White-Box und Black-Box

Eberhard Lehmann, 1998 / 2003

1. Die Begriffe „White-Box“ und „Black-Box“

Bei der Bearbeitung mathematischer Probleme mit Hilfe des Computers werden zunehmend (wie in der Informatik schon länger) Bausteine verwendet. Hierfür haben in letzter Zeit die Computeralgebrasysteme (CAS) wegen ihrer leichten Verfügbarkeit einen für den Unterricht entscheidenden Beitrag geleistet. Dabei kann es sich um vom System her vorgegebene Bausteine oder vom Benutzer selbst definierte Bausteine handeln. Wir betrachten einige Beispiele (in der Noatation des TI-92 - Taschencomputers von Texas Instruments):

Beispiel 1
(a*(x+h)^2 - a*x^2) / h => diffquot(x,a,h) ist ein vom Benutzer definierter Baustein für den Differenzenquotienten der Funktion y = a*x^2.

Beispiel 2
limit(diffquot(x,a,h),h,0) ruft den vordefinierten Baustein „limit“ auf, um den Grenzwert des oben definierten Differenzenquotienten für h -> 0, also 2a*x, zu berechnen.

Bei einer derartigen Arbeitsweise stellt sich die Frage, ob oder wann man im Unterricht so vorgehen kann. Es ist ja offenbar leicht möglich, auf die beschriebene Weise in zwei Zeilen alle gängigen Ableitungen zu errechnen.

Beispiel 3
(sin(x+h) - sin(x)) / h => diffquot2(x,h) und **limit(diffquot2(x,h),h,0) =** cos(x).

Beispiel 4
Und es geht sogar noch schneller, wenn man den Baustein d (differentiate) benutzt: **d(a*x^2,x)** liefert sofort das Ergebnis 2ax.

Offenbar ist in diesen Bausteinen viel von der Mathematik versteckt, für die man im normalen Unterricht entspechend viel Zeit aufwendet. Wir bezeichnen einen solchen Baustein als „**Black-Box**“. Wir wissen, was man in ihn hineinstecken muß (wie man ihn sinnvoll aufruft), kennen aber keine Details, wie die Ergebnisse ermittelt werden - oder dürfen die Details vergessen.

Für die Unterrichtspraxis ist klar, daß der Einführung einer solchen Black-Box das mathematische Verständnis für ihre Arbeitsweise in der Regel vorangehen muß. Das mathematische Verständnis für eine Black-Box wird in einer „**White-Box**“ zusammengestellt.
Hinweis: Gelegentlich kann man auch von einer Black-Box ausgehen und diese analysieren lassen.

Was sollte z.B. die White-Box für d(a*x^2,x) enthalten?

a) Der Begriff des Differenzenquotienten muß den Schülern klar sein: Definition, Veranschaulichung, Aufstellen der Differenzenquotienten z.B. für y=x^2, y=sin(x) usw.

b) Die Schüler haben die Grenzwerte einiger Differenzenquotienten ausführlich von Hand errechnet, z.B. für y=x^2, y=-5x^2, und veranschaulicht. Die Vermutung der Ableitung für y=ax^2 wurde rechnerisch bestätigt.

c) Die Schüler kennen die Definition der Ableitung als Grenzwert des Differenzenquotienten.

d) Jetzt kann die White-Box mit ihren Handrechnungen verlassen werden. Der Computer übernimmt die Rechnungen. In einer ersten Stufe kann man versuchen, mit dem CAS die Handrechnungen möglichst genau zu simulieren - das ist gelegentlich allerdings nur teilweise möglich. Wir öffnen in diesem Fall eine Zwischenbox (**Grey-Box**), die uns zur Black-Box überleitet. Der TI-92 arbeitet in diesem Fall so:

Eingabe in das CAS	Ausgabe des CAS
(a*(x+h)^2 - a*x^2) / h	a*(2*x+h)

Erklärungsbedarf ! Der Term ist sofort stark vereinfacht worden. Ein Rückgriff auf die Handrechnung zeigt, was geschehen ist; h<>0 beachten.

limit(a*2*x+h, h, 0)	2*a*x

Die Begründung bleibt dem Benutzer überlassen (siehe Handrechnung)

Zusammengefaßt:

limit((a*(x+h)^2 - a*x^2) / h, h, 0)	2*a*x	*und*
d(a*x^2,x)	2*a*x	

e) Damit sind wir bei der Black-Box angelangt, die wir von nun an guten Gewissens benutzen dürfen.

Die Betrachtungen an diesem Beispiel - und in anderen Fällen ergibt sich die gleiche Problematik - zeigen, daß es ganz wesentlich darauf ankommt, den richtigen (fließenden) Übergang von der White-Box zur Black-Box zu finden. Dieser Übergang findet in einer Grauzone statt, in der auch die Grey-Box enthalten ist.

2. Die Grauzone - didaktisch-methodischer Handlungsspielraum

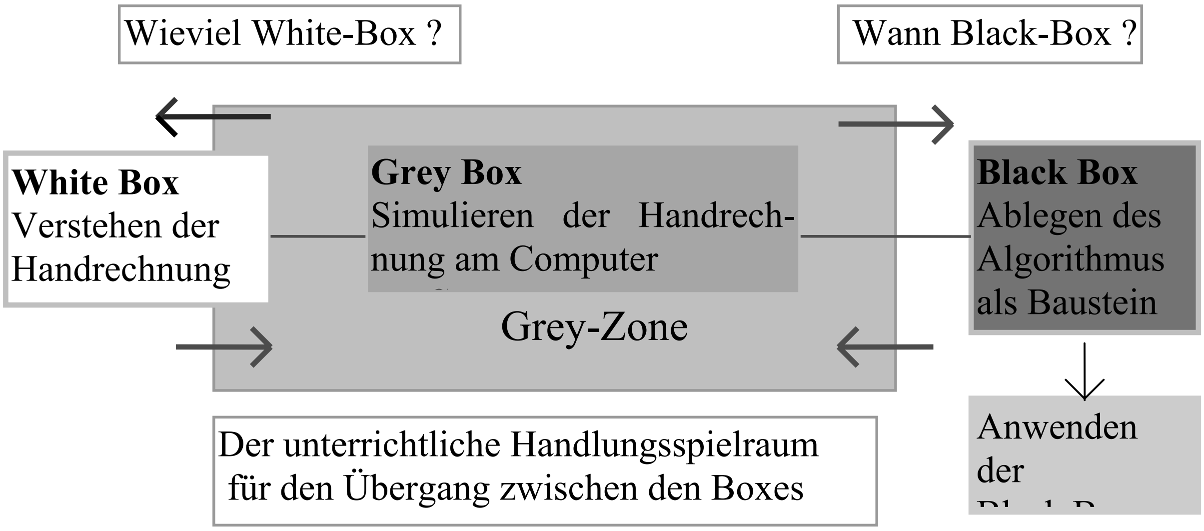


Abbildung 1 : Von der „White-Box“ zur „Black-Box“

Die Grauzone kann nun je nach Bedarf verschoben, vergrößert oder verkleinert werden. Für welches Vorgehen sich der Lehrer entscheidet ist u.a. abhängig von der jeweiligen Lerngruppe, der Erfahrung im Umgang mit dem Computer, dem Lehrplan und der zur Verfügung stehenden Zeit. In jedem Fall liegt hier für den Lehrer ein erheblicher Handlungsspielraum, den er letzlich nach eigenen Vorstellungen ausfüllen muß. Die Erfahrung zeigt jedoch, daß man immer auch die Grey-Box in den Lehrgang einbeziehen sollte.

Wir verdeutlichen die Betrachtungen an einem Standardbeispiel aus dem Unterricht der Sekundarstufe 1. Als ein Lernziel bei der Besprechung linearer Gleichungssysteme findet man in der Regel:

Systeme linearer Gleichungen mit zwei Variablen zeichnerisch lösen können.

3. Systeme linearer Gleichungen mit zwei Variablen zeichnerisch lösen können

Beispiel: $4x - 2y = 6$
$3x + y = 4$

Phase 1: White Box - Handrechnung und Handzeichnung
1) Auflösung der beiden Gleichungen nach y
2) Erstellung einer kleinen Wertetafel für beide Funktionen
3) Zeichnen: Koordinatensystem, Punkte, Geraden (so daß Schnitt zu sehen ist!)
4) Lösung ablesen
5) Lösung durch Einsetzen überprüfen.
6) Ergebnissicherung

Im Unterricht werden diese Vorgänge zum Beispiel gemeinsam erarbeitet. Die folgenden Übungen beschränken sich auf ca. 3 Beispiele.

Phase 2: Grey Box - Übergang zur Computerarbeit
1) Eingabe der beiden Gleichungen am Computer.
2) Auflösung der beiden Gleichungen nach y mit Hilfe des Computers
3) Die Geraden vom Computer zeichnen lassen.
4) Den Schnittpunkt ablesen, z.B. durch Positionieren eines Hilfskreuzes.
5) Dokumentation

Im Unterricht folgen einige Beispiele, zum Beispiel zu den einzelnen Schnittpunktfällen.

Phase 3: Black Boxes - GLEICHUNG AUFLÖSEN und GERADENSCHNITT
1) Den Schülern wird bewußt gemacht, wie sich die Black-Boxes entwickelt haben.
2) Zusammenstellung der Eingaben, die zu tätigen sind, damit die Black-Box GLEICHUNG AUFLÖSEN und die Black-Box GERADENSCHNITT richtig arbeiten (siehe Phase 2).

Mit dem Taschencomputer TI-92 (Texas Instruments) kann man folgendermaßen vorgehen:

a) White Box (s.o.)
b) Grey Box: Die Aufgabe wird dem Computer übergeben

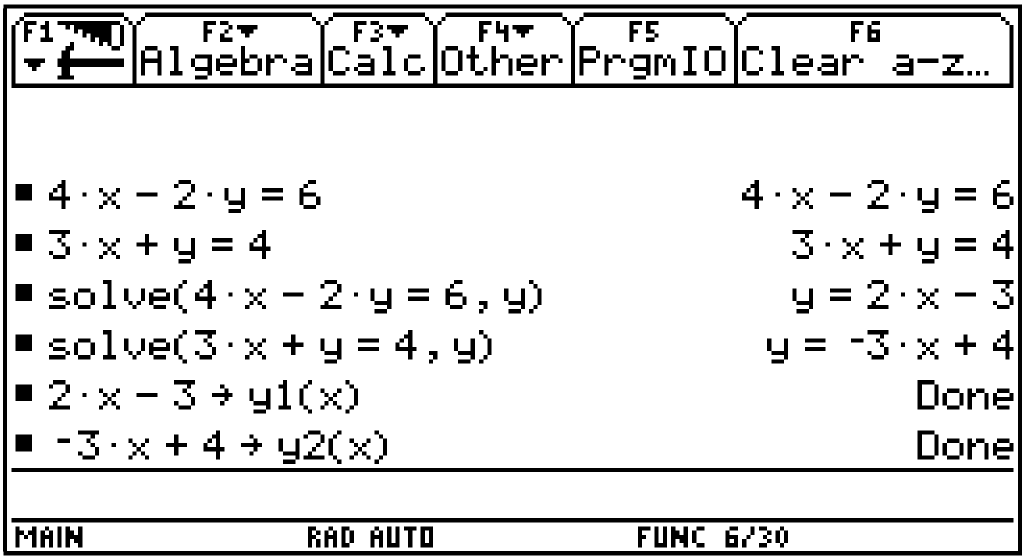
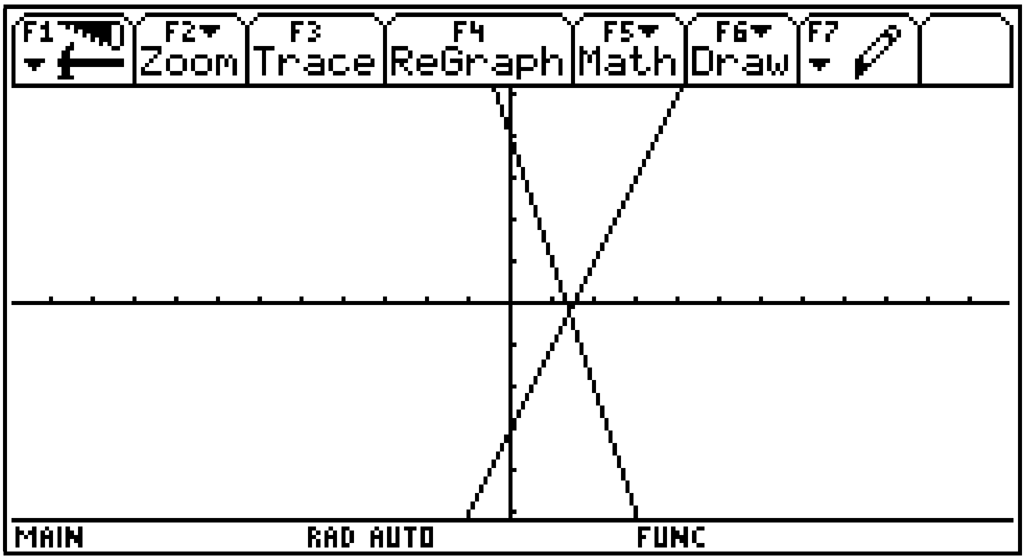


Abb.3a: TI-92-Bildschirm 1

Gleichun-
gen

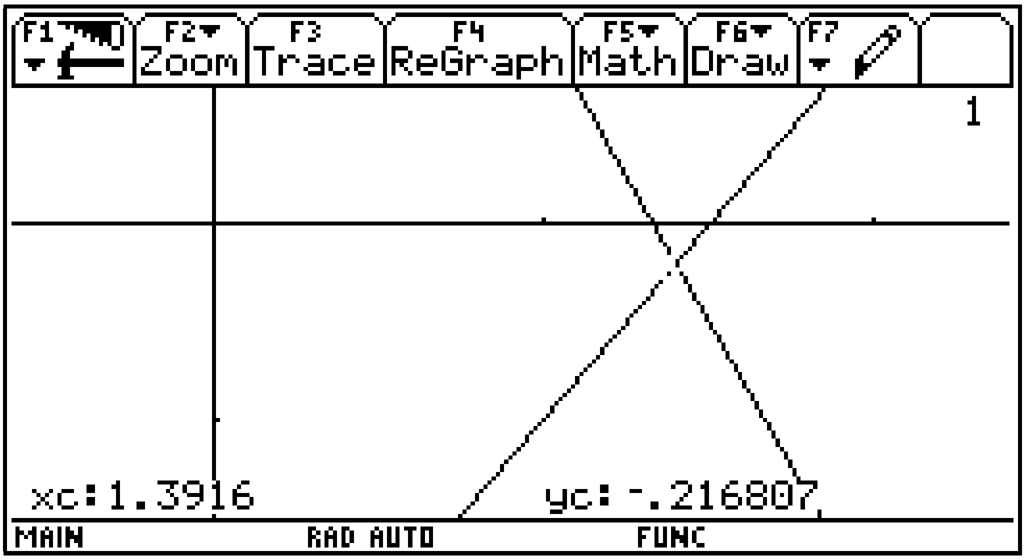
Gleichun-
gen

Graphen definieren



Zeichnen lassen

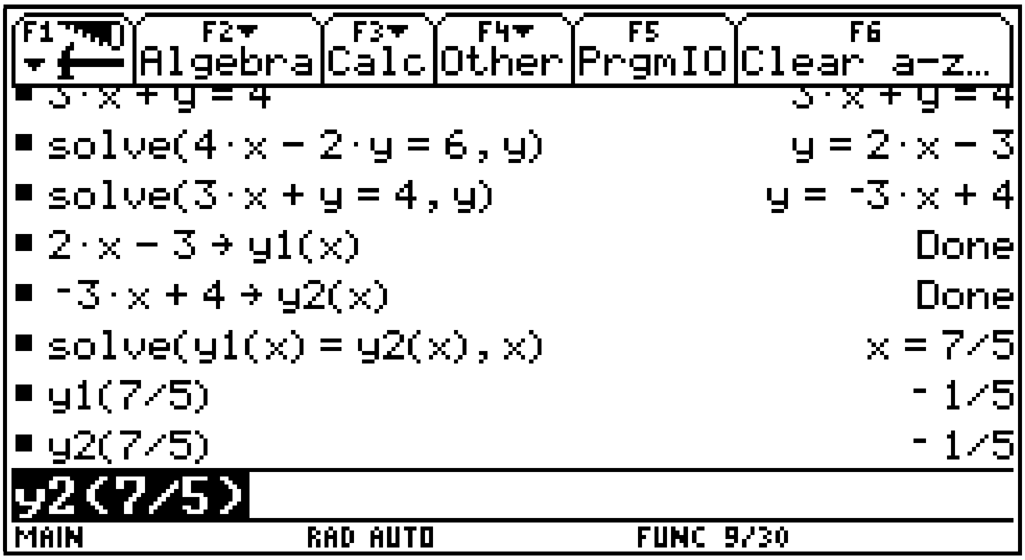
Abb.3b TI-92-Bildschirm 2



Näherungslösung mit Hilfe von Zoombox und Trace ablesen

Abb.3c: TI-92-Bildschirm 3

c) Black-Box



Genaue Lösung des LGS berechnen.

Abb.3d: TI-92-Bildschirm 4

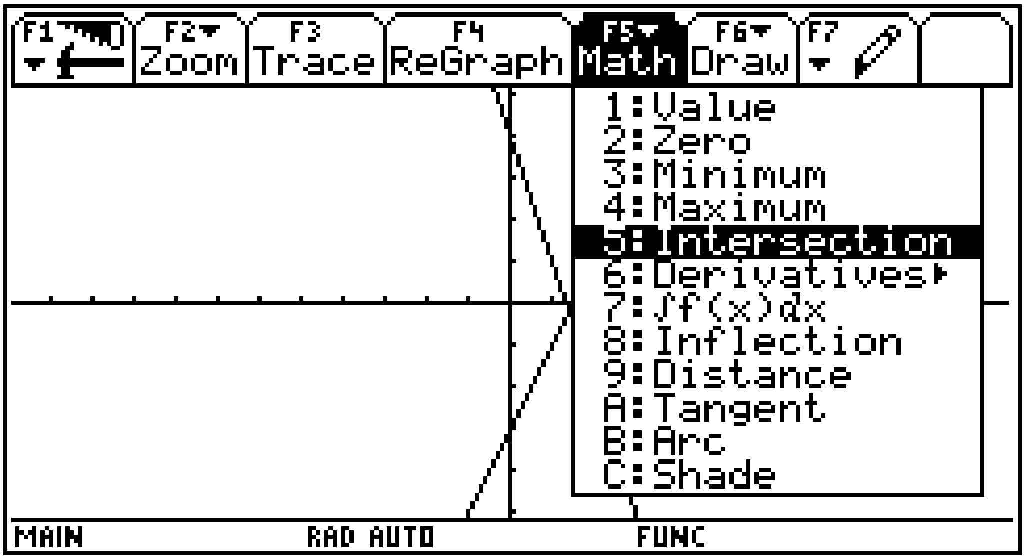
Eine weitere Black-Box: Der Baustein INTERSECTION

Mit Hilfe von „Intersection“ kann der Geradenschnittpunkt (Funktionsschnittpunkt) folgendermaßen ermittelt werden:

Baustein INTERSECTION

1) *Geraden zeichnen wie oben unter (2)*
2) *F5 (Math), Intersection, Enter*
3) *1.Gerade (1.Kurve), Enter*
4) *2.Gerade (2.Kurve), Enter*
5) *untere Grenze für x angeben, Enter*
6) *obere Grenze für x angeben, Enter*

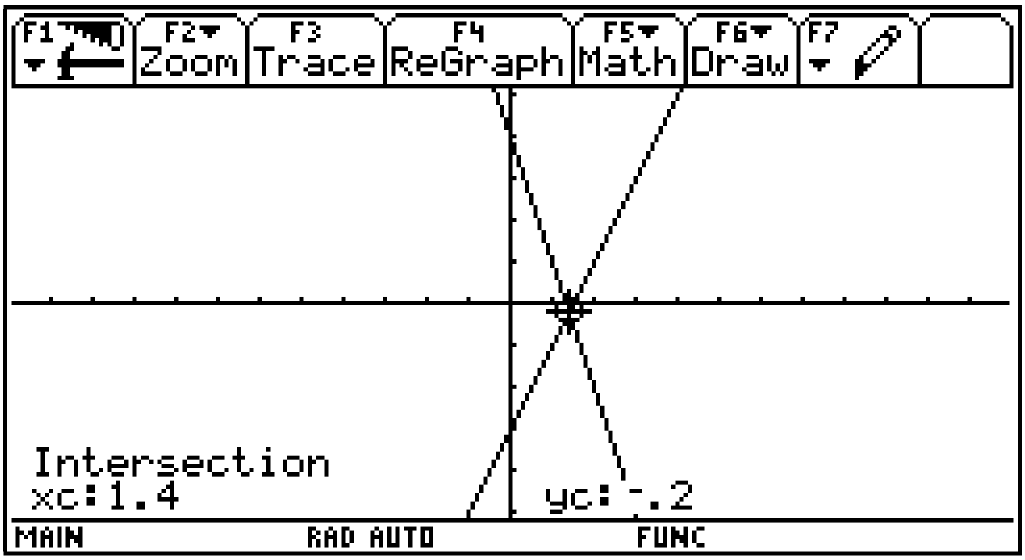
=> die Schnittpunkt-Koordinaten werden angezeigt.



Geraden zeichnen

Intersection aufrufen

Abb. 4a



Lösung ablesen

Abb. 4b

Hier ist für den Benutzer nun keinerlei Rechnung mehr nötig. Offenbar hat uns der TI-92 die gesamte Zeichnung und Schnittpunktberechnung abgenommen. Die ausführliche Rechnung - zunächst von Hand, dann mit mehreren für den Benutzer durchsichtigen Eingaben und nachvollziehbaren Rechnungen des TI-92 - wurde ersetzt durch die automatische Rechnung mit Hilfe von Intersection (die WHITE-BOX wird zur BLACK-BOX).

Die Beispiele zeigen:

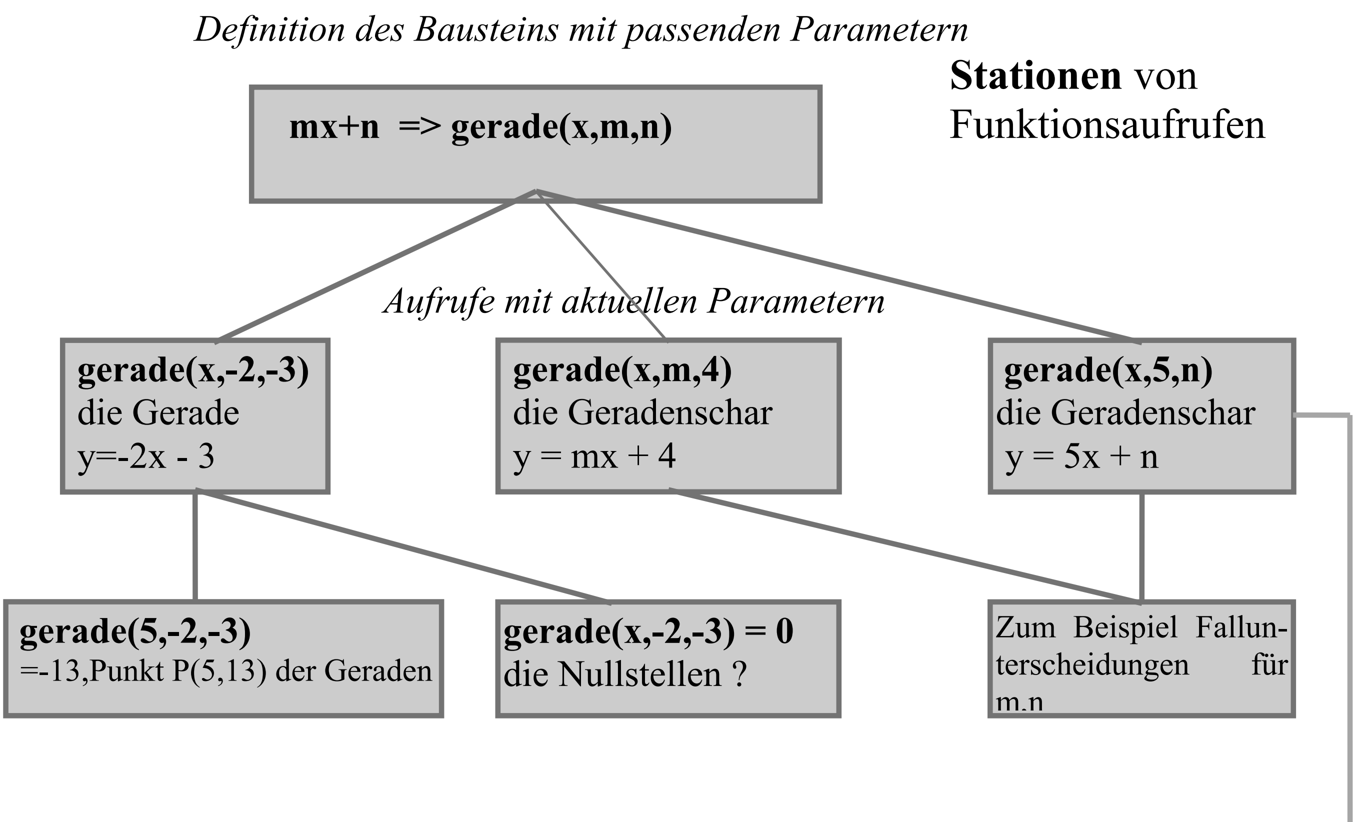
$\boxed{\text{Funktionen mit Parametern sind wichtige Bausteine für den modernen Mathematikunterricht.}}$

Der Benutzer eines CAS definiert einen Baustein mit Parametern

und verwendet diesen durch einen passenden Aufruf des Bausteins.

4. Der Baustein m*x + n => gerade(x,m,n)

Wir zeigen nun unterrichtliche Möglichkeiten, die der Aufruf von Bausteinen (zum Beispiel von gerade(x,m,n)) bietet.



gerade(5,-2,-3) = 10
false, => (5,10) nicht auf Gerade

Solve(gerade(x,-2,-3)=0,x)
x = -1.5

gerade**(x,5,n)|n={2,3,,4,5}**
=> y1(x), Geradenschar

Abb.5 : Einige Stationen möglicher Funktionsaufrufe des Bausteins gerade(x,m,n), Notation TI-92

Zur Unterrichtspraxis

Im Verlauf des Unterrichts wird man (in Abhängigkeit vom Lehrplan) vermutlich alle Stationen erreichen Die Startposition wird sich nach den unterrichtlichen Vorstellungen richten.

a) Nehmen wir z.B. an, die Unterrichtseinheit über Geraden beschäftigt sich nach der Einführung der Gleichung mit der Lage von Punkten bezüglich der Geraden. Dann wird man Aufrufe wie gerade(5,2,-3) oder gerade(5,-2,-3)=10 benutzen. Andere Fragestellungen und damit auch andere Aufrufe schließen sich an.

b) Wiederholt man dagegen etwa in Klasse 11 Geradengleichungen, so kann es sinnvoll sein, mit der allgemeinen Formulierung gerade(x,m,n) zu beginnen und die Abb.1 von oben nach unten (Top-down) zu entwickeln.

c) Auf jeden Fall sollte man die gesamte Abbildung am Ende der Unterrichtseinheit zur Verfügung haben, da Zusammenfassungen dieser Art immer wertvoll sind, was leider häufig übersehen wird.

Bestimmung des Schnittpunkt zweier Geraden mit Bausteinen

Als Beispiel für die Arbeit mit dem Baustein gerade(x,m,n) betrachten wir die Schnittpunktberechnung zweier Geraden G1 und G2 mit

G1: y = 2x+3, G2: y = 4x+5.

Lösung 1: Mit den Bausteinen gerade(x,m,n) und solve

Nach der Definition m*x+n => gerade(x,m,n) kann man so verfahren.

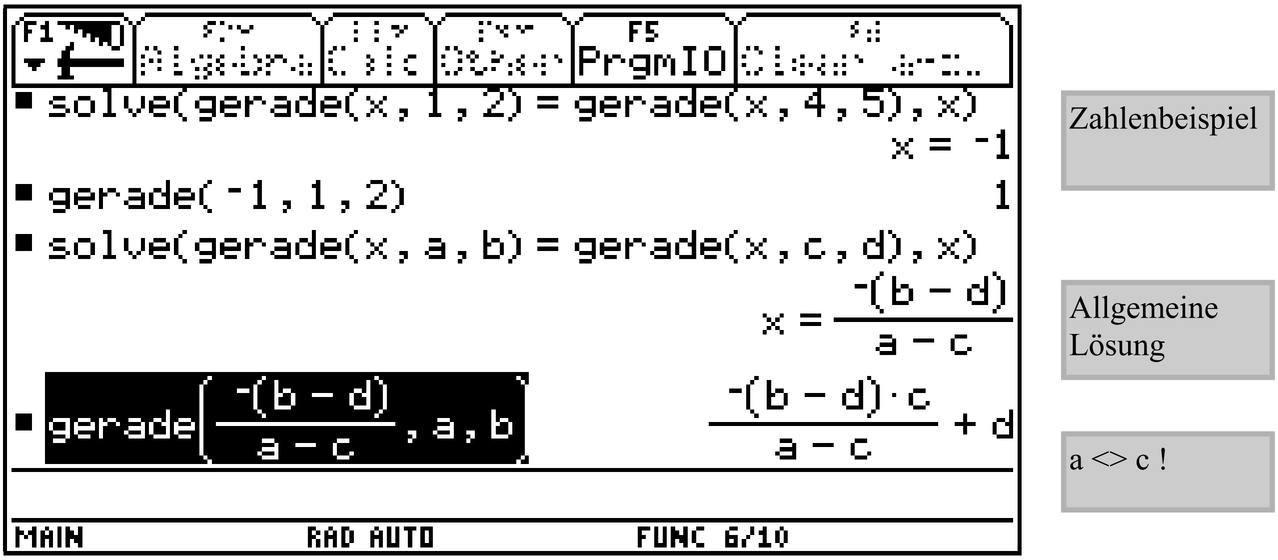


Abb. 6

Lösung 2: Mit den Bausteinen xwert(x,a,b,c,d) und solve

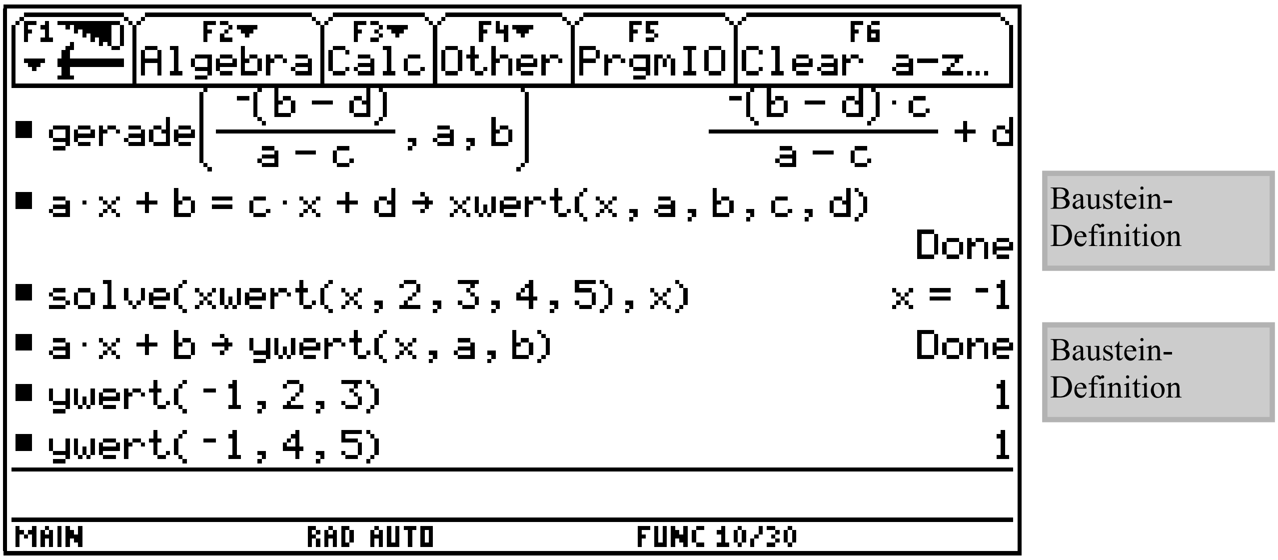


Abb.7

Lösung 3: Mit dem Baustein rref(M)
Ein weit stärkerer Baustein löst ein Gleichungssystem mit Gauß-Eliminationen:
Nach Eingabe der Matrix M für das obige Gleichungssystem, also von
$M = \begin{pmatrix} 2 & -1 & -3 \\ 4 & -1 & -5 \end{pmatrix}$, erhält man mit dem **Baustein rref(M)** = $\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ und kann sofort die Lösung x = -1, y = 1 ablesen.

An dem Beispiel wird sehr deutlich, daß die Computerarbeit ein vertieftes Verständnis für die Zusammenhänge erfordert. Dieses zeigt sich hier in der Definition und Benutzung passender Bausteine, wobei die Schüler durchaus unterschiedliche Definitionen für das gleiche Problem wählen können. Selbstverständlich müssen derartige Bausteindefinitionen geübt werden. Die Bearbeitung mit dem CAS macht aber auch klar, welche Vorteile sich durch die Verwendung der Parameter ergeben bzw. wo möglicherweise Schwierigkeiten auftreten können..

5. Didaktisch-methodische Aspekte bei der Verwendung von Bausteinen mit Parametern

- Funktionen mit Parametern sind wichtige Bausteine für einen modernen Mathematikunterricht. Sie unterstützen die Bearbeitung komplexer Aufgabenstellungen und entlasten von detaillierter Rechenarbeit.

- Damit ergibt sich für den Mathematikunterricht die Chance, statt vieler kleiner Aufgabenstellungen komplexere und offenere Fragestellungen anzugehen.

- Bausteine haben eine sehr kompakte Form mit viel mathematischem Inhalt. Sie sind geeignet zur Ordnung lokaler oder globaler Zusammenhänge.

- Die Arbeit mit Bausteinen setzt insbesondere ein gutes Verständnis für die Wirkungsweise der Bausteine und für die Bedeutung ihrer Parameter voraus. Wesentliche Hilfe leistet dabei eine Baustein-Formelsammlung (Bausteinkiste).

- Das Vorhandensein von Bausteinen und die Arbeit mit ihnen beeinflußt die Problemlösungsstrategien.

- Die Aneinanderreihung von Bausteinen (und anderer Bearbeitungsmethoden) entspricht der Entwurfsarbeit für ein komplexes System.

- Der Umfang der Bausteinkiste erhöht sich mit den zunehmenden mathematischen Kenntnissen.
- Die häufige Verwendung von Bausteinen führt zu einer einheitlichen übergeordneten Betrachtungsweise.

- Durch die häufige Benutzung von Bausteinen könnte die Kenntnisse über den Aufbau der dahinterstehenden Funktionsterme verloren gehen. Um dem entgegenzuwirken, empfehlen sich Maßnahmen wie:

- Jeder Baustein muß informativ dokumentiert sein. Dazu gehört auch ein Beispiel und (wenn möglich) eine passende Veranschaulichung und ein Beispiel.

- Die Arbeit mit Bausteinen muß vom Schüler mit Text zum mathematischen Hinter grund begleitet werden.

Zusammenfassung - Problemlösen mit Bausteinen

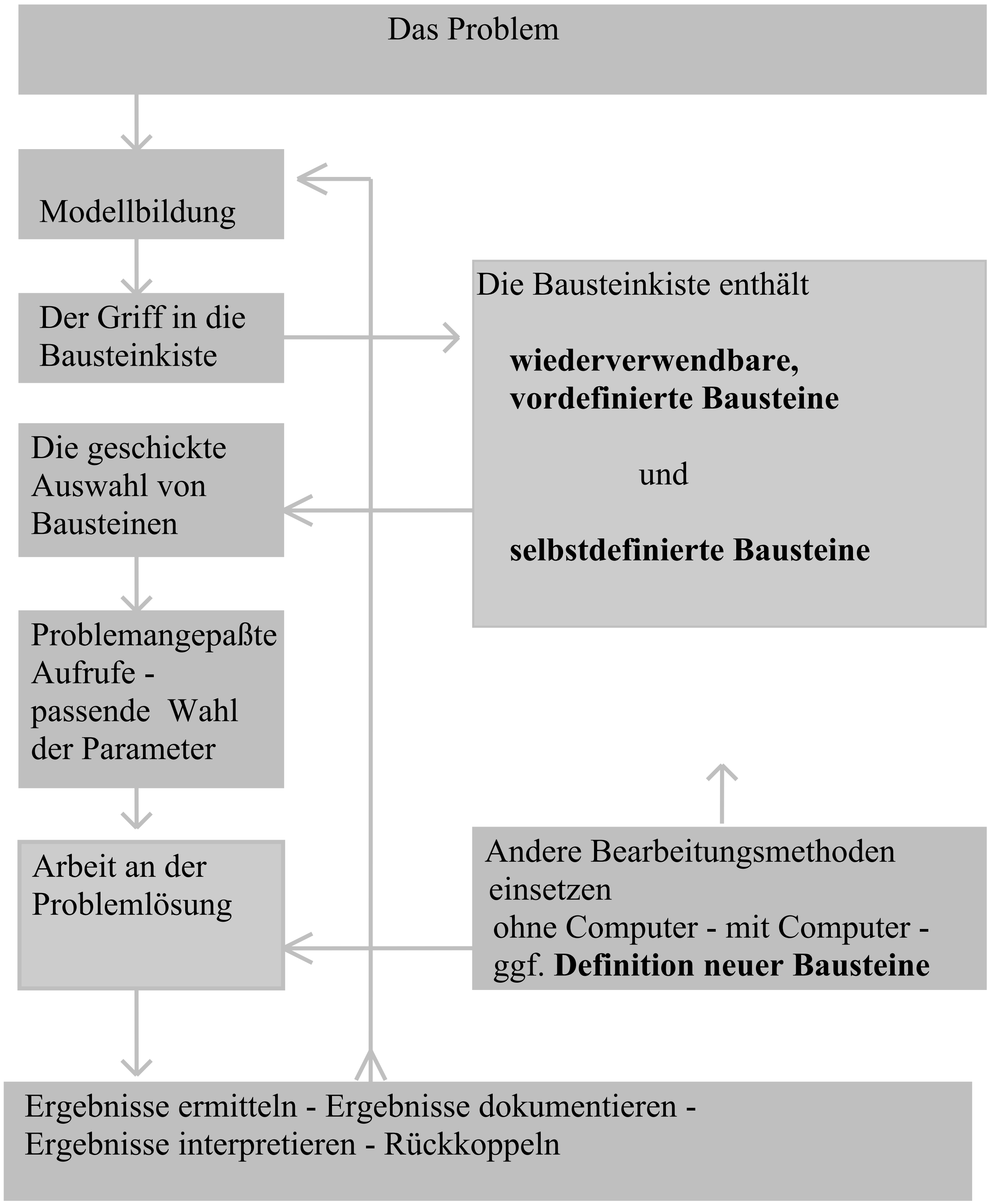


Abb.6 : Problemlösen mit Bausteinen

6. Eine Klausuraufgabe mit und ohne Computereinsatz

Der folgende Beitrag soll zeigen, wie man eine „klassische" Klausuraufgabe mit Hilfe des Computereinsatzes bearbeiten kann und wie dadurch auch weitere zusätzliche Fragestellungen möglich werden - wie sich also auch die Anforderungsbereiche verschieben können. Gleichzeitig wird deutlich, wie man die Arbeit am Computer dokumentieren kann.

Die Aufgabe wurde im Rahmen einer zweistündigen Klausur in einer 11.Klasse zum Thema „Analytische Geometrie - Kugel und Gerade" gestellt.

Aufgabe (etwa 20´)
Zeigen Sie, daß die Gerade g Tangente an die Kugel K ist.

K: $x^2+y^2+z^2 = 14$ g: $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \\ 3 \end{pmatrix} + t\begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$

Eine mögliche (gute) Schülerbearbeitung:
a) Eine Gerade kann eine Kugel zweimal schneiden -also Sekante sein -, berühren (Tangente) oder an der Kugel vorbeilaufen (Passante). In jedem Fall kann man den Ansatz einer Schnittpunktberechnung durchführen. Dann muß sich einer der drei Fälle einstellen.
Eventuelle Schnittpunkte berechnet man durch Einsetzen von x, y und z der Geradengleichung in die Kugelgleichung. Hierbei entsteht eine quadratische Gleichung in t, deren Lösung dann einen der drei genannten Fälle anzeigen muß.

b) Ich definiere hierzu zwei Funktionen Kugel(x,y,z) und Gerade(t).
TI-92: *x^2+y^2+z^2=14 => kugel(x,y,z)*
[-1-2t, 3+t, 3] => gerade(t)
Mit Hilfe der Parameter kann ich nun diverse Aufgaben bezüglich der angegebenen Kugel und Geraden untersuchen. Die Schnittpunktberechnung erfolgt durch Entnahme der Parameterwerte x,y,z aus der Geradengleichung, die man in drei Einzelgleichungen x= -1-2t, y=3+t und z=3+0t aufspalten kann.

Eingabe	Ergebnis, Kommentar
kugel(-1-2t, 3+t, 3)	*5t^2+10t+19=14, quadratische Gleichung*
solve(5t^2+10t+19=14,t)	*t=-1, nur ein Wert!*
gerade(-1)	*[1 2 3], Berührungspunkt B*

kugel(1,2,3) *true, Bestätigung, daß B auf der Kugel*

c) Der Rechner ermittelt als Lösung der quadratischen Gleichung lediglich den Wert t=-1. Das heißt, es gibt nur einen Parameterwert t, für den Gerade und Kugel einen gemeinsamen Punkt haben. Den Berührungspunkt B habe ich durch Einsetzen von t in die Geradengleichung ermittelt. Danach erfolgte die Bestätigung, daß B auf der Kugel liegt.
Die gegebene Gerade ist also Tangente an die Kugel. Sie berührt diese im Punkt B(1,0,3).

Didaktisch-methodische Anmerkungen:
Die Texte zu a) und c) würden weitgehend auch bei einer guten Bearbeitung der Aufgabe nur von Hand zu schreiben sein. Unsere Erfahrung zeigt jedoch, daß das häufig unterbleibt. Bei der Computerarbeit erweisen sich die Texte a) und c) als notwendig und sollten vom Lehrer gefordert werden. Die nötige Zeit wird durch das Vermeiden der ausführlichen Handrechnung bereitgestellt. Teil b) ist computerspezifisch. Er ersetzt die Handarbeit, die hier zum Vergleich gezeigt wird.

b´) x^2+y^2+z^2=14. Einsetzen von x,y,z aus der Geradengleichung:

(-1-2t)^2 + (3+t)^2 + 3^2	= 14
1+4t+4t^2 + 9+6t+t^2 +9	= 14
5t^2 + 10t + 19	= 14
5t^2 + 10t + 5	= 0
t^2 +2t +1	= 0
$t_{1,2}$	= -1 ± $\sqrt{(1-1)}$
$t_{1,2}$	= -1

Einsetzen von t=-1 in die Geradengleichung:

g(B): $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \\ 3 \end{pmatrix} - 1 \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, also B(1,2,3) .

Die Kontrolle, ob B auf dem Kreis: 1^2+2^2+3^2 = 14 => 14=14, also liegt B auf Kreis.

Wir fassen noch einmal die Rechnungen im Computeralgebrasystem zusammen:

x^2+y^2+z^2=14 => kugel(x,y,z)
[-1-2t, 3+t, 3] => gerade(t)

kugel(-1-2t, 3+t, 3) 5t^2+10t+19=14, quadratische Glei-
chung
solve(5t^2+10t+19=14,t) t=-1, nur ein Wert!

gerade(-1) [1 2 3], Berührungspunkt B
kugel(1,2,3) true, Bestätigung, daß B auf der Kugel

Hierbei wird doch sehr deutlich, daß die Computerarbeit ein vertieftes Verständnis für die Zusammenhänge erfordert. Dieses zeigt sich hier in der Definition der Kugel- und der Geradenfunktion mit den passenden Parametern. Die weitere Bearbeitung mit dem CAS macht aber auch deutlich, welche Vorteile sich durch die Verwendung der Parameter ergeben.

Eine computerbezogene Aufgabenformulierung

Eine direkt auf den Computer bezogenen Aufgabenstellung könnte so lauten:

a) Zeigen Sie, daß die Gerade g Tangente an die Kugel K ist.

K: $x^2+y^2+z^2 = 14$ g: $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \\ 3 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$

b) Verdeutlichen Sie den Sachverhalt durch eine 3D-Zeichnung, die die Ergebnisse ihrer Rechnungen mit einbezieht.

Hinweise:
- Benutzen Sie das Computeralgebrasystem des TI-92.
- Definieren Sie dabei geeignete Funktionen mit Parametern.
- Ansatz, Zwischenergebnisse und Endergebnis sind ausführlich zu erläutern.
- Die Eingaben und Ausgaben des CAS sind übersichtlich zusammenzustellen und zu kommentieren.

Falls ein geeignetes System zur Verfügung steht, kann man auch Teil b) am Computer bearbeiten.

Um die Einbettung der obigen Aufgabe in die Gesamtklausur zu verdeutlichen, wird diese hier noch abgedruckt.

Klausur 11c am 3.6.97

2 Schulstunden

1) etwa 15´

Gegeben ist die Gerade g: $y = 5x-4$.

a) Bekanntlich kann man diese Gerade auch vektoriell darstellen. Leiten Sie eine vektorielle Darstellung her (eine andere als in b)).

b) Zeigen Sie, daß auch die Gleichung

$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 6 \end{pmatrix} + s\begin{pmatrix} 2 \\ 10 \end{pmatrix}$ eine mögliche Darstellung von g ist.

2) etwa 15´

Untersuchen Sie, ob sich die Geraden

$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 5 \end{pmatrix} + r\begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$ *und* $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + s\begin{pmatrix} 5 \\ -2 \\ 4 \end{pmatrix}$ schneiden.

3) etwa 20´

a) Geben Sie 2 Punkte A und B auf der Kugel K: $x^2+y^2+z^2 = 14$ an, jedoch nicht gerade die Achsenschnittpunkte der Kugel.

b) Berechnen Sie die Länge der Sehne AB und ihren Mittelpunkt C.

c) Geben Sie die Gleichung einer Geraden an, die durch A und B geht.

4) etwa 20´

Zeigen Sie, daß die Gerade g Tangente an die Kugel K ist.

K: $x^2+y^2+z^2 = 14$ g: $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \\ 3 \end{pmatrix} + t\begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$

5) étwa 10´

Fertigen Sie eine saubere Zeichnung an, die die Gerade g von Aufgabe 4) mit ihren charakteristischen Größen darstellt.

Ende der Klausur

Literatur

Bezüglich der Arbeit mit Bausteinen im Mathematikunterricht wird auch verwiesen auf

[1] Lehmann, E.: Mathematik mit Bausteinen und ihren Parametern (demnächst in PM, Praxis der Mathematik)

Eine ausführliche Untersuchung der Vorgehensweise bei linearen Gleichungssystemen und der Auswirkung auf Didaktik und Methodik findet man in

[2] Lehmann, E.: Lineare Gleichungssysteme - Eine Unterrichtsreihe im Grundkurs Klassse 12 mit DERIVE
in „Bericht über die 13.Arbeitstagung des Arbeitskreises „Mathematikunterricht und Informatik“ in der GdM“, 1995, diverlag Franzbecker, Horst Hischer & Michael Weiß (Hrsg.).

[3] Lehmann, E.: Mathematiklehren mit Computeralgebrasystem-Bausteinen, div Verlag Franzbecker, Hildesheim 2002.

\autor\aufsa97\baustei2.doc, 9.9.97,
Version für Zeitschrift Mathematik in der Schule