschehen sein:

Eine Maschine repariert	zwei ausgefallen	eine nicht ausgefallen.	Wahrscheinlichkeit
z.B. M1	M2,M3	M4	$p \cdot p \cdot q$
	oder M2,M4	M3	$p \cdot p \cdot q$
	oder M3,M4	M2	$p \cdot p \cdot q$

c) Wenn anfangs alle Maschinen defekt sind (Zustand Z0), dann kann keine mehr ausfallen, aber zwei können repariert werden. Also ist $P(Z0 \text{ nach } Z2) = 1$.

Entsprechende Überlegungen sind für alle 25 Übergangswahrscheinlichkeiten anzustellen, wobei sich zahlreiche Werte sehr schnell ergeben. So ergibt sich insgesamt die Übergangsmatrix (mit $q = 1-p$):

$$\begin{matrix} & \begin{matrix} Z0 & Z1 & Z2 & Z3 & Z4 \end{matrix} \\ \begin{matrix} Z2 \\ Z0 \end{matrix} & \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & p & q & 0 \\ 0 & 0 & p^2 & 2pq & q^2 \\ 0 & p^3 & 3p^2q & 3pq^2 & q^3 \\ p^4 & 4p^3q & 6p^2q^2 & 4pq^3 & q^4 \end{pmatrix} = M. \end{matrix}$$

Die Übergangsmatrix weist interessante Regelmäßigkeiten auf! Die Summe der Elemente jeder Zeile muß gleich 1 sein. Anwendung der binomischen Formeln! Zur Veranschaulichung kann man einen **Übergangsgraphen** verwenden:

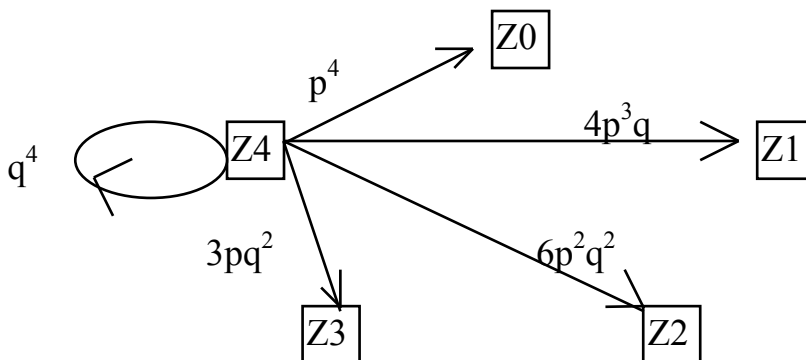


Abb. 7.5c: Übergangsgraph (nur in Teilen)

In den Übergangsgraphen kann man alle Pfade mit ihren Wahrscheinlichkeiten eintragen; in Abb.7.5c wurden aus Gründen der Übersicht nur die Pfade von Z4 aus zu den anderen Zuständen eingezeichnet.

Modellbildung, Schritt 3

Wie entwickelt sich das System langfristig?

Von einem Kontrollzeitpunkt zum nächsten Kontrollzeitpunkt gilt immer wieder die gleiche Übergangsmatrix M – allerdings ist das eine gewagte Modellannahme! Abbildung 7.4d zeigt, dass zahlreiche 2-stufige Übergänge möglich sind, nämlich von

Z0 über (Z0,Z1,Z2,Z3,Z4) zu (Z0,Z1,Z2,Z3,Z4) 25 Übergänge
 Z1 25 Übergänge
 Z2 25 Übergänge
 Z3 25 Übergänge
 Z4 über (Z0,Z1,Z2,Z3,Z4) zu (Z0,Z1,Z2,Z3,Z4) 25 Übergänge
 das sind insgesamt $5^3 = 125$ Übergänge.

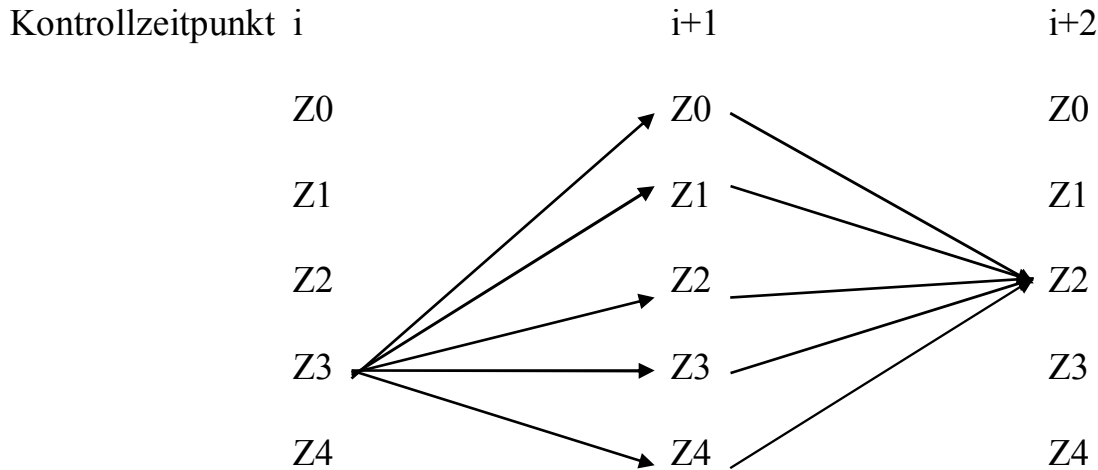


Abb. 7.5d : Wege von Z3 nach Z2 mit einem Zwischen-Kontrollpunkt

In der Abbildung wird der 2-stufige Übergang von Z3 nach Z2 dargestellt. Er kann jeden der 5 Zustände als Zwischenzustand annehmen. Verfolgen wir die einzelnen Wege von Z3 nach Z2, so haben wir folgende Wahrscheinlichkeiten zu bilden:

$$\begin{array}{l}
 P(\text{Z3 nach Z0}) * P(\text{Z0 nach Z2}) = \begin{array}{|c|} \hline 0 \\ \hline \end{array} * \begin{array}{|c|} \hline 1 \\ \hline \end{array} \\
 P(\text{Z3 nach Z1}) * P(\text{Z1 nach Z2}) = \begin{array}{|c|} \hline p^3 \\ \hline \end{array} * \begin{array}{|c|} \hline p \\ \hline \end{array} \\
 P(\text{Z3 nach Z2}) * P(\text{Z2 nach Z2}) = \begin{array}{|c|} \hline 3p^2q \\ \hline \end{array} * \begin{array}{|c|} \hline p^2 \\ \hline \end{array} \\
 P(\text{Z3 nach Z3}) * P(\text{Z3 nach Z2}) = \begin{array}{|c|} \hline 3pq^2 \\ \hline \end{array} * \begin{array}{|c|} \hline 3p^2q \\ \hline \end{array} \\
 P(\text{Z3 nach Z4}) * P(\text{Z4 nach Z2}) = \begin{array}{|c|} \hline q^3 \\ \hline \end{array} * \begin{array}{|c|} \hline 6p^2q^2 \\ \hline \end{array}
 \end{array}$$

Addition aller Ergebnisse: 3.Zeile von M „mal“ 2.Spalte von M (Skalarprodukt)

Durch Addition aller Ergebnisse erhält man die **zweistufige Übergangswahrscheinlichkeit** $P(\text{Z3 nach Z2, 2 Stufen}) = 0 + p^4 + 3 p^4 q + 9 p^3 q^3 + 6 p^2 q^5$. In der Sprache der linearen Algebra: Wir haben das **Skalarprodukt** gebildet aus dem Vektor in der 3.Zeile von M mit dem Vektor in der 2.Spalte von M. Bildet man auf diese Weise alle möglichen 25 Skalarprodukt („Zeile * Spalte“ rechnen), so erhält man die vollständige zweistufige Übergangsmatrix als Produkt der Übergangsmatrix S mit sich selbst:

$$\text{Zweistufige Übergangsmatrix } S(2 \text{ Stufen}) = S * S = S^2.$$

Auf diese Weise kommen **Matrizenpotenzen** ins Spiel, was nichts Neues ist, wenn man von den oben formulierten Unterrichtsvoraussetzungen (Markow-Ketten mit 2 Zuständen sind bekannt) ausgeht.

Der Einsatz eines Tools - Computeralgebrasystem (CAS)

Für die weitere Bearbeitung wird als Hilfsmittel das CAS des Taschencomputers TI-92 benutzt. Für die Maschinenüberwachung ergibt sich die Übergangsmatrix von Abbildung 1. Sie wird hier in den TI-92 eingegeben als ein **Baustein (Modul)** unter dem Namen $ma(p,q)$.

Modellbildung, Schritt 4 - der Baustein ma(p,q)

F1	F2	F3	F4	F5	F6
Algebra	Calc	Other	PrgmIO	Clear a-z...	
ma(p,q)					
0	0	1	0	0	
0	0	p	q	0	
0	0	p ²	2·p·q	q ²	
0	p ³	3·p ² ·q	3·p·q ²	q ³	
p ⁴	4·p ³ ·q	6·p ² ·q ²	4·p·q ³	q ⁴	
MAIN RAD AUTO FUNC 2/30					

Abb. 7.5e: Die Übergangsmatrix S wird als Baustein ma(p,q) im TI-92 (oder Voyage 200) abgelegt.

F1	F2	F3	F4	F5	F6
Algebra	Calc	Other	PrgmIO	Clear a-z...	
[0 p ³ 3·p ² ·q 3·p·q ² q ³] → zeile3					
[0 p ³ 3·p ² ·q 3·p·q ² q ³]					
[1 p p ² 3·p ² ·q 6·p ² ·q ²] → spalte2					
[1 p p ² 3·p ² ·q 6·p ² ·q ²]					
zeile3·spalte2 ^T					
[p ⁴ ·(3·q+1)+9·p ³ ·q ³ +6·p ² ·q ⁵]					
MAIN RAD AUTO FUNC 8/30					

Abb.7.5f: Kontrolle der obigen Handrechnung, Bildung des Skalarprodukts Zeile3*spalte2(transponiert)

F1	F2	F3	F4	F5	F6
Algebra	Calc	Other	PrgmIO	Clear a-z...	
ma(.1,.9)					
0	0	1	0	0	
0	0	.1	.9	0	
0	0	.01	.18	.81	
0	.001	.027	.243	.729	
.0001	.0036	.0486	.2916	.6561	
MAIN RAD AUTO FUNC 3/30					

Abb.7.5g: Ein Bausteinaufruf, die Übergangsmatrix für p = 0.1 und q = 0.9

Modellbildung, Schritt 5 - Bildung der Potenzen der Übergangsmatrix

F1	F2	F3	F4	F5	F6
Algebra	Calc	Other	PrgmIO	Clear a-z...	
[.0001 .0036 .0486 .2916 .6561]					
(ma(.1,.9)) ²					
0.	0.	.01	.18	.8	
0.	.0009	.0253	.2367	.7	
.000081	.003096	.044326	.281736	.6	
.000073	.002867	.04236	.277385	.6	
.000066	.002654	.040706	.274166	.6	
MAIN RAD AUTO FUNC 4/30					

Abb. 7.5h: Zweistufige Übergangsmatrix

F1	F2	F3	F4	F5	F6
Algebra	Calc	Other	PrgmIO	Clear a-z...	
[.0001 .0036 .0486 .2916 .6561]					
(ma(.1,.9)) ²					
0.	.01	.18	.81		
.0009	.0253	.2367	.7371		
◀81	.003096	.044326	.281736	.670761	
173	.002867	.04236	.277385	.677314	
166	.002654	.040706	.274166	.68241	
MAIN RAD AUTO FUNC 4/30					

Abb.7.5i: Zweistufige Übergangsmatrix mit Spalte 5

Die Matrizen S³, S⁴, ... S⁹ werden hier nicht abgedruckt. Ihre Elemente zeigen zunehmende Tendenzen, die hier für S¹⁰ formuliert werden:

Abb.7.5j:
Zehnstufige Übergangsmatrix S^{10}

Abb.7.5k:
Zehnstufige Übergangsmatrix S^{10} mit Spalte 5

Modellbildung, Schritt 5a - Interpretation von Ergebnissen

Bei der zehnstufigen Übergangsmatrix - das Wartungssystem läuft also jetzt 10 Kontrollpunkte lang - fällt unter Beachtung der hier ausgegebenen 6 Nachkommastellen Einiges auf!

- Alle Elemente einer Spalte sind gleich.
- Die Zeilen der Matrix stimmen überein.
- Alle Elemente liegen im Intervall $[0,1]$.
- Die Summe der Elemente jeder Zeile ist stets gleich 1.

Die Eigenschaften c) und d) sind die bekannten Eigenschaften von stochastischen Matrizen. Es gilt der leicht nachrechenbare Satz:

Das Produkt zweier stochastischer Matrizen (also auch das Produkt einer stochastischen Matrix mit sich selbst) ist wieder eine stochastische Matrix.

e) Bei den folgenden Potenzen ändern sich die Werte (bei 6 Nachkommastellen!) nicht mehr. Es gilt anscheinend $S^{11} \approx S^{10} * S$, allgemeiner $S^{n+1} \approx S^n * S$.

Wir nehmen eine Zeile von S^{10} und rechnen mit dem TI-92:

$[0.000068, 0.002726, 0.041266, 0.275256, 0.680684] \rightarrow g$, dann $g * ma(0.1,0.9)$. Wir erhalten tatsächlich wieder den Vektor g .

So kann man vermuten, dass sich das System einer festen Matrix G immer mehr nähert.

Entsprechend den Überlegungen bei zweistufigen Matrizen könnten wir dann schreiben

$$\lim_{n \rightarrow \infty} S^n = G. \text{ Das heißt auch:}$$

Anscheinend gibt es eine Grenzmatrix G , für die gilt $G*S=G$.

Bezeichnen wir die (untereinander gleichen) Zeilenvektoren von G mit g , so gilt damit auch:

Es gibt einen Zeilenvektor g (Grenzverteilung) mit der Eigenschaft $g*S = g$.

Die Anfangsverteilung

Übrigens haben wir bei den Überlegungen bislang an keiner Stelle den Anfangsvektor $(0 \ 0 \ 1 \ 0 \ 0)$ berücksichtigt!

Bilden wir $(0 \ 0 \ 1 \ 0 \ 0) * G$ so ergibt sich die 3.Zeile von G . Nimmt man als Anfangsvektor z.B. $(0 \ 0 \ 0 \ 1 \ 0)$, so liefert $(0 \ 0 \ 0 \ 1 \ 0) * G$ die 4.Zeile von G . Da aber alle Zeilen von G gleich sind, kann festgehalten werden.

Das ganze System ist offenbar unabhängig vom Anfangsvektor.

Modellbildung, Schritt 5b**Ein zweiter Lösungsweg: Stationäre Verteilung – Fixvektor – Lösung eines LGS**

Diese Überlegungen eröffnen nun eine weitere Möglichkeit für die Untersuchung des langfristigen Systemverhaltens. Der Vektor g spielt offenbar die Rolle eines **Fixvektors**. Wenn ein Vektor f mit der Eigenschaft $f * S = f$ tatsächlich existiert, dann kann man ihn aus einem linearen Gleichungssystem errechnen:

$$f * S = f$$

$$[a,b,c,d,e] * \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & p & q & 0 \\ 0 & 0 & p^2 & 2pq & q^2 \\ 0 & p^3 & 3p^2q & 3pq^2 & q^3 \\ p^4 & 4p^3q & 6p^2q^2 & 4pq^3 & q^4 \end{pmatrix} = [a,b,c,d,e]$$

mit der Bedingung $a + b + c + d + e = 1$.

Hinweis: Im Unterrichtsablauf wird meistens diese Zusatzbedingung vergessen. Dann ist das LGS zunächst nicht eindeutig lösbar und man kommt im Nachhinein auf diese Bedingung. - Im Unterricht wird man das LGS zuerst auch mit den Zahlenwerten $p = 0.1$, $q = 0.9$ bearbeiten.

Wir können nun unter Beachtung der Matrixtypen z.B. folgendermaßen rechnen:

$$f_{(1,5)} * S_{(5,5)} = f_{(1,5)} \quad \text{mit } f = [a,b,c,d,e] \quad \text{und} \quad a + b + c + d + e = 1$$

$$f_{(1,5)} * (S_{(5,5)} - E_{(5,5)}) = O_{(1,5)},$$

wobei $E_{(5,5)}$ eine $(5,5)$ -Einheitsmatrix und $O_{(1,5)}$ eine $(1,5)$ -Nullmatrix ist.

Nehmen wir nun noch die zusätzliche Gleichung $a + b + c + d + e = 1$ in die Matrixgleichung auf, so erhalten wir ausführlich geschrieben:

(#)

$$[a,b,c,d,e] * \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & p & q & 0 & 1 \\ 0 & 0 & p^2 - 1 & 2pq & q^2 & 1 \\ 0 & p^3 & 3p^2q & 3pq^2 - 1 & q^3 & 1 \\ p^4 & 4p^3q & 6p^2q^2 & 4pq^3 & q^4 - 1 & 1 \end{pmatrix} = [a,b,c,d,e,1]$$

Für die Berechnung von a,b,c,d,e mit den Wahrscheinlichkeiten $p = 0.1$ und $q = 0.9$ hilft uns der TI-92:

TI-92 calculator screen showing the command `identit4(5) → e55`. The screen displays a 5x5 identity matrix:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

The status bar at the bottom shows: MAIN RAD AUTO FUNC 9/11

Abb.7.5l:

Wir definieren mit `identity(5)` eine Einheitsmatrix mit 5 Zeilen und 5 Spalten und nennen sie e55.

TI-92 calculator screen showing the command `newMat(5, 1) → n51`. The screen displays a 5x1 column of zeros:

$$\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Below this, the command `Fill 1, n51` is shown, and the screen displays a 5x1 column of ones:

$$\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

The status bar at the bottom shows: MAIN RAD AUTO FUNC 7/11

Abb.7.5m

Der Befehl `newMat(5,1)` stellt eine Nullmatrix aus 5 Zeilen und einer Spalte bereit, die wir mit n51 abkürzen. Der Sinn der Aktion wird unten deutlich. Mit dem `Fill`-Befehl erhält diese Matrix statt der 0-en lauter 1-en.

TI-92 calculator screen showing the command `ma(.1, .9) → s`. The screen displays a 5x5 transition matrix S:

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & .1 & .9 & 0 \\ 0 & 0 & .01 & .18 & .81 \\ 0 & .001 & .027 & .243 & .729 \\ .0001 & .0036 & .0486 & .2916 & .6561 \end{bmatrix}$$

Below this, the command `s - e55 → t` is shown. The screen displays the resulting matrix T:

$$\begin{bmatrix} -1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & .1 & .9 & 0 \\ 0 & 0 & -.99 & .18 & .81 \\ 0 & .001 & .027 & -.757 & .729 \\ .0001 & .0036 & .0486 & .2916 & -.3439 \end{bmatrix}$$

The status bar at the bottom shows: MAIN RAD AUTO FUNC 4/11

Abb.7.5n

Nun wird die schon früher definierte Übergangsmatrix mit den Werten $p = 0.1$ und $q = 0.9$ bereitgestellt und unter dem Namen S abgespeichert. Anschließend wird von S die Einheitsmatrix subtrahiert. Die neue Matrix heißt T.

TI-92 calculator screen showing the command `s - e55 → t`. The screen displays the resulting matrix T:

$$\begin{bmatrix} -1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & .1 & .9 & 0 \\ 0 & 0 & -.99 & .18 & .81 \\ 0 & .001 & .027 & -.757 & .729 \\ .0001 & .0036 & .0486 & .2916 & -.3439 \end{bmatrix}$$

Below this, the command `augment(t, n51) → u` is shown. The screen displays the resulting augmented matrix u:

$$\begin{bmatrix} -1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & .1 & .9 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -.99 & .18 & .81 & 1 \\ 0 & .001 & .027 & -.757 & .729 & 1 \\ .0001 & .0036 & .0486 & .2916 & -.3439 & 1 \end{bmatrix}$$

The status bar at the bottom shows: MAIN RAD AUTO FUNC 4/11

Abb.7.5o

Ausgabe von T.

Mit `augment(t, n51)` wird an die Matrix T der oben definierte Spaltenvektor n51 mit seinen fünf Einsen angefügt.

Calculator screen showing the matrix U and the command `augment(UT, [0 0 0 0 0 1]T) → lgs`. The matrix U is:

-1	0	1	0	0	1
0	-1	.1	.9	0	1
0	0	-.99	.18	.81	1
0	.001	.027	-.757	.729	1
.0001	.0036	.0486	.2916	-.3439	1

The command `augment(UT, [0 0 0 0 0 1]T) → lgs` is entered.

Abb.7.5p

Die neue Matrix heißt U . Zur Herstellung der üblichen Form der erweiterten Koeffizientenmatrix des linearen Gleichungssystems wird nun noch U transponiert und an U die rechte Seite des LGS angefügt.

Calculator screen showing the augmented matrix `lgs`:

-1	0	0	0	.0001	0
0	-1	0	.001	.0036	0
1	.1	-.99	.027	.0486	0
0	.9	.18	-.757	.2916	0
0	0	.81	.729	-.3439	0
1	1	1	1	1	1

Abb.7.5q

Die erweiterte Koeffizientenmatrix ist fertig, sie erhält hier den Namen `lgs` und kann nun mit dem TI-92-Baustein `rref(matrix)` bearbeitet werden.

Calculator screen showing the result of `rref(lgs)`:

1	1	1	1	1	1
1.	0.	0.	0.	0.	.000068
0.	1.	0.	0.	0.	.002726
0.	0.	1.	0.	0.	.041266
0.	0.	0.	1.	0.	.275256
0.	0.	0.	0.	1	.680684
0.	0.	0.	0.	0.	0

Abb.7.5r

`rref(lgs)` löst das Gleichungssystem mit Hilfe des Gauß-Verfahrens. Die Lösung kann abgelesen werden. Uns siehe da: Es ist der lange erwartete Fixvektor.

Interpretation der Ergebnisse aus Schritt 5b

Die mit `rref(lgs)` ermittelte Lösung ergibt sich aus der errechneten Matrix, wenn man diese wieder ausführlich als Gleichungssystem schreibt. z.B. lautet die erste Zeile übersetzt:

$$1a + 0b + 0c + 0d + 0e = 0.000060, \text{ also } a = 0.000060.$$

Die letzte Zeile ist eine allgemeingültige Aussage für a, b, c, d, e , aber alle Gleichungen müssen ja gleichzeitig erfüllt sein, so dass sich insgesamt eine eindeutige Lösung ergibt.

Modellbildung Schritt 6: Weitere Modellrechnungen und deren Interpretationen

Ein CAS bietet nun auch die Möglichkeit, das Gleichungssystem allgemein zu bearbeiten. Allgemein formuliert lautet das der Abbildung 14 entsprechende lineare Gleichungssystem:

The left screenshot shows a linear system of equations in a CAS interface. The equations are:

$$\begin{aligned} -1 \cdot 0 + 0 \cdot 0 + 0 \cdot 0 + 0 \cdot 0 + 0 \cdot 0 &= 0 \\ 0 \cdot -1 + 0 \cdot 0 + 0 \cdot 0 + 0 \cdot 0 + 0 \cdot 0 &= p^3 \\ 1 \cdot p + 0 \cdot 0 + 0 \cdot 0 + 0 \cdot 0 + 0 \cdot 0 &= p^2 - 1 \\ 0 \cdot -p + 1 \cdot -2 \cdot p \cdot (p-1) + 0 \cdot 0 + 0 \cdot 0 &= -3 \cdot p^2 \cdot (p-1) \\ 0 \cdot 0 + 0 \cdot 0 + (p-1)^2 + 0 \cdot 0 + 0 \cdot 0 &= 3 \cdot p^3 - 6 \cdot p^2 + 3 \cdot p \end{aligned}$$

The right screenshot shows the same system with the variable p^4 highlighted in the first equation:

$$\begin{aligned} p^4 + 0 \cdot 0 + 0 \cdot 0 + 0 \cdot 0 + 0 \cdot 0 &= 0 \\ 0 \cdot -1 + 0 \cdot 0 + 0 \cdot 0 + 0 \cdot 0 + 0 \cdot 0 &= p^3 \\ 1 \cdot p + 0 \cdot 0 + 0 \cdot 0 + 0 \cdot 0 + 0 \cdot 0 &= p^2 - 1 \\ 0 \cdot -p + 1 \cdot -2 \cdot p \cdot (p-1) + 0 \cdot 0 + 0 \cdot 0 &= -4 \cdot p^3 \cdot (p-1) \\ 0 \cdot 0 + 0 \cdot 0 + (p-1)^2 + 0 \cdot 0 + 0 \cdot 0 &= 6 \cdot p^2 \cdot (p-1)^2 \\ 0 \cdot 0 + 0 \cdot 0 + 0 \cdot 0 + 0 \cdot 0 + 0 \cdot 0 &= -6 \cdot p^2 + 3 \cdot p - 1 \\ 0 \cdot 0 + 0 \cdot 0 + 0 \cdot 0 + 0 \cdot 0 + 0 \cdot 0 &= -4 \cdot p \cdot (p-1)^3 \\ 0 \cdot 0 + 0 \cdot 0 + 0 \cdot 0 + 0 \cdot 0 + 0 \cdot 0 &= p^4 - 4 \cdot p^3 + 6 \cdot p^2 - 4 \cdot p \end{aligned}$$

Abb.7.5s: Das allgemeine LGS, in Zeile 6 stehen noch überall 1-en. Das LGS wird als Baustein mit dem Namen „lgs(p)“ gespeichert.

Nun können durch unterschiedliche Wahl von p (Ausfallwahrscheinlichkeit jeder Maschine) **diverse Modellrechnungen** durchgeführt werden, wie oben bereits für $p = 0.1$ geschehen. Hier zeigt sich erneut einer der großen Vorteile von CAS. So ergibt sich z.B. für $p = 0.05$:

The screenshot shows the result of the command `rref(lgs(.05))`:

$$\begin{bmatrix} 1. & 0. & 0. & 0. & 0. & .000005 \\ 0. & 1. & 0. & 0. & 0. & .000411 \\ 0. & 0. & 1. & 0. & 0. & .012364 \\ 0. & 0. & 0. & 1. & 0. & .164896 \\ 0. & 0. & 0. & 0. & 1. & .822324 \\ 0. & 0. & 0. & 0. & 0. & 0 \end{bmatrix}$$

Abb.7.5t: Werte für $p=0.05$

The screenshot shows the result of the command `rref(lgs)`:

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1. & 0. & 0. & 0. & 0. & .000068 \\ 0. & 1. & 0. & 0. & 0. & .002726 \\ 0. & 0. & 1. & 0. & 0. & .041266 \\ 0. & 0. & 0. & 1. & 0. & .275256 \\ 0. & 0. & 0. & 0. & 1. & .680684 \\ 0. & 0. & 0. & 0. & 0. & 0 \end{bmatrix}$$

Abb.7.5u: Werte für $p=0.1$

Interpretation: Wenn es also gelingt, die Ausfallwahrscheinlichkeit um die Hälfte zu senken, so erhöht sich z.B. die Wahrscheinlichkeit für das Funktionieren aller vier Maschinen von 0.68 auf 0.82.

Damit ist die langfristige Systementwicklung mit sich gegenseitig bestätigenden Ergebnissen auf zwei sehr unterschiedliche Arten untersucht worden:

- Über die Folge der Matrizenpotenzen der Übergangsmatrix S
- und über ein lineares Gleichungssystem mit 5 Variablen und 6 Gleichungen.

Zusammenfassung

Die Modellierung des Maschinenüberwachungssystems zeigt sehr schön, wie dabei mathematische Überlegungen, Visualisierungen, Handrechnung und CAS-Rechnung ineinandergreifen und sich gegenseitig stützen.

8. Mathematik mit und auf Bildern

8.1 Grundlagen

Bei den Bildern kann es sich handeln um

- Digitalfotos,
- Buchabbildungen, Bilder in Zeitungen, , Kunstbilder usw., die ggf. eingescannt werden,
- selbst Erstelltes und Vieles mehr.

Die Inhalte können sein

- rein mathematischer Art,
- mathematische Inhalte auf diversen Hintergründen (auch mit fachübergreifenden Aspekten, z.B. mit Kunst, Architektur)

Warum ist die Idee „Mathematik auf Bildern“ für den Unterricht so attraktiv?

Die „Arbeitsfläche Bild“ ist

- leicht erstellbar,
- für die jeweilige Unterrichtssituation (mathematischer Inhalt) frei auswählbar,
- oft ästhetisch und anregend,
- kann vom Schüler selbst stammen – eigene Vorlagen sind bekanntlich motivierend,
- variabel im Unterricht einsetzbar und unterstützt offene Unterrichtsformen
- auf unaufdringliche Weise hilfreich bei der Entwicklung der allgemeinen und fachlichen Kompetenzen

Einige Beispiele (weitere finden sich im Buch verteilt) zeigen die Vielfalt der Möglichkeiten.



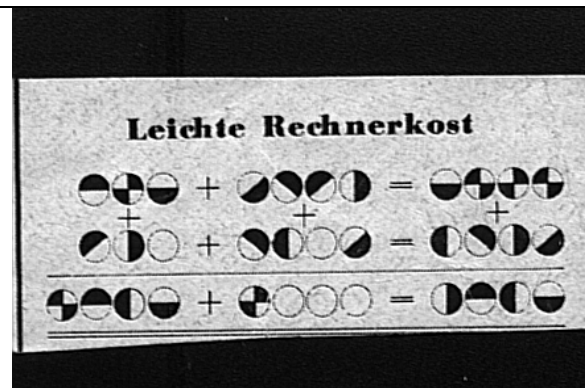
Rechnen auf dem Abakus



Mathematische Formen auf einem Halstuch



Kunst, Formen und Rauminhalte



Rechnen, knobeln, selbst entwerfen

Das obige Abakusbild kann beispielsweise zu einer intensiven Beschäftigung mit dem Abakus führen – den Rechenmöglichkeiten, der Verwendung im Alltag in anderen Kulturen, ähnlichen Rechenmaschinen usw.. Bei den oben gezeigten anderen Bildern sind einige mathematische Inhalte durch die Bildunterschriften angedeutet.

Die Möglichkeiten der Arbeit mit Bildern sind vielfältig. Einen Überblick bietet Abbildung 8.1a.

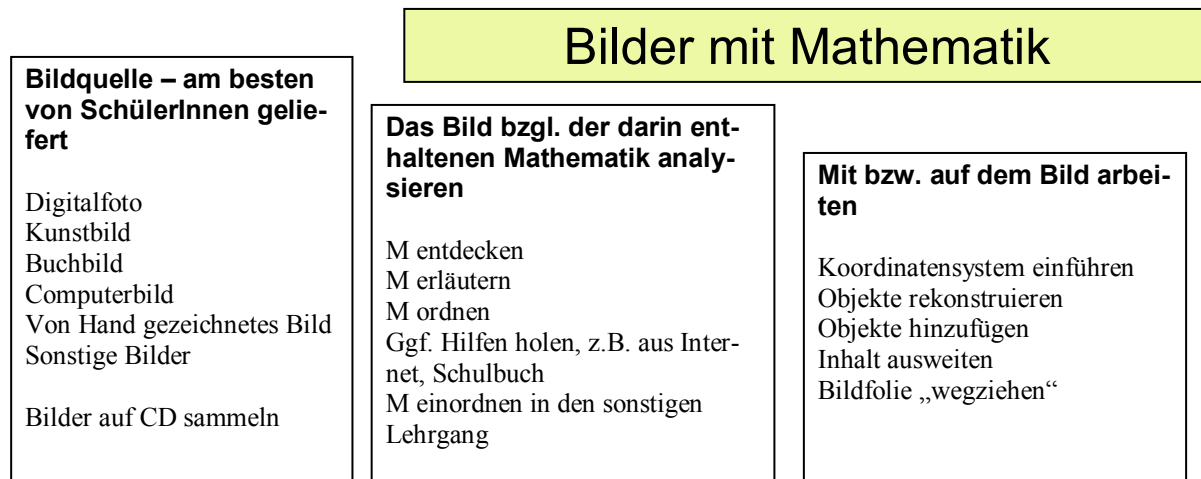


Abb. 8.1a

In Kapitel 8.7 finden sie Aufgabenstellungen, mit denen man Unterrichtssequenzen mit Mathematik an Bildern einleiten kann. Weitere Aufgaben ergeben sich aus der obigen Abbildung 8.1a. Bild 8.1b kann gut in einer Unterrichtseinheit über die Welt der Parabeln verwendet werden. Im rechten Bild wird übrigens eine weitere Möglichkeit des Computereinsatzes deutlich: Man kann Bilder auf einfache Weise verzerren und die mathematischen Veränderungen studieren.



Abb. 8.1b: Parabelscharen, rechts verzerrt

8.2 Mathematische Objekte entdecken und markieren

Einige Programme bieten die Möglichkeit, Hintergrundbilder in die Arbeitsfläche zu setzen. Das ist beispielsweise der Fall bei den Programmen PowerPoint, DERIVE 6 oder ANIMATO. Damit ergeben sich neuartige Arbeitsmöglichkeiten, die viel Eigentätigkeit und damit auch selbständiges Arbeiten bedeuten. Besonders interessant ist hierbei der Aspekt des „intelligenten Übens“ und eines motivierenden Anwendens bekannter Funktionsterme. Der Ansatz ist aber auch gut geeignet, um neue Funktionsgraphen auf experimentelle Weise zu finden. Das erste Beispiel ist für Schülerinnen der Grundschule oder der Sekundarstufe 1 geeignet.

Beispiel 1: Lade das Hintergrundbild „Kirche auf Mallorca“ auf Deine Arbeitsfläche. Identifiziere auf dem Bild geometrische Formen und markiere diese mit den Möglichkeiten von PowerPoint.

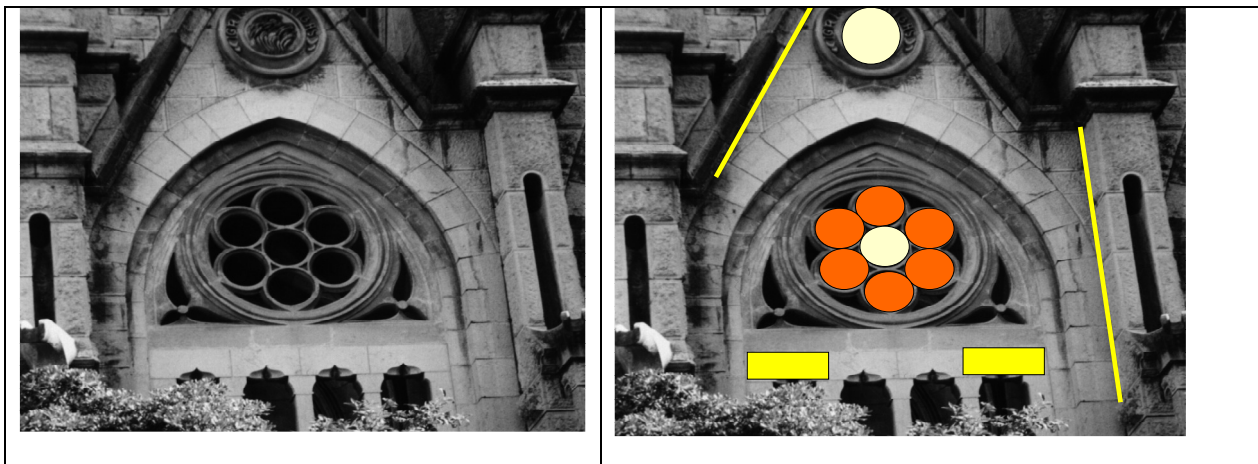
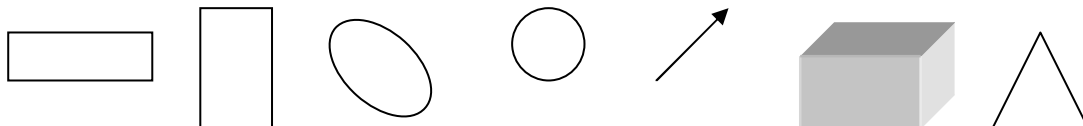


Bild 8.2a: Kirche

Bild 8.2b: Entdeckung geometrischer Formen (Klasse 6,7)

Das PPT-Programm stellt bekanntlich hierfür etliche geometrische Objekte bereit, die man auf die Bildfläche legen kann, beispielsweise:



Diese Aufgabenstellung ist für die Schülerinnen motivierend, nicht schwer und dennoch fruchtbar. - So werden bei der Bearbeitung bekannte Objekte gefunden, aber auch neue mathematische Objekte auf dem Bild und im Programm entdeckt und deren Verwendung erprobt. Analytische Überlegungen sind hier noch nicht nötig. Die Verwendung von Farben führt zu weiteren, vielleicht auch künstlerischen Aspekten.

Mathematische Objekte entdecken, analysieren und nachkonstruieren

In den Sekundarstufen können dann weitere geometrische Überlegungen hinzukommen und z. B. mit einem dynamischen Geometriesystem realisiert werden. Nimmt man nun noch analytische Betrachtungen dazu, so benötigen wir einen Funktionenplotter, z.B. ANIMATO oder die Grafik eines CAS. Dann lautet eine der Fragen:

- Durch welche Gleichungen lassen sich die Objekte erzeugen?

Hierzu folgt unten noch der Auszug aus einer Abituraufgabe.

8.3 Modellieren von Funktionen (Relationen) durch

Rekonstruktion auf einem mathematischen Hintergrundbild

Eine weitere Anwendung von Hintergrundbildern ergibt sich aus der Idee des Nachkonstruierens vorgegebener mathematischer Abbildungen, Die erzeugenden Terme werden aber nicht vorgegeben! Hierdurch können z. B. fertige Abbildungen „zum Leben erweckt“ werden.

Beispiel 2: Die folgende Abbildung zeigt ein Hintergrundbild, das aus mehreren Graphen von Funktionen bzw. Relationen besteht. Deine Aufgabe ist es, diese Graphen nachzukonstruieren. Verwende hierzu Punkte, die auf den Graphen des Bildes laufen.

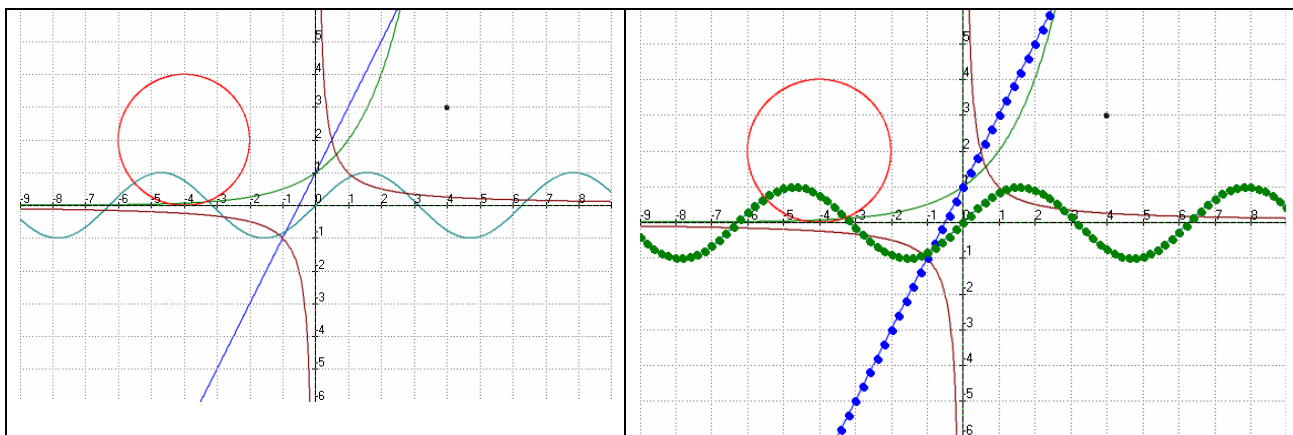


Bild 8.3a: Das Hintergrundbild

Bild 8.3b: Zwei der Graphen sind bereits rekonstruiert

Bild 8.3b zeigt die erfolgreichen Nachkonstruktionen der Geraden $g: y = 2x+1$ und der Sinuskurve. In entsprechender Weise gelingt die Überzeichnung der anderen Graphen, wobei sich das vorgegebene Koordinatensystem als nützlich erweist.

Term	Erläuterung
f1: 4,3	Punkt
f2: $2x+1$	Gerade
f3: 2^x+1	Exponentialfunktion
f4: $\sin(x)$	Sinusfunktion
f5: $1/x$	Hyperbel
f8: $2\cos(x)-4, 2\sin(x)+2$	Kreis in Parameterdarstellung

Ziele

- Diese Aufgabe könnte beispielsweise in Klasse 11 eingesetzt werden, wenn der Schüler seine Funktionserfahrungen aus vergangenen Jahren in motivierender Weise wiederholt oder an einem der Graphen auch ausweitet. Für andere Jahrgänge kann man sich andere Graphen denken, etwa zum Nachzeichnen von Geradenscharen, Nachzeichnen von Funktionsgraph und Ableitungsgraphen usw. Insofern kann der Schwierigkeitsgrad der Aufgabenstellung an die jeweilige Situation angepasst werden.
- Durch Animation der einzelnen Graphen kann die Rekonstruktion attraktiv gestaltet werden.
- Attraktiv für die Schüler ist auch das eigene Erstellen von Hintergrundbildern und die Weitergabe des Bildes an Mitschüler (Schüler stellen Aufgaben). Hierbei kann der Konstrukteur seine Kreativität ausspielen.

8.4 Die Reichstagskuppel in Berlin – Mathematik, Architektur

Der Querschnitt durch die Kuppel liefert eine begrenzende Kurve. Es soll ein passender Term dafür gefunden werden.

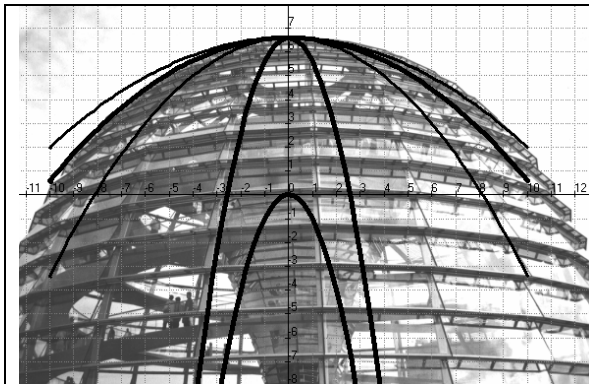


Bild 8.4a

Bild 8.3a: Schrittweise Annäherung an die Peripherie der Kuppel mit Hilfe der Gleichungen

$$\begin{aligned} f1: & -x^2 \\ f2: & f1+6.6 \\ f3: & 0.1f1+6.6 \\ f4: & 0.046f1+6.6 \\ f5: & 0.06f1+6.6 \end{aligned}$$

Ausgehend von $f1$ werden von Hand bessere Näherungen gesucht.

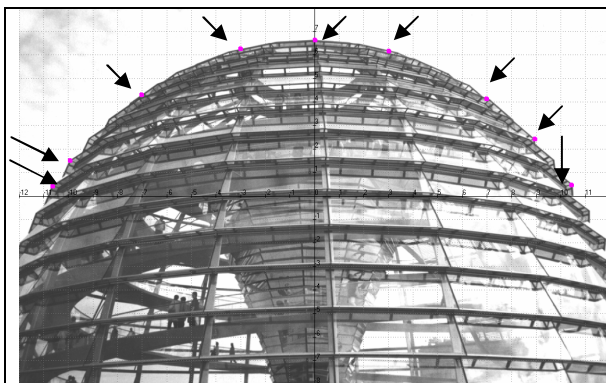


Bild 8.4b : 9 ausgewählte Punkte

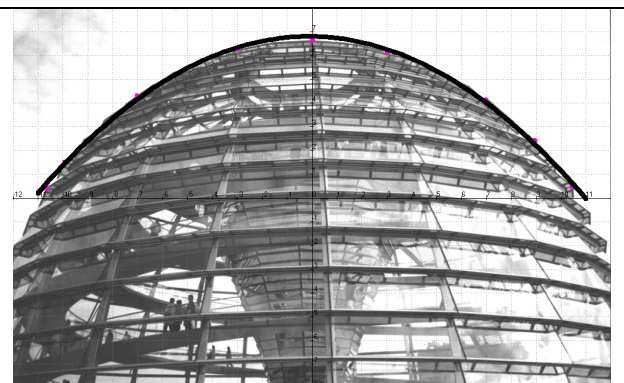


Bild 8.4c : Die errechnete Parabel

Ausgewählte Punkte auf der Peripherie der Kuppel (auf dem Hintergrundbild in ANIMATO mit dem Cursor ablesen):

$$\begin{aligned} f1: & 0.00, 6.66 & f2: & -3.02, 6.29 & f3: & -7.02, 4.33 & f4: & -9.94, 1.53 & f5: & -10.65, 0.44 \\ f6: & 3.02, 6.19 & f7: & 6.99, 4.14 & f8: & 8.93, 2.43 & f9: & 10.42, 0.49 \end{aligned}$$

Die quadratische Regression mit dem CAS des Taschencomputers hat erbracht (siehe Bilder 8.3d,e): $f10: -0.0555x^2 - 0.0110x + 6.7991$

	F1	F2	F3	F4	F5	F6	F7
	Plot	Setup	Cell	Header	Calc	Util	Stat
DATA							
	c1	c2	c3	c4	c5		
1	0.	6.66					
2	-3.02	6.29					
3	-7.02	4.33					
4	-9.94	1.53					
5	-10.65	0.44					
6	3.02	6.19					
7	6.99	4.14					
rc1=0.							
MAIN	RAD APPROX			FUNC			

Bild 8.4d: Eingabe der Koordinaten von 9 Punkten

	F1	F2	F3	F4	F5	F6
	Alc					in Up
	STAT VARS					
	$y = a \cdot x^2 + b \cdot x + c$					
	a	=-.055532				
	b	=-.011036				
	c	=6.799128				
	R ²	=.996477				
Enter=OK						
ShowStat						
MAIN	RAD APPROX			FUNC 0/30		

Bild 8.4e: Die errechnete quadratische Regression

Im Unterricht

Weg 1 – Die Bilder 8.3a,b,c können im Unterricht wieder als Animation gezeigt, aufgebaut und demonstriert werden:

- 1) Das Hintergrundbild erscheint,
- 2) Nacheinander werden die neun Punkte gezeichnet (die Schüler kommentieren),
- 3) Die Kurve erscheint (die Schüler kommentieren)

Weg 2 - Die Schüler arbeiten eigenständig auf dem Hintergrundbild. Die Aufgabenstellung könnte lauten: Bestimme eine Kurve, die die Peripherie der Kuppel modelliert.

8.5 Eine Klausuraufgabe zur Mathematik auf Bildern

Die Aufgabe wurde im Leistungskurs-Abitur 2001 gestellt (hier wird nur Teil a behandelt). Sie geht von einem Bild aus, verwendet Parameterdarstellungen und ist für den Einsatz von CAS konzipiert. Dabei wird das Bausteinprinzip verwendet.



Abb.1: Kirchenornament

Foto aus Mallorca

Beachten Sie:

In der folgenden Aufgabe wird die Architektur in dem nebenstehenden Bild etwas näher analysiert.

Grundlage für die zahlenmäßige Erfassung ist ein rechtwinkliges (x,y) -Koordinatensystem, dessen Ursprung $(0,0)$ in dem Mittelpunkt des inneren Kreises der Rosette liegt. Dieser sei ein Einheitskreis.

Um den Koordinatenmittelpunkt liegt ein Einheitskreis.

- a1) Wie lauten die Gleichungen der sechs berührenden Kreise in Parameterdarstellung?
Hinweis: Vorsicht mit den Mittelpunkten der Kreise links und rechts!
- a2) Geben Sie einen (x, y) -CAS-Baustein $[... \rightarrow \text{xkreis}(*,*,*), ... \rightarrow \text{ykreis}(\#, \#, \#)]$ an, durch dessen Aufruf sich **alle Kreise aus Abb.1**, aber auch noch beliebig viele weitere Kreise erzeugen lassen.
- a3) Wie würde ein entsprechender Baustein in kartesischen Koordinaten lauten?

Aufgabenteil , Lösungsskizzen, Erwartungen

a1) $x = \cos(t)$,	$y = \sin(t)$	E-Kreis
$x = \cos(t)$,	$y = \sin(t)+2$	oben
$x = \cos(t)$,	$y = \sin(t)-2$	unten
$x = \cos(t)-\sqrt{3}$	$y = \sin(t)+1$	links
$x = \cos(t)-\sqrt{3}$,	$y = \sin(t)-1$	
$x = \cos(t)+\sqrt{3}$,	$y = \sin(t)-1$	rechts
$x = \cos(t)+\sqrt{3}$,	$y = \sin(t)+1$	

Auf Verschiebung $\sqrt{3}$ kommen
 $1^2+x^2=2^2$

a2) Bausteine mit Erklärung

$$x = r \cdot \cos(t) + a \rightarrow \text{xkreis}(t,r,a)$$

$$y = r \cdot \sin(t) + b \rightarrow \text{ykreis}(t,r,b)$$

a3) $y = b \pm \sqrt{r^2 - (x-a)^2}$, also

$$b + \sqrt{r^2 - (x-a)^2} \rightarrow \text{halbk}(x,r,a,b)$$

$$b - \sqrt{r^2 - (x-a)^2} \rightarrow \text{halbk}(x,r,a,b)$$

Bausteine mit Erklärung

Eine Aufgabenvariation

Die sechs Kreise von Aufgabe a sollen nun abbildungsgeometrisch erzeugt werden. – Geben sie eine geeignete Matrix an, mit der man, ausgehend von dem oberen Kreis mit dem Mittelpunkt $(0,2)$, die anderen Kreise erzeugen kann. Formulieren sie eine TI-92-Lösung für die Erzeugung der Kreise. Nennen sie dabei auch die von ihnen in den Fenstern eingestellten Werte.

Lösung

```

F1 Zoom F2 Edit F3 All F4 Style F5 Calc...
PLOTS
xt4=cos(t)+a
yt4=sin(t)+b
xt5=cos(t)
yt5=sin(t)+2
xt6=cos(c)*xt5(t)-sin(c)*yt5(t)
yt6=sin(c)*xt5(t)+cos(c)*yt5(t)
xt7=
yt7=
xt8=
yt8=
xt?(t)=
MAIN RAD APPROX PAR

```

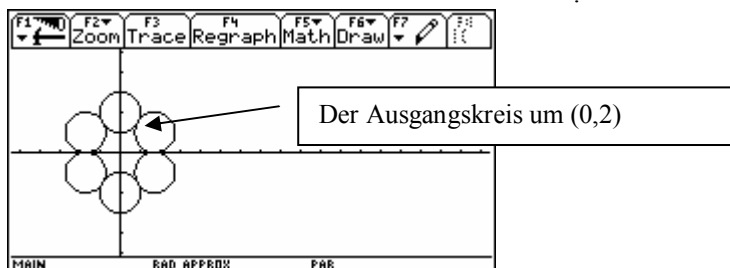
Die Drehmatrix wird mit den Kreistermen multipliziert.

```

F1 Algebra F2 Calc F3 Other F4 PrgmIO F5 Clean Up
sin^4(.5) .523599
sin^4(.5) 30.
pi/3 -> c 1.0472
pi/3 -> d 1.0472
{d 2*d 3*d 4*d 5*d 6*d} -> c
{1.0472 2.0944 3.14159 4.18879 5.}
<d, 2d, 3d, 4d, 5d, 6d> -> c
MAIN RAD APPROX PAR 19/30

```

Der Drehwinkel ist jeweils $d = \pi/3$. Bezogen auf den ersten Kreis um $(0,2)$, also $d, 2d, 3d$ usw



8.6 Einige attraktive Bilder zum Analysieren und Bearbeiten



Geschmiedete Spirale (Manuela Dittmar)



Im Garten



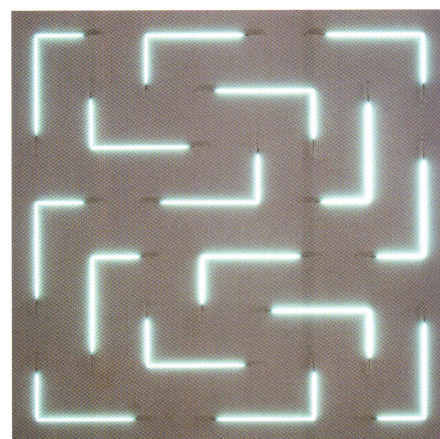
Steinmuster Lissabon



Kirchenfenster in Thüringen



Tischdecke in einem Hotel



Leuchtstäbe (Francois Morellet)

8.7 Weitere Bilder-Aufgaben für den Unterricht

Die unten angebotenen Aufgabenstellungen sind geeignet, um Unterrichtsstunden mit Bildern zu gestalten. Sie sind zum Teil sehr offen formuliert und können damit auch zu längeren Unterrichtsphasen führen oder bei passender mathematischer Gelegenheit wieder aufgegriffen werden. Jedenfalls ist es für die SchülerInnen sehr motivierend, wenn ihre eigenen Bilder im Unterricht benutzt werden.

Vorschläge für Aufgabenstellungen

- Erstelle ein Digitalfoto mit möglichst vielen mathematischen Objekten. Du sollst dein Foto in der nächsten Stunde vorführen und erläutern.
- Erstelle drei Fotos aus deiner Umwelt mit viel mathematischem Inhalt. Welches ist davon dein Lieblingsfoto? Erläutere dieses Foto genauer.
- Für die nächste Mathematikstunde brauchen wir Digitalfotos aus unserer Umwelt zum Thema „Kreise“.
- Auf dem Arbeitsbogen siehst du zwei Fotos. Erläutere ihren mathematischen Inhalt.
- Fotosafari: Kirchen mit Mathematik
- Fotosafari: Moderne Architektur und Mathematik (auch für fächerübergreifende Betrachtungen geeignet)
- Auf dem Arbeitsbogen siehst du zwei Fotos. Scanne diese ein und zeichne mathematische Objekte nach mit Hilfe von Power-Point. Wie könnte das mit deinem CAS gehen?
- Wähle dir eins der angebotenen vier Fotos aus und rekonstruiere möglichst viele mathematische Objekte.
- Lege in das vorgegebene Bild ein passendes Koordinatensystem. Begründe deine Wahl. Wie könnten die Gleichungen der in dem Bild vorhandenen mathematischen Objekte lauten?
- Deine letzten Urlaubsfotos: Suche ein Foto mit viel mathematischem Inhalt.
- Rekonstruiere einige der auf dem Hintergrundbild sichtbaren mathematischen Objekte mit Hilfe deines CAS.
- Wir wollen eine Mathematik-CD erstellen mit Digitalfotos, die viel mathematischen Inhalt enthalten. Jeder darf drei Fotos (gespeichert auf einem Stick oder einer CD, Format .jpg) abgeben. Dirk wird sie auf einer CD zusammenfassen. Jeder erhält eine Kopie. – Diese CD wird unseren Mathematikunterricht der nächsten Zeit begleiten!

9. Das CAS macht es möglich

9.1 Neue Sichtweisen auf Lehrplaninhalte

Für einen Vortrag zum Zentralabitur wurde von mir die folgende Abbildung entworfen, aus der einige Aspekte gut zum augenblicklichen Thema passen.

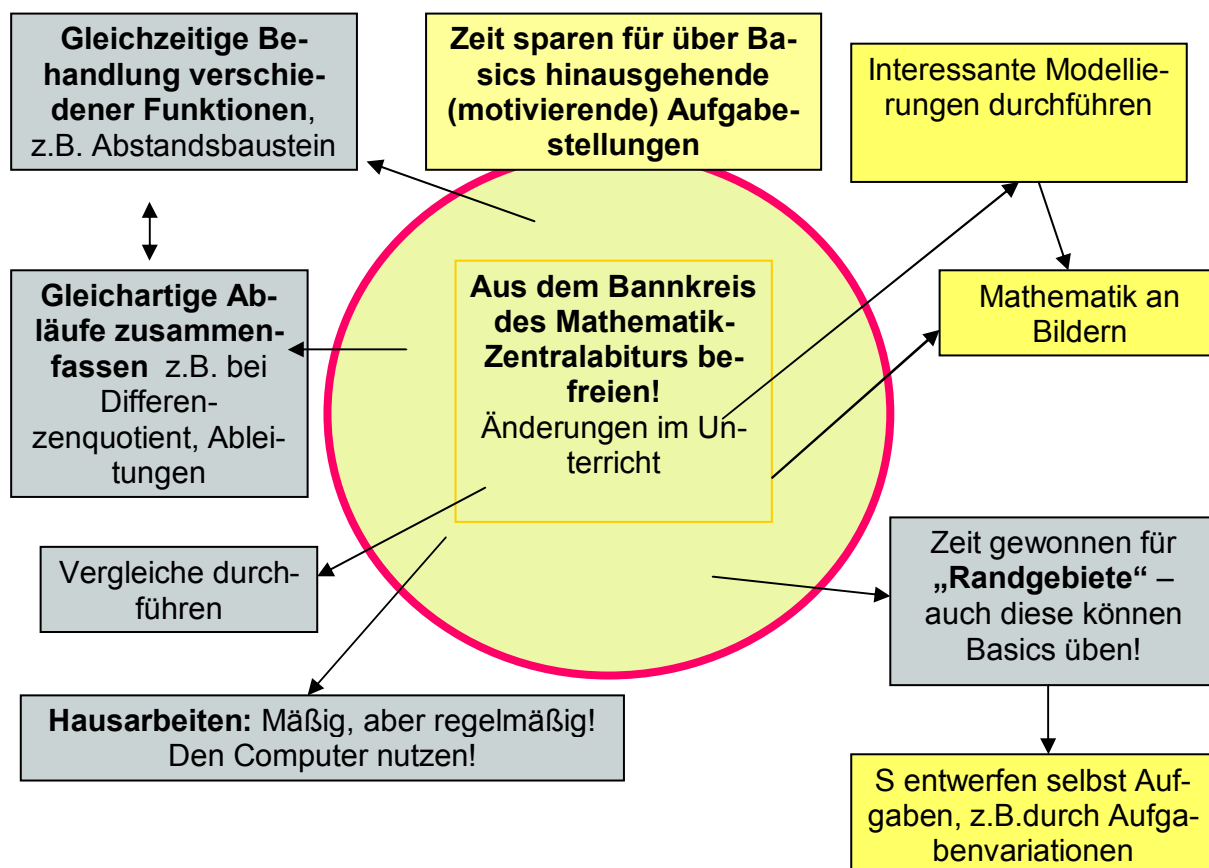


Abb. 9.1a: Ungewohnte Sichtweisen auf Lehrplaninhalte

Mit der Abbildung wird die These untermauert, dass man auch unter Blick auf die zentralen Prüfungen mit den SchülerInnen interessante und schöne Mathematik treiben kann. Und der Computer, insbesondere die CAS bieten hierfür zahlreiche neue Möglichkeiten. Über einige dieser Aspekte wird in diesem Kapitel berichtet, andere fanden sich bereits in früheren Kapiteln. Da ist zunächst die fundamentale Idee, Sachverhalte die in den Lehrplänen bisher getrennt auftreten, nun mit Hilfe eines CAS zusammenzubringen.

9.2 Gleichartige Abläufe zusammenfassen

In Kapitel 6 finden wir Betrachtungen zum Differenzenquotienten. Das dort geschilderte Vorgehen lässt sich in entsprechenderweise auf die gängigen Funktionen bzw. Relationen übertragen. Hat man ein geeignetes PC-Programm zur Verfügung, dann kann man gleich verschiedene schulrelevante Funktionen betrachten und so den sonst üblichen Ablauf (erst eine Funktionenklasse, einige Wochen später die nächste, ...) durch eine (fast) gleichzeitige Bearbeitung ersetzen. Dabei könnten z.B. die Abbildungen der nächsten Seite entstehen. - So sind z.B. die Eingaben für Abbildung 9.2a:

f2: $\sin(a)$	
f3: $(f2(t+u)-f2(t))/u$, Differenzenquotient „von rechts“ für positives u.	f7: $(f6(t+u)-f6(t))/u$
f4: $(f2(t-u)-f2(t))/(-u)$	f8: $(f6(t-u)-f6(t))/(-u)$

Dabei läuft u überall von 2 bis 0.01 mit 10 Werten (Schrittweite -0.199..)

Änderungen sind dann nur bei der Funktion bei f2 nötig, z.B. steht dann dort f2: 2^a .

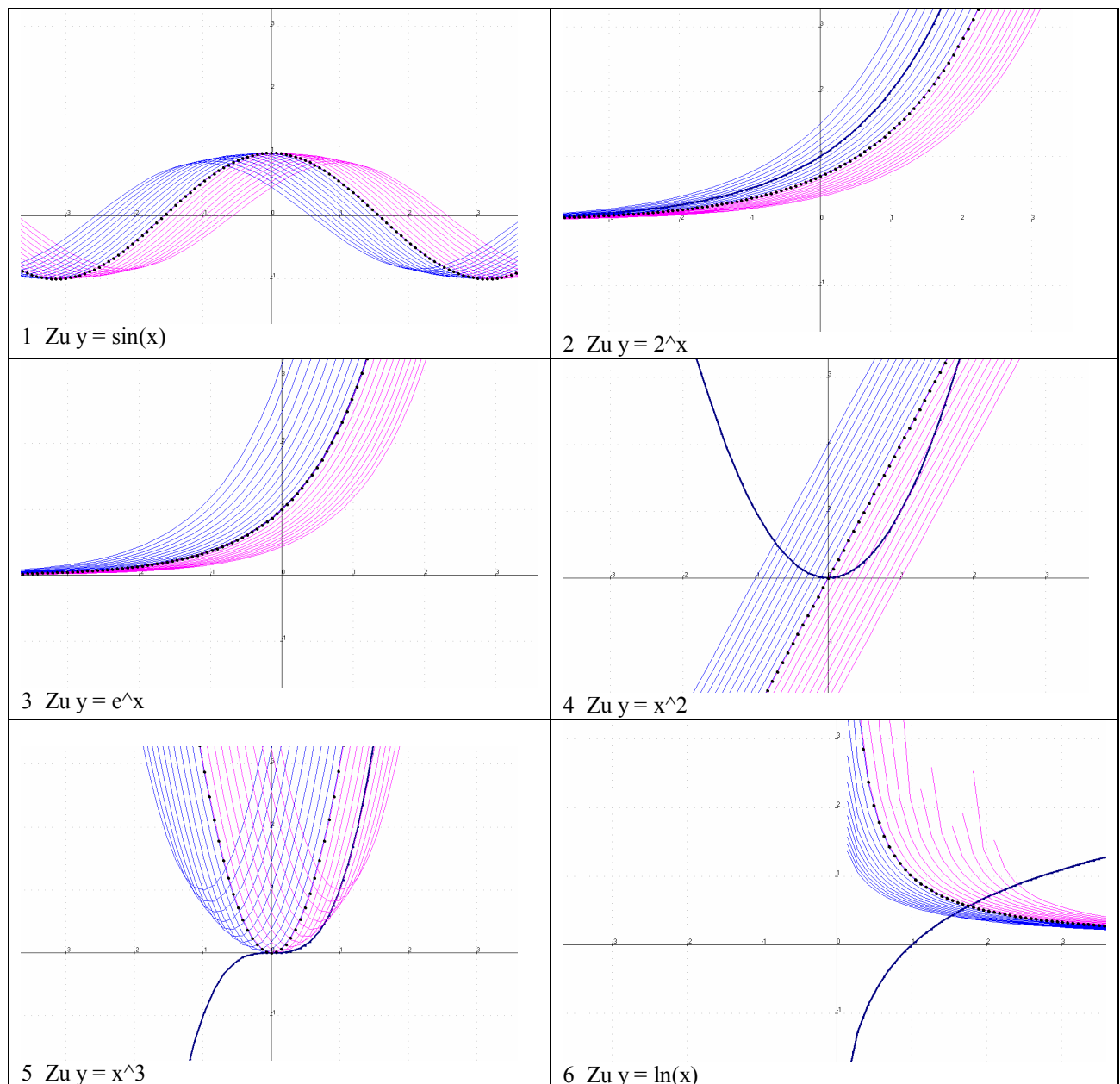


Abb.9.2a: Veranschaulichung von Ableitungsgraphen: Differenzenquotienten-Funktion zu einigen Standardfunktionen

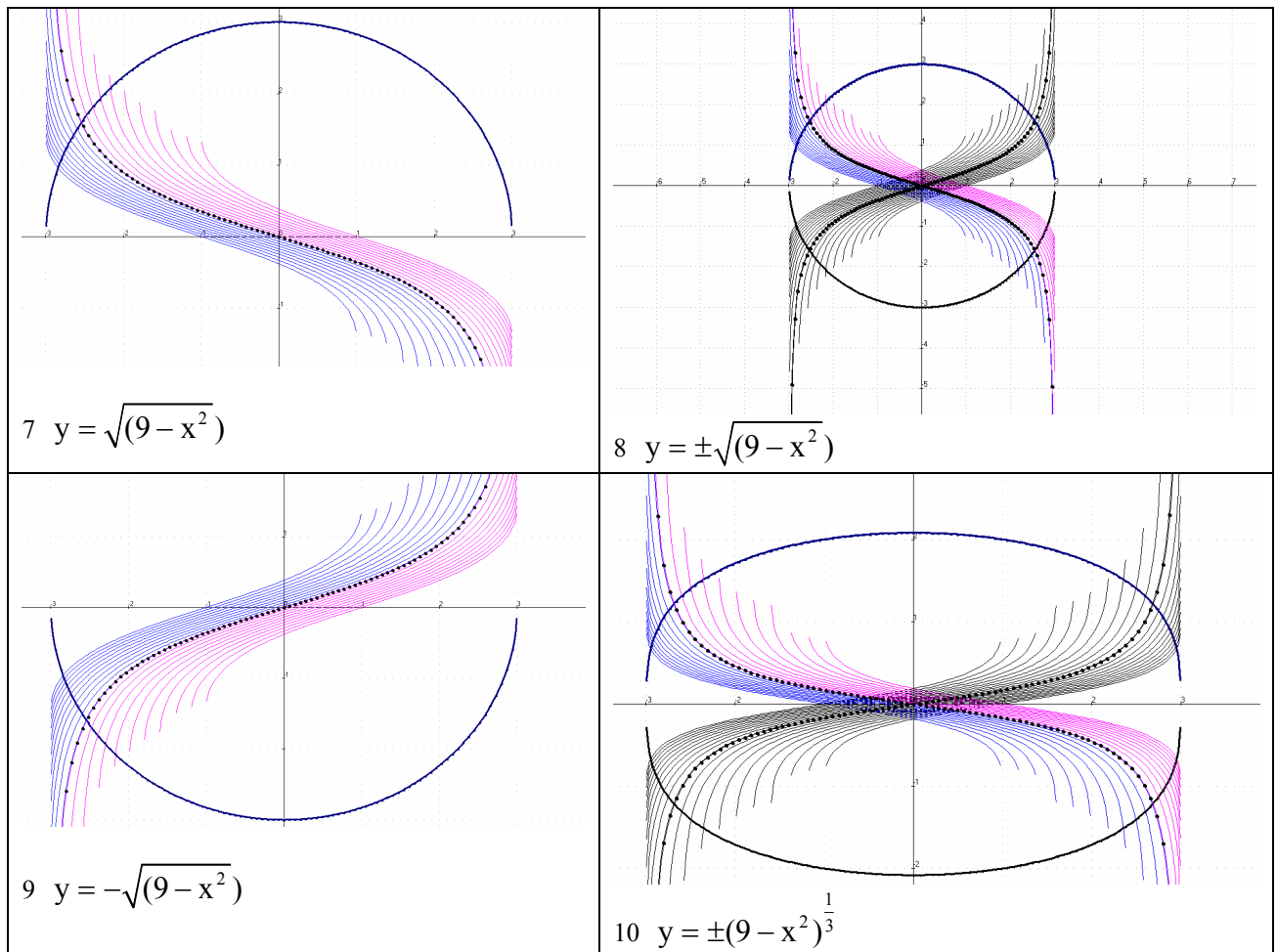


Abb. 9.2b

Natürlich lässt sich die **Idee des Zusammenfassens gleichartiger Abläufe** auch algebraisch realisieren. Hierzu ein Voyage 200 und ein TI-Nspire-Bild.

<pre> F1 Algebra F2 Calc F3 Other F4 PrgmIO F5 Clean Up F6 seq((a+b)^n, n, 1, 5, 1) {a+b (a+b)^2 (a+b)^3 (a+b)^4 (a+b)^5} expand(seq((a+b)^n, n, 1, 5, 1)) {a+b a^2+2*a*b+b^2 a^3+3*a^2*b+3*a*b^2+b^3} expand(seq((a+b)^n, n, 1, 5, 1)) {a^4+4*a^3*b+6*a^2*b^2+4*a*b^3+b^4} expand(seq((a+b)^n, n, 1, 5, 1)) </pre>	<p>Hier geht es um Terme der binomischen Formeln und damit auch um das Pascal'sche Dreieck.</p> <p>Wieder wurden gleichartige Abläufe zusammengefasst.</p> <p>Abb. 9.2d</p>
---	--

Input	Output
$f(x) := \sin(x)$	Done
$dq(x, h) := \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$	Done
$dq(x, 0.001)$	$1000 \cdot (\sin(x+0.001) - \sin(x))$
$\lim_{h \rightarrow 0} (dq(x, h))$	$\cos(x)$
$f(x) := 3 \cdot x^2$	Done
$\lim_{h \rightarrow 0} (dq(x, h))$	$6 \cdot x$
$f(x) := x^n$	Done
$\lim_{h \rightarrow 0} (dq(x, h))$	$n \cdot x^{n-1}$
$f(x) := \sqrt{r^2 - x^2}$	Done
$\lim_{h \rightarrow 0} (dq(x, h))$	$\frac{-x}{\sqrt{r^2 - x^2}}$

RAD AUTO REAL 10/99

Für $f(x)$ wird zunächst die Sinusfunktion genommen. Der Differenzenquotient wird allgemein definiert. Zwei Test der Funktionsfähigkeit des Moduls dq mit $h=0.001$ und dann allgemein. Eine neue Funktion wird definiert. Wieder liefert $\lim(dq)$ die Ableitung. Das Vorgehen kann man für viele Funktionen wiederholen.

Wieder wurden gleichartige Abläufe zusammengefasst.

Abb. 9.2c

Diese besonderen Fähigkeiten von CAS sollten im Unterricht ausgenutzt werden

- zur Abkehr isolierter Betrachtungen an verschiedenen Lehrplanstellen, die den Überblick über das Ganze verstellen
- zugunsten einer kompakteren Darstellung ähnlicher Sachverhalte
- zum Erzeugen von Transparenz mathematischer Sachverhalte und damit auch
- zur zeitlichen Entlastung der Lehrplaninhalte.

Wie wir gesehen haben, lässt sich dieser Ansatz grafisch und algebraisch verfolgen.

Weitere Beispiele einer derartigen CAS-Verwendung könnten sein:

- Integrale bei verschiedenen Funktionen,
- Zusammenstellung von Volumenformeln von Körpern in der Sekundarstufe 1,
- gemeinsame Betrachtung von Lösungsverfahren bei LGS mit zwei Variablen,
- Vergleiche der Funktionen $y = \sin(x)$ und $y = \cos(x)$,
- Flächeninhaltsberechnungen für Flächen zwischen x-Achse und verschiedenen Graphen,
- Nullstellenuntersuchungen in verschiedenen Funktionsklassen und ein Vergleich,
- Aufgabenstellungen, die verschiedene Funktionstypen beinhalten.
- Matrizenpotenzen verschiedener spezieller Matrizen,
- gleichzeitige Betrachtung der Wirkung verschiedener Abbildungsmatrizen im \mathbb{R}^2 .

9.3 Mit dem CAS experimentieren lassen– wie geht das?

Experimentieren – warum?

Experimentieren

- erfordert Kreativität und fördert Kreativität
- fördert die Eigenaktivität und das eigenständige Arbeiten
- erzeugt mit den häufig überraschenden Ergebnissen zahlreiche Fragen
- zwingt zu weiteren Aktionen: Entdecken, vermuten, verstehen, begründen – vielleicht auch beweisen
- führt zu spannenden Präsentationen
- kann man auf viele Arten, hier wird es mit dem Hilfsmittel CAS betrachtet

Experimentieren – einige Tipps

- Häufig führen Änderungen an den Parametern eines Terms oder einer Aufgabenstellung zu Entdeckungen,
- je mehr Parameter vorhanden sind, desto unübersichtlicher und komplexer, aber auch spannender wird die Entdeckungsreise,
- gezieltes Experimentieren erfordert Planung.

Experimentieren - und dann?

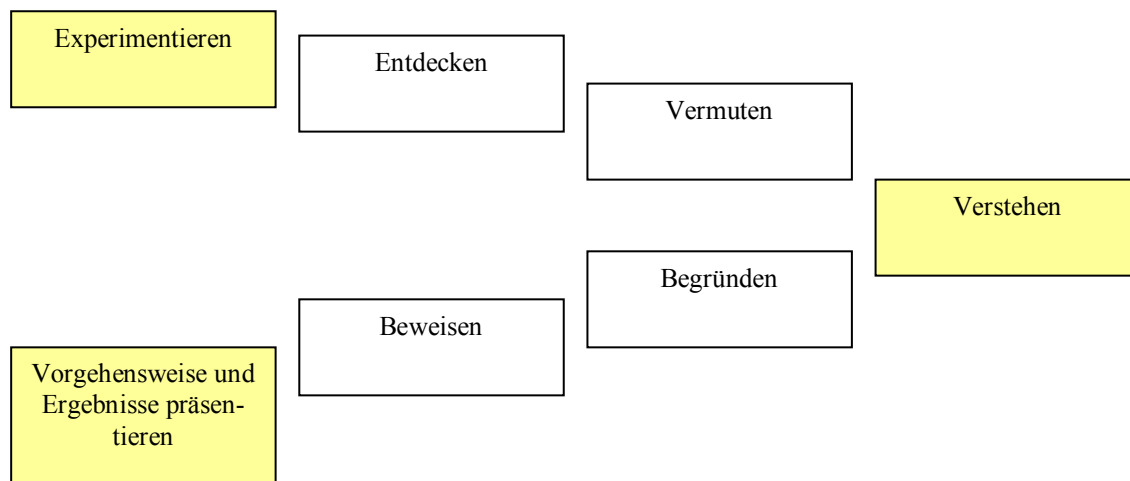


Abb. 9.3a

9.3.1 Experimente mit Geraden

Wir wählen als erstes Beispiel eine sehr offene Fragestellung. Die Aufgabe geht lediglich von der Kenntnis aus, wie man eine Gerade mit dem CAS-Werkzeug TI-Nspire zeichnen kann (g zeichnen, Gleichung bestimmen lassen). Danach können die Schüler selbst weitere Geraden zeichnen und erkennen, dass die Gleichung dieser und weiterer Geraden stets in der Form $y = m \cdot x + b$ angegeben wird. Auch die Bedeutung von m und b können sie selbständig erschließen. – Voraussetzung: Die SchülerInnen sind schon etwas mit so offenen Fragen vertraut. Die CAS-Kenntnisse sind noch gering, vielleicht wird das CAS sogar erst hier eingeführt.

Aufgabe:

Wir haben gelernt, wie man mit dem TI-Nspire eine Gerade zeichnet (siehe unten unter Abbildung a). – Experimentiere nun mit vielen weiteren Geraden und versuche diese irgendwie zu ordnen, z.B. nach gemeinsamen Eigenschaften.

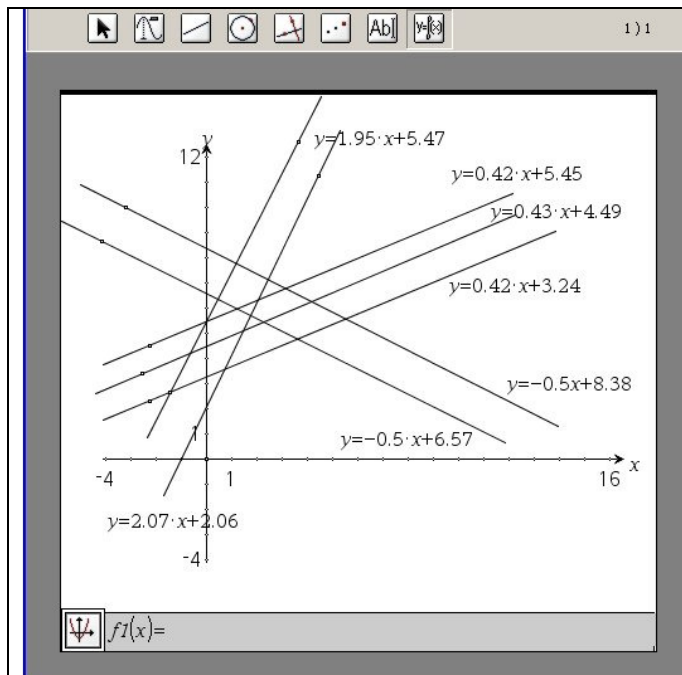


Abb. 9.3.1a

a) Die SchülerInnen zeichnen weitere Geraden mit „line“ und lassen deren Gleichungen mit „Coordinates and Equation“ ermitteln.

b) Sie werden in den Gleichungen die Bedingungen für Parallelität entdecken oder den Achsenabschnitt erkennen.

c) Die Begründungen folgen.

d) Danach kann auch eine allgemeine Herleitung für die Geradenform $y = m \cdot x + b$ erfolgen.

Aufgabe:

Experimentiere mit dem Zeichenblatt des Voyage 200, bis du eine Senkrechte zur Geraden $g: y = 4x - 3$ gefunden hast.

9.3.2 Gut geeignet für Entdeckungen - die Matrix $A_{(2,2)} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$

Mit $\begin{pmatrix} x' & y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x & y \end{pmatrix} \cdot A$ bzw. $\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = A^T \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$, wobei A^T die Transponierte von A ist, erzeugt man lineare Abbildungen. Ausführlich:

$$\begin{aligned} x' &= a \cdot x + b \cdot y \\ y' &= c \cdot x + d \cdot y \end{aligned}$$

Für den Voyage 200 kann man zum Beispiel die Abbildungsmatrix A als Baustein definieren:

$$\left[\left[a, b \right] \left[c, d \right] \right] \rightarrow \text{linabb}(a, b, c, d)$$

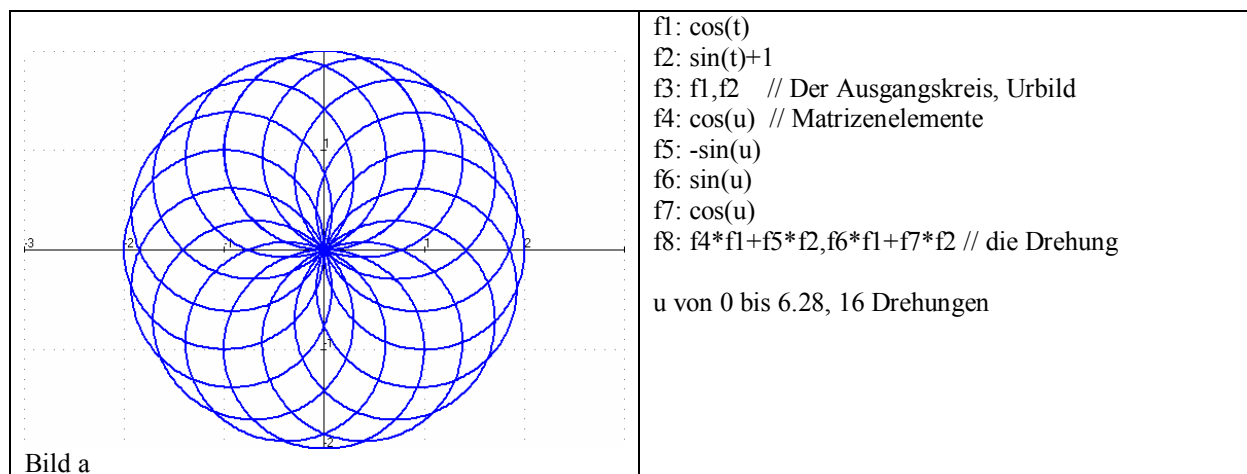
Nachdem an einem Beispiel einmal erkannt ist, dass A auf eine Ausgangsfigur verändernd wirkt, bietet sich ein weites Experimentierfeld an, indem für die Parameter a, b, c, d diverse Werte eingesetzt werden.

Das kann durchaus mit Prinzip erfolgen, denn sicherlich wird man sich zunächst den bekannten Abbildungen wie Spiegelung an $y = x$, an der x -Achse, y -Achse oder Drehung um 90° , Punktspiegelung an $(0,0)$ usw. zuwenden.

Die SchülerInnen merken dabei schnell, dass die Elemente der jeweiligen $(2,2)$ - Matrix in der Regel gewisse Symmetrien aufweisen. Die besonders interessierenden Abbildungen sind:

- Spiegelung an der x -Achse, bzw. der y -Achse
- Spiegelung an den Geraden $y = x$ und $y = -x$
- Punktspiegelung an $(0, 0)$; Drehung um 90°
- Zentrische Streckung
- Streckung in x -Richtung und y -Richtung
- Spiegelung an einer Geraden $y = mx+n$
- Punktspiegelung an $S(x_s, y_s)$
- Scherung in Richtung der x - bzw. y -Achse
- Drehung um $(0,0)$ um einen beliebigen Winkel t .
- Drehstreckungen (komplexe Zahlen)

Abbildung eines Kreises mit einer Drehmatrix $\begin{pmatrix} \cos(u) & -\sin(u) \\ \sin(u) & \cos(u) \end{pmatrix}$

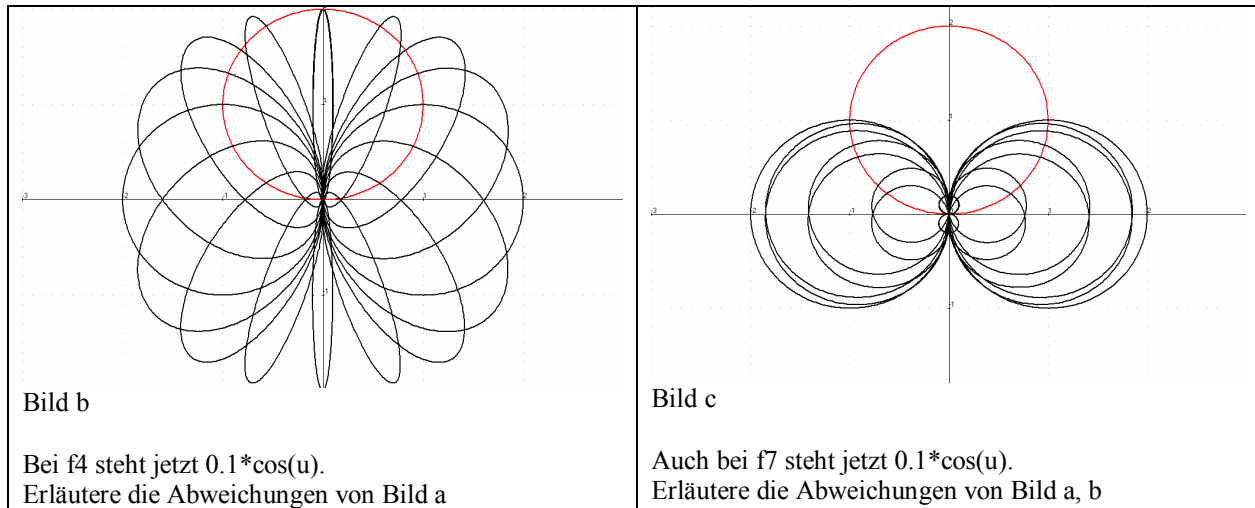


Zahlreiche Experimente

Es liegt auf der Hand, dass in diesem Zusammenhang zahlreiche Experimente durchgeführt werden können, etwa durch Variation

- der Anzahl der Drehungen,
- der Art der Ausgangsfigur,
- des Laufbereichs für u usw.
- kleine Änderungen an der Drehmatrix, z.B. statt $\cos(u)$ nun $0.9\cos(u)$ schreiben.

Dabei gibt das jeweilige Bild Auskunft über die Richtigkeit der Erwartungen. Eine Dokumentation der Arbeit sichert die Ergebnisse.



9.3.3 Magische Quadrate – Forschen, Entdecken, Beweisen

Unterrichtsvoraussetzungen:

Im Internet finden wir bei Eingabe des Suchbegriffs „magische Quadrate“ mehrere interessante Formeln, mit denen man magische Quadrate erzeugen kann. Diese Formeln können auf vielfältige Weise benutzt werden, um Mathematik auf verschiedenen Niveaustufen zu betreiben. – Hier wird eine Formel zur Erzeugung von (3,3)-Quadraten herausgegriffen und unter folgenden Aspekten bearbeitet:

- Darstellung des magischen Quadrates mit Hilfe von Parametern
- Definition eines passenden Bausteins
- Arbeit mit dem CAS
 - Experimentelles Arbeiten
 - Aufgabenlösen
 - Algebraische und graphische Deutungen

Die benötigten Vorkenntnisse sind gering und entsprechen denen aus Klasse 7. Bei der Arbeit mit dem Baustein können dann Fragen unterschiedlichen Schwierigkeitsgrads entstehen.

Aufgabe 1:

Gib das magische Quadrat $\text{mag3}(i,h,k)$ entsprechend der Vorgabe in den Abbildungen 9.3.3a und 9.3.3b in dein CAS ein.

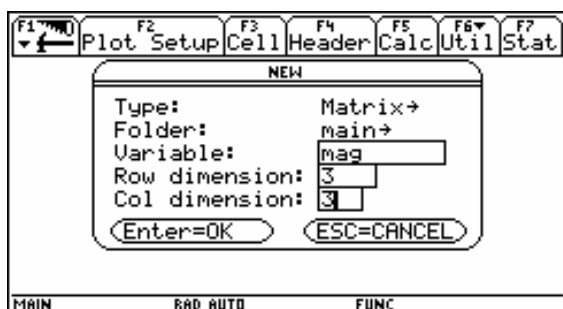


Abb. 9.3.3a

1. APPS drücken
2. Data/Matrix/Editor → New (ENTER)
3. Data → Matrix (ENTER)
4. Variable mag (siehe Abb. 3.1)
5. Row 3 und Col 3 (ENTER)
6. Nach ENTER erscheint eine Tabelle. Dort werden die Elemente des Magischen Quadrates eingegeben.
7. Zum Home-Editor



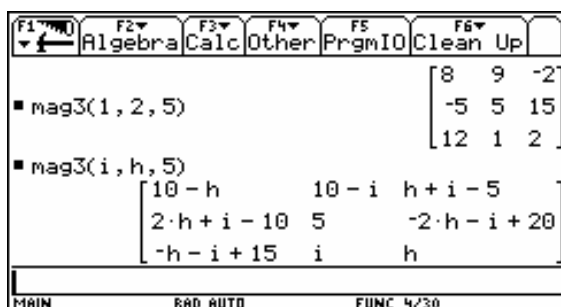
Abb. 9.3.3b

Hier wurde die eingegebene Matrix namens mag im Editor aufgerufen.

Man holt sich die Matrix in die Eingabezeile und definiert den Baustein mag3(i,h,k)

Aufgabe 2

a) Überprüfe die Funktionstüchtigkeit deines Bausteins durch die Aufrufe magi(1,2,5) und mag3(i,k,5).



Erfolgreiche Überprüfung!
Was fällt alles so auf?

Die magische Summe ist gleich 15.

b) Liegen wirklich magische Quadrate vor?

Aufgabe 3

Zeige, dass die magische Summe gleich 15 (aus $3 \cdot 5$) ist. – Hinweis: Die magische Summe entsteht als Summe aller Elemente jeder Zeile, jeder Spalte und der beiden Diagonalen.

Aufgabe 4

Nun geht es ans Forschen und Entdecken. Dabei wird sich der Baustein mag3(i,h,k) als ideales Hilfsmittel erweisen. Noch ein paar Tipps, falls du noch nie auf diese Weise geforscht hast. - Viel Spaß, es gibt viel zu entdecken. Auch im Internet steht so Einiges!

Tipps und Tricks zum Experimentieren am Beispiel des magischen Quadrats

$$\text{mag3}(i, h, k) := \begin{pmatrix} 2k - i & 2k - h & h + i - k \\ h + 2i - 2k & k & -h - 2i + 4k \\ -h - i + 3k & h & i \end{pmatrix}$$

(1) Für die Parameter i, h und k kann man andere Zahlen, aber auch andere Variable einsetzen. Damit hat man den Baustein „aufgerufen“ (Bausteinaufruf).

(2) Beim Einsetzen sollte man aber immer nur die Werte für einen Parameter ändern, sonst erkennt man die Auswirkungen der Änderungen nicht mehr.

(3) Die jeweiligen Ergebnisse sollte man genauestens studieren: Auffälligkeiten und Regelmäßigkeiten? Auch das Bilden von Summen ist häufig nützlich.

(4) Man kann oft auch graphische Veranschaulichungen, z.B. im Koordinatensystem erstellen. Dazu ist es nützlich, einen Parameter durch x zu ersetzen und (beim TI-92) Ergebnisse in y1(x) usw. zu speichern.

(5) Es ist auch möglich, zwei Bausteinaufrufe miteinander zu verknüpfen, z.B. mag3(1,2,5) + mag3(2,1,5).

(6) Wenn du eine Entdeckung beweisen willst, musst du versuchen, allgemein zu arbeiten. Du musst dich also in der Regel von speziellen Zahlen trennen.

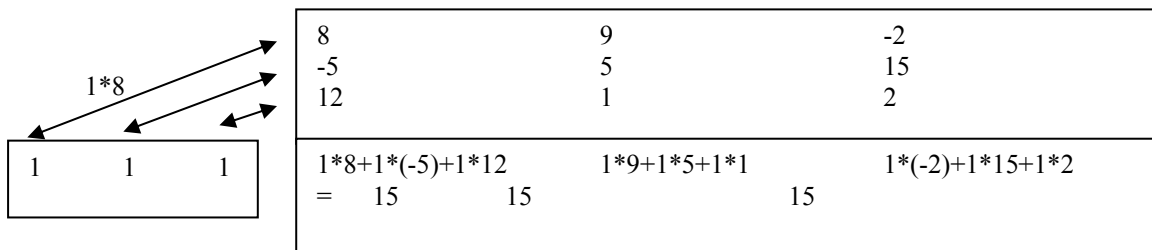
Arbeitsblatt 1: Check the Square – verstehen, nachmachen

Beim Umgang mit magischen Quadraten wird man häufig nachprüfen müssen, ob es sich wirklich um ein magisches Quadrat handelt. Dazu ist das Bilden von Zeilen-, Spalten- und Diagonalsummen nötig. Mit Hilfe der Matrizenrechnung geht das auch mit einem CAS ganz leicht.

Zur Information:

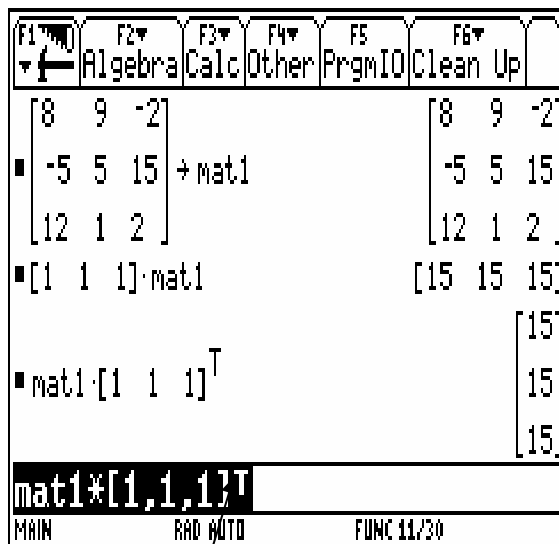
Matrizen sind rechteckige Schemata aus Zahlen, Variablen oder gar aus Funktionstermen. Magische Quadrate sind also besondere Matrizen, nämlich quadratische Matrizen. Matrizen kann man – sofern sie paarweise dafür geeignet sind – miteinander addieren oder multiplizieren. Dabei gelten dann einige Rechenregeln.

Du lernst jetzt an einem für uns geeigneten Beispiel die Rechnung zur Multiplikation zweier Matrizen kennen.



Die Matrix $I = [1 \ 1 \ 1]$ wurde mit der Matrix des magischen Quadrats multipliziert. Dazu wird jeweils die eine Zeile der Matrix I genommen und jeweils mit einer Spalte der anderen Matrix verknüpft (man spricht von Skalarprodukt „Zeile * Spalte“). Die Rechnung ergibt die drei Spaltensummen. Alle Summen sind gleich 15, also gleich der magischen Summe.

Am TI-92 sehen Eingabe, Rechnung und Ergebnis so aus:



Abkürzung der schon gespeicherten Matrix mit dem Namen „mat1“

Bilden der Spaltensummen

Bilden der Zeilensummen. Jede Zeile der Matrix mat1 wird mit der Spalte $[1 \ 1 \ 1]^T$ „multipliziert“. $[1 \ 1 \ 1]^T$ ist eine andere Schreibweise für die Spaltenmatrix

1
1
1

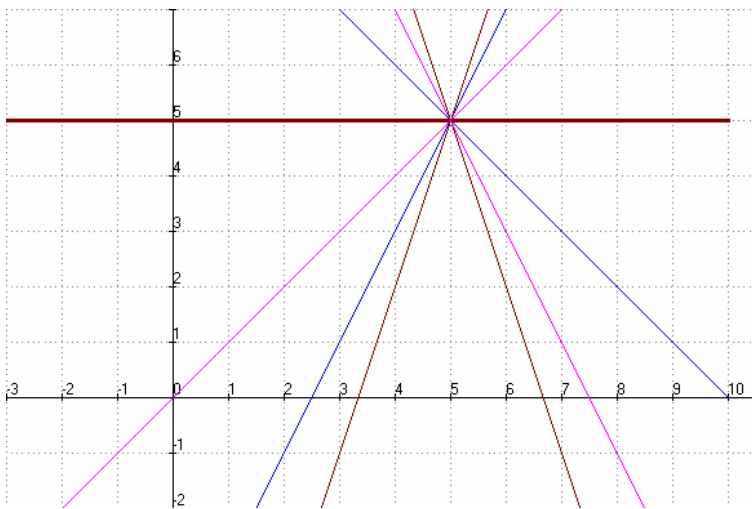
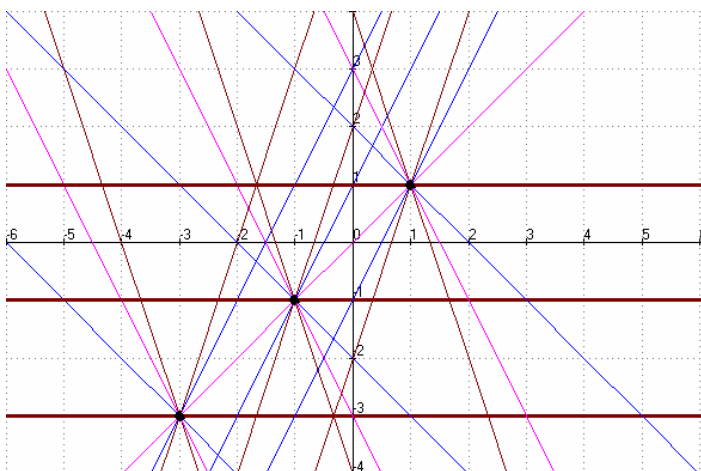
Hinweis: Mit den Diagonalsummen geht das nicht so einfach.

Hinweis: Das T findet man beim TI-92 mit der Tastenfolge „2nd catalog (blättern) T“

Arbeitsblatt 2: Graphische Darstellung von magischen Quadraten

F1	F2	F3	F4	F5	F6
Algebra	Calc	Other	PrgmIO	Clean Up	
mag3(x, x, 5)		$\begin{bmatrix} 10-x & 10-x & 2x-5 \\ 3x-10 & 5 & 20-3x \\ 15-2x & x & x \end{bmatrix}$			
mag3(x, x, k)		$\begin{bmatrix} 2k-x & 2k-x & 2x-k \\ 3x-2k & k & 4k-3x \\ 3k-2x & x & x \end{bmatrix}$			
mag3(k, k, k)					
MAIN		RAD AUTO		FUNC 16/30	

Aufgabe 1: Der Aufruf $\text{mag3}(x, x, 5)$ erzeugt Terme in x , die man gut in einem Koordinatensystem darstellen kann, siehe Abb.1. Probiere statt der Summenzahl 15 (es gilt $3 \cdot 5 = 15$) noch andere Summenzahlen. Welche Idee steckt hinter dem Aufruf $\text{mag3}(x, x, k)$?

Abb.1: Graphische Darstellung des Bausteinaufrufs $\text{mag3}(x, x, 5)$ Abb.2: Graphische Darstellung der Bausteinaufrufe $\text{mag3}(x, x, ?)$ **Aufgabe 2:**

In diesem Sinn kannst du weiter experimentieren und entdecken. Notiere deine Ergebnisse in übersichtlicher Form.

Zusammenfassung - Mathematik an magischen Quadraten

- Die obigen Forschungsarbeiten mit Hilfe des Bausteins

$$M = \text{mag3}(i, h, k) := \begin{pmatrix} 2k - i & 2k - h & h + i - k \\ h + 2i - 2k & k & -h - 2i + 4k \\ -h - i + 3k & h & i \end{pmatrix}$$

haben gezeigt, dass in den magischen Quadraten viel Mathematik verborgen ist.

- Man kann leicht nachweisen, dass die Summe der Elemente jeder Zeile bzw. der jeder Spalte und die Summe der Diagonalelemente von M immer gleich ist, hier ist die magische Summe $s = 3k$, also das Dreifache des mittleren Elements. Zur Rechnung kann die Zeilenmatrix $[1 \ 1 \ 1]$ bzw. die Spaltenmatrix $[1 \ 1 \ 1]^T$ benutzen.
- Alle Matrizen der Form $\text{Zahl} * \text{mag3}(i, h, k)$, z.B. $4 * \text{mag3}(i, h, k)$, sind wieder magische Quadrate.
Hinweis: Bei $4 * \text{mag3}(i, h, k)$ wird jedes Element von $\text{mag3}(i, h, k)$ mit 4 multipliziert.
- Man kann sogar beweisen: Wenn A und B (zueinander passende) magische Quadrate sind, dann sind auch die „Linearkombinationen“ $r_1 * A + r_2 * B$ (mit $r_1, r_2 \in 3$) magische Quadrate.
- Für die Parameter i, h und k in $\text{mag3}(i, h, k)$ kann man Einsetzungen vornehmen, die zu zahlreichen neuen Erkenntnissen führen. Verwendet man auch die Einsetzung „ x “, so können auch graphische Darstellungen mit bemerkenswerten Eigenschaften erzeugt werden (parallele Geraden, Geraden gehen durch einen Punkt usw.).
- Aus der Literatur oder dem Internet kann man sich andere Formeln für magische Quadrate (auch größer als $3 * 3$) besorgen. Viele der oben genannten Eigenschaften lassen sich dann sofort übertragen.
- Die Formeln für magische Quadrate kann man sich z. B. aus (umfangreichen) linearen Gleichungssystemen besorgen, indem man für alle Zeilensummen, Spaltensummen und Diagonalsummen eine Gleichung notiert, z. B. für

a	b	c
d	e	f
g	h	i

$$a+b+c = s \text{ (magische Summe) usw.}$$

Das Gleichungssystem – in diesem Fall 8 Gleichungen mit 9 Variablen – kann dann mit Hilfe eines CAS gelöst werden.

9.3.4 Weitere Entdeckungsreisen

Mit dem ersten Beispiel geht die Reise kurz in die Welt der Primzahlen, bei Reise 2 begeben wir uns auf einen U-Bahnhof in Lissabon.

Primzahl?

Aufgabe: Ist $T(n)$ ein Primzahlerzeuger? $T(n)=n^2 + n + 41$, dabei ist n eine natürliche Zahl.

Experimente:

a) Hier kann der Schüler mit verschiedenen n -Werten experimentieren. Ist $T(n)$ eine Primzahl?

b) Der Rechner kann das mit $\text{factor}(T(n))$ feststellen.

c) Endlich könnte der Schüler auf den Ansatz **seq(factor(n^2+n+41),n,1,50,1)** kommen und die Werte dazu betrachten. - Für $n=41$ und $n=42$ liegt keine Primzahl vor. Wann noch?

Nun kann in anderen Intervall viel geforscht werden.

`VECTOR(FACTOR($n^2 + n + 41$),n,1,200)`, in der Syntax von DERIVE 6

[43, 47, 53, 61, 71, 83, 97, 113, 131, 151, 173, 197, 223, 251, 281, 313, 347, 383, 421, 461, 503, 547, 593, 641, 691, 743, 797, 853, 911, 971, 1033, 1097, 1163, 1231, 1301, 1373, 1447, 1523, 1601, **41·41**, **41·43**, 1847, 1933, **43·47**, 2111, 2203, 2297, 2393, **47·53**, 2591, 2693, 2797, 2903, 3011, 3121, **53·61**, 3347, 3463, 3581, 3701, 3823, 3947, 4073, 4201, **61·71**, 4463, 4597, 4733, 4871, 5011, 5153, 5297, 5443, 5591, 5741, 71·83, 6047, 6203, 6361, 6521, **41·163**, **41·167**, 7013, **43·167**, 7351, 7523, 43·179, 7873, 83·97, 8231, 47·179, 8597, 8783, 8971, 9161, 47·199, 9547, 9743, 9941, 10141, 10343, 53·199, 10753, 97·113, 11171, 11383, 11597, 11813, 53·227, 12251, 12473, 12697, 12923, 13151, 13381, 13613, 61·227, 14083, 14321, 14561, 113·131, 41·367, 41·373, 15541, 15791, 61·263, 43·379, 16553, 16811, 43·397, 17333, 17597, 17863, 18131, 18401, 71·263, 18947, 47·409, 19501, 131·151, 20063, 20347, 47·439, 20921, 21211, 21503, 71·307, 22093, 22391, 22691, 22993, 23297, 23603, 23911, 53·457, 24533, 24847, 25163, 83·307, 25801, 151·173, 53·499, 41·653, 41·661, 27431, 27763, 28097, 28433, 28771, 43·677, 29453, 83·359, 43·701, 30491, 30841, 31193, 31547, 61·523, 32261, 32621, 32983, 33347, 33713, 173·197, 47·733, 97·359, **61·577**, 35573, 35951, **47·773**, 36713, 37097, 37483, 37871, 38261, 38653, 39047, 39443, 39841, 40241] -

Aufgabe:

Zu welchem n gehört $47 \cdot 773$?

Kacheln – Konstruieren durch schrittweises Experimentieren

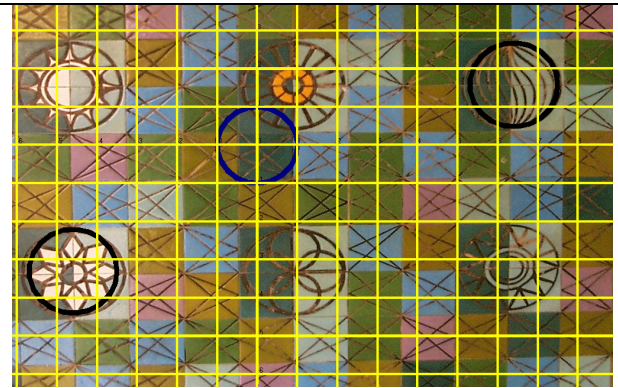
Aufgabe:

Das folgende Bild (Kacheln in einem U-Bahnhof von Lissabon) kann in vielfacher Hinsicht zum Thema „Entdecken – experimentieren“ verwendet werden.

- Analysiere das Geradenmuster
- Erläutere den Aufbau der Kreisfiguren
- Zeichne mit deinem CAS eine der Kreisfiguren nach
- Bestimme die Kreisgleichungen und überprüfe sie durch Zeichnung der Kreise auf dem Bild



Abb. 9.3.3a

Abb. 9.3.3b: In experimenteller Arbeit wurden schon zwei Kreise gefunden. Ausgangskreis war der Einheitskreis $x(t)=\cos(t)$, $y(t)=\sin(t)$

f1: $u+0*x$
 f2: u,x
 f3: $\cos(t),\sin(t)$
 f4: $1.1\cos(t)+6.4,1.1\sin(t)+1.58$
 f5: $1.1\cos(t)-4.6,1.1\sin(t)-3.3$

das (gelbe) Koordinatensystem

der Einheitskreis
 der rechte Kreis, mit Blick auf den Einheitskreis und durch Experimentieren entstanden
 Kreis links unten

Besonders das letzte Beispiel macht bewusst:

- Eins der besten Experimentierfelder ist das Nachkonstruieren (auch nur in Teilen) einer Vorlage.
- Das anspruchsvollste Experimentierfeld ist vermutlich die Animation eines (mathematischen) Sachverhalts– siehe hierzu das Kapitel 4, besonders 4.2.

In ähnlicher Weise wie oben durchgeführt kann man es für jeden passenden Hintergrund machen oder auch einfach nur eine Papier-Bildvorlage auf dem Bildschirm nachstellen. Zu dieser Methode finden sie noch Näheres im Kapitel 8. Mathematik auf Hintergrundbildern

9.4 Randthemen des Lehrplans gewinnen an Bedeutung

Viele Lehrpläne nennen Randthemen oder zusätzliche Themen, von denen die erfahrenen LehrerInnen wissen, dass sie zuweilen für den Unterricht mehr bringen als die üblichen Standardthemen, weil sie

- neue und oft interessante mathematische und außermathematische Felder erschließen,
- sich häufig mit Standardthemen vernetzen lassen,
- weil sie den SchülerInnen einen umfassenderen Blick auf die Mathematik ermöglichen.

Im Grunde weisen solche Themen auch aus, wie fragwürdig manche Curricula sind, insbesondere die in diesen Jahren in Kraft tretenden Kerncurricula (Stand 2007), die so manche schon existierenden Unterrichtsmodule wieder gestrichen haben und sich meistens in übertriebenem Maße auf die allgemeinen und fachlichen Kompetenzen stützen ohne gleichzeitig auch neue fachliche Inhalte zu berücksichtigen. **Gerade der zunehmende Einsatz von CAS im Unterricht lässt hoffen, dass diese falschen Entwicklungen wieder korrigiert werden.**

Musterbeispiele für wichtige, aber vernachlässigte fachliche Themen sind

- **die völlig unterschätzten neuen Möglichkeiten von Parameterdarstellungen $[x(t), y(t)]$** , die durch CAS-Einsatz heute sehr wirkungsvoll und leicht nutzbar sind sowie
- **die diversen Anwendungen von Matrizen**, etwa in Form von Abbildungsmatrizen (Computergrafik) oder mehrstufigen Prozessen in der Wirtschaft oder Biologie. Matrizen sind für die Lineare Algebra ähnlich wichtig wie Funktionen in der Analysis. Sie könnten den durch immer wiederkehrende Aufgaben über Punkte, Geraden, Ebenen gekennzeichneten konservativen Kurs „Analytische Geometrie und Lineare Algebra“ wesentlich befruchten. Vorschläge hierzu liegen in vielen Veröffentlichungen vor.

Die beiden hier genannten Themen werden unten unter Berücksichtigung von CAS-Einsatz detaillierter ausgeführt. Andere – hier nicht weiter betrachtete – Themen sind u.a. Splines, Regression, Iteration und Rekursion, endliche Mathematik, ...

9.4.1 Parameterdarstellungen $[x(t), y(t)]$

Aus einer Vortragsankündigung

Unterricht mit Parameterdarstellungen $[x(t), y(t)]$
 - Beispiele aus beiden Sekundarstufen -
 Dr. Eberhard Lehmann

In der Regel erfolgt die erste Begegnung mit Parameterdarstellungen (PD) recht spät in der vektoriellen Analytischen Geometrie (Geradengleichung). Neue Schulbücher führen jedoch schon in der Sekundarstufe 1 in PD ein und haben dadurch frühzeitig noch ein andersartiges Koordinatensystem zur Verfügung. Dieses kann z.B. auf einfache Weise zur Umkehrung von Grafen benutzt werden. Auch der Einheitskreis lässt sich besonders gut mit der Darstellung

$x(t)=\cos(t)$, $y(t)=\sin(t)$ zeichnen (Trigonometrie, Klasse 10).

Durch Aufgabenvariationen ergeben sich daraus neue Experimentierfelder, die den Einsatz von Computeralgebra-Systemen nahe legen, denn diese bieten zahlreiche Möglichkeiten, Grafen mit Parameterdarstellung zu bearbeiten. Damit erschließt sich in der Sekundarstufe 2 ein weites Feld von Parameterkurven (Zykloiden, Astroiden, usw.).

Literatur: www.snafu.de/~mirza mit mehreren Beiträgen zu PD insbesondere zu dem obigen Vortrag, siehe

Vorträge - 2005

< [Parameterdarstellungen \$x\(t\), y\(t\)\$ in den Sekundarstufen 1 und 2](#), MNU-Kongress, Bln 2005 >

Dieses Thema wird in fast allen Lehrplänen sträflich vernachlässigt. Dabei sprechen zahlreiche Gründe für eine Aufnahme von Parameterdarstellungen.

- Die einseitige Ausrichtung auf Funktionen der Form $y = f(x)$ wird aufgebrochen.
- Die SchülerInnen lernen ein anderes wichtiges Koordinatensystem kennen
 $x = x(t)$, $y = y(t)$.
- Dabei kann alles, was mit $y = f(x)$ gemacht wird, auch in Parameterdarstellung gemacht werden: $x = t$, $y = f(t)$ – und schon hat man's.
- Bei Umkehrfunktionen lernen die Schüler „vertausche x und y “. Gerade das geht in Parameterdarstellung sehr gut: Aus dem Graphen $[x(t), y(t)]$ wird einfach $[y(t), x(t)]$. Damit

kann der Umkehrgraph – ohne den umgeformten Term zu kennen – sofort gezeichnet werden.

- Parameterdarstellungen sind sehr vielseitig verwendbar.
 - Sie erschließen für die SchülerInnen eine völlig neue Mathe-Welt mit vielen, insbesondere auch graphischen und ästhetischen Überraschungen.
 - Es gibt diverse Anwendungsprobleme.
 - Die obigen Möglichkeiten sind in der Schulbuchliteratur und in Fachzeitschriften gut dokumentiert. Beispielsweise gibt es in der Schulbuchreihe „Neue Wege“ (Schroedel-Verlag) ab Klasse 8 immer wieder auch Texte und Aufgabenstellungen zu Parameterdarstellungen und damit zu der anderen Kurvenwelt.
- Und

• **Jedes CAS kann leicht und gut mit Parameterdarstellungen umgehen!**

Das Vortragsprogramm zeigt etliche der daraus erwachsenden Möglichkeiten:

1. Ein Blick in den neuen Lehrplan für die Sekundarstufe 2
2. Ein neues Schulbuch (Kl. 5-10), das viele der heutigen Forderungen an den Mathematik-Unterricht Erfüllt
3. Aber schon in Klasse 7 kann es eine erste Begegnung mit Kardioiden geben!
4. Eine tragende Fortsetzung ergibt sich beim Thema „Umkehrfunktionen“
5. Eine Unterrichtsstunde in Klasse 10 oder 11 zur Einführung von Parameterdarstellungen
6. Eine Veranschaulichung der Entstehung von Parameterkurven $(x(t), y(t))$, z.B. einer Astroide aus den beiden Ausgangskurven $x(t)$ und $y(t)$.
7. Abituraufgabe - Zykloiden am Fahrrad
8. Das Sonderheft des Leistungskurses Mathematik (Lehmann, 2000) mit Schülerbeiträgen zu Parameterkurven und Polarkoordinaten
9. Mit Parameterkurven experimentieren
10. Kardioiden-Animation

Ein Vortragsprogramm

Im Folgenden werden einige wichtige Parameterdarstellungs-Stationen auf dem Weg durch die Schulmathematik aufgezeigt. Das erfolgt an Hand unterrichtsrelevanter Aufgabenstellungen.

→ **Station A:** Schon in Klasse 7 kann es eine erste Begegnung mit Kardioiden geben!

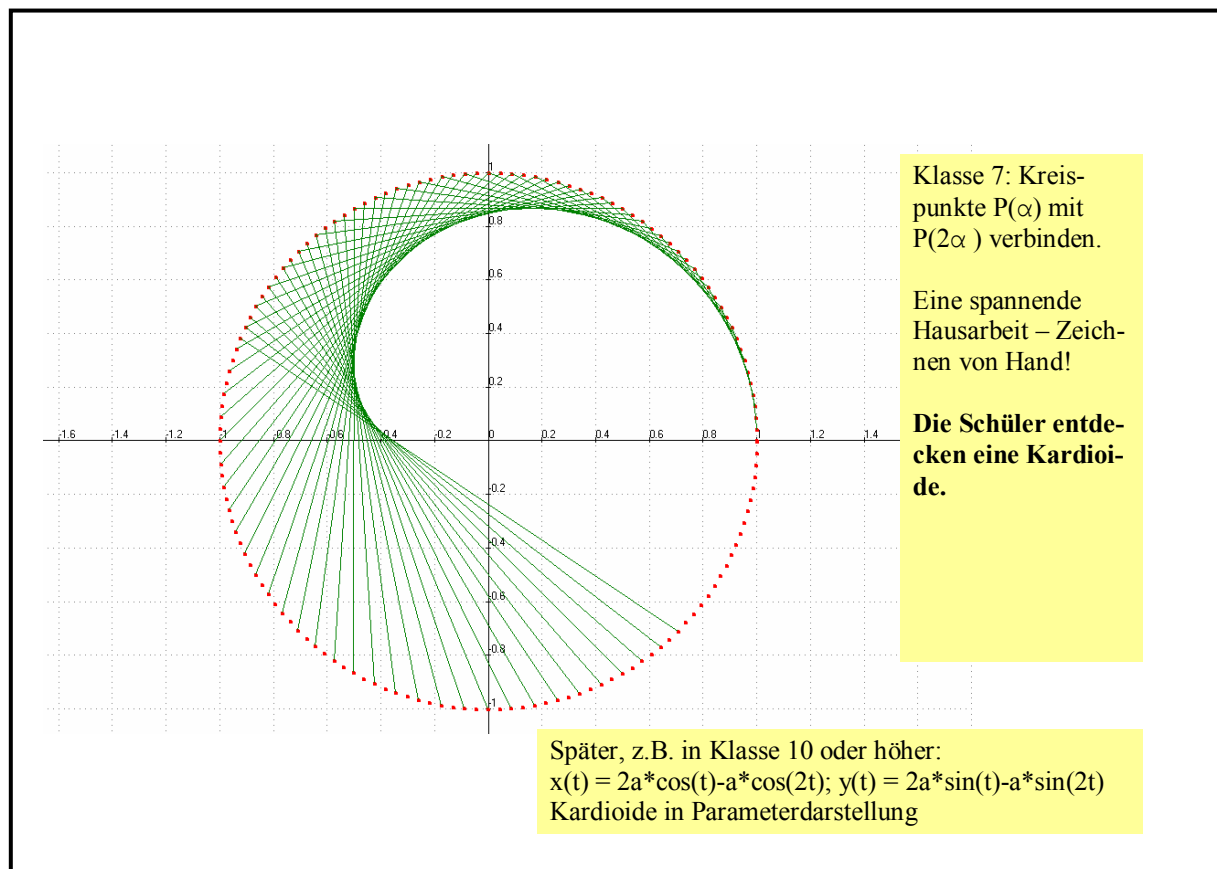


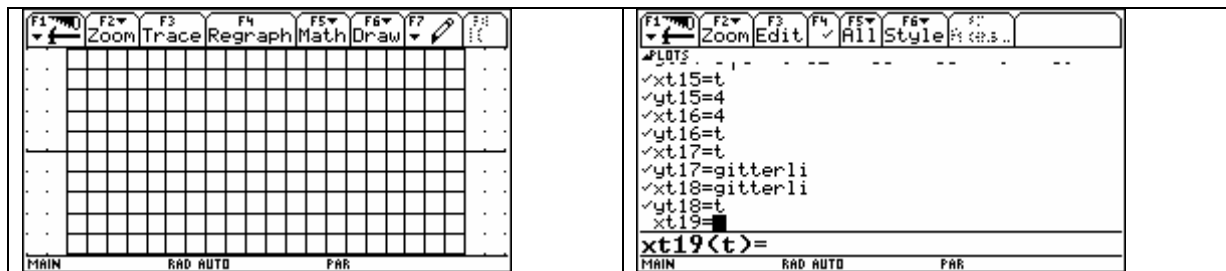
Abb. 9.4.1a

→ **Station B:** Parameterdarstellung einführen

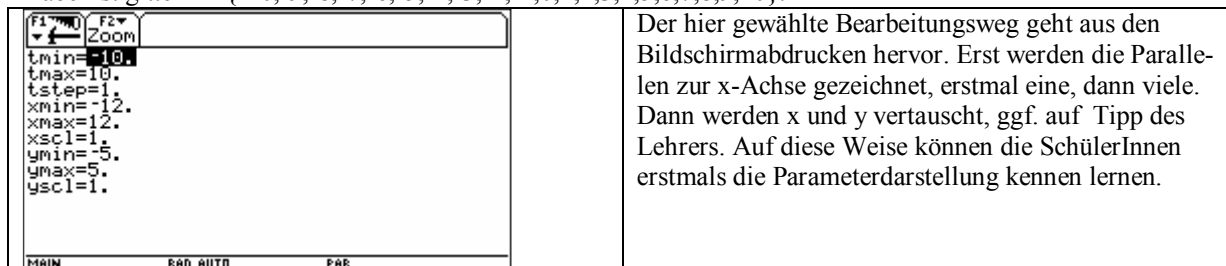
Natürlich gibt es zur Einführung viele Wege, auch abhängig von der Klassenstufe.

Problemstellung (etwa in Klasse 8 beim Thema „Geraden“ möglich oder schon vorher)

Wie kann man ein Koordinatensystem mit dem CAS nachzeichnen – gemeint sind die achsenparallelen Gitterlinien?



Dabei ist $\text{gitterli} = \{-10, -9, -8, -7, -6, -5, -4, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10\}$.



→ Station C: Geradengleichung in Parameterdarstellung
(aus „Neue Wege“, Klasse 8, Ausgabe Berlin, Seite 111, Aufgabe 2)

Ein Schiff erscheint auf dem Radarschirm im Punkt (0, 4). Es fährt auf einem geradlinigen Kurs. Nach einer Stunde ist es 20 Seemeilen weiter östlich und 15 Seemeilen weiter nördlich. Die Fahrt des Schiffes kann man mit zwei Gleichungen beschreiben:

$$x(t) = 20t, y(t) = 4 + 15t.$$

a) Man kann überprüfen, ob die Gleichungen stimmen. Setze dazu in die Gleichungen für t einmal 0 und einmal 1 ein. Was stellst Du fest?

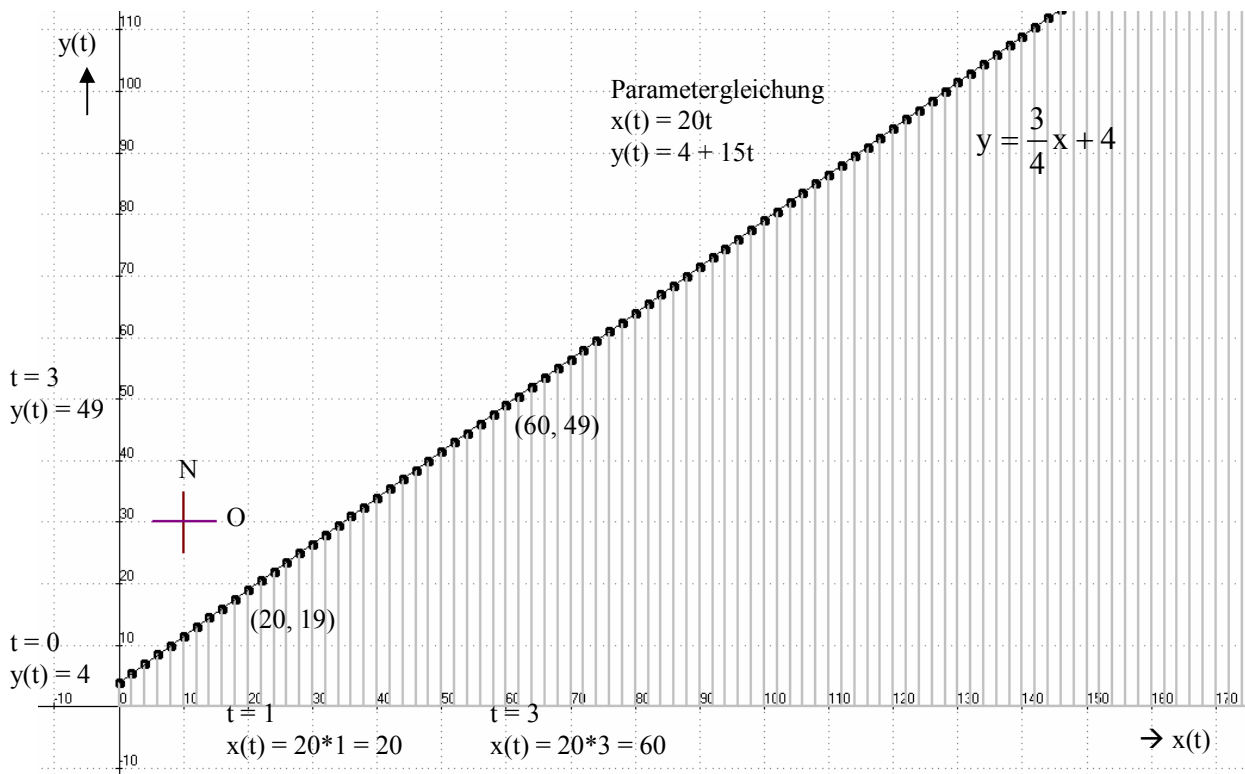


Abb. 9.4.1b: Darstellung des Sachverhalts mit ANIMATO

b) Wo wird sich das Schiff in 4 Stunden befinden?

c) Übertrage das Koordinatenkreuz in dein Heft und trage den Kurs des Schiffes ein. Gib den Kurs auch mithilfe einer Geradengleichung der Form $y = mx + b$ an. Vergleiche m und b mit den Daten in den Parametergleichungen für $x(t)$ und $y(t)$.

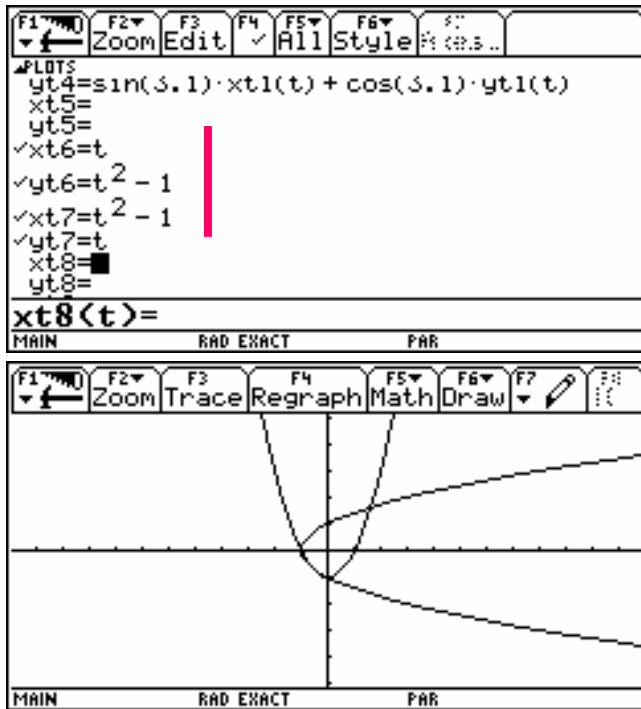
t	xt20	yt20
0.	0.	4.
1.	20.	19.
2.	40.	34.
3.	60.	49.
4.	80.	64.
5.	100.	79.
6.	120.	94.
7.	140.	109.

Abb.9.4.1c: Darstellung mit dem Voyage 200

Rechnung zu Teil c: $y = 4 + 15t = 4 + 15 \frac{x}{20} = \frac{3}{4}x + 4$

Station D: Zeichnung der Umkehrfunktion zu $y = x^2 - 1$

Eine nachhaltige Fortsetzung oder erstmalige Einführung der Parameterdarstellung ergibt sich beim Thema „Umkehrfunktionen“. Hierzu ein Voyage-Bild: Parameter-Editor mit Parabel $[[x(t) = t, y(t) = t^2 - 1]]$ und Vertauschung. Die im Unterricht stets gelehrt Vertauschung „vertausche x und y“ kann hier sofort durchgeführt werden. Die sonst übliche Auflösung von $x = g(y)$ nach y – die ja oft auch nicht gelingt – ist unnötig. Man kann den Umkehrgraph trotzdem zeichnen.



Auf diese Weise kann zu jedem Graphen der Umkehrgraph gezeichnet werden, ohne dessen Gleichung zu kennen!

Abb. 9.4.1d

Station E: Möglichkeiten in Klasse 10

(Abbildung aus „Neue Wege“, Klasse 10, , Seite 179, Schroedel-Verlag, 2004)

6.5 Kurven in Parameterdarstellung mit trigonometrischen Funktionen

6.5 Kurven in Parameterdarstellung mit trigonometrischen Funktionen

Parameterdarstellungen von Kurven haben wir bereits bei den linearen und quadratischen Funktionen kennen gelernt. Mithilfe der trigonometrischen Funktionen lassen sich nun viele andere interessante Kurven erzeugen, die sowohl in der Natur vorkommen als auch in physikalischen oder technischen Anwendungen eine Rolle spielen. Mit den bisher erworbenen Kenntnissen in der Geometrie und vor allem der Trigonometrie lässt sich das Zustandekommen von Kreisen, Ellipsen, Spiralen und anderer Parameterkurven verstehen und mit dem grafischen Taschenrechner veranschaulichen.

Was dich erwartet

Danach werden auf den Seiten 179-192 zahlreiche Kurven entwickelt und die Gleichungen angewendet. Einen kleinen Eindruck von den Möglichkeiten geben die unten folgenden Voyage-Bilder.

Abb. 9.4.1e

Anknüpfungspunkt in Klasse 10 ist der Einheitskreis, der ja bei der Einführung der Winkelfunktionen eine wichtige Rolle spielt. Dabei wird im Unterricht häufig die Gelegenheit verpasst, zu erarbeiten, dass sich jeder Punkt auf dem Einheitskreis die Koordinaten $x(t) = \cos(t)$ und $y(t) = \sin(t)$ hat, siehe Abbildung.

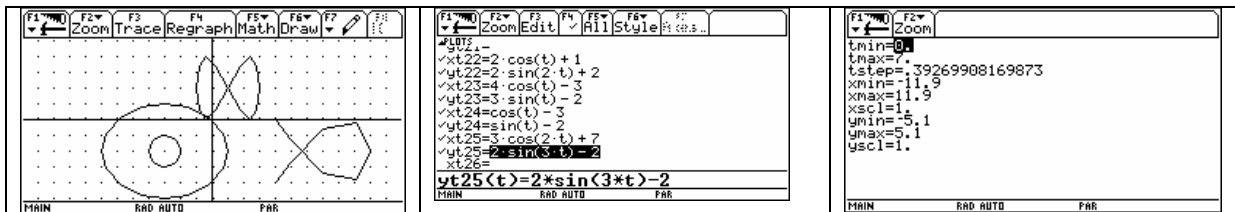
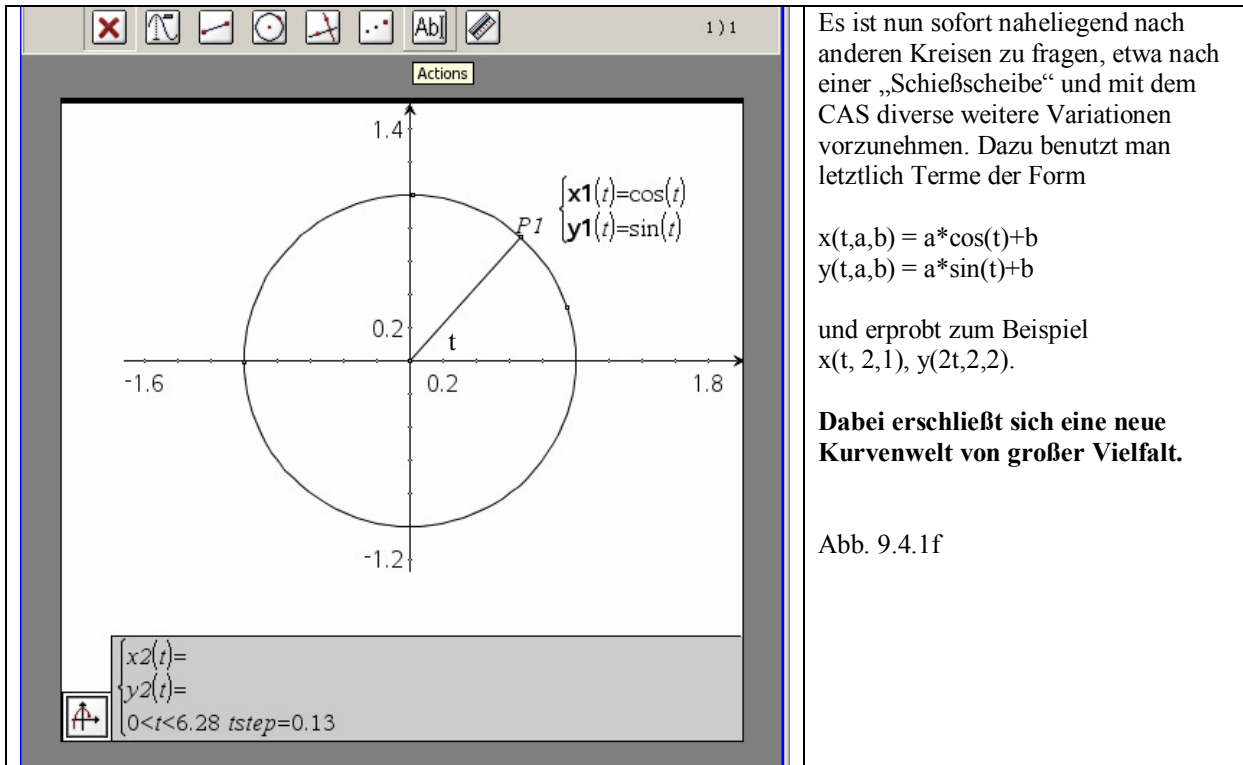


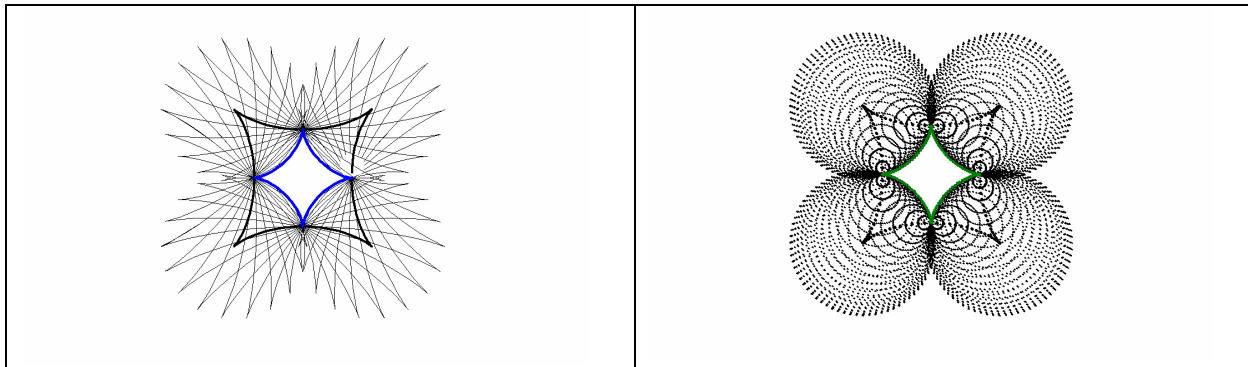
Abb. 9.4.1g

Station F: Komplexes in der Sekundarstufe 2


In der Sekundarstufe 2 kann man dann diese Ansätze fortsetzen und

- Die Gleichungen noch mehr hinterfragen (Herleitungen)
- Komplexere Anwendungen bearbeiten lassen
- Auch Polarkoordinaten behandeln (das ist übrigens auch schon in Klasse 7 möglich)
- Vergleiche anstellen zwischen den Koordinatensystemen (Vorteile, Nachteile)
- Nach den Kurventermen in verschiedenen Koordinatensystemen fragen (Herleitungen)
- Die Kurven zumindest teilweise systematisch ordnen

Aus der Astroidenwelt



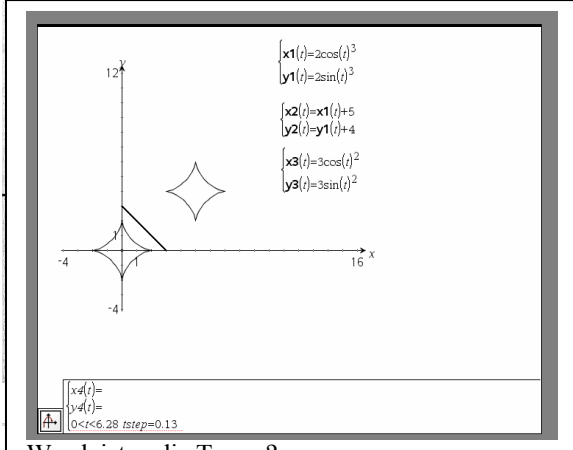
Wandkacheln



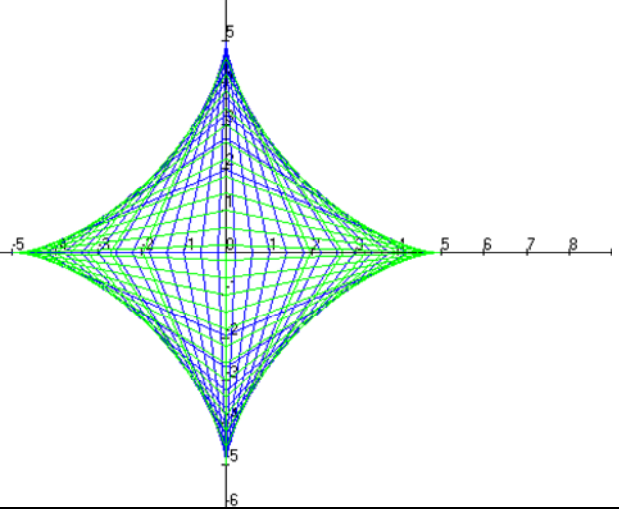
Astroiden

f1: $x, 0, 0, \sqrt{5^2 - x^2}$ // Leiter anlehnen
f2: $x, 0, 0, -\sqrt{5^2 - x^2}$

f8: $5\cos(t)^3, 5\sin(t)^3$ // Astroide



Was leisten die Terme?



Zum Abschluss wird hier noch eine von mir gestellte Klausuraufgabe abgedruckt.

Station G: Zykloiden am Fahrrad

Wichtiger Hinweis: TI-Eingaben und TI-Ausgaben sind mit Erläuterung übersichtlich zu dokumentieren



Gegeben ist der Zykloiden-Baustein
 $a \cdot t - b \cdot \sin(t) \rightarrow \text{zykx}(t, a, b)$
 $a - b \cdot \cos(t) \rightarrow \text{zyky}(t, a, b)$

Speichern Sie den Bausteinaufruf
 $\text{zykx}(t, 1, 2)$
 $\text{zyky}(t, 1, 2)$
im Graphik-Editor unter $x1(t)$ und $y1(t)$.

Aufgabe a) Skizzieren Sie den Graphen von $x1(t)$, $y1(t)$ für t Werte aus dem Intervall $I = [0, 4\pi]$, maßstabsgetreu auf kariertes Papier. Benutzen Sie ZoomSqr. Beachten Sie dabei charakteristische Punkte.

Aufgabe b) Bestimmen Sie die t -Werte des Punktes, der im Intervall $I = [0, 4\pi]$, zweimal durchlaufen wird. Geben Sie auch den x - und y -Wert des Punktes an.

Aufgabe c) Erläutern Sie Zusammenhänge zwischen den Rollbewegungen des abgebildeten Fahrrad-Vorderrads für verschiedene Lagen von Punkten (nicht nur auf dem Reifen) und geeigneten Bausteinaufrufen. Fertigen Sie Skizzen an. Beachten Sie auch Sonderfälle. – Hinweis: Vorgesehene Arbeitszeit etwa 30 Minuten.

Aufgabe d) Bestimmen Sie die Ableitung dy/dx (allgemein) mit dem Taschencomputer TI-92 (Weg notieren) und danach ausführlich durch Handrechnung. Was ergibt sich für $a = b$?

Aufgabe e) Bekanntlich kann man mit $(t, y_1(t))$ die Funktion $y_1(t)$ im gleichen Koordinatensystem darstellen wie die Parameterdarstellung $(x_1(t), y_1(t))$? Führen Sie die Darstellung durch, und skizzieren Sie den Graphen von $y_1(t)$ andersfarbig in das Koordinatensystem von Aufgabe a.

Aufgabe f) Berechnen Sie den Flächeninhalt der Fläche zwischen den Graphen von $(x_1(t), y_1(t))$ und $y_1(t)$ für t aus $[0, \pi]$ (fragliche Fläche schraffieren!).

Bewertungsvorschlag

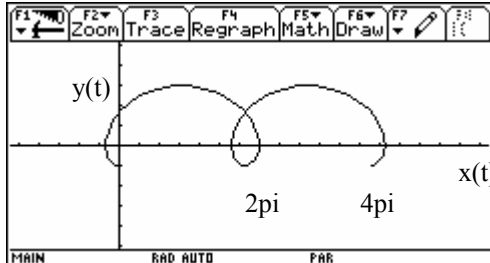
Hinweis: Die Schüler kennen die Arbeit mit Bausteinen und ihren Parametern. Der Computer wird bei dieser Aufgabe fast durchgängig verwendet - für Rechnungen und Zeichnungen. Bei d) ist auch eine Handrechnung vorgesehen.

Erwartete Teilleistungen, Erläuterungen	Anforderungsbereiche mit Bewertungseinheiten, ungefähre Bearbeitungszeit			
	AB 1	AB2	AB3	Zeit, etwa
Baustein eingeben, Eingabe der Parameterdarstellung, Erzeugung der Zeichnung in passendem TI-Fenster, Übernahme der Zeichnung auf Papier unter Beachtung charakteristischer Werte (leicht, aber zeitaufwendig)	8	0	0	20'
a) Lösungen sind $t = 4.38769$ und $t = 8.17868$ $x(t) = 2\pi$, $y(t) = 1.638$ Hinweis: Vermutlich denken die Schüler $zyky(2\pi, 1, 2)$ liefert den richtigen Wert. Auf den Ansatz $Solve(zykx(t, 1, 2) = 2\pi, t)$ muss man erstmal kommen. Daher AB 3.	0	0	4	10'
c) <ul style="list-style-type: none"> Für $a=b$ "gewöhnliche" Zykloide, Punkt auf dem Reifen, Skizze $b < a$ Zykloide oberhalb x-Achse, Punkt im Innern Skizze $b > a$ "verschlungene" Zykloide, Punkt außerhalb, Skizze Sonderfälle, z.B. $b \rightarrow 0$, $b=0$ (Punkt im Mittelpunkt des Kreises), Skizze Fallunterscheidungen, Vernetzung mit Fahrrad-Anwendung, vorgesehene Zeit angegeben, um den erwarteten Umfang der Bearbeitung zu kennzeichnen	0	9	0	30'
d) $dy/dx = (dy/dt) / (dx/dt)$, Ansatz partielle Ableitung, am TI mit Dokumentation, Handrechnung ausführlich	3	0	0	15'
e) Neuen Graphen m.H. von TI finden und in Abbildung hineinskizzieren	4	0	0	10'
f) Ansatz finden, komplexe Eingaben am TI, Integral $\int (y_1(t) \cdot x_1'(t) - y_1'(t) \cdot x_1(t)) dt$ von 0 bis π , Ergebnis ist gleich 2π . Komplexe CAS-Eingaben unter Verwendung passender Bausteinaufrufe	0	6	0	
Summe 38 BE (100%)	18	18	4	
	42%	47%	11%	

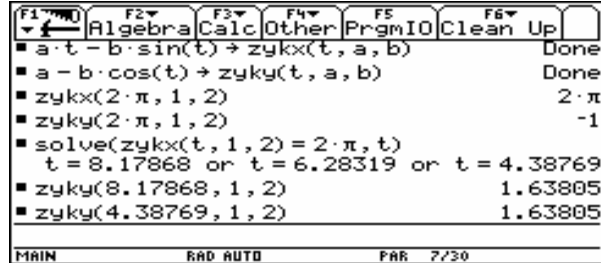
Weitere Lösungen, Erläuterungen

Aufgabe b) Bestimmen Sie die t Werte des Punktes, der im Intervall $I = [0, 4\pi]$, zweimal durchlaufen wird. Geben Sie auch den x - und y -Wert des Punktes an.

Lösung zu a)

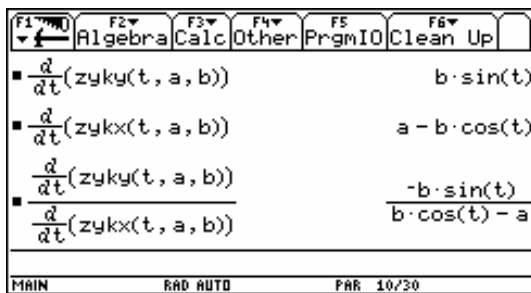


Lösung zu b)

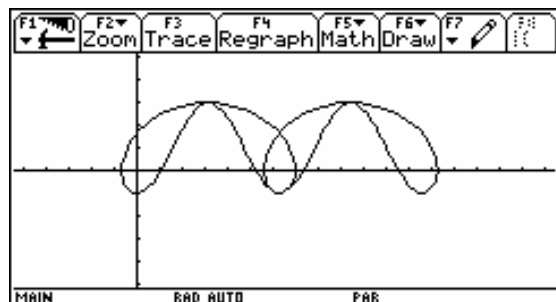
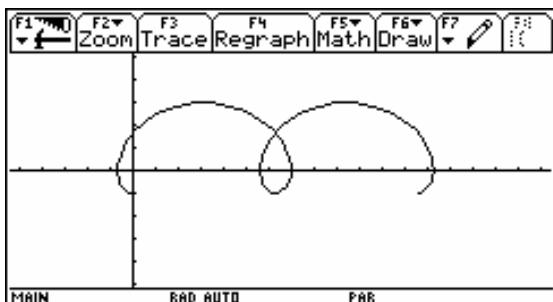


Lösung zu b) Situation erkennen! Bausteineingabe, deren Test. Gleichungsansatz, 3 Lösungen, Die richtigen Lösungen herausfinden, y -Werte berechnen

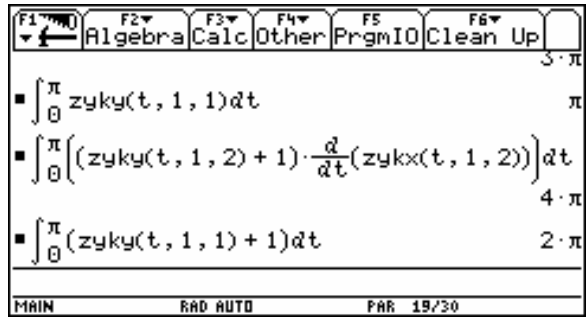
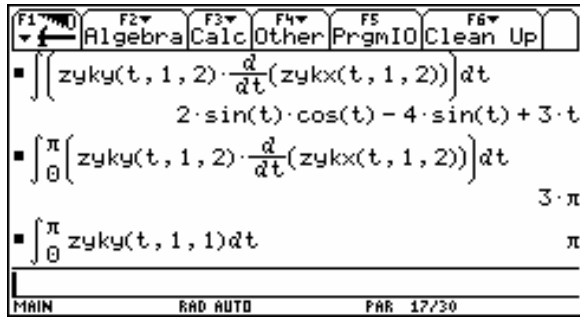
Aufgabe d) Bestimmen Sie die Ableitung dy / dx (allgemein) mit dem TI-92 (Weg notieren) und danach ausführlich durch Handrechnung. Was ergibt sich für $a = b$?



Aufgabe e) Bekanntlich kann man mit $(t, y_1(t))$ die Funktion $y_1(t)$ im gleichen Koordinatensystem darstellen wie die Parameterdarstellung $(x_1(t), y_1(t))$? Führen Sie die Darstellung durch, und skizzieren Sie den Graphen von $y_1(t)$ andersfarbig in das Koordinatensystem von Aufgabe a.

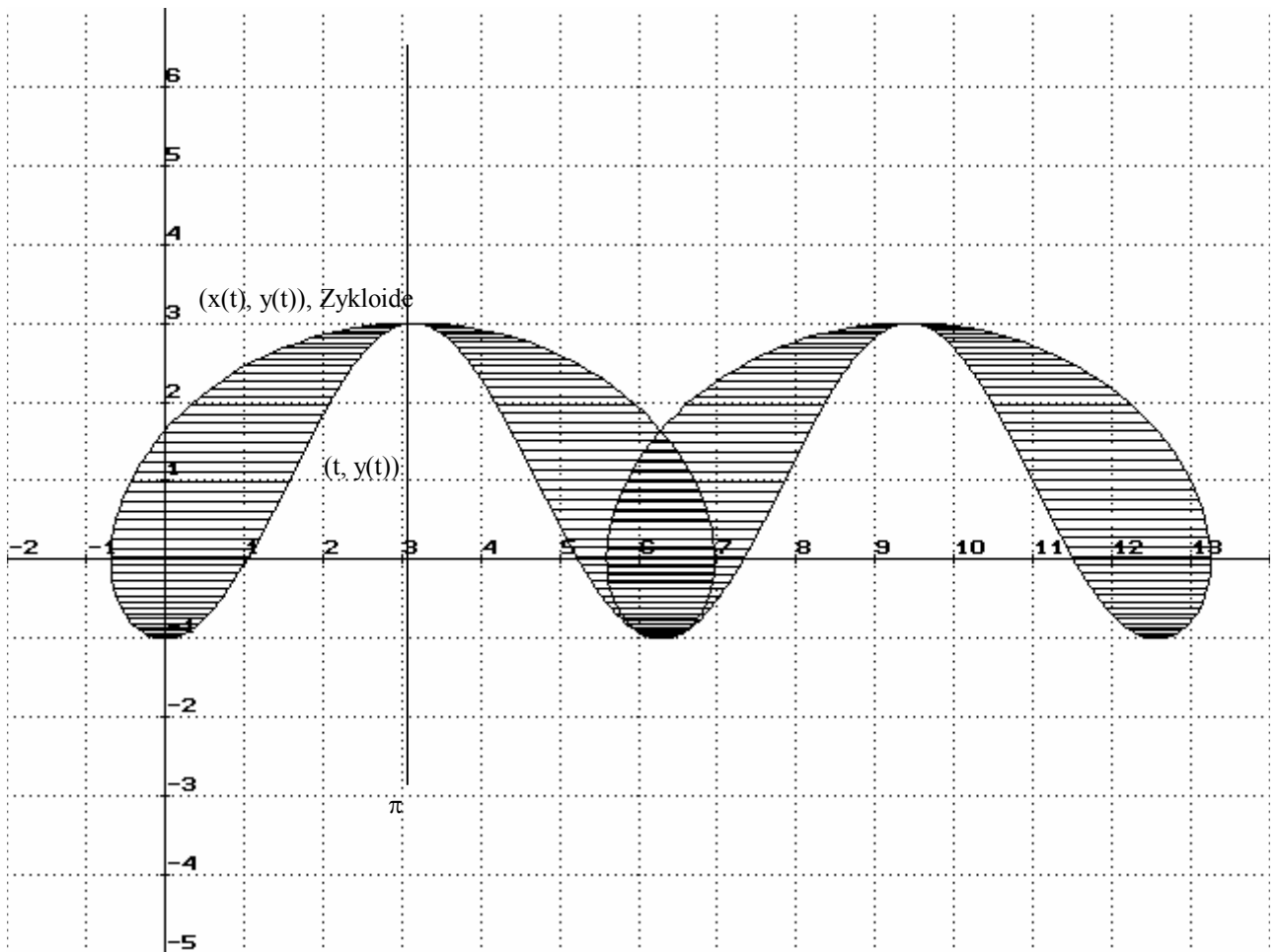


Aufgabe f) Berechnen Sie den Flächeninhalte der Fläche zwischen den Graphen von $(x_1(t), y_1(t))$ und $y_1(t)$ für t aus $[0, \pi]$ (fragliche Fläche schraffieren!).



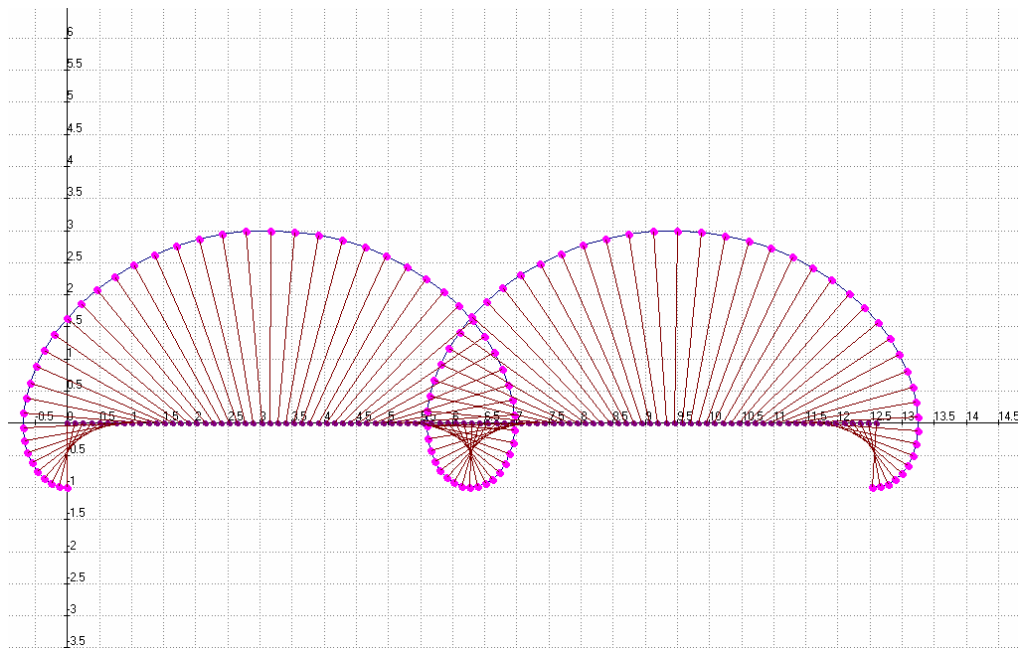
Beide Kurven wurden um 1 angehoben. Die Differenz bleibt 2π .

$$\int_0^\pi (y1(t) \cdot x1'(t) - y1'(t) \cdot x1(t)) dt$$



Ergänzungen

Eine Animation der Zykloiden-Entstehung



Programm Zykloiden-Demo	Erläuterung
f1: $a*t - b*\sin(t)$	$= x(t,a,b)$ Zykloidenbaustein
f2: $a - b*\cos(t)$	$= y(t,a,b)$
f3: f1(1,2),f2(1,2)	$1*t - 2*\sin(t), 1-2*\cos(t)$, die Zykloide
f4: t,0	so läuft t, wenn f3 erzeugt wird
f5: t,0,f1(1,2),f2(1,2)	Verbindungsstrecken (t,0) zu den Zykloidenpunkten

9.4.2 Matrizen mit CAS

9.4.2.1 Lineare Algebra und Analytische Geometrie – ein Kurskonzept mit Matrizen und Computereinsatz

Ausgangspunkt der Überlegungen ist das Buch

** [Lehmann, E.: *Lineare Algebra mit Matrizen und Vektoren*, Metzler-Verlag, 1990 – als Kopie erhältlich beim Autor mirza@snaflu.de].

Das folgende Inhaltsverzeichnis (Spalte 1) wird in Spalte 2 mit einigen Angaben zum Computereinsatz, insbesondere mit CAS, versehen. Die Angaben ermöglichen eine erste Orientierung.

Inhaltsverzeichnis, nach ** Man beachte die durchgehende Verwendung von Matrizen und die diversen Anwendungsbeispiele aus der Linearen Algebra	Computereinsatz / Software CAS und ANIMATO (für Abbildungsgeometrie im \mathbb{R}^2)
1. Tabellen - Matrizen	Die Eingabe von Matrizen erfolgt in der Regel bei einem CAS (z.B. Voyage 200) über einen Tabelleneditor.
2 Skalarprodukt, Matrizenmultiplikation 2.1 Materialverflechtung, Marktforschung 2.2 Einige besondere Matrizen 2.3 Matrizen in der Abbildungsgeometrie 2.4 Materialverflechtung, Modellerweiterung 2.5 Gesetze für das Rechnen mit Matrizen	In diesem Kapitel sind es in erster Linie die diversen Algorithmen , die nach einem CAS rufen. Wie in der linken Spalte nachlesbar, werden Matrizen in etlichen wirtschaftlichen Anwendungen verwendet. Sie lassen sich aber auch z. B. in der Kryptologie zum Verschlüsseln verwenden oder sind wertvoll bei der Arbeit mit magischen Quadraten. Die verschiedentlich angesprochenen Modellierungsprozesse sind ein Bindeglied zwischen der Mathematik der Matrizen und Anwendungen. Die Verwendung eines CAS ermöglicht eine Reduzierung des händischen Rechnens. Damit ergibt sich die zusätzliche Möglichkeit des experimentellen Arbeitens durch Parametervariation. Anwendungen führen oft auf besondere Matrizenformen (z. B. Drehstreckmatrizen, stochastische Matrizen, Bandmatrizen, ...), die sich mit dem CAS gut erforschen lassen. – Für abbildungsgeometrische Fragestellungen gibt es zusätzlich zum CAS spezielle Programme, z. B. <i>ANIMATO</i> . Mit dem CAS lassen sich Matrixengesetze etwa für (3,3)-Matrizen leicht nachrechnen. Alle grundlegenden Matrizenverknüpfungen (und noch viele weitere dazu) sind im CAS implementiert.
3 Analytische Geometrie 3.1 Matrizen - Vektoren - Geraden - Ebenen - Linearkombinationen 3.2 Skalarprodukte, Abstands- und Winkelberechnungen	Für die gängigen Objekte der Analytischen Geometrie lassen sich im CAS Bausteine definieren, mit denen dann rationell gearbeitet werden kann. Damit lassen sich die Schnittpunkte zwischen Geraden, Ebenen usw. auf ein Minimum reduzieren. Andere Objekte können auch in einem Ray-Tracing-Programm (zum Beispiel POVRAY) oder auch in DERIVE betrachtet werden: Kegel, Zylinder, usw. Die Verwendung des Ray-Tracing-Programms, führt in den Programmierbereich, in dem wieder Bausteine für diverse Objekte zum Einsatz kommen. Der Entwurf fotorealistischer Szenen macht die Anwendung für die SchülerInnen noch spannender.

<p>4. Lineare Gleichungssysteme</p> <p>4.1 Probleme, die auf LGS führen</p> <p>4.2 Eliminationsverfahren nach Gauß</p> <p>4.3 Rang einer Matrix, Lösungskriterien für LGS</p> <p>4.4 Anwendungen linearer Gleichungssysteme, u. a. aus der Analytischen Geometrie</p> <p>4.5 Homogene und inhomogene LGS</p> <p>4.6 Probleme bei der Lösung von LGS</p>	<p>Bei linearen Gleichungssystemen empfiehlt sich Computereinsatz in besonderem Maße, da er das lästige und fehleranfällige Handrechnen vermeiden hilft. Beim CAS sind es u. a. Befehle wie Solve(...) und Rref(), die die Gleichungslehre stark verändern. Andere Möglichkeiten zur Benutzung eines CAS finden sich bei der schrittweisen Ermittlung der Lösungen, siehe [Lehmann, E.: <i>Lineare Algebra mit dem TI-92, Texas Instruments 1999</i>].</p> <p>In der Schule wird der Gauss-Algorithmus benutzt, ggf. in verschiedenen Varianten. Von Interesse sind dabei auch schlecht-konditionierte Gleichungssysteme und sehr umfangreiche LGS (Anwendung u. a. in der Tomographie)</p>
<p>5. Vektorräume</p> <p>5.1 Magische Quadrate, Vektorräume</p> <p>5.2 Lineare Abhängigkeit</p> <p>5.3 Zeilenrang und Spaltenrang einer Matrix</p> <p>5.4 Basis, Dimension, Basistransformation</p>	<p>Ein besonders motivierendes Vektorraum-Modell sind magische Quadrate. Ein CAS dient zum Forschen, Entdecken, Formulieren von Vermutungen und deren Begründung. Dabei erweisen sich wieder CAS-Bausteine mit Parametern als sehr nützlich. Die Arbeit mit Bausteinen und ihren Parametern ist hier besonders einleuchtend.</p>
<p>6. Inverse Matrizen</p> <p>6.1 Begriff, Berechnung, Sätze</p> <p>6.2 Stücklistenproblem</p> <p>6.3 Input-Output-Analyse</p>	<p>Inverse Matrizen können auf verschiedene Weise berechnet werden. Ein leicht durchzuführender Algorithmus ist z. B. der von Faddejev. Seine Begründung ist allerdings schwieriger. Sie erfolgt über die Eigenwerttheorie und ist daher nur für Leistungskurse möglich, Literatur siehe unten. Ein Effizienzvergleich der Algorithmen bietet sich an. Wieder ist ein CAS geeignet, mit dem sich u.a. Modellrechnungen an den genannten Anwendungen durchführen lassen. U.a. treten hier Terme der Form $x = (E - T)^{-1} \cdot y$ auf. Interessant sind hier auch die Auswirkungen der Inversenbildung bei abbildungsgeometrischen Fragestellungen mit der zeichnerischen Darstellung im \mathbb{R}^2. Mit dem CAS lässt sich z. B. auch die Formel $(A \cdot B)^{-1} = B^{-1} \cdot A^{-1}$ entdecken. [E.Lehmann: <i>Lineare Algebra mit dem Computer, Teubner-Verlag 1983, S. 57 f. (u. a. Struktogramm zum Algorithmus von Faddejev)</i>]</p>
<p>7. Matrizenpotenzen, mehrstufige Prozesse</p> <p>7.1 Maschinenüberwachung, Irrfahrten</p> <p>7.2 Aus der Populationsdynamik</p> <p>7.3 Stochastische Matrizen</p>	<p>Das Berechnen von Matrizenpotenzen ist einfach, aber zeitaufwendig. Angesichts der vielen Anwendungen für Matrizenpotenzen kommt ein CAS gerade recht. Für spezielle Matrizen lassen sich für die Potenzen Formeln entwickeln.</p>

Lange Zeit bestand ein Kurs „Lineare Algebra und Analytische Geometrie“ überwiegend aus dem Durchführen langwieriger (und langweiliger) Rechnungen: Lösen linearer Gleichungssysteme, Bearbeiten von sogenannten „Hieb- und Stichaufgaben“, Bestätigen von Vektorräumen usw. Heute gewinnt dieser Kurs besondere Attraktivität, z. B., wenn man den oben beschriebenen Aufbau wählt. Abbildung 9.3.2.1a fasst die Ideen zusammen, die sich je nach Schwerpunktsetzung zu verschiedenen Kursabläufen verbinden lassen.

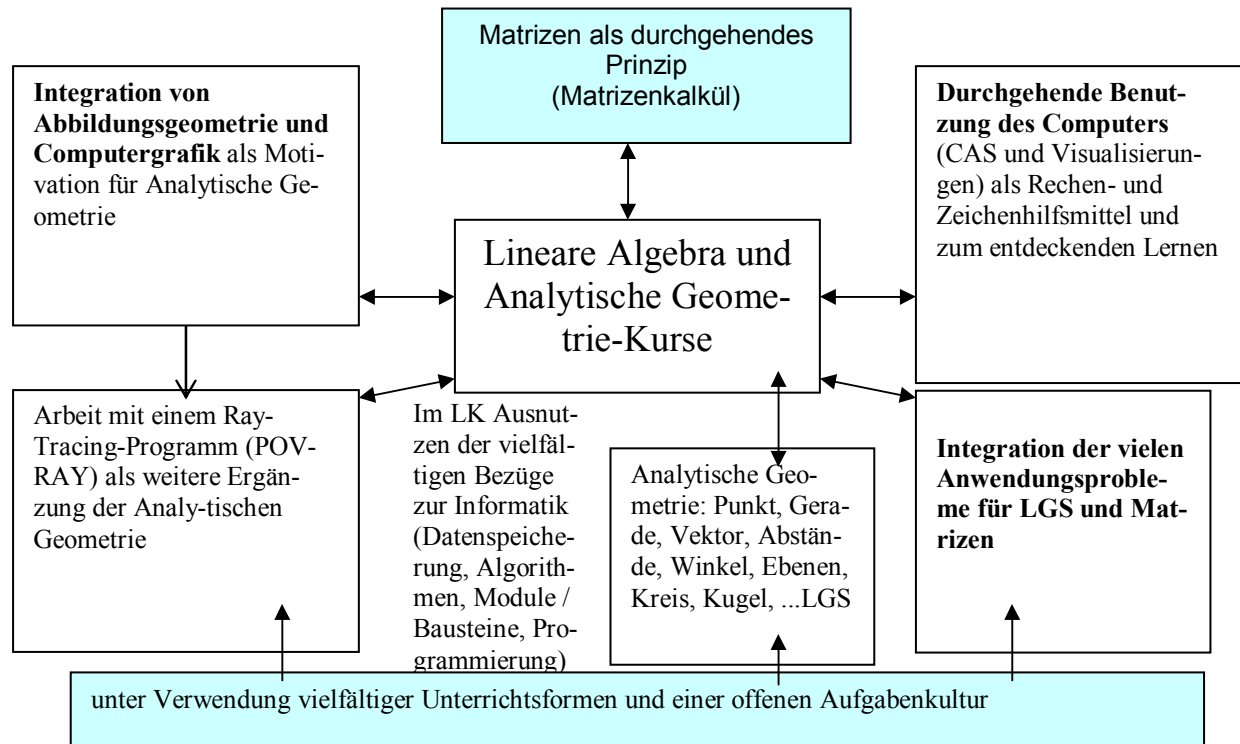


Abb. 9.4.2.1a: Ein Lineare-Algebra-Analytische Geometrie-Kurs auf der Basis des Matrizenkalküls als durchgehendem Prinzip – Vektoren sind spezielle Matrizen (einspaltig oder einzeilig)

Matrizen beim Zentralabitur

Es gibt Bundesländer, die auch im Zentralabitur Matrizen als wesentliche Elemente bei ihren Aufgabenstellungen zur Linearen Algebra / Analytischen Geometrie berücksichtigen. Beispielsweise wurden in Hamburg (Zentralabitur 2007) vier Anwendungsaufgaben mit Verwendung des Matrizenkalküls vorgelegt:

Fischzucht (Populationsmatrizen), Mäusepopulation, Spielzeugsteine (Materialverflechtung), Steuergeräte (Materialverflechtung).

Literatur

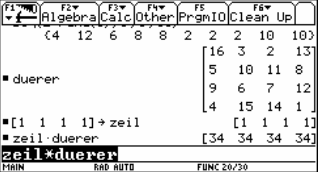
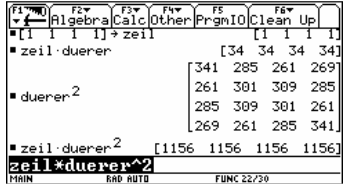
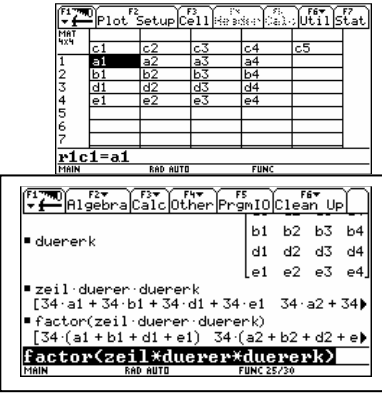
Eberhard Lehmann: *Lineare Algebra mit dem TI-92 (Matrizen und ihre Anwendungen, Analytische Geometrie, lineare Gleichungssysteme, Abbildungsgeometrie, Mathematik mit Bausteinen)* – Texas Instruments.

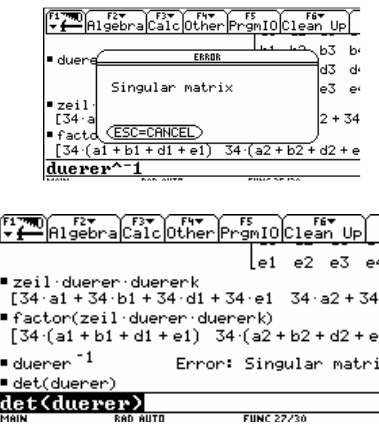
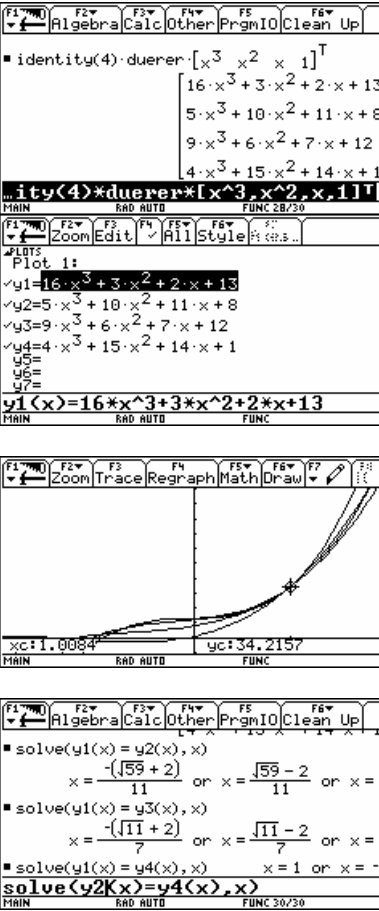
In dem Buch werden auch die meisten Matrizenoperationen vorgestellt.

9.4.2.2 Dürerquadrate – eine Beispielaufgabe mit CAS-Einsatz

Die hier vorgestellte Aufgabe zeigt, welche Vorteile der Einsatz von CAS mit sich bringt – auch in Abgrenzung gegen eine ausführliche Handrechnung.

Leistungskurs – Musteraufgabe aus der linearen Algebra, Computereinsatz unabdingbar

Aufgabentext, Teilaufgaben Entwurf: Dr. Eberhard Lehmann, Berlin, März 2006	Benötigte CAS-Anweisungen, Abbildungen	Immer noch benötigte manuelle Fertigkeiten, Abgrenzung gegen ausführliche Handrechnungen
<p>Albrecht Dürer verwendet in seinem Kupferstich „Melancholie“ das magische „Dürerquadrat“ (gleiche Zeilensummen, gleiche Diagonalsummen, gleiche Spaltensummen, Summenzahl = 34, Zahlen von 1 bis 16 (Eigenschaft #))</p> <p>a) Zeigen Sie unter Benutzung des Matrizenkalküls, dass die Spaltensummen tatsächlich 34 sind.</p>	<p>Eingabe des Dürerquadrats über den Matrizeneditor (Abb.)</p>  <p>Mit Hilfe des Vektors <i>zeil</i> werden die Spaltensummen geprüft.</p>	<p>Anmerkung: Zu dieser Aufgabe sollte man eine Abbildung der Kupferstichs vorlegen.</p>
<p>b) Zeigen Sie, dass auch D^2 ein magisches Quadrat ist – allerdings unter Verlust von (#). Hinweis 1: Führen Sie die notwendigen Rechnung mit Hilfe von Matrizenrechnung durch.</p>		<p>Schon das wäre angesichts der notwendigen Berechnung von 16 Skalarprodukten ein langwierige (und sich wiederholende gleichartige und langweilige) Handrechnung (##).</p>
<p>c) Beweisen Sie: Auch D^n, n aus N, ist magisch Hinweis 2: Der Beweis für die Zeilensummen reicht.</p>	<p>Eingabe von D^k allgemein über Matrizeneditor. Berechnung von $zeil * D * D^k$</p> 	<p>Beweis durch vollständige Induktion. Induktionsverankerung in Teil b). Induktionsvoraussetzung: D^k ist magisch mit der Summenzahl sk. Handrechnung mit den Termen in $zeil * D * D^k$ wäre sehr aufwendig. . Geschickt ausklammern und Benutzung von $a1 + b1 + c1 + d1 = sk$ (nach Induktionsvoraussetzung).</p> <p>Die Summenzahl von $D^{(k+1)}$ ist also $34 * sk$, die Matrix also magisch. Die Aussage gilt also für alle n aus N.</p>

<p>d) Ist auch die Inverse D^{-1} möglich? Begründen Sie das Ergebnis!</p>	<p>Rechnung zu D^{-1}, singuläre Matrix oder auch $\det(D)=0$.</p> 	<p>Inverse einer (4,4)-Matrix wäre mit Handrechnung viel zu zeitraubend und sehr fehleranfällig. Begründung für die Nichtexistenz durch die Rechnerausgaben.</p>
<p>e) Mit $E(4,4) \cdot D \cdot [x^3, x^2, x, 1]^T$ entstehen die 4 „Düerpolynome“. Stellen Sie diese zeichnerisch dar (y-Einheit = 10) und bestätigen Sie, dass alle vier Graphen einen gemeinsamen Punkt P haben.</p>	<p>Erzeugung der Düerpolynome, Zeichnungen, Lösung von 6 Polynomgleichungen</p> 	<p>Hier wird ein sicherer Umgang mit dem Matrizenkalkül benötigt. Die Bestimmung der Polynome muss man auch von Hand durchführen können. Alle folgenden Rechnungen und Zeichnung sind von Hand sehr aufwendig. Insbesondere die Lösungen der Gleichungen $y_1(x)=y_2(x)$ usw. ist von Hand nicht zumutbar – es sind Gleichungen dritten Grades. Wahl eines passenden Darstellungsbereichs, siehe angegebenen Punkt x_c, y_c.</p>
<p>f) Begründen Sie die Aussage: „Das Ergebnis für P kann eigentlich nicht überraschen!“</p>	<p>Insgesamt sind 6 Gleichungen zu lösen.</p>	<p>Text zu P(1,34): Bildet man für jedes Polynom $p(1)$, so muss sich 34 ergeben, da ja die Koeffizienten der Polynome gerade die Zahlen der Zeilen von D sind und deren Summe ist 34.</p>

Zusammenfassung – benötigt werden insbesondere die folgenden Kompetenzen

a) Rechnerkompetenzen: Matrizeneingabe über Matrizeneditor und im Home-Bereich
 Matrizenkalkül: $A \cdot B$, A^2 , A^{-1} , A' , Erzeugung von Einheitsmatrizen – Umgang mit dem y-Editor und den Zeichenfenstern, Verwendung von SOLVE – Dokumentationskompetenzen, Umgang mit Fehlermeldungen.

b) Hand- und Kopfkompentzen: Erkennen der notwendigen mathematischen Ansätze. Eigene Rechenfertigkeiten hier kaum gefordert, aber Verständnis für die Ansätze und Auswertung der Ergebnisse.

c) Fachliche Kompetenzen

9.4.2.3 Abbildungsgeometrie mit Matrizen – eine Grundlage der Computergrafik

Erfahrungsgemäß hat Computergrafik einen hohen Motivationswert für die Schüler. Bei vielen Anwendungen sieht der Schüler graphische Abbildungen, Bilder entstehen, werden überlagert von anderen, Animationen diverser Art führen Schüler durch Spielprogramme, usw. Damit entstehen auch für die Analytische Geometrie neue Möglichkeiten, eben durch Computergrafik und insbesondere durch Abbildungsgeometrie. Die folgende Abbildung nennt in Ergänzung zum vorigen Teilkapitel einige Aspekte für eine zeitgemäße Analytische Geometrie.

Wie fast jedes Buch zur Computergrafik zeigt, ist die Matrizenrechnung für dieses Gebiet ein wichtiges mathematisches Hilfsmittel. Damit wird eine Brücke geschlagen zur Matrizenrechnung in der linearen Algebra und damit verbunden zu vielfältigen außergeometrischen Anwendungen.

Was hat eine Unterrichtsreihe "Abbildungsgeometrie im R^2 mit Matrizen" für Vorteile?

- Arbeit mit Grundelementen der Analytischen Geometrie
- Vorbereitung der linearen Algebra (lineare Abbildungen, LGS, Matrizen)
- Vorbereitung auf andere Anwendungen von Matrizen
- Kennenlernen von Grundelementen der Computergrafik
- Wiederholung diverser Inhalte der Sekundarstufe I
- Geometrische und rechnerische Betrachtungen befruchten sich gegenseitig.
- Mehrfache Abbildungen sind gut geeignet zur Herstellung von Animationen.

Einige Beispiele für die Arbeit mit Abbildungsmatrizen:

Beispiel 1: Sinuskurve drehen (mit DERIVE)

```
dreh(u) := [ [COS(u), -SIN(u)], [SIN(u), COS(u)] ]
```

```
figur(t) := [t, 2*SIN(t)]
```

```
figur(t)*dreh(2)
```

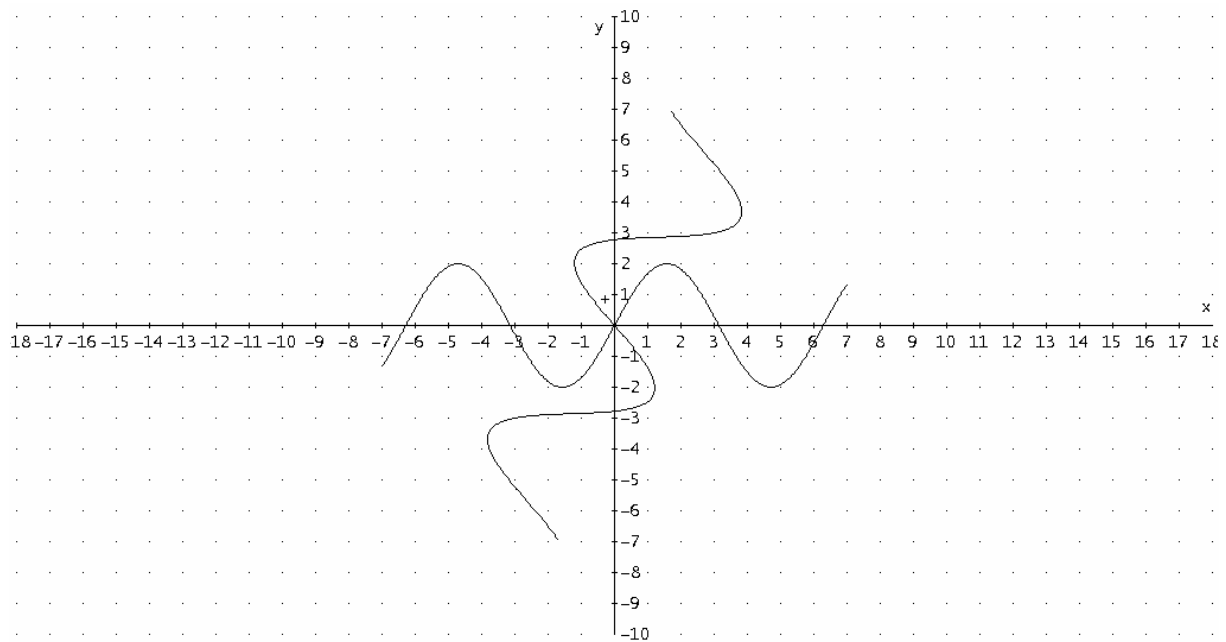
```
;Simp(#3)
```

```
[2*SIN(2)*SIN(t)+t*COS(2), 2*COS(2)*SIN(t)-t*SIN(2)]
```

```
[t, 2*SIN(t)]
```

Drehmatrix definiert
 Figur definiert
 die Abbildung

wird gezeichnet BILD
 wird gezeichnet URBILD



Mit dem Voyage 200 kann man so arbeiten:

<pre> F1 F2 F3 F4 F5 F6 Zoom Edit All Style PLOTS xt28= yt28= xt29=t yt29=sin(t) xt30=cos(u)·xt29(t) - sin(u)·yt29(t) yt30=sin(u)·xt29(t) + cos(u)·yt29(t) xt31= yt31= xt32= yt32= yt32(t)= </pre>	
--	--

Dabei wurde $u = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ gewählt.

Schließlich noch eine Darstellung mit ANIMATO:

	<p>Hierbei wurden die Graphen von $y = \sin(x)$ und $y = \cos(x)$ jeweils 72 mal um $(0,0)$ mit dem Drehwinkel $2\pi/72$ gedreht.</p> <p>Man erkennt, dass sich mit diesen abbildungsgeometrischen Grundlagen phantasievolle Bilder erstellen lassen.</p>
--	---

In allen Fällen wurde die Drehmatrix $\begin{pmatrix} \cos(u) & -\sin(u) \\ \sin(u) & \cos(u) \end{pmatrix}$ benutzt.

10. Erstellen von CAS-Aufgaben Klassenarbeiten / Klausuren – Hausaufgaben

10.1 Klassenarbeiten und Klausuren mit CAS

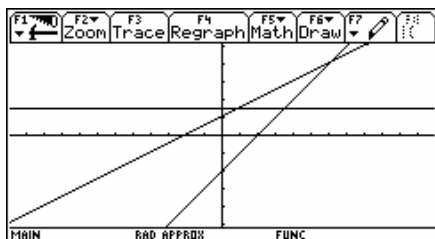
Unterricht mit CAS führt zwangsläufig auch zu Klassenarbeiten und Klausuren, die mit CAS-Einsatz geschrieben werden – auch bei zentralen Prüfungen, wie etwa dem Zentralabitur! Für das Zentralabitur liegen aus verschiedenen Bundesländern bereits viele Aufgaben vor, die für den Einsatz von CAS konstruiert wurden. Man informiere sich hierzu über das Internet.

10.1.1 Eine CAS-Klassenarbeit für Klasse 8/9 – mit Lösungen

Motto: Weniger (stumpfsinnig) rechnen / zeichnen - mehr verstehen

Aufgabe 1

1.1 In Abbildung 1 sind drei Geraden zu sehen. Rekonstruiere die Abbildung mit deinem CAS und dokumentiere den Arbeitsweg.



Hinweis: Das Zeichenergebnis deiner Arbeit bitte deinem Lehrer zeigen!

Abb.1: Drei Geraden

1.2 Was hat Abbildung 1 mit dem Thema „Lösung linearer Gleichungssysteme“ zu tun?

Aufgabe 2

2.1 Du siehst drei Gleichungssysteme. Das erste LGS hat die Lösungsmenge $\{(3, 1)\}$. Alle LGS haben eine gemeinsame Eigenschaft, die es zu entdecken gilt. Benutze dazu dein CAS.

$$\begin{array}{lll} \text{a) } 2x - 3y = 3 & \text{b) } -2a + 5b = -1 & \text{c) } -2x + 5y = -1 \\ 5x + 2y = 17 & 3a - b = 8 & 4x + 2y = 14 \end{array}$$

2.2 Wie könntest du den Schülern deiner Parallelklasse verständlich machen, dass so etwas durchaus möglich ist?

Aufgabe 3

Erläutere, dass die Bearbeitung der folgenden Problemstellung zu dem angegebenen LGS führt und löse dieses mit der Matrizenmethode.

Frau Meier erbt von ihren Eltern das Guthaben von 5220 Euro zweier Bankeinlagen. Die Eltern hatten seinerzeit insgesamt 5000 Euro, Der Vater hatte seinen Betrag zu einem Zinssatz von 4% angelegt, die Mutter hatte eine Bank mit 4.5% Zinsen gefunden. Wieviel Euro haben Mutter und Vater jeweils angelegt?

Das LGS: (1) $x + y = 5000$, (2) $0.045x + 0.04y = 220$

Aufgabe 4

Löse das LGS von Aufgabe 2.1.a von Hand – nach einem von dir gewählten Verfahren.

$$(1) 2x - 3y = 3 \quad (2) 5x + 2y = 17.$$

Wie könnte man die Lösungen mit Hilfe des CAS überprüfen – ohne das LGS mit einem Verfahren ausrechnen zu lassen?

Ende der Aufgabenstellung, Zeiten: 20', 20', 15', 15'

Lösungen und Kommentare für den Lehrer (Arbeit insgesamt ca. 70')

Zu Aufgabe 1 (1.1 ca. 15', 1.2 ca. 5').

1.1 Um zur Rekonstruktion der Zeichnung zu kommen, muss der Schüler den *Zusammenhang* zwischen Funktionsgleichung und Graph (hier: lineare Funktionen und Geraden) *verstanden haben*. Er liest m und n oder 2 Punkte aus dem Graphen ab, erhält die Funktionsgleichung und zeichnet erneut. Dabei muss er noch die Fenstergröße und den Maßstab beachten.

Anspruch: Leicht bis mittel

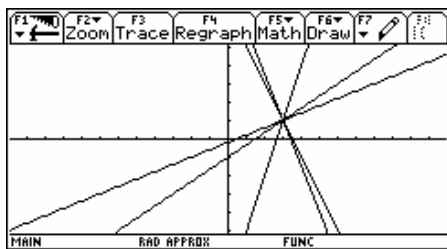
1.2 Schnittpunktberechnungen von Geraden führen zu LGS. Beispiel nennen.

Anspruch: leicht bis mittel

Zu Aufgabe 2 (2.1 ca. 5', 2.2 ca. 15')

2.1 Mit dem TI bestätigen, dass überall $(3, 1)$ die Lösung ist.

Anspruch: Leicht.

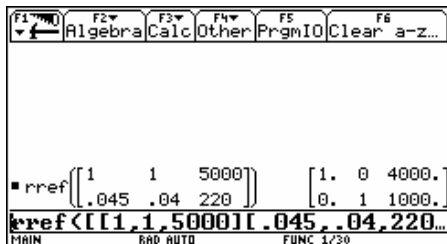


2.2 Algebraisch: Es gibt viele Gleichungen mit 2 Variablen, die als Lösung $(3, 1)$ haben. Lösungspaar einsetzen. Ein Beispiel für die Konstruktion einer weiteren Gleichung zeigen.

Geometrisch: Bei der Deutung der Lösungsmenge eines LGS als Geradenschnittpunkt ist sofort einsichtig, dass es viele Geraden durch einen Punkt (hier $(3, 1)$) gibt kann. Möglicherweise zeichnet ein Schüler: Dann müssen alle Gleichungen nach y aufgelöst und eingegeben und gezeichnet werden. Alles mit dem TI möglich, siehe u.a. Abb. 2.]

Insgesamt hoher Anspruch.

Aufgabe 3 (ca. 5' + 10')



Mutter zahlte 4000 Euro ein,
Vater 1000 Euro

Erläuterung: x ist Einzahlung der Mutter und y Einzahlung des Vaters, usw.

Mittlerer Anspruch, Bearbeitung mit rref leicht, Lösung interpretieren schwerer, ebenso die Erläuterung

Aufgabe 4 (ca. 15')

Handlösung, Überprüfung, z. B. $2*3 - 3*1 =$ rechnen, oder $x+y=5000 \rightarrow \text{gleil}(x,y)$ und dann $\text{gleil}(4000,1000)$ eingeben, was „true“ ergibt. Oder ...

Mittlerer Anspruch, Teil 1 prüft die Rechenfertigkeiten an einem einfachen Beispiel, Teil 2 geht mehr auf die Verständnisebene, insbesondere wenn mehrere Verfahren angeboten werden.

Bearbeitung der Aufgaben mit Bausteinen

Zu den weiteren langfristigen Zielen von des CAS-Einsatzes im Unterricht gehört die Verwendung durch das CAS definierter oder selbstdefinierter Bausteine, siehe Kapitel 6. Diese Modulkompetenz muss schrittweise erworben werden, sie baut sich in einem längeren Vorgang auf. Aus diesem Grund hier noch eine Bearbeitung der Aufgaben mit Bausteinen.

Aufgabe 1

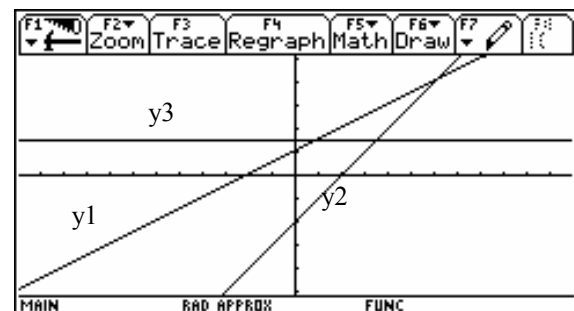
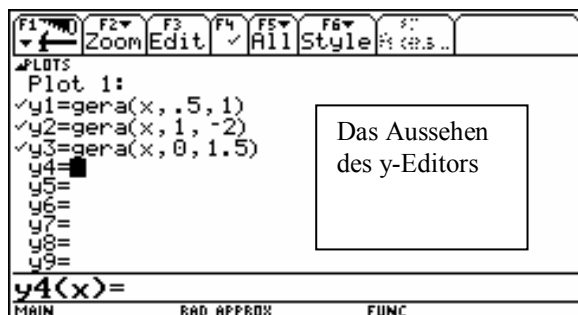
Da es sich um Geraden ($y = m \cdot x + n$) handelt, definieren wir zunächst einen Geradenbaustein.
 $m \cdot x + n \rightarrow \text{gera}(x, m, n)$

(1) Aus der Zeichnung lesen wir ab:

Gerade	m	n	Term	Bausteinaufruf
g1	1/2	1	$0.5x+1$	<code>gera(x,0.5,1)</code>
g2	1	-2	$x-2$	<code>gera(x,1,-2)</code>
g3	0	1.5	1.5	<code>gera(x,0,1.5)</code>

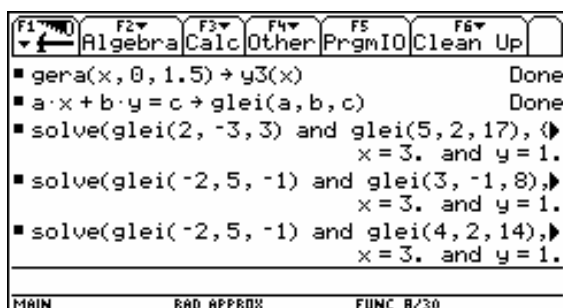
(2) Die Bausteinaufrufe werden zum Zeichnen benutzt:

Gerade	Zum Zeichnen mit dem Voyage 200
g1	<code>gera(x,0.5,1) → y1(x)</code>
g2	<code>gera(x,1,-2) → y2(x)</code>
g3	<code>gera(x,0,1.5) → y3(x)</code>



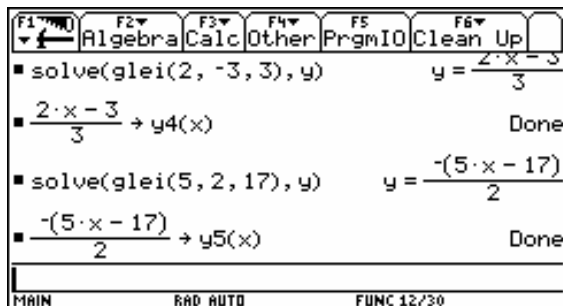
Aufgabe 2

(1) Alle Gleichungen haben die Form $a \cdot x + b \cdot y = c$. Also bietet sich der Baustein $a \cdot x + b \cdot y = c \rightarrow \text{glei}(a, b, c)$ an. Die weitere Arbeit folgt aus dem Bildschirmabdruck:

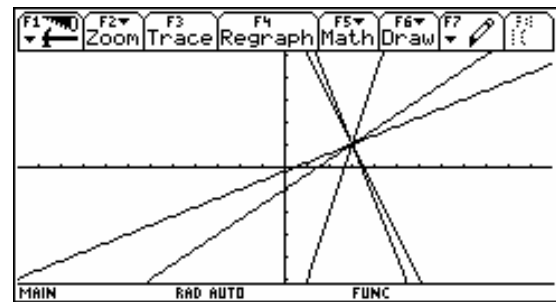


Alle Gleichungssysteme haben die gleiche Lösungsmenge $L = \{(3,1)\}$.

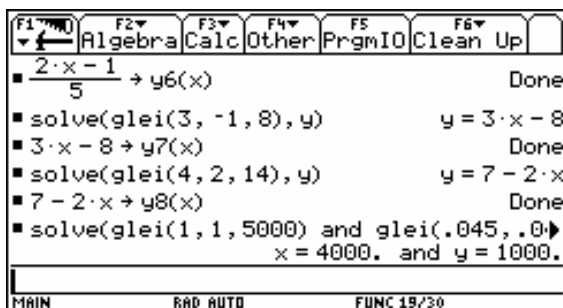
(2) Jede Gleichung kann als Gerade interpretiert werden, diese müssten alle durch einen Punkt, nämlich (3,1) gehen! Siehe TI-Bilder:



Mit Solve werden die Gleichungen nach y aufgelöst, die von x abhängigen Terme werden in y4(x) ... gespeichert.



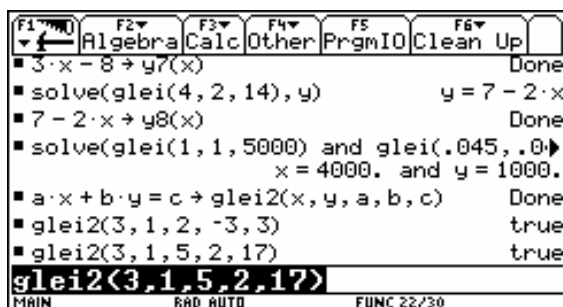
Aufgabe 3



Zur Lösung kann der Baustein GLEI benutzt werden, indem er mit SOLVE (wie schon oben) verbunden wird.

Aufgabe 4

Der Baustein von Aufgabe 1 enthält x und y leider nicht. Also ist ein neuer **Baustein GLEI2(x,y,a,b,c)** nötig, siehe TI-Bild:



$x=3, y=1$ erfüllt beide Gleichungen.

Zusammenfassung:

Die Aufgaben werden im Wesentlichen gelöst durch die Bausteine

$$\begin{aligned}
 m \cdot x + n &\rightarrow \text{gera}(x, m, n) \\
 a \cdot x + b \cdot y = c &\rightarrow \text{glei}(a, b, c) \\
 a \cdot x + b \cdot y = c &\rightarrow \text{glei2}(x, y, a, b, c)
 \end{aligned}$$

unter mehrfacher Benutzung von SOLVE.

10.1.2 Eine ausführlich kommentierte Klausuraufgabe - mit oder ohne Computereinsatz -

Beispiel einer Analysis-Aufgabe mit und ohne Computereinsatz bei weitgehend gleicher fachlicher Problematik (bei gleichem "Kern")

Hinweis: Der gemeinsame "Kern" ist grau unterlegt. In der linken Spalte stehen die Handrechnungsaufgaben, in der rechten Spalte (Arial) wird der Computer eingesetzt (CE). Insofern kann das Beispiel auch als Beitrag zu Kapitel 3 (Hand contra CAS) dienen.

Gegeben sind die Funktionen f und g mit $f(x) = \frac{x}{e^x}$, x aus \mathbb{R} und $g(x) = \frac{e^x}{x}$, x aus $\mathbb{R} - \{0\}$.

a) In der Anlage 1 finden Sie die zugehörigen Grafen. Welche Grafen stellen f bzw. g dar? Begründen Sie Ihre Entscheidung mit Hilfe des asymptotischen Verhaltens der Grafen.

a) CE
Lassen Sie die Grafen zeichnen. Begründen Sie das asymptotische Verhalten mit entsprechenden Rechnungen.

b) Zeigen Sie, dass f und g die gleichen Extremstellen (x-Werte) haben.

b) Nachweise mit der 2. Ableitung können entfallen.

b) CE
Führen Sie auch die Rechnungen für die Bestätigung der Extremwerte m.H. der 2. Ableitung durch.

c) Berechnen sie den Abstand der beiden Extrempunkte.

d) Zu $f(x)$ wird jetzt der Term $u \cdot x$ addiert, mit u aus dem Intervall $[0, 2]$. Dadurch entstehen die Funktionen

$$F(x, u) = u \cdot x + \frac{x}{e^x}$$

d) Die Grafen $F(x, u)$ finden sie in Anlage 2, für die Schrittweite wurde $u=0.2$ gewählt. Wie entstehen die Grafen aus dem Grafen zu f ? Vergleichen sie an Hand der Zeichnung die Eigenschaften der Grafen von F und f .

Möglicher Zusatz: d2) Für welches u wird $F(x, u)$ überall gleich 0?

d) CE
Lassen Sie die Grafen zu $F(x, u)$ zeichnen (Schrittweite für u sei 0.2). Wie entstehen die Grafen aus dem Grafen zu f ? Vergleichen Sie an Hand der Zeichnung die Eigenschaften der Grafen von F und f .

e) Einer der Grafen von F berührt augenscheinlich den Grafen von g . Für welches u ist das der Fall? Schildern sie einen Weg zur Beantwortung der Frage. Welche Schwierigkeiten treten auf?

e) Hinweis: Rechnungen sind nicht erforderlich, die entscheidenden Rechenansätze sind jedoch in mathematischer Schreibweise zu dokumentieren.

e) CE
Ermitteln und dokumentieren sie dann eine Näherungslösung über ein Verfahren ihrer Wahl.

f) Berechnen Sie den Flächeninhalt zwischen $x_a = 0$ und $x_b = 1$ für den Grafen von f.

f1) Was ergibt sich für den Flächeninhalt, wenn $x_a = 0$ und $x_b \rightarrow \infty$?
 f2) Mit dem Taschencomputer wurden die Bilder 1 und 2 erzeugt.
 Interpretieren sie die Eingaben und die Ausgaben. - Welche Vermutung ergibt sich bei Bild 1?
 f3) Überprüfen sie das unterstrichene Ergebnis von Bild 2 durch eine Kontrollrechnung.

f1) CE
 Berechnen sie die Flächeninhalte für die Funktionen $h(x, v) = \frac{x^v}{e^x}$ für $x_a = 0$ und $x_b \rightarrow \infty$ und für v-Werte aus der Menge {1,2,3,4}. Vermutlich wird ihnen etwas auffallen! Dokumentieren Sie ihre Eingaben, die Ausgaben und ihre Vermutung.

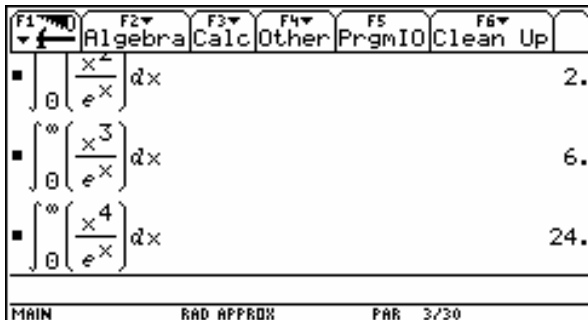


Bild 1

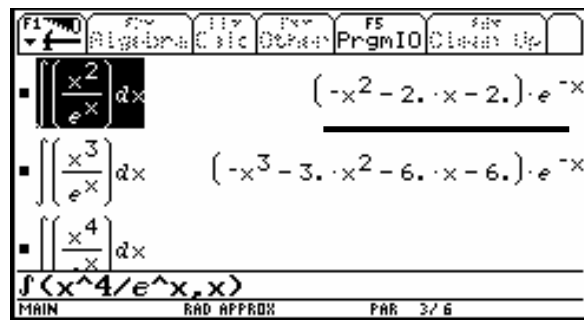
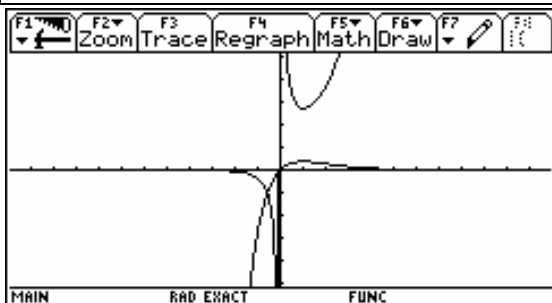


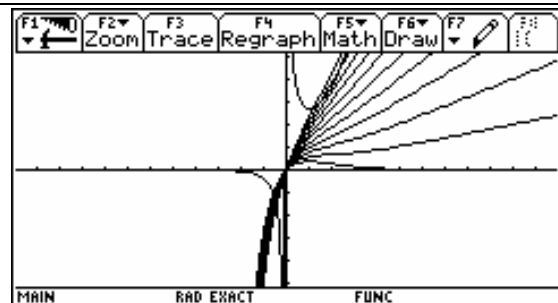
Bild 2

Ende des Aufgabentextes

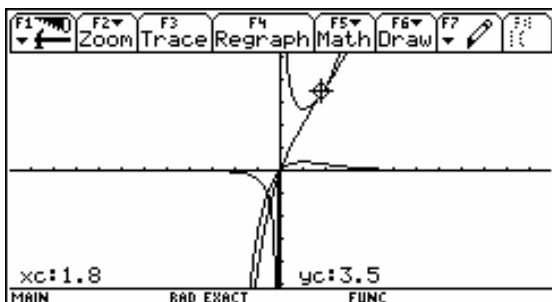
Anlagen zur Aufgabenbearbeitung mit dem Taschencomputer



Anlage 1: Grafen von f und g



Anlage 2: Grafen von F ($0 \leq u \leq 2$, Schrittw. 0.2) und



Anlage 3: Graf von F mit u=1.7

Erwartungshorizont					
Erwartete Teilleistungen, Erläuterungen	Anforderungsbereiche mit Bewertungseinheiten, ungefähre Bearbeitungszeit				
	AB 1	AB2	AB3	Zeit, etwa	
a) Graphen identifizieren mit Begründung CE Zeichnen lassen, übernehmen, Grenzwerte berechnen lassen, dokumentieren	0	4 3	0 3	10' 0	15'
b) $f'(x) = \frac{1-x}{e^x}$, $x \in I = 1$		4	0	0	10'
$g'(x) = \frac{e^x(x-1)}{x^2}$, $x \in I = 1$		4	0	0	10'
CE CAS rechnen lassen, Ergebnisse, dokumentieren		6	0	0	15'
c) $f(1)$, $g(1)$ berechnen, $g(1)-f(1) = e-1/e$ CAS rechnen lassen, Ergebnisse, dokumentieren	2	0 2	0 0	5' 0	5'
d) Anlage 2 auswerten ($F(u=0)=f$, keine Asy.mehr...) d) CE, zeichnen lassen, übernehmen, auswerten	2	0 0	5' 4	0	10'
e) $g(x)=f(x)$ setzen, genau eine Lösung suchen, etwas umformen, erkennen, dass keine exakte Lösung möglich, da Gleichung in e^x und x^2 , außerdem 2 Gl-Variable x und u , $g'=f'$ liefert 2. Gleichung	0	0	4	10'	
CE Ansätze wie bei Bearbeitung ohne Computer, Lösungsversuche mit CAS, durch Zoomen der Grafen Näherungswert finden, x etwa 1.86, u etwa 1.7, y etwa 3.47 (für den Lehrer: siehe Anlage 3 - vergrößerte Zeichnung)		0 0	0 3	4 0	20'
f) $\int \frac{x}{e^x} dx = \frac{-x-1}{e^x} + c$, $\int_0^1 \frac{x}{e^x} dx = 1 - \frac{2}{e} = 0.2642$ partielle Integration		0	6	0	15'
$\int_0^\infty \frac{x}{e^x} dx = 1$, Grenzwertüberlegung, ggf. große x -Werte	0	4	0	10'	
CE $\int_0^1 \frac{x}{e^x} dx = 1 - \frac{2}{e} = 0.2642$		2	0	0	5'
f1) Wenn $x_a = 0$ und $x_b \rightarrow \infty$? Grenzwert notieren, Überlegungen, z.B. große Werte einsetzen		0	2	0	5'
f2) Interpretieren: Flächenberechnungen, unbestimmte Integrale, Vermutung $v!$ als Ergebnisse.	0	4	0	10'	
f3) Überprüfen sie das unterstrichene Ergebnis von Bild 2 durch eine Kontrollrechnung. Ableitung bilden.	4	0	0	10'	
f1) CE Siehe die f-Teile bei Handrechnung, Dokumentation der Rechnerarbeit, Vermutung, ggf. weitere Überprüfungen. Es wird eigenes Material erstellt.		0	8	0	20'
-----Summen, CO		13, 37%	18, 52%	4, 11%	Zeit 90'
Ende Erwartungshorizont	non CO	14, 37%	16, 53%	4, 10%	Zeit 90'

10.2 Tipps für das Erstellen von Klassenarbeiten und Klausuren mit CAS – auch nützlich für den Unterricht

Sie finden hier Tipps und zusätzliche Erläuterungen zu folgenden Aspekten:

- Visualisieren mit CAS-Hilfe
- Kontrollieren mit CAS
- Vorgelegte Zeichnungen oder Rechnungen ergänzen
- Aufgaben zur Dokumentation
- Das Bausteindreieck (definieren, analysieren, anwenden)
- Veränderte Aufgabekultur → offene Aufgaben
- CAS und Handrechnung
- Ansätze finden lassen – Modellbildung

Die folgende Abbildung fasst mögliche Aufgabenansätze zusammen. Einige Aspekte werden anschließend erläutert:

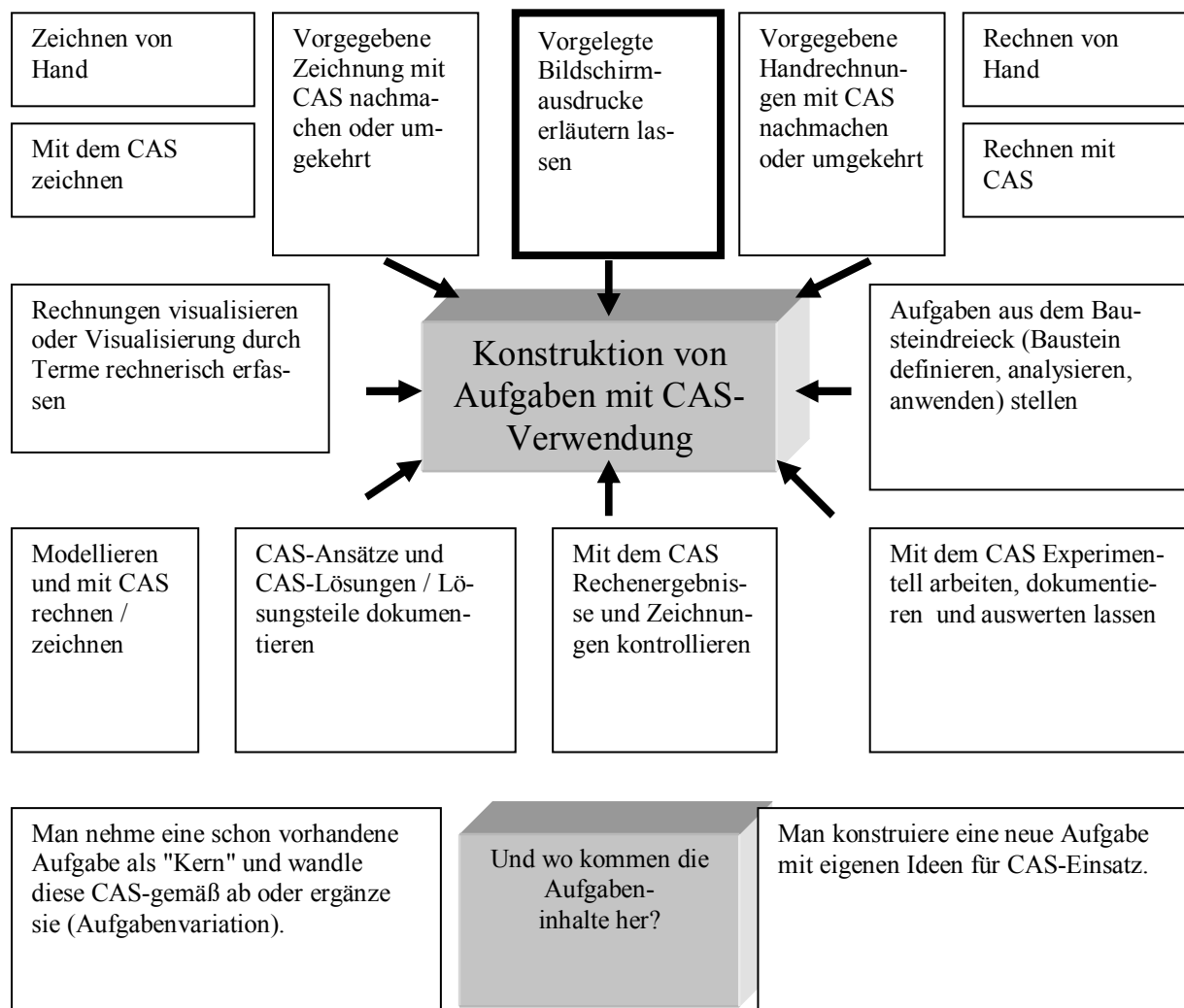


Abb. 10.2a

Visualisieren mit CAS-Hilfe

Das Arbeiten mit Visualisierungen kann von verschiedenen Seiten aus erfolgen:

Rekonstruktion gegebener Abbildungen:

Die Rekonstruktion vorgegebener Abbildungen kann man als eine Standardaufgabe für Grafikrechner oder CAS ansehen. Der Lösungsweg wird in der Regel sein:

- 1) Den geeigneten Maßstab wählen und für den ausgewählten Graphen ablesbare Punkte suchen. Die Koordinaten ablesen.
- 2) Mit diesen Vorgaben kann die Funktionsgleichung aufgestellt werden.
- 3) Zeichnen des Graphen.
- 4) Kontrolle des Graphen (charakteristische Punkte vergleichen).
- 5) Entsprechend wird mit allen Graphen verfahren.
- 6) Gesamtbild kontrollieren.

Um zur Rekonstruktion einer Zeichnung zu kommen, muss der Schüler den *Zusammenhang* zwischen Funktionsgleichung und Graph (z. B. lineare Funktionen und Geraden) *verstanden haben*. Er liest zum Beispiel bei Geraden m und n oder 2 Punkte aus dem Graphen ab, ermittelt die Funktionsgleichung und zeichnet erneut. Dabei muss er noch die Fenstergröße und den Maßstab beachten.

Je nach Kenntnisstand der Schüler und bei komplexeren Abbildungen kann diese Aufgabenstellung einen guten Zugang zum experimentellen Arbeiten mit dem Rechner geben.

Kontrollieren mit CAS

Das CAS kann auf verschiedene Arten zu Kontrollarbeiten eingesetzt werden. Es schafft damit Sicherheit für den Schüler.

- Eigene oder vorgelegte Handrechnungen überprüfen
- Zeichnungen überprüfen
- Vermutungen überprüfen
- Vorgelegte Lösungen verifizieren

Aufgaben zur Dokumentation (→ → → siehe auch Kapitel 11)

Dokumentationserwartungen:

Die Erwartungen an die Dokumentation von Computerarbeit entwickelt sich im Verlaufe des Vertrautwerdens der Schüler mit dem Programm und den mathematischen Inhalten.

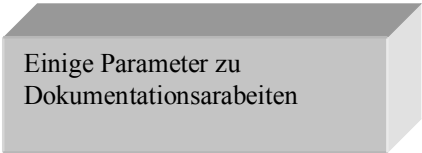
Die jeweilige Dokumentation ist situationsabhängig und softwareabhängig!

- Welchen Rechner-Kennnisstand haben die Schüler?

Ist es eine Neueinführung?

War bisher eine

- nur kurze Benutzungsdauer,
- mittlere Benutzungsdauer,
- bereits lange Benutzungsdauer?



Einige Parameter zu
Dokumentationsarbeiten

- Welche Software wird benutzt? Welche Verknüpfungsmöglichkeiten mit anderer Software (z.B. mit Textverarbeitung sind möglich und erwünscht)
Handelt es sich um CAS, DGS, Tabellenkalkulation, sonstige spezielle M-Software?
- Welche Dokumentationswege sind in dem jeweiligen Kurs überhaupt möglich? In welcher Situation? – Hausarbeit, Unterrichtsarbeit, Klassenarbeit, Klausur, Abiturarbeit.

Daraus folgt: Es lassen sich nur einige wenige allgemeine Grundsätze aufstellen und einige Tipps zur Dokumentation von Computerarbeit geben. Es ist nötig, sich die jeweiligen Situationsparameter bewusst zu machen.

Komplexe Terme, längere Rechnungen

Bei komplexen Termen und längeren Rechnungen sollte man mit Zwischenergebnissen arbeiten. Diese werden geeignet bezeichnet und können in der darauf folgenden Arbeit wieder verwendet werden. Häufig empfiehlt sich dabei auch die Berücksichtigung der auftretenden Variablen als Parameter.

Beispiel: Die Gleichung $m \cdot x + 2 = 3 \cdot x - 2$ wird abgekürzt mit $\text{gleich}(x,m)$. Also $m \cdot x + 2 = 3 \cdot x - 2 \rightarrow \text{gleich}(x,m)$. Damit steht dieser Baustein für die weitere Verwendung im Rahmen der Problemstellung zur Verfügung.

Teilergebnisse vorgeben

Bei komplexeren Aufgaben trägt ein Vorgeben von Teilergebnissen (Zahlenergebnisse, Terme, Zwischenzeichnung) zu einer Vorstrukturierung bei und ermöglicht Kontrollen, die den Schüler bei seiner Arbeit bestätigen. Auf diese Weise können schwierigere Aufgaben "entschärft" werden.

Umfang der Bearbeitungen

Dieser kann recht unterschiedlich sein. So kann man z.B. einige Zeilen der Abbildungen durch zusätzliche Heftskizzen oder weitere Anwendungen eines definierten Bausteins erläutern.

Vorgelegte Zeichnungen oder Rechnungen ergänzen oder nachvollziehen

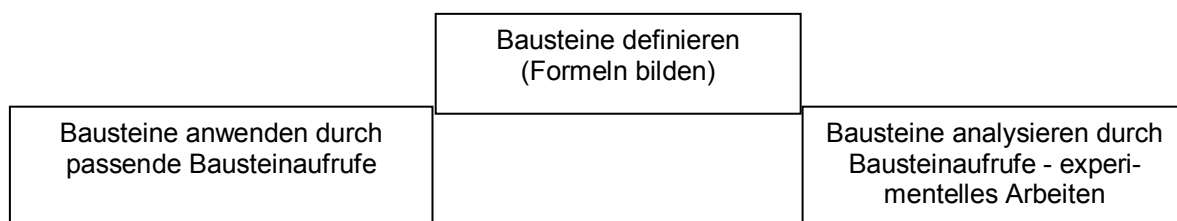
Formulierung von Aufgaben zu gegebenen Bildern

- 1) Ein Schüler hat mit der Abstandsformel folgendermaßen gearbeitet. Erläutere seinen Weg mit Hilfe eines Textes und ggf. auch durch zusätzliche Skizzen. (gegebene Bildschirmausdrucke).
- 2) Formuliere Aufgaben zum Inhalte der beiden Bilder.
- 3) Schreibe einen mathematischen Aufsatz zu den beiden Abbildungen.
- 4) Ohne das Vorgeben der beiden Abbildungen: Veranschauliche das Problem „Abstand eines Punktes von einem Graphen“ mit Hilfe des CAS und erläutere dein Vorgehen.

Die Anforderungen steigen von 1) nach 4).

Das Bausteindreieck ($\rightarrow \rightarrow \rightarrow$ siehe auch Kapitel 6)

Der erfahrene CAS-Benutzer verfährt häufig nach dem „Bausteinprinzip“. Hierfür ergeben sich diverse Aufgabenstellungen und Ansätze, indem man das "**Bausteindreieck**" beachtet.

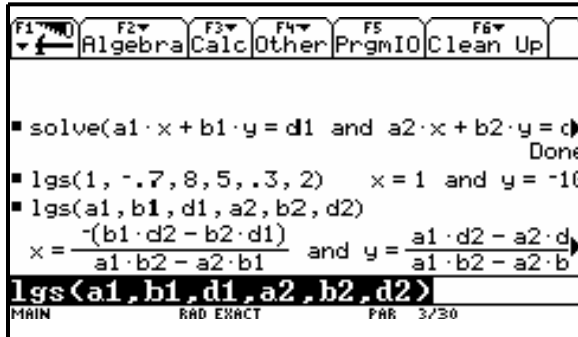


Für Aufgaben mit Geraden sind z. B. folgende Bausteine geeignet:

$m \cdot x + n$	$\rightarrow \text{gera}(x,m,n)$	unter zusätzlicher Benutzung von SOLVE
$a \cdot x + b \cdot y = c$	$\rightarrow \text{glei}(a,b,c)$	
$a \cdot x + b \cdot y = c$	$\rightarrow \text{glei2}(x,y,a,b,c)$	

Arbeitet man z. B. viel mit linearen Gleichungssystemen, so empfiehlt sich die Definition eines Bausteins der Form:

- $\text{SOLVE}(a1 \cdot x + b1 \cdot y = c1 \text{ and } a2 \cdot x + b2 \cdot y = c2, \{x, y\}) \rightarrow \text{lgs}(a1, b1, c1, a2, b2, c2)$
- Der Aufruf $\text{lgs}(1, -0.7, 8, 5, 0.3, 2)$ liefert dann Lösungen zu einem speziellen LGS:
- Der Aufruf $\text{lgs}(a1, b1, c1, a2, b2, c2)$ liefert sogar die Formeln für x und y.



Veränderte Aufgabekultur → offene Aufgaben

Die veränderte Aufgabekultur wird deutlich in

- einer Betonung des Findens von Ansätzen,
- den Aufträgen, vorgegebenes Material weiter zu verarbeiten,
- einer Vermischung händischen Rechnens mit CAS- und Grafikanteilen,
- Verständnisfragen zur verwendeten Mathematik,
- der Aufforderung zur Wahl eigener oder mehrerer Lösungswege.

CAS und Handrechnung (→ → → siehe auch Kapitel 3)

Grundlegende Algorithmen müssen im Unterricht auch von Hand beherrscht werden - allerdings nicht mehr in dem Umfang und der Tiefe, wie noch häufig praktiziert. Aufgabenskaden können entfallen. Wenn die Terme komplizierter werden, ist der Einsatz des CAS angesagt! Um dieses verständlich einzusetzen, muss auf das Verstehen des Algorithmus großen Wert gelegt werden: „Weniger rechnen - mehr verstehen!“

Weiterhin muss bei den Entscheidungen zwischen Hand- und Computerrechnung immer beachtet werden, ob es sich um langfristig zu sichernde Algorithmen handelt. Kurzfristig kann von Schüler mehr Handrechnungen erwartet werden, als bei länger zurückliegenden Algorithmen. Diese Ansätze können auch in Klassenarbeits- und Klausuraufgaben berücksichtigt werden:

Einfache Rechnungen von Hand durchführen - Kontrolle von Handrechnungen mit dem CAS - Handrechnungen mit dem CAS simulieren - Nachrechnen von vorgelegten CAS-Rechnungen auf Bildschirmausdrucken durch Handarbeit - komplizierte und aufwendige Rechnungen an das CAS geben.

Ansätze finden lassen – Modellbildung ((→ → → siehe auch Kapitel 7)

In verstärktem Umfang kann es nun auch in Klassenarbeiten / Klausuren um das Modellbilden aus einem Text heraus und das Bearbeiten der dann notwendigen Algorithmen mit einem CAS gehen. Anschließend erfolgt eine verständige Auswertung der vom CAS erzeugten Ergebnisse und ggf. eine Korrektur der Ansätze.

10.3 Zur Zeiteinschätzung bei der Bearbeitung von CAS-Aufgaben in Abitur- und anderen Klausuren und in Klassenarbeiten

Hinweis: Die folgenden Überlegungen gelten in übertragenem Sinn auch für den Unterricht mit CAS.

Vor einer Unterschätzung des Zeitaufwands von Rechnungen und Zeichnungen mit CAS muss gewarnt werden - u.a. aus folgenden Gründen:

1. Eingaben können *Syntaxfehler* aufweisen und müssen ggf. korrigiert werden. Das ist gerade bei komplexeren Termen nicht selten nötig.
2. Bei *Semantikfehlern* muss neu überlegt und neu eingegeben werden.
3. Ein- und Ausgaben müssen je nach Aufgabenstellung *dokumentiert* werden.
4. Dabei muss ggf. *zwischen wichtigen und nebensächlichen Zeilen unterschieden* werden.
5. *Ausgaben* sind möglicherweise unhandlich und müssen ggf. umgeschrieben werden.
6. Bei komplexen Termen / Zeichnungen *vergeht Rechenzeit*, insbesondere ist das der Fall bei Kurvenscharen unter Benutzung eines Taschencomputers.
7. Bei Zeichnungen muss die *passende Window-Einstellung* gefunden werden.
8. Bei Rechnungen und Zeichnungen kommt es häufig auf die *richtige modus-Einstellung und andere Einstellungen* (rad-degree, exact-approx, Nachkommastellen, line usw.) an.
9. Da es häufig mehrere Bearbeitungsmöglichkeiten mit CAS gibt, benötigt der S die Kompetenz, sich für einen Weg zu entscheiden. Das erfordert *gezielte und kompetente Auswahl der CAS-Befehle*.
10. Die Rechnerarbeit kann von den S sehr unterschiedlich geleistet werden. Das reicht von *ungeschickter Bearbeitung bis hin zu sehr eleganter Bearbeitung*, z.B. durch passende Abkürzungen von Funktionen oder Datenmengen und deren Mehrfachverwendung.
11. *Experimentelles Arbeiten kostet besonders viel Zeit* - hierauf treffen alle obigen Aspekte zu.
 - Alle genannten Aspekte sind typisch für die Arbeit mit CAS und müssen beim Zeitanatz für die Teilaufgaben berücksichtigt werden. Das bedeutet u.a., dass eine komplexere Rechenaufgabe oder Zeichnung nicht einfach mit einem oder wenigen Knopfdrücken erledigt ist.
 - **Für die Zuordnung von Bewertungseinheiten ist weiterhin (wie bisher) die für eine Teilaufgabe benötigte Zeit entscheidend.** In diese gehen indirekt die abgefragten Kompetenzen mit ein!
 - **Zuletzt ein sehr hilfreicher Tipp für die Zeiteinschätzung:** Man stelle alle bei der eigenen Lösung verwendeten Computerbildschirme zusammen und markiere das, was der S *dokumentieren soll. Beides vermeidet eine Unterschätzung des benötigten Zeitaufwands!

Rechnereinsatz muss vom Benutzer geplant werden! Das kostet gerade bei komplexeren Bearbeitungen viel Zeit!

10.4 Hausarbeiten mit CAS – CAS-Arbeitsbögen

Der Taschencomputer ermöglicht andere Arten von Hausaufgaben als bisher. Hierbei kommen die Vorteile des bequemen Berechnens auch komplizierter Terme und die Möglichkeiten des schnellen Zeichnens von Grafen besonders zum Tragen. Die Aufgabenstellungen können damit u.a. interessanter werden und mehr experimentelles Arbeiten berücksichtigen. Die Vielfalt der Schülerlösungen wird sich erhöhen, da es in der Regel mehrere Bearbeitungsmöglichkeiten allein durch die Art des Computereinsatzes gibt.

Normalfall im Unterricht ist häufig die Hausaufgabe (HA), die sich bezieht auf das

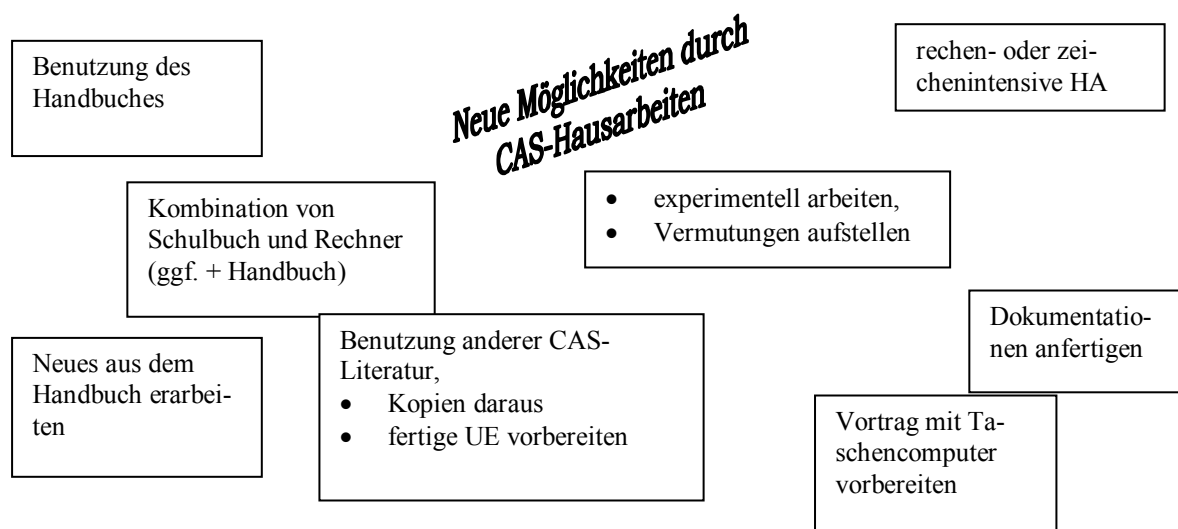
- Üben vorher gelernten Stoffes.

Dem werden nun weitere wichtige Hausaufgabenarten gegenübergestellt: Die

- vorbereitende HA,
- produktive HA,
- experimentelle HA,
- lern- und arbeitstechnische HA,
- kreative HA.

Es wird darauf hingewiesen, dass

- jede derartige Hausarbeit nachfolgenden Unterricht (ggf. sogar für längere Zeit) initiiert,
- der Lehrer vor der Aufgabe steht, die zu erwartende Vielfalt von HA-Bearbeitungen im Unterricht zu bewältigen (inhaltlich und zeitlich). Hierfür muss er besondere Strategien entwickeln, z. B.:
- Präsentieren von Lösungen durch verschiedene Schüler,
- Einsammeln und Bewerten von Schülerarbeiten,
- Erstellen von Postern zum Aushang im Klassenraum,
- Kontrolle durch Mitschüler



Beispiele hierzu:

(1) Arbeitsbogen – In Kapitel 1.3.1 finden sie einen Arbeitsbogen, der auch für Hausaufgaben verwendet werden kann. Unten werden noch weitere Beispiele gebracht.

(2) Handbuch – Im Rechner-Handbuch wird die Zeichnung eines Kreises auf dem TI-Bildschirm beschrieben. Vollziehe die Konstruktion nach, erkläre die Entstehung des Kreises und die mathematischen Hintergründe.

(3) Parabelwald – Im Unterricht haben wir die Zeichnung der Normalparabel $y = x^2$ besprochen. Erzeuge auf dem Bildschirm einen „Parabelwald“.

(4) Termstruktur – Ist die Aussage wahr? Untersuche mit dem Taschencomputer!

$$\frac{a^2 - b^2}{a + b} + \frac{2(a - b)^2}{4b - 4a} = \frac{a - b}{2}$$

Wie könnte der Taschencomputer auf das Ergebnis gekommen sein?

Hinweis: Hier wäre zu diskutieren, ob man so etwas noch ohne CAS bearbeiten sollte.

(5) Vortrag – Bereite eine Präsentation vor unter Benutzung des Taschencomputers: Die Grafen von $y = \sin(x)$ und $y = a \cdot x + b$ schneiden sich in den Punkten ...

(6) Bild auswerten – Dieses Foto mit Brücken in Köln ist ein schöner Beitrag zum Thema „Parabeln“. – a) Erläutere diese Aussage und suche andere Parabel-Aufnahmen. Sind es wirklich Parabeln? b) Versuche eine mathematische Modellierung, indem du eine passende Parabelgleichung benutzt.



CAS-Arbeitsblätter für den Unterricht oder als Hausarbeit

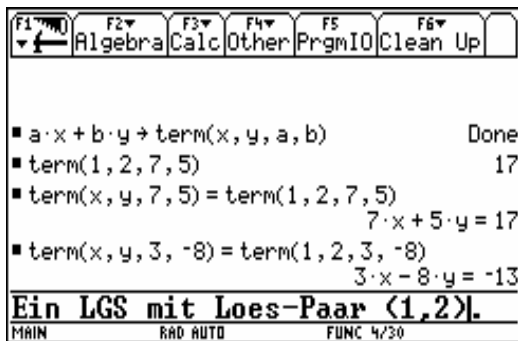
Arbeitsblatt: LGS mit CAS

Weniger rechnen
mehr verstehen!

Das Problem

Wie baut der Lehrer lineare Gleichungssystem mit so schön „glatte“ Lösungen?

$a \cdot x + b \cdot y = c$



Die Mathematik	und deine Erläuterungen
$a \cdot x + b \cdot y = c$	
$a \cdot x + b \cdot y \rightarrow \text{term}(x, y, a, b)$	Ein Baustein für den Term der linken Seite wird mit seinen 4 Parametern x, y, a, b definiert.
Das LGS soll jetzt mal das Lösungspaar $x=1$ und $y=2$ haben – und für a und b denken wir uns Werte. $\text{term}(1, 2, 7, 5) = 17$	Das ist der Wert für die rechte Seite des LGS! Warum?
$\text{term}(x, y, 7, 5) = \text{term}(1, 2, 7, 5)$ $7x + 5y = 17$	$7x + 5y = 17$ eine Gleichung ist gewonnen!
$\text{term}(x, y, 3, -8) = \text{term}(1, 2, 3, -8)$	$3x - 8y = -13$ eine zweite Gleichung!

Aufgabe 1: Erstellt je 5 LGS mit den Lösungspaaren (3, 4), (-2,2), (8,12), (7,3).

Arbeitsblatt : „Rechteck-Kunst“ am Wohnhaus

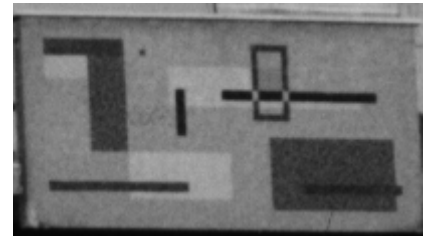


Abb. 1: Foto aus Cosenza in Calabrien / Italien

Aufgabe 1:

- Skizziere das Kunstwerk auf dem Balkon in vergrößerter Form. Färbe die Flächen.
- Berechne die Rechteckflächen. Benutze einen passenden Baustein.

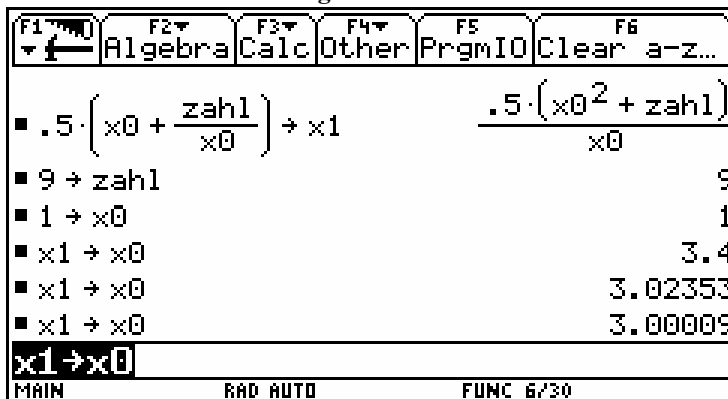
Aufgabe 2:

Entwirf selbst Balkonflächen aus Rechtecken / Dreiecken.

10.5 Von der Vielfalt der Lösungen profitieren

Im CAS-Unterricht kann man sehr von der Vielfalt der möglichen und auch von SchülerInnen angebotenen Lösungen profitieren. Gerade auch bei Hausaufgaben ist die Lehrperson hiervon oft überrascht und für die SchülerInnen erweitern sich beim Vortragen der verschiedenen Bearbeitungen die fachlichen Kenntnisse und die Kompetenzen in der Rechnernutzung. Wir verdeutlichen eine solche Bearbeitungsvielfalt am Beispiel des Heron-Verfahren zur angenäherten Wurzelberechnung (selbstverständlich wird man alle hier genannten Wege kaum erwarten können).

Heron-Verfahren - Weg 1



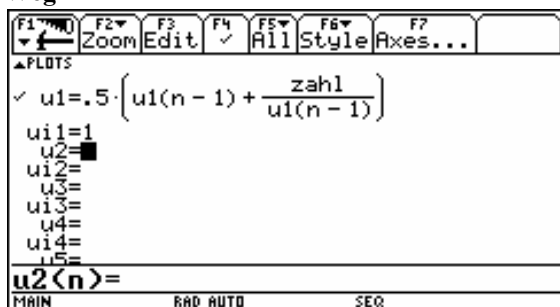
Eingabe der Heron-Formel

Es soll die Wurzel aus 9 gezogen werden. Der Anfangswert sei 1.

Wiederholtes Drücken der Enter-Taste.

Abb. 1:, Berechnung von Quadratwurzel(9)

Weg 2



n	u1				
1.	1.				
2.	5.				
3.	3.4				
4.	3.0235				
5.	3.0001				
6.	3.				
7.	3.				
8.	3.				

Abb. 2: Rekursive Definition der Folge (mode, sequence).

Wie oben wurde vorher $9 \rightarrow zahl$ im Home-Editor eingegeben. Nun braucht man nur noch jeweils die Zahl eingeben und *TABLE* aufrufen.

Programmwurf

Eingabe von	Radikand <i>zahl</i> Startwert <i>x0</i> Werteanzahl <i>anzahl</i>
<i>i</i> := 0	
solange <i>i</i> < <i>anzahl</i>	
	berechne $x1 := 0.5 * (x0 + zahl / x0)$ Ausgabe <i>x1</i> $x0 := x1$ $i := i + 1$

Weiteres:

- Experimente mit unterschiedlichen Startwerten für *x0*
- Graphische Darstellung der Folgen
- Wie kommt es zur Formel?

Weg 3

Abb. 3: Der Algorithmus in Struktogrammform ist unmittelbar in ein Programm übersetzbar, siehe Abb.4 und 5

```

F1 Control F2 I/O Var F3 Find... F4 Mode
:heron(zahl,x0,anzahl)
:Prgm
:Local i,x1
:0→i
:
:While i<anzahl
:  1/2*(x0+zahl/x0)→x1
:  Disp x1
:  x1→x0
:  i+1→i
:EndWhile
:EndPrgm
MAIN          RAD APPROX          SEQ
    
```

Abb.4

```

F1 Algebra F2 Calc F3 Other F4 PrgmIO F5 Clear a-z...
■ heron(17, 3, 4)           Done
■ ClrIO                    Done
■ heron(144, 3, 4)        Done
heron(144, 3, 4)
MAIN          RAD APPROX          SEQ 3/30
    
```

Abb.5

Ein Programm zum Heron-Verfahren, realisiert mit dem TI-92

- Programmaufruf mit den Parameterwerten zahl = 17, x0 = 3 und anzahl = 4
- Löschen des IO-Bildschirms (F5)
- Ein weiterer Programmaufruf

```

F1 Algebra F2 Calc F3 Other F4 PrgmIO F5 Clear a-z...
25.5
15.5735
12.41
12.0068
MAIN          RAD APPROX          SEQ 3/30
    
```

Abb.6: 4 Näherungswerte für Quadratwurzel(144)

Weg 4: Realisierung als Funktion (func)

```

F1 Control F2 I/O Var F3 Find... F4 Mode
:heron2(n,genauigk)
:Func
:Local a,b
:n→a
:1→b
:While abs(a-b)>genauigk
:  (a+b)/2→a
:  n/a→b
:EndWhile
:a
:EndFunc
MAIN          RAD APPROX          SEQ
    
```

Abb. 7: $\sqrt{17}$ als Funktion

```

F1 Algebra F2 Calc F3 Other F4 PrgmIO F5 Clear a-z...
■ heron2(17, 1.E-4)        4.12311
■ 4.1231067169628         4.12311
■ heron2(17, 1.E-6)        4.12311
■ 4.1231056256178         4.12311
MAIN          RAD APPROX          SEQ 4/30
    
```

Heron-Verfahren - weitere Lösungswege

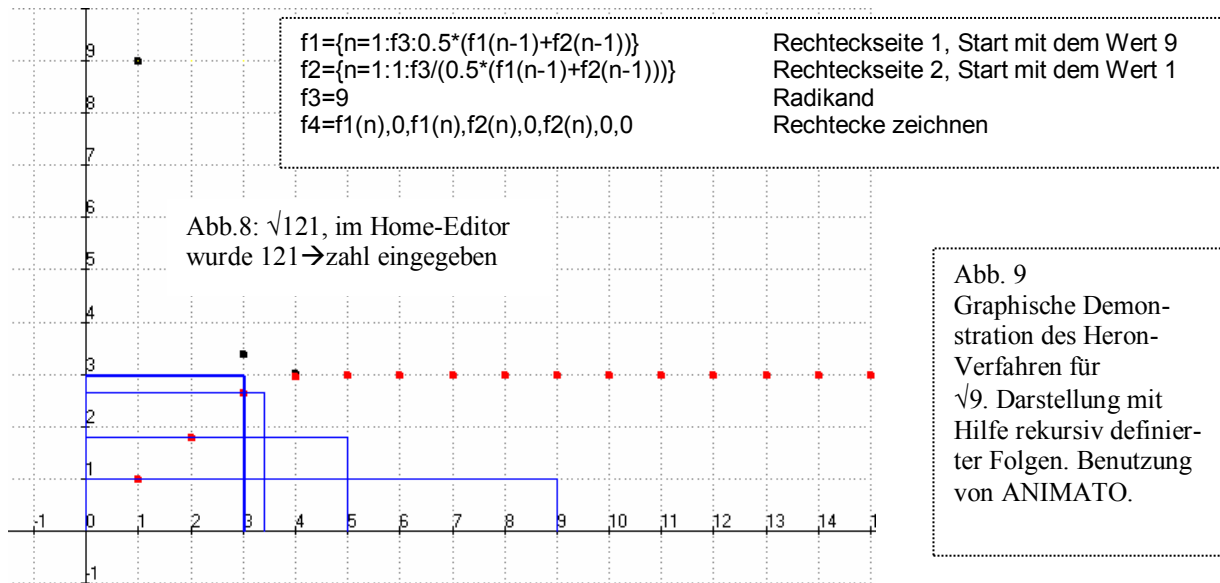
```

F1 Algebra F2 Calc F3 Other F4 PrgmIO F5 Clear a-z...
■ 17→n : n→a : 1→b           1.
■  $\frac{a+b}{2} \rightarrow a : \frac{n}{a} \rightarrow b$    1.88889
■  $\frac{a+b}{2} \rightarrow a : \frac{n}{a} \rightarrow b$    3.12245
■  $\frac{a+b}{2} \rightarrow a : \frac{n}{a} \rightarrow b$    3.96877
(a+b)/2→a:n/a→b
MAIN          RAD APPROX          SEQ 4/30
    
```

Abb. 8: $\sqrt{17}$ mit Heron (im Home-Editor)

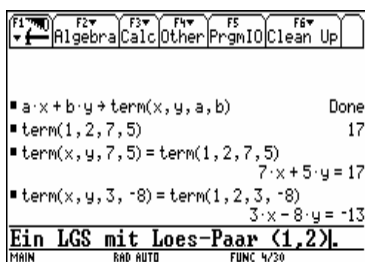
```

F1 Algebra F2 Calc F3 Other F4 PrgmIO F5 Clear a-z...
■  $\frac{a+b}{2} \rightarrow a : \frac{n}{a} \rightarrow b$    3.96877
■  $\frac{a+b}{2} \rightarrow a : \frac{n}{a} \rightarrow b$    4.12011
■  $\frac{a+b}{2} \rightarrow a : \frac{n}{a} \rightarrow b$    4.1231
■  $\frac{a+b}{2} \rightarrow a : \frac{n}{a} \rightarrow b$    4.12311
(a+b)/2→a:n/a→b
MAIN          RAD APPROX          SEQ 7/30
    
```



Lineare Gleichungssysteme mit „glatten“ Lösungen? – Teil 2

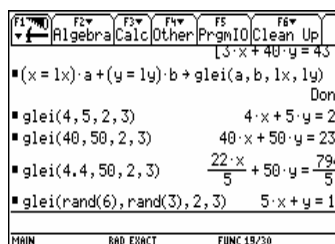
Lösung 1



Linke und rechte Seite als Terme s.a. Parameterheft, Kapitel 4

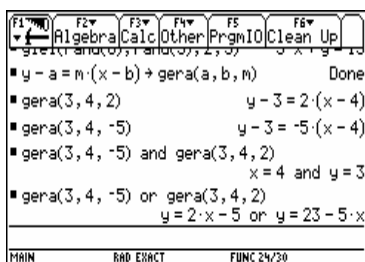
Entsprechend lassen sich auch leicht LGS mit 2 Variablen, aber auch 3 oder 4 oder ... mehr Gleichungen erzeugen.

Lösung 2



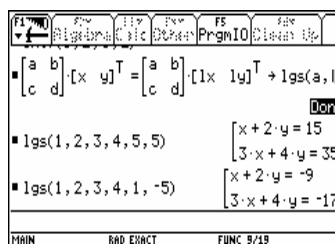
Operationen auf den Gleichungen $x=lx$ und $y=ly$

Lösung 3



Über Ein Punkt-Steigungsform / die geom.Deutung entspricht der Fragestellung: Zeichne möglichst viele Geraden durch den Punkt P(a, b).

Lösung 4



Linke Seite des LGS = Rechte Seite des LGS \rightarrow lgs(a,b,c,d,lx,ly)

Wie geht man mit der Vielfalt um?

In der Regel wird angesichts der oben schon genannten Kompetenzerweiterungen alle angebotenen Lösungen vortragen lassen. Gelegentlich kann sich die Lehrperson auch nicht besprochene Ansätze schriftlich geben lassen, damit auch hier die betreffende Schülerin eine Rückmeldung erhält. Man kann einzelne Lösungen auch auf Folgestunden verlagern. Auch die Zusammenstellung der Lösungen zu einem kleinen Aufsatz kann sinnvoll sein.

Beim Einsatz vom CAS wird man immer wieder auf verschiedene Lösungsansätze stoßen. Jedenfalls sollte den SchülerInnen deutlich gemacht werden, dass diese Vielfalt erwünscht ist!

11. Dokumentation von CAS-Aufgabenlösungen

Die Art der Dokumentation von Aufgaben, die mit CAS bearbeitet werden – oder auch die Dokumentation von CAS-Unterrichtsarbeit – gehört unter den LehrerInnen zu den viel diskutierten Themen. Wir nähern uns dem Thema zunächst mit einem Dokumentationsbeispiel für eine CAS-Klausuraufgabe.

11.1 Dokumentation einer CAS-Klausuraufgabe

Die Aufgabe wurde im Rahmen einer zweistündigen Klausur in einer 11.Klasse zum Thema „Analytische Geometrie - Kugel und Gerade“ gestellt.

a) Zeigen sie, dass die Gerade g Tangente an die Kugel K ist.

$$K: x^2+y^2+z^2 = 14 \quad g: \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \\ 3 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

b) Verdeutlichen sie den Sachverhalt durch eine 3D-Zeichnung, die die Ergebnisse ihrer Rechnungen mit einbezieht.

Hinweise:

- Benutzen sie das Computeralgebrasystem des TI-92.
- Definieren sie dabei geeignete Funktionen mit Parametern.
- Ansatz, Zwischenergebnisse und Endergebnis sind ausführlich zu erläutern.
- Die Eingaben und Ausgaben des CAS sind übersichtlich zusammenzustellen und zu kommentieren.

Falls ein geeignetes System zur Verfügung steht, kann man auch Teil b) am Computer bearbeiten.

Eine mögliche (gute) Schülerbearbeitung für Teil a

Eine Gerade kann eine Kugel zweimal schneiden - also Sekante sein -, berühren (Tangente) oder an der Kugel vorbeilaufen (Passante). In jedem Fall kann man den Ansatz einer Schnittpunktberechnung durchführen. Dann muss sich einer der drei Fälle einstellen.

Eventuelle Schnittpunkte berechnet man durch Einsetzen von x, y und z der Geradengleichung in die Kugelgleichung. Hierbei entsteht eine quadratische Gleichung in t, deren Lösung dann einen der drei genannten Fälle anzeigen muss.

Ich definiere hierzu zwei Funktionen Kugel(x,y,z) und Gerade(t).

$$\begin{aligned} TI-92: \quad x^2+y^2+z^2=14 & \quad \rightarrow \text{kugel}(x,y,z) \\ [-1-2t, 3+t, 3] & \quad \rightarrow \text{gerade}(t) \end{aligned}$$

Mit Hilfe der Parameter kann ich nun diverse Aufgaben bezüglich der angegebenen Kugel und Geraden untersuchen. Die Schnittpunktberechnung erfolgt durch Entnahme der Parameterwerte x, y, z aus der Geradengleichung, die man in drei Einzelgleichungen $x = -1-2t$, $y = 3+t$ und $z = 3+0t$ aufspalten kann.

Eingabe	Ergebnis, Kommentar
$kugel(-1-2t, 3+t, 3)$ $solve(5t^2+10t+19=14,t)$	$5t^2+10t+19=14$, quadratische Gleichung $t=-1$, nur ein Wert!
$gerade(-1)$ $kugel(1,2,3)$	$[1 \ 2 \ 3]$, Berührungspunkt B <i>true</i> , Bestätigung, dass B auf der Kugel

Der Rechner ermittelt als Lösung der quadratischen Gleichung lediglich den Wert $t = -1$. Das heißt, es gibt nur einen Parameterwert t , für den Gerade und Kugel einen gemeinsamen Punkt haben. Den Berührungspunkt B habe ich durch Einsetzen von t in die Geradengleichung ermittelt. Danach erfolgte die Bestätigung, dass B auf der Kugel liegt. Die gegebene Gerade ist also Tangente an die Kugel. Sie berührt diese im Punkt B(1,2,3).

Ende der Aufgabenbearbeitung

Die Dokumentation dieser Aufgabe verwendet maßgeblich auch Eingaben am Rechner und dessen Ausgaben. Eventuelle Fehleingaben bzw. –Ausgaben wurden ignoriert.

11.2 Dokumentieren mit Hilfe von Rechnerbefehlen oder nicht?

In den Berliner Zentralabituraufgaben 2007 befand sich bei jeder CAS-Aufgabe der Hinweis für die SchülerInnen:

„Erläuternder Text wird wie üblich erwartet. Notieren Sie ihre Ansätze, Lösungswege und Ergebnisse in der mathematisch üblichen Form und nicht in der CAS-Eingabeform.“

Der erste Satz ist wohl in erster Linie eine Rechtfertigung für den Lehrer, wenn er den Text so erwartet, wie es bei ihm üblich war. Ob das dann immer vernünftig ist, sei dahingestellt. Uns interessiert hier besonders der zweite Satz. – Da ist zunächst unklar, was die mathematisch übliche Form ist. Bereits ein Blick in zwei Schulbücher würde erhebliche Unterschiede zeigen. Da sollte das „die“ ersetzt werden durch „eine“, also „notieren Sie ihre Ansätze, Lösungswege und Ergebnisse in einer mathematisch üblichen Form.“

Warum nun nicht die CAS-Eingabeform benutzen? - Übrigens wäre hier auch die Ausgabeform zu beachten.

Bekanntlich sind die Eingabeformen bei verschiedenen CAS-Programmen häufig unterschiedlich. Gelegentlich werden sie auch in **eine** mathematisch übliche Form umgewandelt – das ist dann übrigens ein Vorteil für die SchülerInnen mit einem solchen System, aber die Systeme haben ja ohnehin voneinander abweichende Eigenschaften. Was ist nun beispielsweise mit einer CAS-Eingabe wie in Beispiel 1 oder Beispiel 2?

Beispiel 1	Beispiel 2

In Beispiel 1 wird zunächst ein Baustein $\text{abstand}(a,b,c,d)$ definiert. Die Syntax ist dabei viel einleuchtender bzw. sprechender als etwa $f(a,b,c,d)$. In der mathematisch üblichen Schreibweise würde man hier in einem Unterricht ohne CAS wohl kaum die vier Parameter notieren. Auch die Testzeile $\text{abstand}(5,3,5,7)$ für den Bausteinaufruf ist klarer als $f(5,3,5,7)$.

Dann hat der Schüler mit der solve-Zeile (**Solve(d/dx(abstand(5,3,x,,sin(x)))=0,x)**) eine sehr kompakte Lösung mit einer Schachtelung von drei Bausteinen aufgeschrieben, die in dieser kurzen Form „mathematisch üblich“ kaum formuliert werden kann. Ähnlich ist es bei Beispiel 2. Auch hier wird in der hier vorgelegten Schreibweise der Lösungsansatz in kompakter Schreibweise vorgelegt.

Der mathematische Wortschatz erweitert sich durch CAS!

Computeralgebrasysteme erzeugen also neue spezifische Sprachschöpfungen, die man ohne CAS nicht verwenden würde. Wenn man also CAS einsetzt, muss man auch damit leben, dass sich der mathematische Sprachvorrat erweitert, was aufgrund des nun größeren Angebots oft erhebliche Vorteile bringt. Das wird gerade an den oben erwähnten Beispielen deutlich. Auf diesen erweiterten mathematischen Sprachvorrats wird man auch sofort treffen, wenn man Auflistungen zu den Angeboten von CAS zu den mathematischen Schulstandardgebieten Algebra, Geometrie, Analysis, Lineare Algebra, Analytische Geometrie, Stochastik erstellt.

All diese Aspekte zeigen, dass das Notieren von Rechneingaben und –Ausgaben sehr wohl sinnvoll sein kann und nicht völlig ausgeschlossen werden kann. Es empfiehlt sich also in solchen Fällen wie in Beispiel 1 oder 2, den kompakten CAS-Befehl zu notieren und dann mit mathematischen Begriffen zu beschreiben.

Eine besonders empfehlenswerte Methode ist **Dokumentieren mit Hilfe von Bildschirmabdrucken**. Hierzu unten mehr.

11.3 Empfehlungen zur Dokumentation von CAS-Arbeit

Grundlegender Ansatz

- Ein CAS-Aufgabenlöser wird seine Lösung häufig auf die Möglichkeiten seines CAS ausrichten. Daher ist es nahe liegend, auch bei der Dokumentation CAS-Spezifisches einzubeziehen.
- Die charakteristischen Gedankengänge einer CAS-Lösung dürfen nicht verloren gehen. Deshalb sollten sie verknüpft werden mit den mathematischen Lösungsideen / Schreibweisen.
- Es gibt CAS- und andere Mathematik-Systeme, die einen „Notizblock“ haben, in den man direkt Rechneingaben und -ausgaben übertragen kann. Auch ist es leicht möglich, solche Rechnerdaten oder –Dateien in eine Textsoftware zu übernehmen. Dieses Verfahren wird sich möglicherweise durchsetzen. Die SchülerInnen werden dann ihre Arbeiten nicht mehr in Papierform, sondern als Computerdatei abliefern, was vor dem Zentralabitur auch schon von etlichen Schulen benutzt wurde.

Konkrete Empfehlungen

- **Lassen Sie situationsangepasst dokumentieren! Unterscheiden Sie also zwischen**
- **CAS-Anfängern** – da geht es auch um das Lernen und Sichern von gerätespezifischen CAS-Kenntnissen, so dass das Aufschreiben von CAS-Eingaben und –Ausgaben und die Erläuterung der mathematischen Ansätze und Interpretationen wichtig sind. Hier können Sie z.B. ein 3-Spalten Dokumentation verwenden. Diese ist dann sehr übersichtlich und für den Lehrer leichter zu überblicken und zu korrigieren.

CAS-Eingaben	CAS-Ausgaben	Erläuterungen zu den Ansätzen und zur dahinterstehenden Mathematik

- **CAS-Fortgeschrittene können dann elementare CAS-Eingaben und Ausgaben zunehmend weglassen**, so dass sich die Eintragungen mehr auf Spalte 3 konzentrieren. Wenn sie dazu übergehen, nur noch Textform zu verlangen, dann sollten die darin vorkommenden CAS-Befehle deutlich hervorgehoben sein (z.B. in ein Kästchen setzen). Das erleichtert ihnen die Durchsicht des Textes. Genauso kann das Dokumentieren von CAS-Ausgaben sinnvoll sein, insbesondere wenn sie von Erwartungen abweichen, die man für eine Handrechnung hätte,
- **CAS-Arbeit in Klausuren** (in der Nähe des Abiturs oder beim Abitur), kann sich dann noch mehr auf die mathematischen Hintergründe konzentrieren und in Textform arbeiten. Auch dabei sollten die darin vorkommenden (nur noch die wichtigen) CAS-Befehle deutlich hervorgehoben sein (z.B. in ein Kästchen setzen).
- **CAS-Befehle (CAS-Eingaben) und CAS-Ausgaben sollten insbesondere dann dokumentiert werden, wenn sie komplexer sind, also z.B. mehrere Bausteine miteinander verknüpfen (siehe Beispiele oben).**
- **Werden bei einer Lösung spezielle neue Sprachschöpfungen durch CAS verwendet, ist es unerlässlich, diese auch zu dokumentieren.**

Dokumentieren mit Hilfe von Bildschirmabdrucken

In der Regel haben die CAS Optionen, die die Speicherung und das Abdrucken von Bildschirmhalten erlauben, etwa durch Link-Programme oder durch einfaches Speichern in der Zwischenablage. Damit ergibt sich die Möglichkeit, solche Rechner-Bilder in die Dokumentation mit einzubringen, z.B. auch durch Einbinden in ein Textverarbeitungsprogramm. Damit bietet es sich natürlich an, die Dokumentation mit Bezug auf die gezeigten Bildinhalte zu schreiben. Dabei dürfen die mathematischen Hintergründe nicht vergessen werden.

Jedenfalls ist dieses Verfahren m.E. sehr empfehlenswert! Möglicherweise gehen die Tendenzen auch bei zentralen Prüfungen dahin, die Prüfungsarbeit mit einem Textverarbeitungsprogramm schreiben zu lassen. Jedenfalls wird dieses Verfahren von etlichen Lehrpersonen in ihren Lerngruppen schon länger praktiziert.

Einzelfragen

1. Übernehmen von Zeichnungen vom CAS-Bild auf Papier

Auf kariertem Papier, mit Bleistift zeichnen, charakteristische Punkte möglichst genau eintragen (z.B.: Schnitte mit den Achsen, Extremwerte, ...), sonstige Auffälligkeiten beachten! Wichtige Zahlenwerte eintragen, in der Regel maßstabsgetreu zeichnen.

2. Komplexe Terme, längere Rechnungen

Bei komplexen Termen und längeren Rechnungen mit Zwischenergebnissen arbeiten, diese geeignet bezeichnen!

12. Zentralabitur mit CAS

In fast allen Bundesländer gibt es jetzt das Mathematik-Zentralabitur und in der Regel auch einen eigenen Aufgabenvorschlag für die Bearbeitung mit CAS. Die Art der Aufgabenstellung wird dabei recht argwöhnisch beobachtet. Als besonders diskussionswürdig wird auch die Unterrichtsarbeit vor dem Zentralabitur betrachtet, denn vielerorts wird eifrig für die Prüfung geübt - oftmals in Form einer übertriebenen Ausrichtung auf die zentrale Prüfung, indem nur noch Aufgabenkaskaden gerechnet werden und die eigentlichen Zielsetzungen des Mathematikunterrichts zu kurz kommen. Insbesondere kommt es dadurch weder zu den heute für den Unterricht gewünschten offenen Problemstellungen noch zu neuen methodischen (offenen) Ansätzen.

Zu dieser Problematik werden hier einige Auszüge aus einem Vortrag im didaktischen Kolloquium der Universität Oldenburg angeboten. Für einige dort vorgetragenen Aspekte verweise ich auf Teilkapitel in diesem Buch.

12.1 Vortrag

Im Bannkreis des Mathematik-Zentralabiturs

Vorbereitungen für LehrerInnen und SchülerInnen
auf das Zentralabitur mit CAS und ohne CAS

Dr. Eberhard Lehmann

mirza@snafu.de, www.snafu.de/~mirza

Vortrag in Oldenburg, Donnerstag, d. 10. Mai 2007

Abstract

Sind auch Sie im Bannkreis des Mathematik-Zentralabiturs?

Immer wieder gehört: „Mit Blick auf das Zentralabitur kann ich den von mir favorisierten Mathematik-Unterricht nicht mehr durchführen!“ - Muss das so sein?

Der Vortrag wird Wege zur Vorbereitung auf das Zentralabitur aufzeigen:

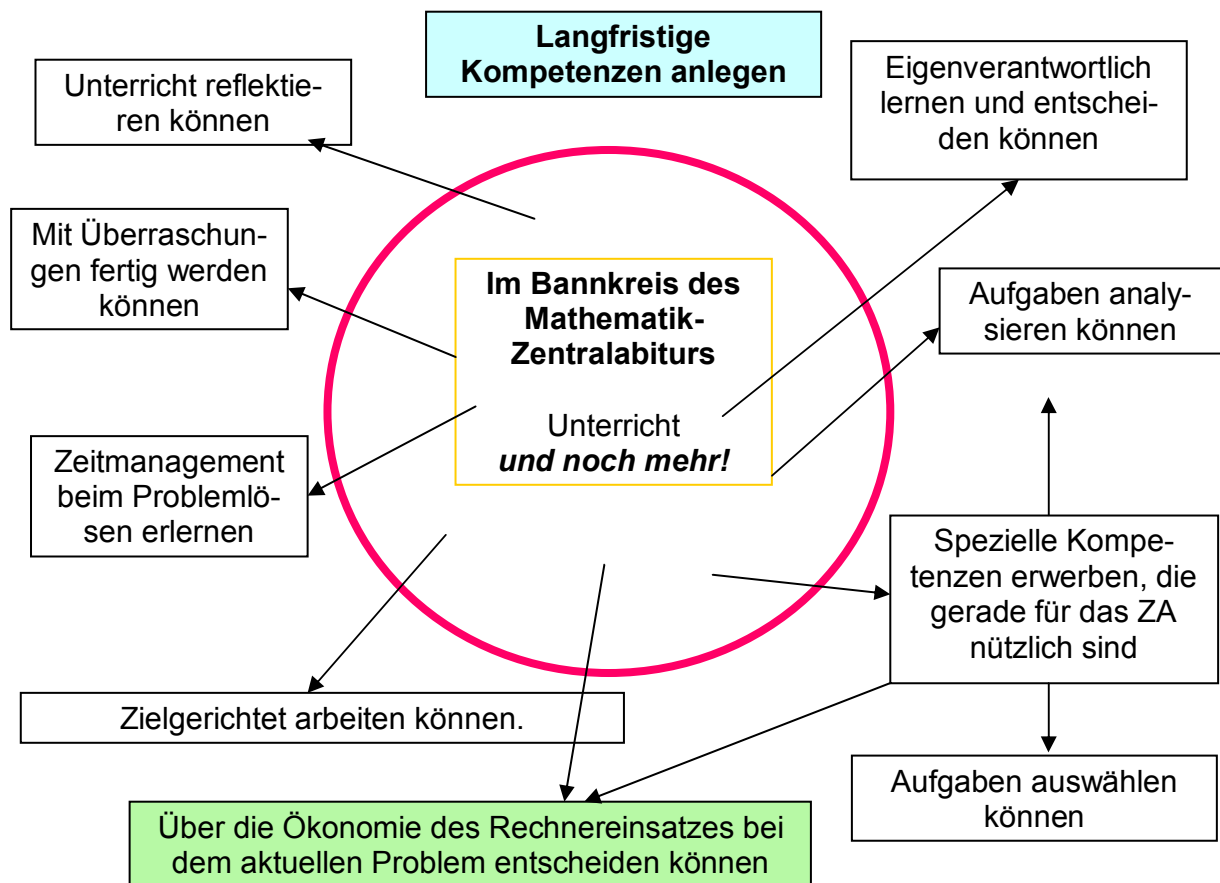
- Langfristige CAS-Unterrichtskonzepte
- Ökonomisch arbeiten - Zeit gewinnen für interessante und motivierende Aufgabenstellungen und mit diesen grundlegende Kompetenzen erwerben und üben
- Aufgabenanalyse - Schüler und Lehrer erwerben Kompetenzen zur Auswahl von CAS-Aufgaben

I. Unterrichtskultur – Aufgabenkultur – langfristige Konzepte - zentrale Prüfungen

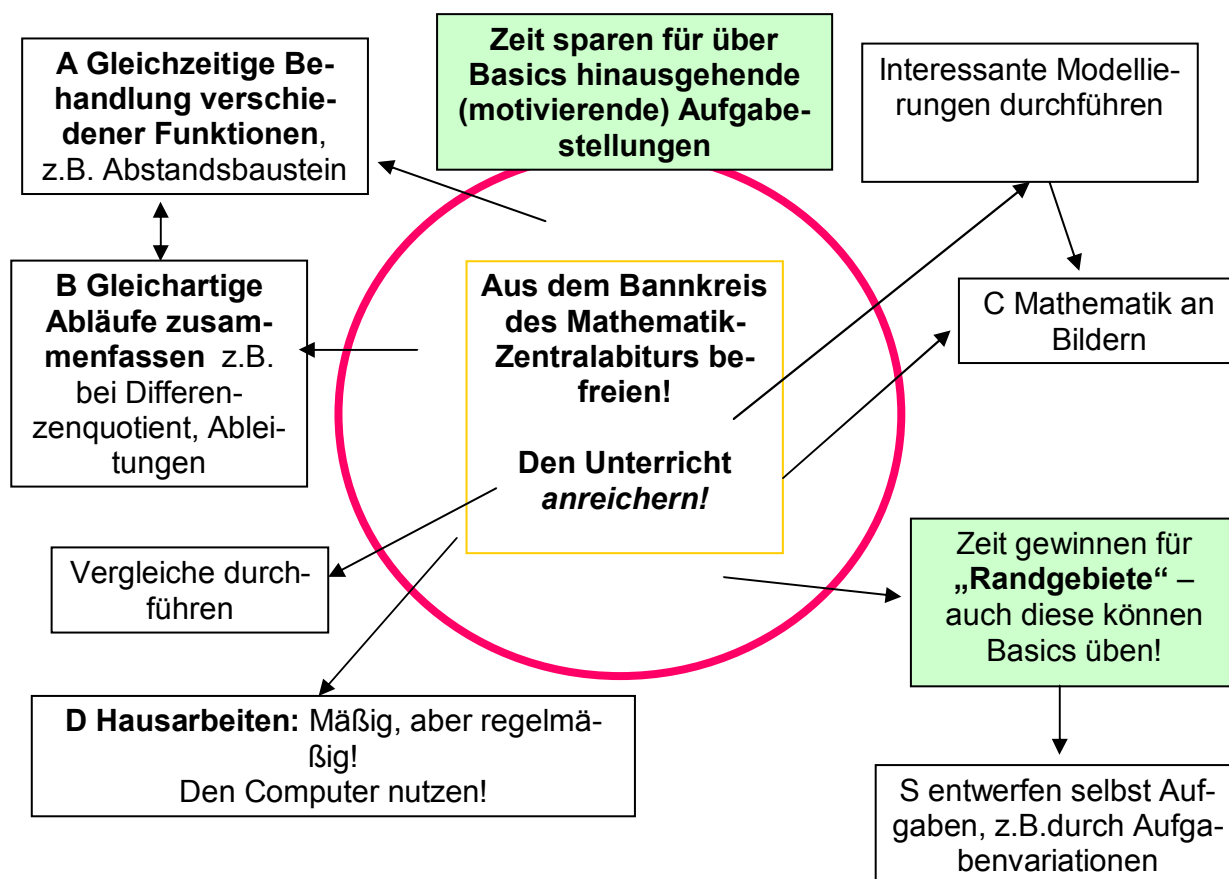
Die zentralen Abiturprüfungen zwingen die Lehrperson in fast allen Bundesländern zu einer anderen Unterrichts- und Aufgabenkultur als sonst für den Unterricht gefordert – Lernen für die Prüfung. Leider entsprechen diese Notwendigkeiten nicht denen, die man in den letzten Jahren immer wieder für den Unterricht angemahnt hat. Jedenfalls wird es durch die zentralen Prüfungen eher schwieriger, offene Formen im Unterricht zu praktizieren bzw. offene Aufgabenstellungen in den Vordergrund zu stellen, wenn dann solche in den zentralen Prüfungen nicht vorkommen. Obwohl das zumindest für Teilaufgaben durchaus möglich erscheint, ist man davon noch weit entfernt. Diese Feststellungen gelten nicht nur für das Zentralabitur, sondern für alle anderen zentralen schriftlichen Prüfungen in anderen Klassenstufen. Unglücklicherweise bleibt den Lehrpersonen nichts Anderes übrig, als sich auf diese Situation einzustellen. In dem Vortrag wird versucht „daraus das Beste zu machen“.

Entscheidend für einen nachhaltigen Mathematikunterricht im Hinblick auf die Prüfung und die Zeit nach dem Abitur ist die durchgehende Berücksichtigung langfristiger Konzepte. Einige davon sind in Folie 1 genannt. Dort werden etliche schon immer wichtige Aspekte aufgezählt, es sind jedoch auch weitere dabei, die bisher längst nicht überall bedacht wurden.

Ein reines Bearbeiten und Üben von in Frage kommenden Aufgaben führt nicht zwangsläufig zu den genannten Kompetenzen; vielmehr müssen diese bewusst angestrebt werden, sie sind also in den Unterricht deutlich zu integrieren. Folie 2 gibt einige Hinweise, wie man sich aus dem „Übungsaufgaben-Bannkreis des Abiturs“ befreien kann.



Folie 1: Einige Kompetenz-Anforderungen an eine Unterrichtsführung mit Berücksichtigung langfristiger Konzepte, insbesondere im Hinblick auf zentrale Prüfungen, aber auch für die Zeit davor und danach



Folie 2: Aus dem Bannkreis des Abiturs befreien!

Die grundlegende Botschaft lautet:

**Aus dem Bannkreis des Abiturs befreien durch Anreicherung des Unterrichts!
Und**

<p style="text-align: center;">Zeit gewinnen für „Randgebiete“ – auch diese können Basics üben!</p>	<p>Vielfach wird übersehen, dass man auch mit neuartigen Problemstellungen, die (leider!) im Curriculum nicht oder kaum zu finden sind, Prüfungsrelevantes üben kann – nun aber auf interessante und motivierende Weise, abweichend von den gängigen Wegen.</p>
--	---

II. Unterrichtskultur – Aufgabenkultur - neuartige Wege

Die heutigen Visualisierungs- und Rechenmöglichkeiten lassen es zu, andere Wege als bisher zu gehen!

So ist es z. B. möglich,

- a) verschiedene Funktionen weitgehend gleichzeitig zu behandeln und
- b) gleichartige Abläufe zusammenzufassen.

→ → → siehe hierzu in Buch-Kapitel 9.2

Beispiel 1

In Kapitel 9.2 wird gezeigt, dass man den zentralen Begriff des Differenzenquotienten $\frac{f(x+u) - f(x)}{u}$ gleich für mehrere Funktionsarten veranschaulichen kann – denn der Weg ist immer genauso. Damit zeigt man quasi gleichzeitig:

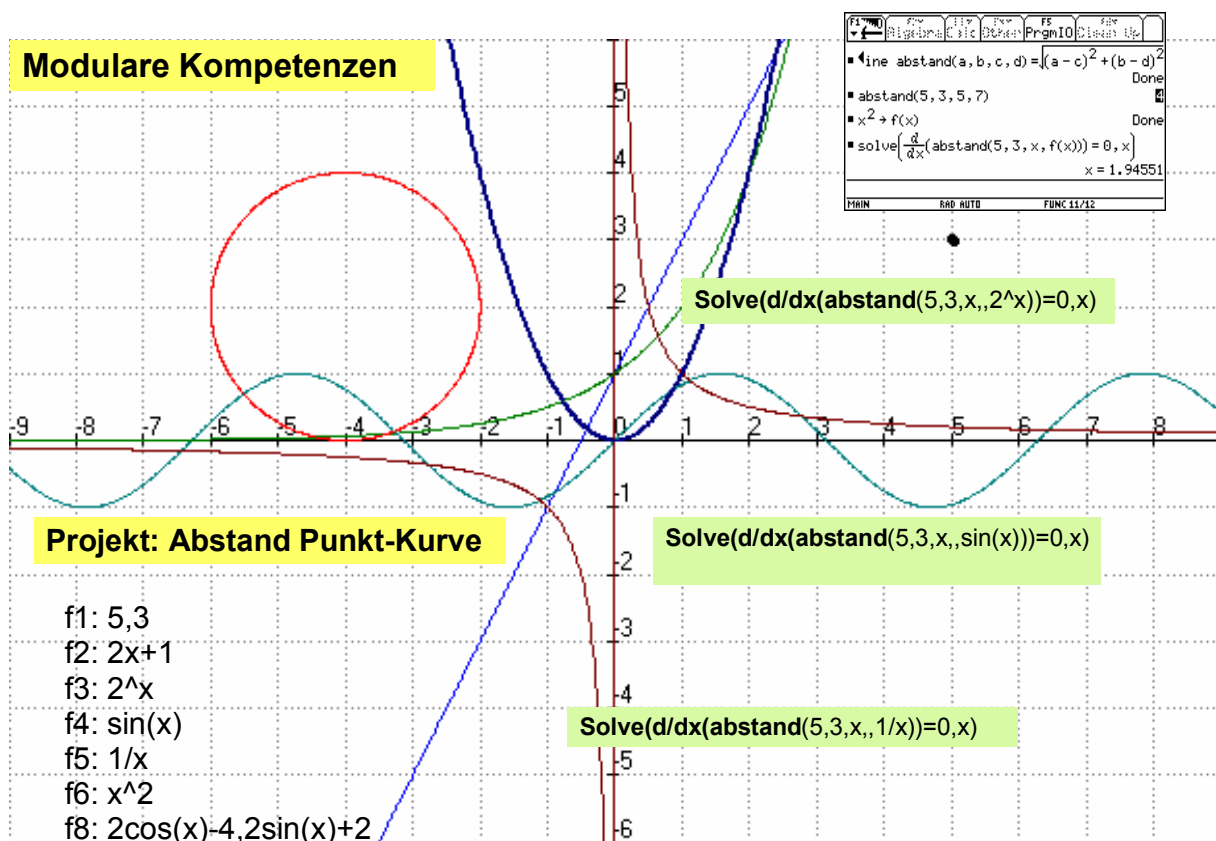
- Visualisieren geht immer genauso, aber es gibt dabei manche Überraschung für $u \rightarrow 0$,
- der Begriff ist für alle Funktionen / Relationen fundamental,
- die Black-Box des CAS hilft fast immer bei der Grenzwertbestimmung,
- das Erschließen der Black-Box zu einer White-Box hat immer den gleichen Ansatz, die detaillierte Rechnung verläuft aber sehr unterschiedlich und ist häufig von „Tricks“ abhängig.

Insgesamt ergibt sich durch diese konzentrierte Behandlung verschiedener Funktionsklassen ein vertieftes Verständnis der Begriffe „Differenzenquotient“ und „Ableitung“.

Beispiel 2

Das zweite Beispiel zeigt, wie man eine Problemstellung gleichzeitig für verschiedene Funktionsarten betrachten und lösen kann. – Es geht um eine gängige Aufgabe, die nun aber eine neue Relevanz erhält.

Man bestimme den kürzesten Abstand des Punkte P(3,4) von den einzelnen Graphen.



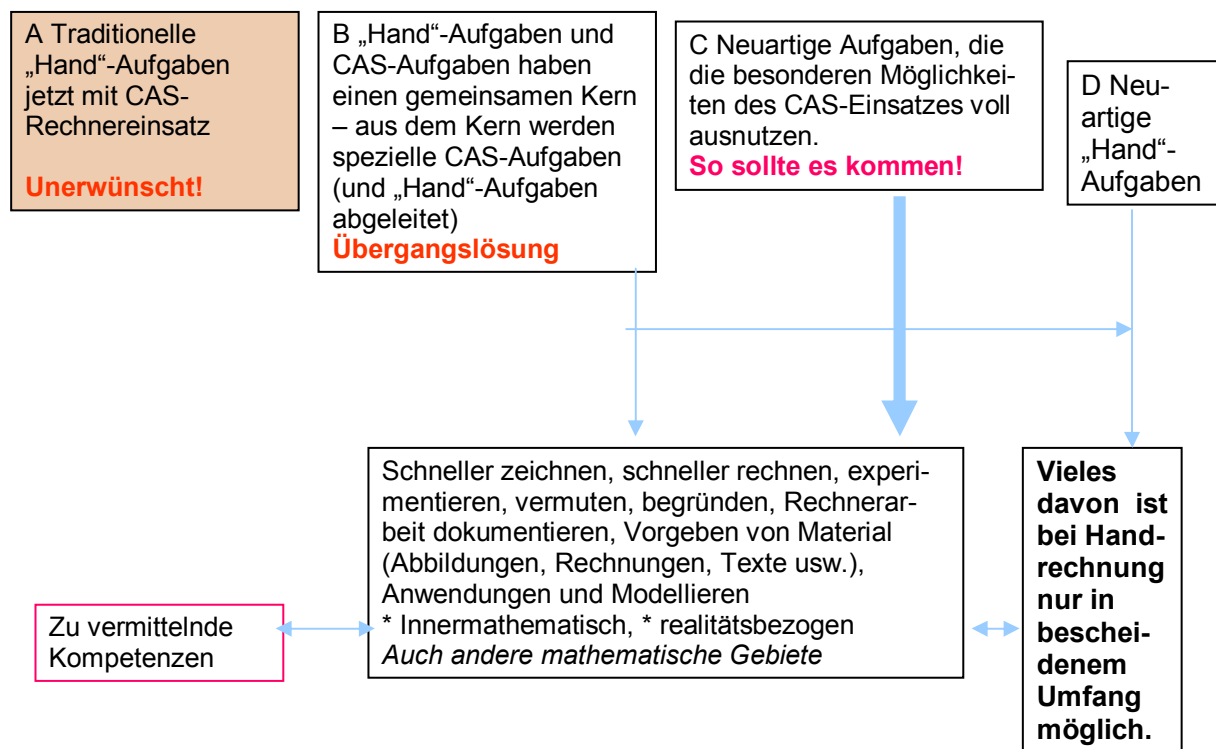
Folie 3: Abstandsberechnung „Punkt – Graph“. Immer genauso? Vergleiche!

Die Behandlung dieser ungewohnten Aufgabenstellung ist außerordentlich fruchtbar und kann mit unterschiedlichen methodischen Ansätzen erfolgen – von der Analyse des fertigen Bildes bis hin zu eigentätigen Entwürfen und Realisierungen in Projektarbeitsgruppen.

III. Aufgabentypen – Aufgabenanalyse - Aufgabenentwurf

Für die Konstruktion von CAS-Abituraufgaben werden verschiedene Wege praktiziert, wobei der Weg B wohl am gebräuchlichsten ist. Zu C kommt es noch selten. Hier kann beispielsweise mit komplexeren Funktionstermen gearbeitet werden – das CAS dient dann zum Rechnen und zum schnellen Erstellen von Zeichnungen.. Folie 4 zeigt deutlich, welche Bereicherung der CAS-Einsatz im Unterricht auch für den Entwurf von Aufgaben bedeutet

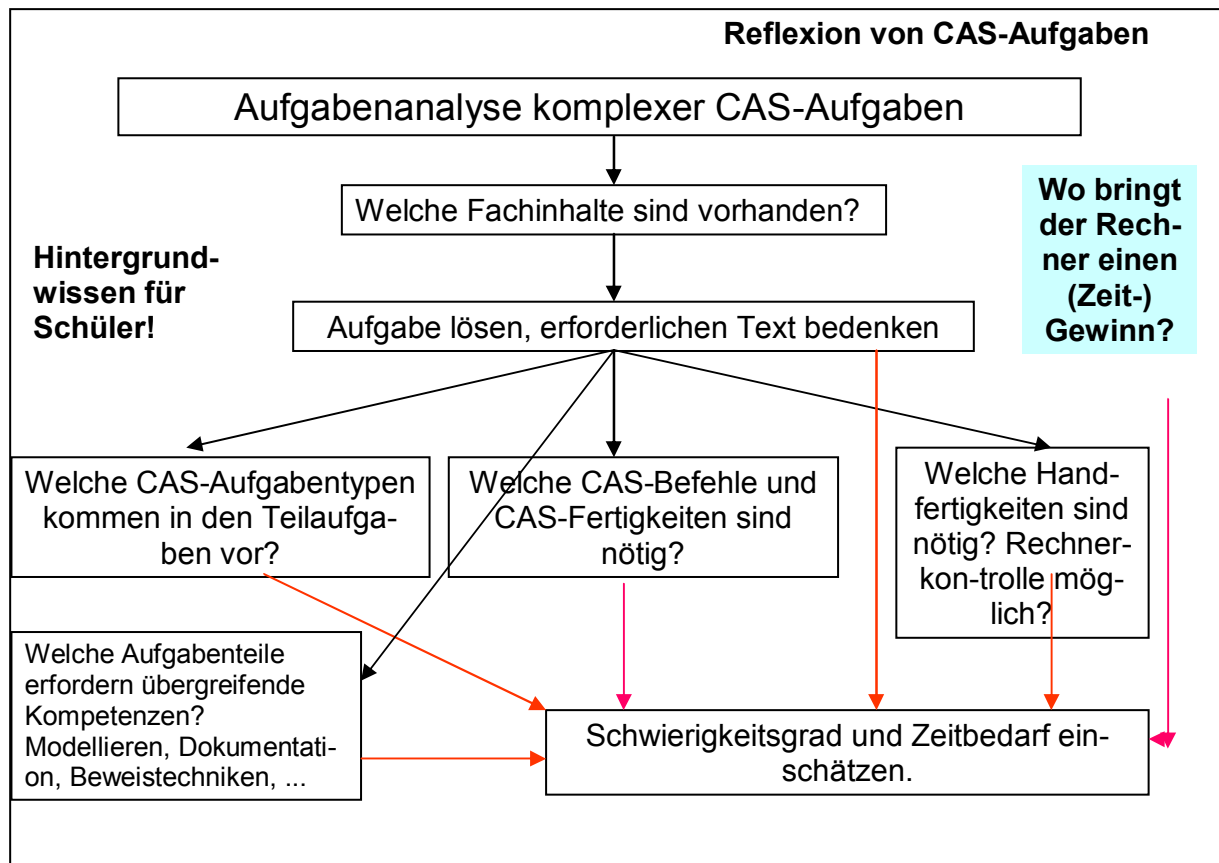
Mögliche Aufgabentypen für das CAS-Abitur



Folie 4: Aufgabentypen für das Abitur (und auch Klausuren im Unterricht)

IV. Aufgabenanalyse und Aufgabenkonstruktion

Auch Schüler sollten in der Lage sein, den Aufbau einer komplexen Aufgabe zu analysieren (Analyse-Kompetenz). Hierzu können Schritte durchgeführt werden, wie sie in Folie 6 angeboten werden. Langfristig wird so die Kompetenz zu einer schnellen Entscheidung geschult, ob eine vorliegende Aufgabe – etwa beim Zentralabitur – ausgewählt werden sollte. Folie 7 zeigt eine mögliche Checkliste und Folie 8 geht noch weiter ins Detail. Derartige Teilaufgaben wie sie Folie 8 zeigt, lassen sich häufig bei CAS-Aufgaben finden und umgekehrt fällt es mit diesem Hintergrundwissen leicht, Aufgaben zu konstruieren – auch für den Schüler eine nützliche Übung.



Folie 5: Aufgabentexte und –inhalte analysieren können

→ → → Ein Beispiel einer Aufgabenanalyse nach CAS-Gehalt finden sie im Buch-Kapitel 9.4.2.2 (Dürerquadrate).

Von besonderer Wichtigkeit ist die Kompetenz, über die Ökonomie des Rechnereinsatzes bei dem aktuellen Problem entscheiden zu können. Hierbei muss der CAS-Schüler

- einerseits wissen, wie weit er in der Lage ist, Algorithmen auch von Hand durchführen zu können,
- andererseits, ob sich die Verwendung vorhandener Module bzw. die eigene Definition solcher Module lohnt.

Eine Checkliste zur Aufgabeneinschätzung

Wie kann man (Schüler / Lehrer) schnell Abituraufgaben analysieren?
Auswahlkompetenz: Auswahl von Aufgaben für die schriftliche Prüfung

1. Blick: Aufgabe überfliegen – wenn sie in Frage kommt genauer analysieren
o geprüft Einschätzung
Aufg.1 Aufg.2 Aufg.3

2. Blick:

- Mathematische Begriffe markieren
- Terme, Formeln markieren
- Textlänge einschätzen (Lesezeit)
- Verständlichkeit des Textes prüfen
- Verständlichkeit weiteren Materials prüfen
- Kontrollergebnisse vorhanden?
- Zeitaufwendige Rechnungen erkennbar?
- Zeitaufwendige Zeichnungen erforderlich?

↓

3. Einschätzung (++ + 0 - --)

Folie 6: Checkliste

Das findet man in CAS-Aufgaben – und so kann man CAS-Aufgaben konstruieren

Konstruktion und Reflexion von CAS-Aufgaben

So baut man CAS-Aufgaben

Zeichnen mit CAS

Vorgegebene Zeichnungen mit CAS nachmachen oder umgekehrt

Vorgelegte Bildschirmausdrucke erläutern lassen

Vorgegebene Rechnungen mit CAS nachmachen oder umgekehrt

Rechnen mit CAS

Lassen Sie die Schüler auch selbst CAS-Aufgaben entwerfen!

Rechnungen visualisieren oder Visualisierung durch Terme rechnerisch erfassen

Analyse und Konstruktion von Aufgaben mit CAS-Verwendung

Aufgaben aus dem Bausteindreieck (Baustein definieren, analysieren, anwenden) stellen

Modellieren mit CAS-Hilfe

CAS-Ansätze und CAS-Lösungen / Lösungsteile dokumentieren

Mit dem CAS Rechenergebnisse und Zeichnungen kontrollieren

Mit dem CAS experimentell arbeiten, dokumentieren und auswerten lassen

Man nehme eine schon vorhandene Aufgabe als "Kern" und wandle diese CAS-gemäß ab oder ergänze sie (Aufgabenvariation).

Und wo kommen die Aufgaben her?

Man nehme eine Aufgabe (oder konstruiere eine neue Aufgabe mit eigenen Ideen) speziell für CAS-Einsatz.

Folie 7: Analyse und Konstruktion von CAS-Aufgaben

V. Durchgehende / langfristige Konzepte des CAS-Einsatzes

Der Einsatz von CAS im Mathematikunterricht ist dann besonders erfolgreich, wenn einige grundlegende Konzepte beachtet werden!

→ → → Siehe Kapitel 2

Und immer daran denken →

Elementare Algorithmen mit einfachen Beispielen auch von Hand beherrschen, aber wenn es komplexer wird immer mit CAS arbeiten.

In diesem Beitrag wird nur auf zwei Konzepte – und auch nur kurz - eingegangen

- Visualisierungskompetenz → → → siehe auch Buch-Kapitel 4
- modulare Kompetenz → → → siehe auch Buch-Kapitel 6

Visualisierungskompetenz

Der Vorzug schneller Visualisierungen durch Computereinsatz ist unumstritten und wird gerade auch von SchülerInnen bei Umfragen immer wieder als besonderer Vorzug herausgestellt.

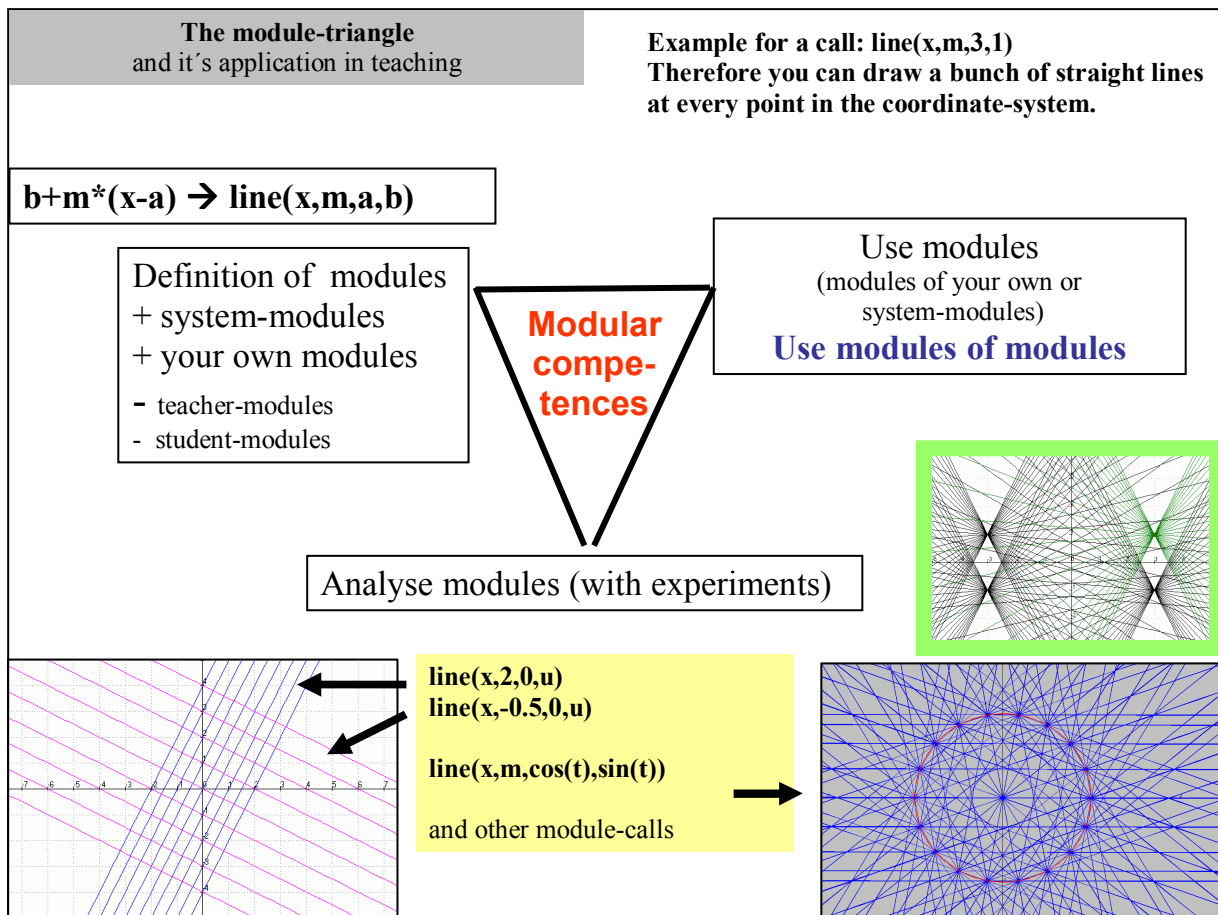
Nirgends zeigt sich
der Mehrwert des CAS-Einsatzes im Mathematikunterricht so deutlich
wie beim Visualisieren und Animieren von Zusammenhängen. Hierin liegt oft der Schlüssel zu einem
besseren mathematischen Verständnis und der Zusammenhänge.

Modulare Kompetenz (Module / CAS-Bausteine)

Von besonderer Bedeutung für eine längerfristige erfolgreiche Arbeit mit einem CAS ist die Entwicklung der modularen Kompetenz, die einen frühzeitigen Umgang mit Parametern voraussetzt. Projekte zeigen, dass ein elementarer Umgang mit Parametern in CAS-Bausteinen schon frühzeitig (z.B. schon in Klasse 8) möglich ist. Beispiele für Module aus beiden Sekundarstufen sind – hier in der Syntax des Taschencomputers VOYAGE 200:

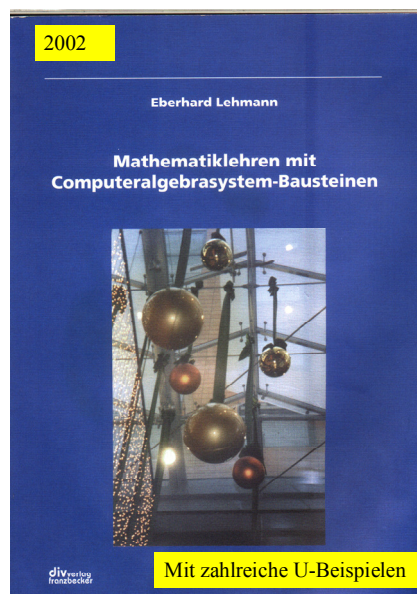
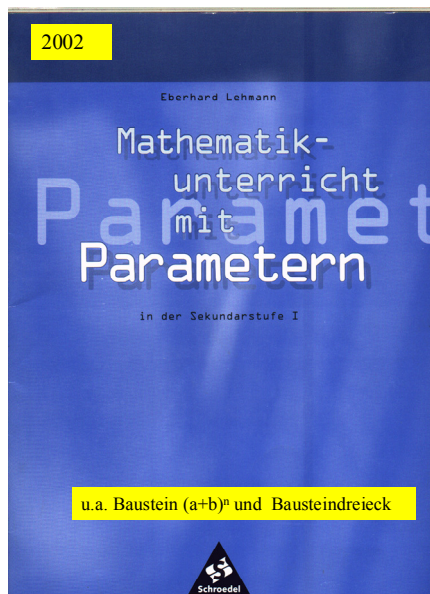
Geradenbaustein (Definition des Benutzers)	define gerade(x,a,b,m) = b+m*(x-a)
Summe und Folge (Aufruf zweier im System vorhandener Module)	sum(seq(i^3-i^2,i,1,5))
Differenzenquotient (Definition des Benutzers)	define diffqt(x,h)= ((f(x+h)-f(x)) / h
Binomische Formel (Definition des Benutzers)	define binomi(a,b,n) = (a+b)^n

Die theoretischen Hintergründe für die Arbeit mit Modulen / Bausteinen liefert das “Bausteindreieck”, das wir schon in Kapitel 6 kennen gelernt haben. Hier wird es noch mit anderm Inhalt dargestellt (aus einem Vortrag in Dresden 2006).



Folie 8: Das Bausteindreieck – Grundlage der Arbeit mit Bausteinen / Modulen

Für weitere Informationen zum Modulprinzip siehe z.B. (viele Beispiele)



Basics üben mit Spaßfaktor

Wie bereits oben erwähnt, können die Zwänge des Zentralabiturs dazu führen, gewisse Aufgabentypen auf mehr oder weniger langweilige Weise möglichst häufig zu üben. Das nimmt dem Lehrer die Freude am Unterricht und dem Schüler erst recht. Einige Abhilfen wurden oben bereits angedeutet, hier folgen noch einige Tipps aus meiner Unterrichtspraxis.

Mathematik an Bildern



Ein Auftrag an die Schüler zur nächsten Stunde

„Auf Exkursion mit eurem digitalen Fotoapparat. Nehmt Bilder aus eurem Umfeld auf, in denen möglichst viel Mathematik vorkommt!“

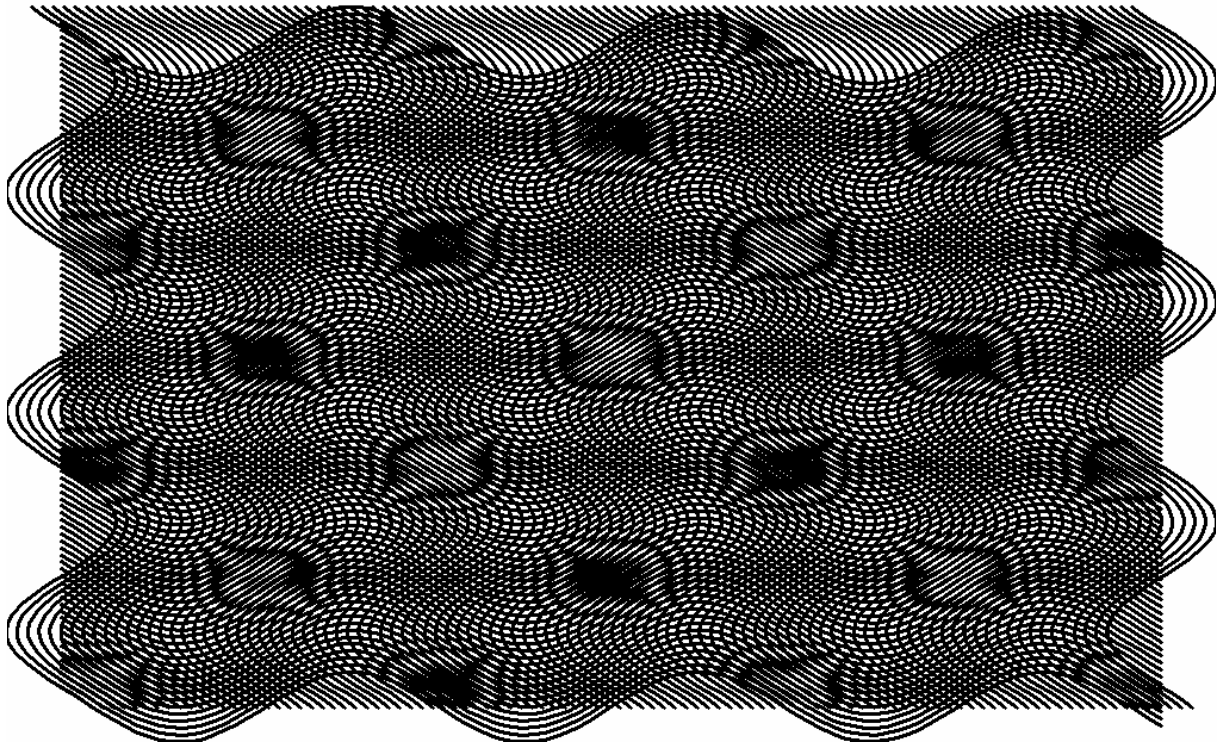
Der Lehrer wird eine reiche Ernte bestaunen können – die Schüler auch. Mit diesen Bildern lässt sich viel interessanter Unterricht gestalten, **der sicher auch zu den gerade besprochenen oder zu übenden Themen passt** oder auch weitere Mathematik enthält und der die Schüler motiviert – es sind ja ihre Aufnahmen. Nun ist es nur noch eine Organisationsfrage, wie man die Bilder verwendet:

- Die mathematischen Objekte auflisten (probieren sie es mit dem Bild von der Oberbaumbrücke in Berlin),
- Gleichungen zu den Objekten bestimmen,
- die Objekte nachkonstruieren (das Bild kann bei manchen Programmen in den Hintergrund gelegt werden) und so modellieren,
- eigene Zusammenstellungen von Objekten vorlegen usw.

→ → → siehe auch Kapitel 8

Mathematik mit Kurvenscharen

→ → → siehe auch Kapitel 5



Können Sie sich vorstellen, wie das Bild entstanden ist? Siehe Moire (**Moiré**) → Internet!

Hier wurde eine Schar von sehr eng aneinanderliegenden Sinuskurven – parallel zum Graphen von $y = \sin(x)$ gezeichnet, dann die senkrechte Schar. Das geht einfach mit $x(t) = \sin(t)$, $y(t) = t$, also unter Benutzung der oben schon erwähnten sehr vorteilhaften Parameterdarstellungen. Die Überlagerung der Scharen ergibt bei passender Vergrößerung bzw. Verkleinerung die schönen Moirés.

Zusammenfassung

Wir haben gesehen, dass man den Bannkreis der zentralen Prüfungen durchaus verlassen kann. Die wichtigsten Bausteine dazu sind:

- **Langfristige Konzepte verfolgen,**
- **Schüler kompetent machen auch in der Reflexion und Analyse von Unterricht und Aufgaben,**
- **sich Freiräume verschaffen durch andere Formen der Unterrichtsorganisation,**
- **die unerlässlichen (Prüfungs-) Basics auch an vielfältigen (originellen, ungewohnten) Objekten üben**
- **die vielfältigen Vorteile des Computereinsatzes nutzen.**

Vortragende

12.2 Mündliches Abitur mit dem Taschencomputer

Die Verwendung eines CAS im Unterricht zieht nicht nur seine Verwendung in Klausuren nach sich. Auch in mündlichen Prüfungen, speziell im Abitur, kann nun das CAS benutzt werden. Zunächst einige Anmerkungen zu den Zielen einer mündlichen Abiturprüfung und deren Ablauf. In den Einheitlichen Prüfungsanforderungen EPA in der Abiturprüfung für das Fach Mathematik (Fassung vom 24.5.2002, S. 16) heißt es zur mündlichen Prüfung u.a.

„Dabei sollen die Prüflinge zeigen, dass sie über mathematische Sachverhalte in freiem Vortrag berichten und im Gespräch zu mathematischen Fragen Stellung nehmen können. Sie sollen insbesondere nachweisen, in welchem Umfang sie

- einen Überblick über grundlegende Sätze, Begriffe und Verfahren der Mathematik besitzen,
- Verständnis für mathematische Denk- und Arbeitsweisen haben,
- Einblick in mathematische Problemstellungen und Ergebnisse gewonnen haben.

Um in der zur Verfügung stehenden Zeit diese Kompetenzen überprüfen zu können, muss sich die Aufgabenstellung für die mündliche Prüfung grundsätzlich von der für die schriftliche Prüfung unterscheiden. Im Vordergrund soll die Darstellung und Begründung von Sachverhalten stehen. In der Prüfung ist der Nachweis verschiedener fachlicher und methodischer Kompetenzen zu fordern. Umfangreiche Rechnungen und zeitaufwändige Konstruktionen sind zu vermeiden.

Einerseits bieten sich dazu an:

- die Nutzung geeigneter Werkzeuge zur Erarbeitung der Lösungen (z.B. Taschenrechner, Software, Fachliteratur),
- der Einsatz von Hilfsmitteln zur Präsentation der Lösungswege und Ergebnisse (z.B. Folien, Displays, Modelle).

Andererseits sind Aufgabenstellungen besonders geeignet, die

- Teilaufgaben enthalten, die sich auf eine Erläuterung des Lösungsweges beschränken, ohne dass die zugehörigen Rechnungen im Einzelnen auszuführen sind,
- Ergebnisse, Skizzen, Lösungswege usw. vorgeben, an denen wesentliche Gedankengänge zu erläutern sind.“

Diese Ausführungen lassen für den Einsatz von CAS und anderer Mathematik-Software sowie passender Präsentationsmittel breiten Raum, so dass sich für die Aufgabenstellungen im mündlichen Abitur zahlreiche Möglichkeiten ergeben. Im Folgenden sollen einige unterschiedliche Beispiele für mögliche Aufgabenstellungen mit CAS-Verwendung genannt werden.

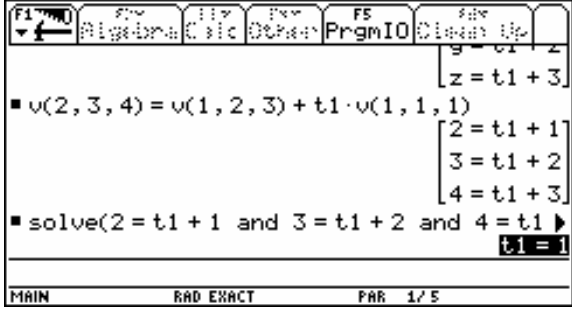
→ Tipps für Klassenarbeiten mit CAS – auch nützlich für den Unterricht

Die Vorbereitungszeit für jede Aufgabe wird mit etwa 10 Minuten geplant. Für die drei Beispiele wird eine Vortragszeit von ebenfalls etwa 10 Minuten angesetzt. Darin enthalten sind auch eventuelle anschließende Fragestellungen der Prüfungskommission. Die gewählten Aufgaben sind nicht besonders schwierig. Es geht hier insbesondere um das Aufzeigen einiger Einsatzmöglichkeiten eines CAS.

Beispiel 1: Grundkurs-Aufgabe aus der Analytischen Geometrie

Hier wird von einem fertigen CAS-Bild des Taschencomputers VOYAGE™ 200 ausgegangen.

Die Aufgabenstellung:

	<p>a) Erläutern sie mathematischen Hintergründe, die zu den vorliegenden Ein- und Ausgaben führten (u.a. Skizze anfertigen).</p> <p>b) Welche Änderungen würden sich ergeben, wenn die entsprechende Aufgabestellung für eine Ebene gestellt würde?</p> <p>c) Welche Definition im CAS liegt den Termen $v(2,3,4)$ usw. zu Grunde?</p> <p>Prüfungszeit: 10 Minuten</p>
---	--

Erwartungen:

- a) Der Prüfling erkennt in $v(1,2,3)+t_1(v(1,1,1))$ die rechte Seite einer Geradengleichung. Auf der linken Seite steht ein weiterer Ortsvektor, für den offenbar geprüft werden soll, ob der Punkt $P(2,3,4)$ auf der Geraden liegt, siehe letzte Zeile. Das ist der Fall wegen $t_1=1$ (Überprüfung durch Kopfrechnung). Dazu wurde die Vektorgleichung in drei Gleichungen zerlegt. Der Prüfling fertigt eine passende Skizze an.
- b) Die Ebenengleichung enthält zwei Richtungsvektoren. Damit entsteht ein LGS mit 2 Variablen und 3 Gleichungen. Nennen der möglichen Lösungsfälle.
- c) Um die Eingabe von Vektoren zu erleichtern, wurde beim VOYAGE™ 200 für Vektorspalten definiert:

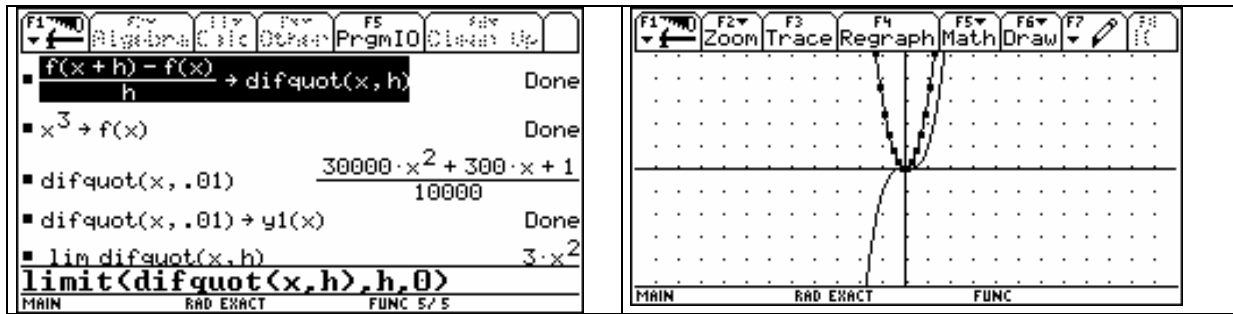
$[ax; ay; az] \rightarrow v(ax, ay, az)$. Dann führt z.B. die Eingabe $v(2,3,4)$ zur Ausgabe $\begin{bmatrix} 2 \\ 3 \\ 4 \end{bmatrix}$.

Beispiel 2: Grundkurs-Aufgabe aus der Analysis

- a) Definieren Sie beim VOYAGE™ 200 den Differenzenquotienten einer Funktion $y = f(x)$ in der h-Schreibweise als Baustein $\text{difquot}(x,h)$ zweier Variablen.
- b) Anschließend soll die Funktion $y = x^3$ für $h = 0.01$ betrachtet werden. Welche Zusammenhänge bestehen zwischen dem zugehörigen Differenzenquotienten und der Ableitung $y' = 3x^2$? Beachten Sie rechnerische und zeichnerische Aspekte. Benutzen Sie dazu den Taschencomputer.

Erwartungen:

Der Prüfling könnte z.B. die folgenden Bilder erstellen, mit dem View-Screen zeigen und erläutern.



Man sieht die Definition des Bausteins und die Zuweisung der Funktion. Danach wird der Baustein mit dem Parameterwerten x und $h=0.01$ aufgerufen. Es ergibt sich eine Parabel zweiten Grades. Die Funktion wird zum Zeichnen in $y1(x)$ gespeichert. Schließlich könnte man noch den Grenzwert, also die Ableitung $f'(x)$ ausrechnen.

Nun kann man die Ausgangsfunktion $f(x)$ und $y1(x)$ zeichnen lassen. Da angesichts der Bildschirmauflösung $y1(x)$ und $f'(x)$ in der Zeichnung aufeinanderfallen, könnte man den Sachverhalt animieren, indem man auf den Graphen zu $y1(x)$ den Ableitungsgraphen in einem anderen Zeichenstil, z. B. „square“, darüberzeichnet lässt.

Beispiel 3: Leistungskurs-Aufgabe aus der Analysis (Parameterdarstellung)

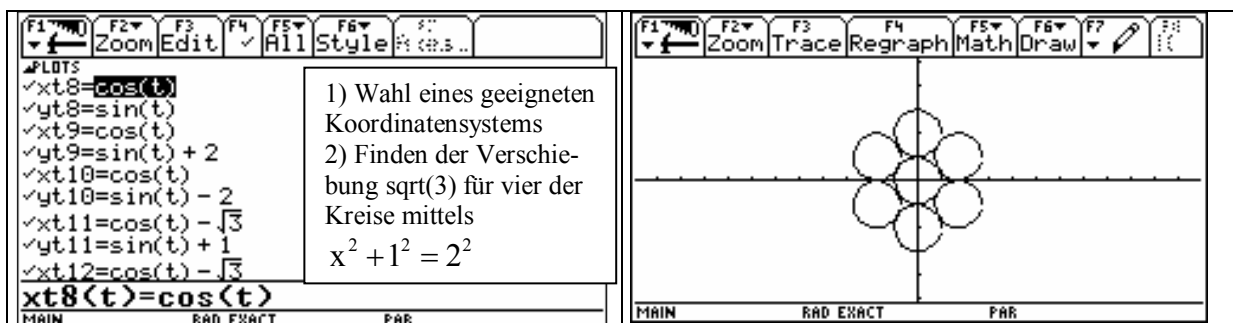
Auf der folgenden Abbildung sehen Sie einige geometrische Objekte an der Vorderfront einer Kirche.



- a) Rekonstruieren Sie die 7 Kreise mit Ihrem Taschencomputer und demonstrieren Sie Ihre Lösung am View Screen. Hinweis: Benutzen Sie Parameterdarstellungen.
- b) Beschreiben Sie einen Weg zur mathematischen Modellierung des markierten Bogens.

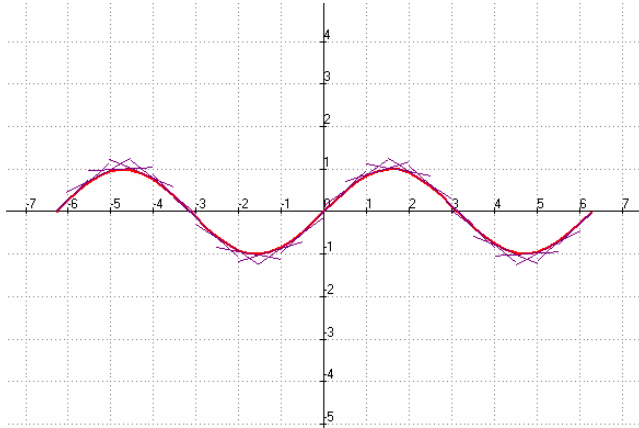
Erwartungen

Zu a) siehe die folgenden Abbildungen
 Zu b) Z.B. Punkte suchen, Parabelgleichung ansetzen



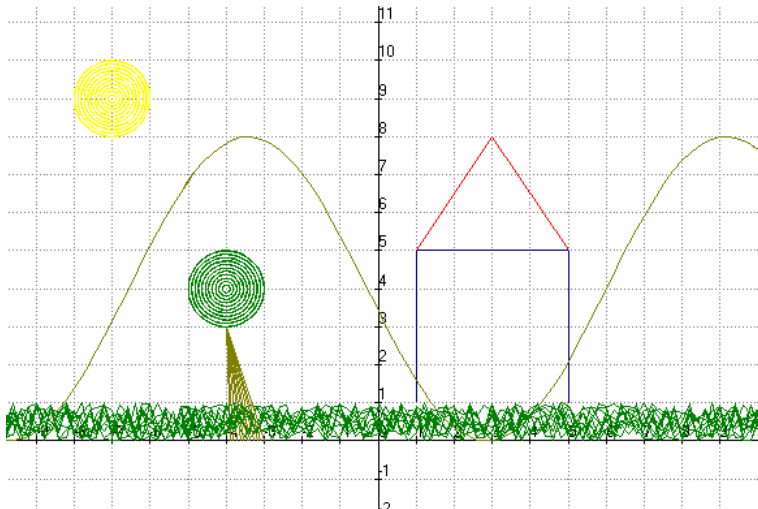
Beispiel 4: Offenes Material als Ausgangspunkt für Aufgabenstellungen

Die Grundidee liegt hier in der Auswertung vorliegenden Materials, das wegen seines offenen Erscheinungsbilds für vielfältige Untersuchungen geeignet ist. Andererseits lassen sich daraus aber auch engere, konkrete Fragestellungen finden. – Zu diesem Ansatz noch zwei weitere Beispiele:



Hüllkurven zeichnen, ein ergiebiges Thema für den Analysisunterricht

Beispiel 5: Mathematik in der Landschaft



Sonne, Gras, Berge, ein Baum, ein Haus – wie ist das entstanden? Erfinden Sie eine Geschichte dazu!

13. CAS-Werkzeugkompetenzen

In Kapitel 1.2.1 haben wir den WKC (Werkzeugkompetenz-Container) kennengelernt. Im Verlauf der Abhandlungen hat sich dieser inzwischen mächtig gefüllt, so dass es sich anbietet, über den Inhalt des Containers und weitere Fragen zur CAS-Werkzeugkompetenz genauer nachzudenken.

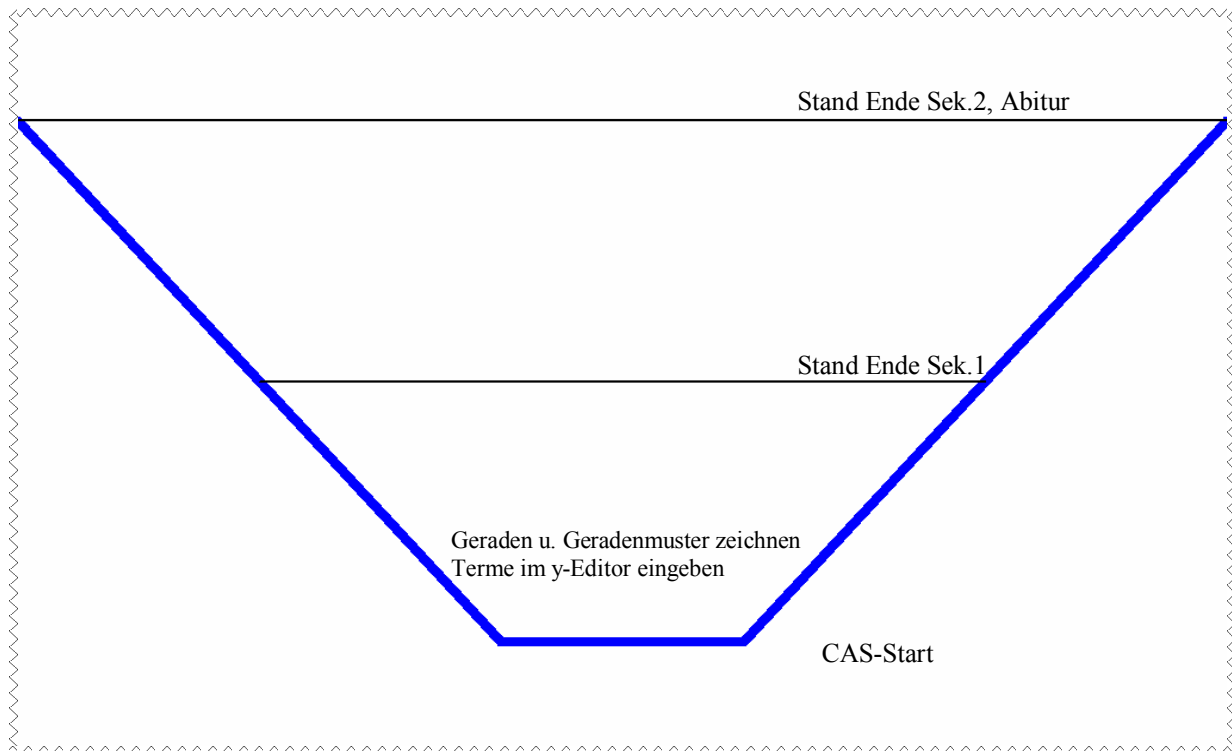


Abb. 1.2g: Der Werkzeugkompetenz-Container (WKV) – so hat es begonnen, siehe Kapitel 1.2.1

Das Container-Modell zeigt, dass sich die Werkzeugkompetenz im Verlauf des Unterrichts schrittweise entwickelt – es suggeriert gleichzeitig einige unterrichtsrelevante Fragen:

- Was steht im Container am Ende der Sekundarstufe 1?
- Was steht im Container am Ende der Sekundarstufe 2?
- Was wird an Werkzeugkompetenz im (Zentral-) Abitur benötigt?

Die Containerinhalte sind von etlichen Parametern abhängig:

- Von der Art der Unterrichtsinhalte,
- von den von der Lehrperson favorisierten inhaltlichen Schwerpunkten und methodischen Wegen,
- von der Kreativität der SchülerInnen bei den Problemlösungen,
- von der Leistungsstärke und dem Engagement der SchülerInnen,
- vom benutzten Werkzeug

insofern variiert der Containerinhalt auch schon in einer Lerngruppe. Dennoch bildet sich innerhalb einer Lerngruppe eine nicht geringe Durchschnittsmenge - und die zentralen Prüfungen (mit CAS-Anwendung) verstärken noch das Bedürfnis nach einer großen Durchschnittsmenge über die Lerngruppen hinaus. Darüber hinaus ist zu unterscheiden zwischen der Bedienkompetenz (dem handling) und Anwendungskompetenz (dem Anwenden der Bedienkenntnisse auf konkrete mathematische Problemstellungen).

Was gehört zum Grundvorrat des Werkzeugkompetenz-Containers?

Wir unterscheiden zwischen

- allgemeinen (stets nützlichen) CAS-Werkzeugkompetenzen und
- spezielleren themenbezogenen CAS-Werkzeugkompetenzen

Allgemeine (stets nützliche) CAS-Werkzeugkompetenzen (WK)	Erläuterungen, Bedienungs- und Anwendungskompetenz
Kompetenz in der Bedienung grundlegender Elemente der Software, Nutzen von System-Hilfen	Kenntnis der Menüs, Untermenüs, Auswählen von Optionen; hierzu gehört aber auch das richtige Einstellen von Optionen; Nutzen von im System angebotenen Hilfen.
Term-Kompetenz (Syntax), Fehlererkennungskompetenz	Hierbei geht es um das richtige Eingeben von (auch komplexen) Termen (Kenntnis der Syntax), das Verstehen von Fehlermeldungen und die Korrektur von Fehleingaben.
Erkennen und Beseitigen logischer Fehler (Semantik), Fehlererkennungskompetenz, Erkennen falscher Rechnereinstellungen	Die Eingaben sind zwar syntaktisch richtig erfolgt, aber die Ausgabe entspricht nicht den mathematischen Erwartungen. Fehler entstehen auch oft durch falsche Einstellungen am Rechner (z.B. degree statt rad)
Visualisierungskompetenz → Kapitel 2, Kapitel 4	Hierbei sind die für eine zielgerichtete Zeichnung zu beachtenden Parameter passend zu wählen: Window-Einstellungen, Maßstab, Achseneinteilung, minimale und maximale Wert, Schrittweite, Darstellungsform / Modus (function, parametric, polar, sequence,...), (Linie, Punkte, Farben usw.)
Interpretationskompetenz	Ausgegebene Zeichnungen, Terme oder Tabellen sollen zielgerichtet ausgewertet werden
Modulare Kompetenz (Baustein-Kompetenz) Abkürzung umfangreicher Terme → Kapitel 2, Kapitel 6	Über die Vorzüge des Arbeitens mit vordefinierten oder selbstdefinierten Bausteinen mit Parametern wird an verschiedenen Stellen des Buches berichtet.
Animationskompetenz → Kapitel 2, Kapitel 4	Animieren verlangt höhere und umfassendere Kompetenzen als das Visualisieren in engerem Sinn, u.a. weil hier Entwurfsentscheidungen zu treffen und die Visualisierungsmöglichkeiten verknüpft miteinander einzusetzen sind.
„Family-Kompetenz“ → Kapitel 5	Hier geht es um Zusammenstellungen vieler Objekte auf einem Bildschirm, die in irgendeiner Form miteinander zusammenhängen.
Modellierungskompetenz → Kapitel 7	Komplexe Probleme müssen mit mathematischen Hilfsmitteln modelliert werden; das CAS kann besonders beim Experimentieren mit unterschiedlichen Ansätzen helfen.

Dokumentationskompetenz → Kapitel 11	Aus der Menge der Ein- und Ausgaben ist für die Formulierung eines erläuternden Textes geeignet auszuwählen und mit den mathematischen Hintergründen der Lösung passend zu verknüpfen.
Optimierungskompetenz	Häufig gibt es mehrere Bearbeitungswege, die möglicherweise auch unterschiedlich schnell durchlaufen werden. Gerade bei Prüfungen kann die Wahl des schnellsten Weges wichtig sein.
Verknüpfungskompetenz	Bei neuen CAS (z.B. TI-Nspire) haben die Nutzer die Möglichkeit, verschiedene Anwendungen miteinander zu verknüpfen (Rechnen, zeichnen, tabellieren, dokumentieren)

Themenspezifische CAS- Werkzeugkompetenzen (WK)	Erläuterungen, Bedienungs- und Anwendungskompetenz, Beispiele
Algebra (vorwiegend Sek.1)	z.B. Solve(gleichung1 = gleichung2, x)
Geometrie (vorwiegend Sek.1)	z.B. Durchführen von Grundkonstruktionen wie „Senkrecht durch einen Punkt zeichnen“
Analysis (vorwiegend Sek.2) Function $y = f(x)$, parametric $[x(t), y(t)]$, polar (r, φ)	z.B. Eingabe einer Kreisgleichung $x(t)=\cos(t)$, $y(t)=\sin(t)$ mit passendem Laufbereich für t
Lineare Algebra (vorwiegend Sek.2)	z.B. LGS lösen können, die Arbeit mit dem Matrizenkalkül beherrschen
Analytische Geometrie (vorwiegend Sek.2)	z.B. Länge eines Vektors
Stochastik (vorwiegend Sek.2)	z.B. Binomialverteilung
Usw.	Usw.

Zur Erinnerung für die unten folgenden Überlegungen zur Förderung mathematischer Kompetenzen durch CAS-Werkzeugkompetenz zunächst noch einmal die schon bekannte Tabelle:

Leitideen	Allgemeine mathematische Kompetenzen	Anforderungsbereiche
L1 Zahl L2 Messen L3 Raum und Form L4 Funktionaler Zusammenhang L5 Daten und Zufall	K1 Mathematisch argumentieren K2 Probleme mathematisch lösen K3 Mathematik modellieren K4 Mathematische Darstellungen verwenden K5 Mit symbolischen, formalen und technischen Elementen der Mathematik umgehen K6 Kommunizieren	AI Reproduzieren AII Zusammenhänge herstellen AIII Verallgemeinern und Reflektieren

Leitideen, allgemeine mathematische Kompetenzen

Förderung mathematischer Kompetenzen durch CAS-Werkzeugkompetenz

Die folgende Zusammenstellung zeigt, in welchem Ausmaß mathematische Aktionen und mathematische allgemeine und fachliche Kompetenzen durch Technologieeinsatz und vorhandene Werkzeugkompetenz gefördert werden können.

CAS-Verwendung und die damit verbundene Werkzeugkompetenz →	→ ersetzen ↓
Über die Rolle des CAS bei Routinerechnungen berichtet Kapitel 3 (Hand contra CAS)	Routinerechnungen
Über die Rolle des CAS bei Routinezeichnungen berichtet Kapitel 3 (Hand contra CAS)	Routinezeichnungen

CAS-Verwendung und die damit verbundene Werkzeugkompetenz →	→ unterstützen ↓
Die Kompetenz des Kontrollierens von Ergebnissen verschafft dem Schüler Sicherheit für seine Lösungen. Hierzu gehört z.B., dass durch Handrechnung gefundene Ergebnisse nun auch noch mit dem Rechner erzeugt und dann verglichen werden können.	das Kontrollieren
In Phasen des Experimentierens erweist sich der Rechner als besonders nützlich: Schnelles Durchrechnen von Ansätzen, schnelle graphische Darstellungen, Verwerfen von Vermutungen, neue Ansätze erproben – mit diesen Aktionen erweitert der S seine heuristischen Strategien.	das Experimentieren und Finden von Vermutungen und deren Test
Die Simulation von z.B. stochastischen Problemen ist bekanntlich besonders datenintensiv. Zufallszahlen können schnell Material liefern, statistische Auswertungen können auf dem Rechner leicht durchgeführt werden. Damit gewinnen die Schüler Zugang zu einer in der Praxis häufig verwendeten Methode.	das Simulieren
Komplexe bzw. umfangreiche Rechnungen innerhalb von Beweisführungen können dem Rechner übergeben werden. Damit werden ggf.	das Beweisen

<p>Schwierigkeiten beseitigt, die bei Handrechnung die Beweisführung behindern oder gar unmöglich machen würden. – Siehe z.B: Kapitel 4.4.2, Achsenspiegelung.</p> <p>Bei der Durchführung von Beweisen kann Werkzeugkompetenz in diversen Bereichen nützlich sein, zum Beispiel:</p> <ul style="list-style-type: none"> • Algebra (Umformen komplexer Terme, Lösen von Gleichungen und Ungleichungen, ...) • Analysis (Summen, Differenzenquotienten, Grenzwerte, Integrationsmethoden, ...) • Analytische Geometrie, lineare Algebra (Rechnen mit Vektoren und Matrizen, Gleichungssysteme...) • Stochastik (Binomialverteilung, ...) 	
<p>Der Nutzen des CAS-Werkzeugs als Argumentationshilfe zeigt sich z.B. durch Verweis auf durch das CAS erzeugte Rechen- oder Zeichenergebnisse oder auf Abläufe etwa bei einer Animation. Gegenargumente können möglicherweise durch schnell erzeugte Ergebnisse gefunden oder widerlegt werden. Argumentieren kann auch dadurch entwickelt und geschult werden, dass man Operationen, die vom Werkzeug als Black-Box ausgeführt wurden erklären und begründen lässt. Hierzu gehört auch das Interpretieren von Bildschirminhalten.</p>	<p>das mathematische Argumentieren (eine allgemeine mathematische Kompetenz)</p>
<p>Über die erheblichen CAS-Möglichkeiten bei Modellierungsvorgängen kann man sich in Kapitel 7 überzeugen.</p>	<p>das Modellieren (eine allgemeine mathematische Kompetenz)</p>
<p>Auch hierfür finden sich in dem Buch überall überzeugende Beispiele. Weiterhin wird hingewiesen auf die oben erwähnte Kontroll- und Testkompetenz, die sich hier als sehr nützlich erweist.</p>	<p>das Lösen mathematischer Probleme, Aufgabenlösen (eine allgemeine mathematische Kompetenz)</p>
<p>Insbesondere Kapitel 4 (Visualisieren) bringt hierzu viele Beispiele. Besonders wird hier noch auf die neuartigen Erkenntnisgewinne hingewiesen, die durch das Vergrößern und Verkleinern von graphischen Darstellungen (Zoomen) entstehen können. Auch das schnelle Variieren von Parametern ist nur mit Technologieinsatz möglich.</p>	<p>die Arbeit mit mathematischen Darstellungen (eine allgemeine mathematische Kompetenz)</p>
<p>Die Bedeutung der Werkzeugkompetenz bezüglich dieser allgemeinen mathematischen Kompetenz spiegelt sich in dem vorliegenden Buch beispielsweise in den zahlreichen Abbildungen von CAS-Bildschirmen.</p>	<p>das Umgehen mit symbolischen, formalen u. technischen Elementen der Mathematik (eine allgemeine mathematische Kompetenz)</p>
<p>Erfahrungsgemäß führt die Arbeit am Computer oder das Vortragen von CAS-Lösungen zu einem regen Austausch zwischen den SchülerInnen (Kommunikation Mensch-Mensch). Aber auch die Kommunikation Mensch-Maschine als eine besondere Form einer mathematischen Kommunikation ist hier zu nennen.</p>	<p>Kommunikationsvorgänge (eine allgemeine mathematische Kompetenz)</p>

Die folgenden ergänzenden Ausführungen zur Werkzeugkompetenz stammen von Helmut Heugl (aus einem Vortrag in Klagenfurth, September 2005)

„Kommentare zum Einfluss von Technologie

A1 ⇔ Modellbilden, Darstellen

➤ **Zur Modellkompetenz und Werkzeugkompetenz:**

Technologie bietet eine größere Vielfalt an Prototypen eines Modells, einer Formel – auch Modelle, die vorher im Unterricht nicht verfügbar waren (z.B. Rekursive Modelle). Während im traditionellen Mathematikunterricht meist nur ein Prototyp verfügbar ist und verwendet werden kann, stehen durch Technologie oft mehrere Prototypen parallel in verschiedenen Fenstern zur Verfügung. Typisch für diese neue Art des mathematischen Denkens und Handelns ist das Arbeiten in einem Fenster und das Hin- und Herpendeln zwischen Fenstern, um die Möglichkeiten der verschiedenen Prototypen nutzen zu können. Wir nennen dieses Handlungskonzept „Window-Shuttle-Methode“ – eine neue Qualität mathematischen Handelns.

Unbedingte Voraussetzung für das Nutzen verschiedener Prototypen ist eine Werkzeugkompetenz beim Modellbilden, wie zum Beispiel bei rekursiven Modellen, bei Regressionsfunktionen oder bei der Nutzung von Tabellenkalkulationssoftware.

➤ **Zur Übersetzungskompetenz**

Der Übersetzungsprozess verläuft normalerweise in zwei Phasen: Zuerst werden Informationen über das gegebene Problem (Texte, Daten graphische Informationen, usw.) in eine komprimierte Form übersetzt – wir nennen sie „Wortformel“. Im zweiten Schritt wird die Wortformel in die Sprachen der Mathematik übersetzt.

Mit Hilfe der Technologie und dem dadurch zur Verfügung stehenden erweiterten mathematischen Wortschatz kann die Übersetzung in die mathematische Symbolsprachen direkter erfolgen. Übliche Tätigkeiten beim Übersetzungsprozess: Definieren von Variablen und Funktionen (⇔ Erweiterung des mathematischen Wortschatzes), Nutzen von Befehlen oder Funktionen, die die Technologie bereit stellt, Schreiben von Programmen.

➤ **Zur modularen Kompetenz**

Das Nutzen von Modulen ist nicht neu, jede Formel aus der Formelsammlung ist letztlich ein Modul (z.B. Cosinussatz, Heronsche Flächenformel usw.) . Das modulare Denken und Arbeiten hat durch das Werkzeug allerdings eine neue Qualität bekommen. Während nämlich im traditionellen Mathematikunterricht solche Module der Ausgangspunkt für das Rechnen sind, übernehmen durch Technologie verfügbaren Module auch das Operieren.

Module sind komplexe Wissenseinheiten

- in denen Wissen komprimiert wird, und
- in denen Operationen durch diese Kapselung als ganzes abrufbar und einsetzbar werden

Das Entwickeln von Modulen bedeutet also der Entwicklung eines kognitiven Schemas, das als kognitive Einheit abrufbar ist. Verbunden ist damit auch immer eine Reduktion der Komplexität.

...

Nach der Entstehung kann man 3 Arten von Modulen unterscheiden:

➤ **Module, die von den Schülern entwickelt wurden**

Diese Module sind sozusagen die wertvollsten und gerade bei der Konstruktion der Module in der so genannten White Box Phase des Lernprozesses zeigt sich diese deutliche Veränderung im mathematischen Tun.

Durch Speichern, Definieren von Funktionen oder Programmieren werden solche komplexe Wissenseinheiten geschaffen. Manche stehen als Funktionen oder Programme für den weiteren Problemlöseprozess zur Verfügung, andere werden nur temporär eingesetzt, um den Ablauf besser zu strukturieren

- **Module, welche die Lehrer zur Verfügung stellen**
Besonders als didaktisches Werkzeug werden von Lehrern in der White Box Phase des Lernens Module als Black Box angeboten, die zum Entdecken verwendet werden, aber deren Inhalt für den Lernprozess nicht ausschlaggebend ist.
- **Module die das CAS zur Verfügung stellt**
*Man kann sagen ein CAS ist ein System von Modulen. Das beginnt beim algebraischen Modul **factor(t(x),x)** zum Faktorisieren von Termen und geht bis zu Modulen zum Lösen von Differentialgleichungen. Betreffend der Chancen und Gefahren gilt dasselbe wie bei den Lehrermodulen.*

Ziele (Phasen) eines modularorientierten Mathematikunterrichts

[Lehmann, 2002]

- Definieren von Modulen
- Analysieren von Modulen, Nutzen von Modulen für experimentelles Lernen
- Entwickeln eines "Modulpools" als Werkzeugkasten für das Problemlösen
- Nutzen von Modulen als „Black Boxes“
- Verknüpfung von Modulen, Entwickeln neuer, komplexerer Module durch Nutzen bekannter Module als Bausteine

Die Ergebnisse von E. Lehmann's Untersuchungen zeigen, dass Schüler/innen, die mit dem modularen Arbeiten vertraut sind, diese Module tatsächlich als neue Sprach-elemente beim Problemlösen und Beweisen nutzen.

A2 ⇔ Operieren, Rechnen

Bevor man den Einfluss von Technologie auf Handlungen des Operierens untersucht sollte definieren, was Kalkülkompetenz ist:

Kalkülkompetenz (anstelle von Rechenfertigkeit) ist die Fähigkeit eines Individuums, einen gegebenen Kalkül in konkreten Situationen zielgerichtet anwenden zu können.
[Hischer, H. 1995]

Diese Definition zeigt deutlich, dass Kalkülkompetenz mehr ist als Rechnungen nur händisch auszuführen.

Der Einfluss von CAS auf die Kalkülkompetenz:

- *Schwerpunktverschiebung vom Operieren zum Modellieren und Interpretieren*
- *Schwerpunktverschiebung vom Ausführen zum Planen der Operation*
- *Schwerpunktverschiebung von der Handkalkülkompetenz zu den anderen algebraischen Kompetenzen*
- *Geringere Komplexität beim händischen Rechnen, insbesondere was die langfristige Kalkülkompetenz betrifft*
- *Notwendigkeit der Werkzeugkompetenz*
- *Mehr Praxisnähe bei Anwendungsproblemen*
- *In der Theoriephase mehr Konzentration auf das jeweilige mathematische Problem, da Rechenarbeit abgegeben wird*
- *Eine bessere Verknüpfung des formalen und inhaltlichen Aspekts der Mathematik*

➤ **Zur Strukturerkennungskompetenz**

Auch die Notwendigkeit dieser Kompetenz ist nichts Neues. So hat etwa Günther Malle in seinen Untersuchungen gezeigt, dass ein großer Teil der Schülerfehler beim algebraischen Operieren auf Strukturerkennungsfehler zurückzuführen ist.

Eine Voraussetzung für diese Kompetenz ist die Kenntnis der algebraischen Gesetze und Regeln. Richtige Strukturentscheidungen können auch bei Nutzung des Werkzeugs CAS nicht allein mit "trial and error" getroffen werden

Gerade jetzt, wo das Werkzeug die Ausführung der Operation übernimmt, bekommt die Strukturerkennung eine neue Bedeutung.

Strukturerkennung ist nötig

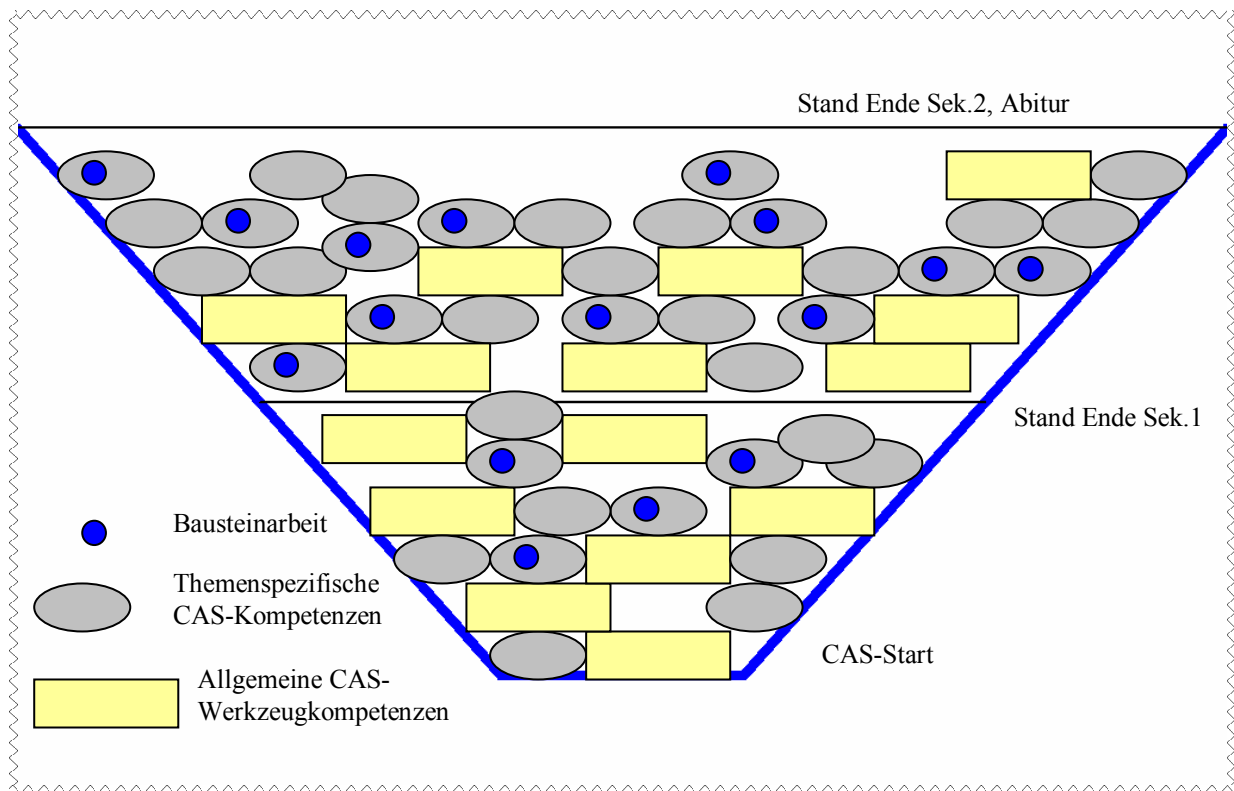
- *bei der Eingabe eines Ausdrucks: Insbesondere bei linearen Eingabezeilen ist zuerst einmal eine Strukturerkennung für das richtige Setzen der Klammern nötig.*
- *bei der Auswahl der passenden Operation: Diese Entscheidung erfolgt auf der Basis einer Strukturerkennung.*
- *bei der Überprüfung und Interpretation von Ergebnissen: Der Lernende muss Ergebnisse interpretieren, die er nicht selbst produziert hat. Das angebotene Ergebnis stimmt von der Struktur her oft nicht mit dem erwarteten überein.*
- *beim Vergleich verschiedener Ergebnisse. Oft ist nicht sofort einsehbar, ob verschiedene Ergebnisse äquivalent oder verschieden sind.*

Ende des Zitats „Heugl“

CAS-Werkzeug-Kompetenz beim Zentralabitur mit CAS

Abitur: Der CAS-Werkzeug-Kompetenz-Container ist vor dem Abitur nun weitgehend gefüllt. Beim CAS-Zentralabitur erwartet man von den SchülerInnen, dass sie viele der oben genannten Kompetenzen in der Prüfung einsetzen können. Um welche es sich genauer handelt, ist für die verschiedenen Bundesländer nicht einheitlich zu beantworten. Hierzu kann man Analysen der CAS-Anforderungen in den vorhergehenden CAS-Aufgabenvorschlägen empfehlen. → Siehe Kapitel 10 und 12. Ein gewisser Grundvorrat dürfte aber in allen Bundesländern gleich sein.

Die Abbildung unten ist eher schematisch zu verstehen. Allgemeine CAS-Werkzeugkompetenzen teilen sich den Containerplatz mit speziellen themenbestimmten CAS-Kompetenzen.



Schematische Darstellung: Der Endstand des Werkzeugkompetenz-Containers (WKV) – kurz vor dem Abitur

14. Empfehlungen für ein CAS-Schulcurriculum

Angangspunkt der Überlegungen zu einem CAS-Lehrplan ist Abbildung 14.1a.

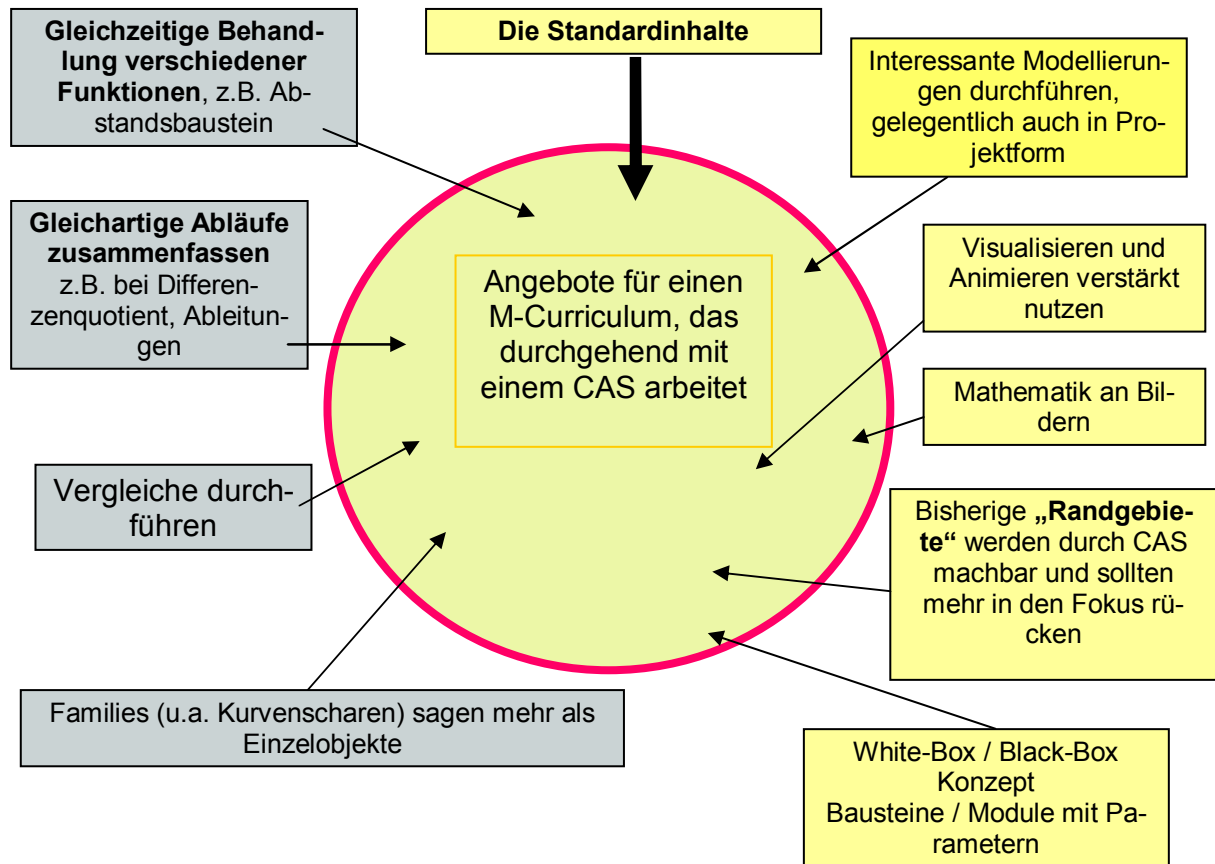


Abb. 14a: Ungewohnte Sichtweisen auf Lehrplaninhalte

Die einzelnen Aspekte werden nun mit Blick auf einen mit CAS arbeitenden Lehrplan kommentiert. **Ich empfehle, die Erläuterungen insbesondere unter dem Gesichtspunkt eines CAS-Schulcurriculums zu studieren, da es in der Praxis leichter ist ein diesbezügliches Schulcurriculum zu erstellen als ein Bundesland-CAS-Curriculum durchzusetzen.**

An einen ausführlichen Entwurf, der auf inhaltliche Details eingeht ist hier nicht gedacht. Es handelt sich um Aspekte, die man für die einzelnen Klassenstufen immer wieder berücksichtigen sollte, also eine Integration der oben vertretenen langfristigen Konzepte (Kapitel 2).

1) An erster Stelle der Liste stehen die konzeptionellen Überlegungen in Kapitel 2. Von Beginn an fundamental sind dabei die Konzepte 1 und 4.

2) Überlegungen zu Abbildung 14a

Innovation – Empfehlungen für ein Schulcurriculum oder einen allgemeinen Curriculum	Erläuterungen Die Kapitelangaben verweisen nur auf Kapitel, in denen der Aspekt schwerpunktmäßig betrachtet wird.
Term, Graph, Tabelle, Text Visualisieren und Animieren verstärkt nutzen	Unverzichtbare grundlegende Konzepte → Kapitel 2 → Kapitel 2, Kapitel 4
Gleichzeitige Behandlung verschiedener Funktionen Gleichartige Abläufe zusammenfassen z.B. bei Differenzenquotient, Ableitungen Gleichzeitige Betrachtung verschiedener Darstellungsformen	Die üblichen Pläne gehen bekanntlich davon aus, die Funktionenklassen brav nacheinander abzuarbeiten. Die CAS-Verwendung ermöglicht nun eine Abkehr von diesem Ansatz, indem für Teilproblemstellungen mehrere Typen nebeneinander (auch vergleichend, siehe unten) bearbeitet werden. → Kapitel 9.2 → Kapitel 5
Vergleiche durchführen	Dieser Aspekt ist nicht nur bei CAS-Einsatz wichtig. Durch die gleichzeitige Visualisierung verschiedener Objekte auf nur einem Bildschirm oder auf Bildschirmen nebeneinander gewinnt die Vergleichsmethode wesentlich an Bedeutung. → Kapitel 5.3
Bisherige „Randgebiete“ werden durch CAS machbar und sollten mehr in den Fokus rücken Parameterdarstellungen Matrizen Iteration, Rekursion Regression Simulation ...	Meine besondere Empfehlung gilt hier den Parameterdarstellungen (auch Polarkoordinaten), die durchgehend ab Klasse 8 bis hinein in Analysiskurse auftreten sollten. → Kapitel 9.4.1 Entsprechend wichtig ist ab den LGS in Klasse 8 Matrizenrechnung, die in allen Curriculumstellen, die mit der Linearen Algebra zusammenhängen (Abbildungsgeometrie, LGS, ...), eine verbindende Rolle spielt. Stochastische Matrizen verbindet die Lineare Algebra mit Stochastik und Analysis (Folgen, Grenzwerte) → Kapitel 9.3.2, 9.4.2 → Kapitel 7.5 Weitere bisherige Randgebiete
Families (u.a. Kurvenscharen) sagen mehr als Einzelobjekte	Einer der besonderen Vorzüge der CAS ist die schnelle gleichzeitige Darstellung vieler gleichartiger Objekte. Das sollte immer wieder ausgenutzt werden. → Kapitel 5
Zunehmendes Arbeiten mit Bausteinen / Modulen mit mehreren Parametern	Typische CAS-Fähigkeit, die nicht fehlen darf. → Kapitel 6
Das White-Box / Black-Box Hand oder CAS?	Fundamental für das Arbeiten mit Computern. Darf nicht fehlen! → Kapitel 3
Modellierungen durchführen, gelegentlich auch in Projektform	Die Modellierungen können durch CAS komplexer und realitätsnäher werden. Experimentieren durch Rechnungen und Zeichnungen, Lösen mit CAS → Kapitel 7

Innovation – Empfehlungen für ein Schulcurriculum oder eines allgemeines Curriculum	Erläuterungen Die Kapitelangaben verweisen nur auf Kapitel, in denen der Aspekt schwerpunktmäßig betrachtet wird.
Mathematik an Bildern	Diese motivierende Bereicherung sollten sie sich nicht entgehen lassen! → Kapitel 8
Dokumentation CAS-Werkzeugkompetenz	Versäumen sie in ihrem Schulcurriculum nicht, Absprachen über die Form der Dokumentation und den Umfang der Werkzeugkompetenz zu treffen! → Kapitel 11 → Kapitel 13
Schulbücher	Es gibt heute bereits viele Schulbücher, die auch offene Aufgaben- und Unterrichtskultur stark berücksichtigen, es gibt bisher nur wenige Schulbücher mit CAS-Berücksichtigung. Das geschieht dann eher sporadisch und im Wesentlichen als Rechen- oder Zeichenhilfe. Noch bei keinem Schulbuch ist ein durchgehendes CAS-Konzept im Sinn der Konzepte aus Kapitel 2 erkennbar.

Abb. 14b: Tipps für ein Curriculum

Abschließend noch einige Feststellungen, die ihren Unterricht bereichern können:

Verdeutlichen sie in ihrer Fachkonferenz den Mehrwert des CAS-Einsatzes gegenüber einem computerfreien M-Unterricht

Zeigen sie das durch Visualisierungen oder durch das Thema „Solve ändert den Unterricht“ (→ Kapitel 3.3)

Hand oder CAS? - Auf die richtige Mischung kommt es an!

Es ist leicht, offene Computeraufgaben zu finden

CAS ermöglichen auch gebietsübergreifende Unterrichtssequenzen

Die neue Schülerrolle: Die Freiheit genießen – eigenständig arbeiten, aber auch kooperieren (sich z.B. bei der Computerarbeit austauschen) - mit CAS präsentieren dürfen

Ihre neue Lehrerrolle: Der Lehrer als Unterrichtsmanager

Sammlung von CAS-Beispielen in diesem Buch

Fachinhalt	Zusammenhang, Thema	Klassenstufe, Kurs	Seite
Ableitung von $y = \ln(x)$ zeichnen /berechnen	Families, 3 Versionen	Sek.2, Analysis	104
Ableitung, $d(a \cdot x^2, x)$, Grenzwert	White-Box	Sek.2, Analysis	49
Ableitungsfunktionen, Differenzenquotienten, Graphen	Unterrichtssequenz	Sek.2, Analysis	21
Ableitungskurven, Parameterdarstellung	Animation	Sek.1, 2	70
Abstandsbaustein	Stundenentwurf	Sek.1	113
Abstandsberechnung	Bausteindefinition	Sek.1, 2	108
Abstandsberechnung, Punkt-Graphen	Baustein	Sek.2	111, 230
Abstandsproblem, Punkt viele Kurven	Modellierung, Projekt	Sek.2, Analysis	116f
Achsen Spiegelung, auch Berechnung der Abb.Gleichung	Animation	Sek.2, Abb. Geom.	78
Astroiden	Lehrplanthema, Parameterd.	Sek.2, Analysis	191
Bausteine, ausgewählte	Bausteinkiste	Sek.1, 2	130
Binomische Formeln	Neue Sicht auf Lehrplan	Sek.1	174
Differenzenquotient, Grenzwert	Neue Sicht auf Lehrplan	Sek.1, 2, Analysis	175
Differenzenquotient, Ableitung von $y = \ln(x)$	Visualisierung, Animation	Sek.2, Analysis	34
Differenzenquotienten, Graphen	Families, Kurvenscharen	Sek.2, Analysis	37
Differenzenquotienten-Graphen, diverse	Neue Sicht auf Lehrplan	Sek.2, Analysis	173
Differenzieren	Mindeskompetenzen	Sek.2, Analysis	46
Dreiecksteilpunkte	Programmieren, Animation	Sek.2, Analysis	126
e-Funktionen	Klausuraufgabe, mit und ohne CAS	Sek.2, Analysis	208f
Ellipse, Drehstreckung, Rekursion	Visualisierung, Animation	Sek.2, Abb. Geom.	76
Flächeninhaltsberechnung	Programmieren	Sek.2, Analysis	122
Folgen 0 – 1	Programmieren	Sek.2	123
Foto, mathematische Spuren legen	M auf Bildern	Sek.1,	39
Fotos	Families	Sek.2	84, 85
Fotos, Bilder	M auf Bildern	Sek.1, 2	163f, 170
Fotos, Bildersammlung	M auf Bildern	Sek.1, 2	40
Gartenexkursion	Modellieren, Projekt, Parameterdarstellung	Sek.2, Analysis	142f
Gerade, Punkt	Abitur mündlich	Sek.2	239
Geraden	Experimentieren	Sek.1	177
Geradenbaustein, $gerade(x, m, n)$, Funktionsaufrufe	Black-Box	Sek.1, 2	51
Geradenbüschel	Bausteindefinition	Sek.1	108
Geradenmuster erzeugen	Einführungsstunde in CAS	Sek.1	12
Geradenschar, Gerade, Lagebeziehungen	Rechenkompetenz	Sek.2, Anal. Geom.	62
Geradenschar, Sinusschar	Families	Sek.2, Analysis	83
Geradenscharen, 2 Scharen schneiden sich	Families, math. Aufsatz, Bewertung	Sek.1	86
Geradenschnittpunkte	Black-Box, 3 Lösungen	Sek.1, 2	51
Gläser	Families	Sek.1, 2, Analysis	99
Gleichung, solve	White-Box, Black-Box	Sek.1	24

Fachinhalt, Thema	Zusammenhang, Thema	Klassenstufe, Kurs	Seite
Gleichungen	Grundregeln für Gleichungen	Sek. 1	25
Gleichungen, solve	Unterrichtssituationen	Sek. 1	55
Graphen	Families	Sek. 2, Analysis	93
Graphen-Family	Visualisierung	Sek. 1, 2	68
Heron-Verfahren	Lösungsvielfalt	Sek. 1, 2	220
Kacheln	Experimentieren, Nachkonstruieren	Sek. 1, 2, Analysis	185
Kalküle	Grundregeln, Black-Box	Sek. 2, Analysis	60
Kardioiden	Families	Sek. 2	93
Kreis	Visualisierung, Abbildung mit Matrix	Sek. 1, 2, Abb. Geometrie	76
Kreis mehrfach drehen	Experimentieren	Sek. 2, Abb. Geom.	178
Kreise	Einführungsstunde in CAS	Sek. 1, 2	18
Kreise durch einen Punkte, Parameterdarstellung	Families	Sek. 1, 2	89
Kreise, Kirchenornament	Abitur mündlich	Sek. 2	240
Kreisornament, Kirche	M auf Bildern	Sek. 2, Analysis	168f
Kreisscharen, Türgitter	Arbeitsbogen	Sek. 2, Analysis	20
Kunstbild – Sinus, Kreise, Zufallszahlen	Einführungsstunde in CAS mit DERIVE	Sek. 2, Analysis	14
Kunstbild – Sinus, Kreise, Zufallszahlen	Einführungsstunde in CAS mit TI-Nspire	Sek. 2, Analysis	16
Kunstbild, sin, Kreise, Zufallszahlen	Modellbildung	Sek. 2, Analysis	38
Kurven	Family	Sek. 1, 2	103
Kurvendiskussion, graphisch-automatisch	Animation	Sek. 1, 2, Analysis	71
Kurvenscharen vergleichen, Sinus	Vergleiche durchführen	Sek. 2, Analysis	101
Landschaft	Abitur mündlich		
LGS	Klassenarbeit	Sek. 1	204f
LGS mit CAS	Grundregeln, Black-Box	Sek. 1, 2, Lin. Alg.	54
LGS mit CAS und ohne CAS	Grundregeln, Black-Box	Sek. 1, 2, Lin. Alg.	57
LGS mit glatten Lösungen	Hausaufgaben, Lösungsvielfalt	Sek. 1, 2, Lin. Alg.	218, 222
Logos	Modellieren, Projekt	Sek. 2, Analysis	138f
Magische Quadrate	Forschen, entdecken, beweisen	Sek. 2, Lin. Alg.	179f
Markow-Ketten, Maschinenüberwachung	Modellieren, Projekt	Sek. 2, Stochastik, Lin. Alg.	153f
Marktforschung	Programmieren, Iteration	Sek. 2, Stochastik	123
Matrix, (2,2)	Experimentieren	Sek. 1, 2, Abb. Geom.	177
Matrizen, Dürerquadrate	Komplexe CAS-Aufgabe	Sek. 2, Lin. Alg.	200
Matrizen, Skatabrechnung	Rechenkompetenz	Sek. 2, Lin. Alg.	65
Matrizenmultiplikation, mag. Quadrate	Arbeitsblatt	Sek. 1, 2, Lin. Alg.	181
Muster entdecken	Zoomen, vergrößern, verkleinern	Sek. 1, 2	100
Parabel	Term, Tabelle, Graph	Sek. 1	32
Parabel, Drehen, Verschieben	Visualisierung, Abbildungsgeometrie	Sek. 1, 2	74
Parabel, Umkehrung	Visualisierung, Abbildungsgeometrie	Sek. 1, 2	74
Parabel, Umkehrung, Parameterdarstellung	Animation	Sek. 1, 2	70
Parabelbaustein	Bausteinanalyse	Sek. 1, 2	109
Parabelberge	Families	Sek. 1, 2	95

Fachinhalt, Thema	Zusammenhang, Thema	Klassenstufe, Kurs	Seite
Parabeln, Parabelbaustein	Arbeiten mit Modulen, Visualisierung	Sek.1, 2	35
Parameterdarstellungen	Lehrplanthema	Sek.1, 2	186f.
Primzahl	Experimentieren	Sek.1	184
Quadratische Gleichungen	Mindeskompetenz	Sek.1	56
Regression, Reichstagskuppel	M auf Bildern	Sek.2, Analysis	167f
Sinuskurve drehen	Abbildungsgeometrie mit CAS, Matrizen	Sek.2, Lin.Alg.	202
Sinusscharen	Moire	Sek.2	237
Tangente an Kugel	Klausuraufgabe, Dokumentation	Sek.2, Ana.Geom.	223
Terme, Rechenkompetenz	Zentralabitur mit CAS	Sek.2, Abitur	61
Trapez-Baustein	Modellieren, Projekt	Sek.1	147f
Trapeze	Programmieren	Sek.2, Analysis	123
Würfelzahlen	Programmieren	Sek.1, 2	122
Zufallszahlen	Baustein	Sek.1, 2, Stochastik	111
Zufallszahlen, Simulation	Families	Sek.2, Stochastik	93
Zykloide	Lehrplanthema, Parameterd.	Sek.2, Analysis	192f

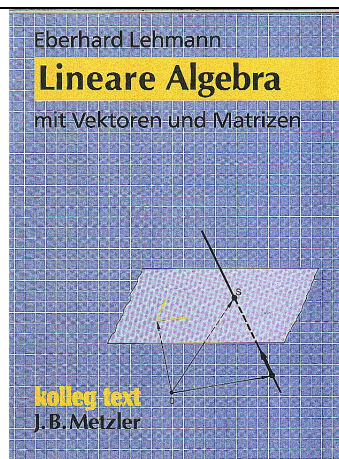
Sachverzeichnis

Begriff	Seite
Abbildungsgeometrie	202f
Abitur mündlich mit CAS	238f
Abstandsbaustein	111
Abstandsbaustein Stundenentwurf Sek.1	113
Abstandsbaustein, Projekt im LK	116f
Abstandsberechnung	71
Achsen Spiegelung	78f,
Allgemeine mathematische Kompetenzen	6
Animation (Visualisierung)	33, 66ff, 69,
ANIMATO	82, 127
Astroide	191f
Aufgabentypen, Analyse, Entwurf	231f
Auswirkungen von Computereinsatz	9
Balkongitter	84
Bausteinanalyse	51, 109, 152
Bausteindreieck	235
Bausteine kennenlernen	110
Bausteinkisten	130f
Bilder mit Mathematik	164f
Bilderaufgaben	171
Binomische Formeln	174
Black-Box (White-Box)	24, 41, 44ff.
Burano	39
CAS-Schulcurriculum, Empfehlungen	251f
Differenzenquotient	21f, 34, 37, 173,
Dokumentation von CAS-Arbeit	223ff
Dokumentation von Rechnerbefehlen	224
Drehstreckung	76
Dürerquadrat, CAS-Aufgabe	200
e-Funktionen, Aufgabe	208f
Entdeckungsreisen, Primzahlen, Kacheln	184
Erfolgserlebnisse im Computereinsatz	27
Erste Computerstunde	11, 14, 16, 18
Exkursion im Garten	142ff
Experimentelles Arbeiten	38
Experimentieren lassen	176ff
Experimentieren mit (2,2)-Matrix	177f
Experimentieren mit Geraden	177
Experimentieren mit magischen Quadraten	179f
Families	37, 83ff
Fehler im Computereinsatz	26
Flächeninhaltsberechnung	122
Folgen 0-1	123
Fotos für den MU	39, 40, 170
Geradenbaustein	51
Geradenmuster	12
Geradenscharen	86
Gläser	85
Golfbälle	85
Grey-Box	50
Grundregeln für Gleichungen	25, 54, 57, 58
Grundregeln für Kalküle	60
Handrechnung und CAS	41, 44ff

Begriff	Seite
Hausarbeiten mit CAS	216f
Heron-Verfahren	220f
Hintereinanderausführung von Abbildungen	74
Hintergrundbilder	166
Kacheln	146
Kalküle	60
Kardioide, schon in Klasse 7	188
Kardioiden	93
Kirchenornament	165, 168
Klassenarbeiten mit CAS erstellen	204ff
Klausuraufgabe mit und ohne CAS, kommentiert	208f
Klausuraufgabe, Ana. Geom., Dokumentation	223
Klausuren mit CAS erstellen	204ff
Kompetenz der Lehrperson	42
Konstruktion von CAS-Aufgaben, Schema	211
Kreisabbildung	75, 178
Kreise	18, 90f
Kunst am Wohnhaus	219
Kunstbild	14, 16
Kurvendiskussion	71f
Lehrplan, Randthemen	185f
Lehrplanstruktur	41, 251
Leitideen	6
LGS	159f
LGS konstruieren	222
LGS mit CAS, Arbeitsbogen	218
Lineare Algebra, Kurs	197f
$\ln(x)$	34, 104
Logos entwerfen	138ff
Lösungsvielfalt	220f
Magische Quadrate	179ff
Markow-Ketten	125, 153ff
Marktforschung	123
Maschinenüberwachung	153ff
Mathematik auf Bildern	39, 163ff
Mathematische Objekte entdecken	165f
Matrizen	64, 74f, 123, 153ff, 179ff, 197f, 200f
Mindestkompetenzen	45ff
Modellbildung	38
Modellieren mit CAS-Hilfe	133ff
Module (Bausteine)	35, 107ff
Moire	83, 237
Museumsdecke	84
Nachhaltige langfristige Konzepte	31ff
Nachhaltigkeit	1, 28ff
Ordnen	97f,
Parabelbaustein	35, 109
Parabelberge	95
Parameterdarstellungen	18, 91, 186ff
Parametergleichung Astroide	190
Parametergleichung Gerade	189
Problemlösen mit Bausteinen	53
Programmieren im MU	120ff
Programmieren mit ANIMATO	127
Projekt Maschinenüberwachung	153ff
Projekt, Trapeze	147ff
Projekte mit CAS	126, 133ff

Begriff	Seite
Projekte, Lehrerrolle, Schülerrolle	137
Projekte, Phasenmodell	134
Projekte, Produktorientierung	136
Projekte, Teamfähigkeit	135
Projektziele	135
Rechenknecht	61f
Regression	167
Reichstagskuppel	167f
Rekonstruktion von Bildern	166
Rekursion	126
Schüleraussagen	29, 112,
Schülerbearbeitungen	87f
Simultanes Zeichnen	71
Solve	55, 59, 151
Spuren legen auf Bildern	39
Steigungsdreieck	21
Szenarien für Mathematikunterricht	8
Teller	92
Term, Graph, Tabelle, Text	32
Tipps und Tricks	10
Trapezbaustein	147ff
Trapeze	123
Türgitter	20
Überlagerung von Kurven	83
Umkehrfunktion	190
Unterricht, konkret – Stunden, Sequenzen	Kapitel 1.2-1.3-6.2-6.3-7.3-7.4-7.5-9.3.3
Unterrichtsgewohnheiten	7
Vergleichen	101f,
Visualisierung (Animation)	33, 66ff
Wappen	85
Werkstückformen	85
Werkzeugcontainer, WKV	13
Werkzeugkompetenzen	242ff
Würfelzahlen	122
Zeiteinschätzung bei CAS-Arbeit	215
Zentralabitur	172
Zentralabitur, im Bannkreis – Vortragsfassung	227ff
Zoomen	100
Zufallszahlen	93f,
Zykloide, Abituraufgabe	192f

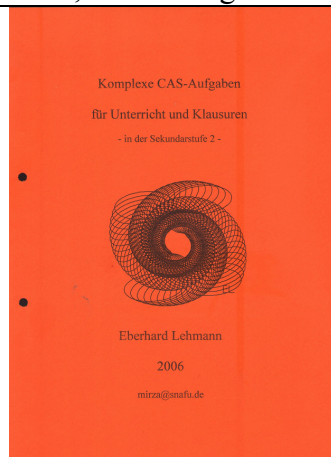
Literatur



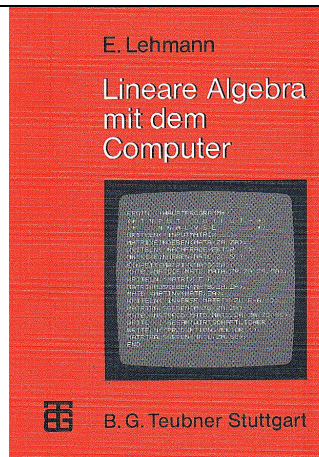
Siehe www.snafu.de/~mirza
1990, mit Lösungsheft



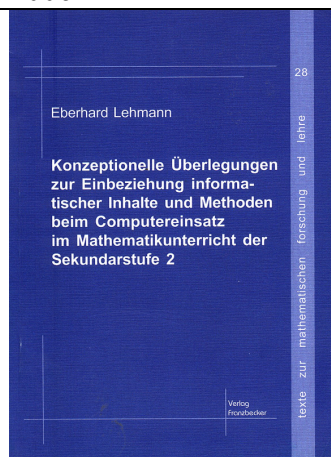
Siehe www.snafu.de/~mirza
1997



Siehe www.snafu.de/~mirza
2006



Siehe www.snafu.de/~mirza
1985



2003, erhältlich beim Franzbecker-Verlag



2002, erhältlich beim Franzbecker-Verlag