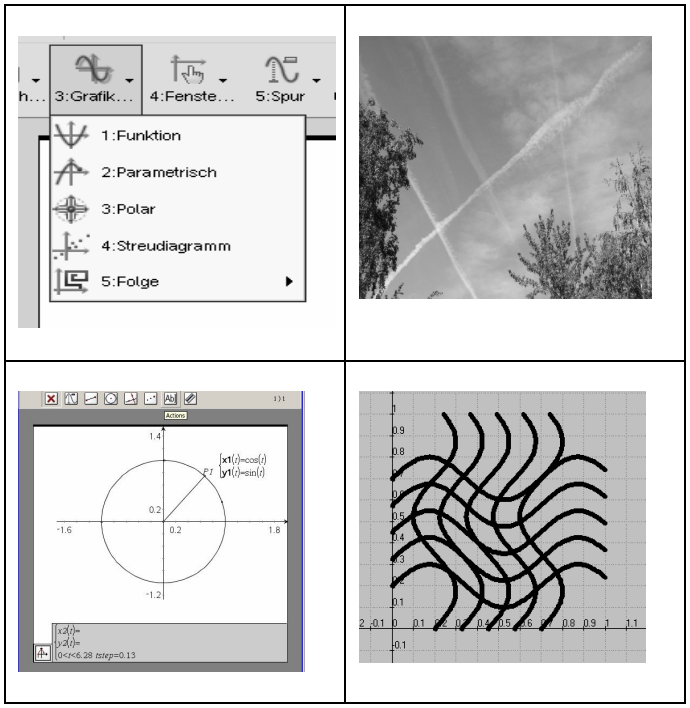


Parameterdarstellungen [x(t), y(t)] in der Sekundarstufe 1

MU

Schwerpunkt: Parameterdarstellungen [x(t), y(t)] in der Sekundarstufe 1

Bei den einzelnen Beiträgen wird auf das Nennen von Autorennamen verzichtet, da stets alle Mitglieder des Arbeitskreises beteiligt sind. Die Mitglieder des T3-Arbeitskreises „Parametric“ (T3 – teacher teaching with technology, Universität Münster) sind:

Beate Arand - Thüringen Dr. Ulrich Döring - Berlin Günter Dreeßen-Meyer – Berlin Lutz Geist - Berlin Thomas Klietsch - Berlin Cordula Kollotschek - Berlin Dr. Hubert Langlotz – Thüringen Dr. Eberhard Lehmann - Berlin, Leitung Martin Naumann – Brandenburg Verantwortlich: Eberhard Lehmann	 Foto des AK

Thementeil

1. Vorwort: Überblick über die Unterrichtseinheiten und theoretische Überlegungen

2. Grundsatzartikel: Unterricht mit Parameterdarstellungen [x(t), y(t)] in der Sekundarstufe I

3. Theoretischer Hintergrund: Funktionsbegriff im Zusammenhang mit Parameterdarstellungen

4. Parameterdarstellungen eines Smiley mit unterschiedlicher Software

5. Klasse 6, 7 — Vorbereitung von Parameter-Darstellungen schon in Klasse 6/7
Koordinaten, Gitterpunkte und Spiegelungen

6. Klasse 8 — Zwei Schiffe begegnen sich, Version 1
Einführungsaufgabe für „Geraden in Parameterform“

7. Klasse 8 — Zwei Schiffe begegnen sich, Version 2
Einführungsaufgabe für „Geraden in Parameterform“

8. Klasse 9 — Parabeln in Parameterdarstellung – waagerechter und schiefer Wurf

9. Klasse 9 — Vom Haus des Nikolaus und dessen Achsenspiegelung zur Parameterdarstellung von Kurven und deren Umkehrungen

10. Klasse 10 — Einführung der Parameterdarstellung des Kreises

11. Klasse 10 — Konstruktion der Graphen trigonometrischer Funktionen aus dem Einheitskreis
Riesenrad

12. Klasse 7 – 10 — Exkurs: Zufallspunkte und Parameterdarstellungen

13. Klasse 8 – 10 — Exkurs: Mathematik mit Parameterdarstellungen auf Bildern

© T3-Arbeitskreis Parametric

1 – Vorwort

Einige Kollegen[1] nutzen schon lange die besonderen Möglichkeiten von Parameterdarstellungen [x(t), y(t)] in der Sekundarstufe II und betrachten Astroiden, Rollkurven, Kardioiden usw. in interessanten Problemen, die man mit der üblichen Darstellung y = f(x) nicht bearbeiten kann. Diese Ansätze stehen meist außerhalb der gängigen Lehrpläne der Sekundarstufe II - erst recht der Sekundarstufe I - und werden deshalb von den meisten Lehrern abgelehnt oder als zu schwer realisierbar eingestuft.

Durch Computereinsatz oder den graphischer Taschenrechner gibt es nun jedoch ganz neue Ansätze für Parameterdarstellungen. Die Option „parametric“ wird in Computeralgebrasystemen und dynamischer Geometriesoftware wie z. B. Derive, Voyage 200, TI-Nspire™CAS, ANIMATO, GeoGebra usw. angeboten. Die Option wird aber sehr wenig benutzt, obwohl sie sehr große Möglichkeiten für den Unterricht bietet.

Diese Ausgangslage war 2008 der Hauptgrund für die Einrichtung des Arbeitskreises „Parametric“ im Rahmen des Lehrerfortbildungsprojekts T3-Münster, gedacht für eine herausfordernde Arbeit und Weiterbildung von T3-Referenten. Der Arbeitskreis legt nun in diesem MU-Heft konkrete Arbeitsergebnisse vor, die zeigen, dass die Verwendung von Parameterdarstellungen schon in der Sekundarstufe I möglich, ja sogar wünschenswert ist. Wir legen Wert darauf zu betonen, dass es sich dabei nicht um besondere Extrathemen außerhalb des normalen Unterrichts handeln soll, sondern um integrative Bestandteile, die die übliche Vorgehensweise bei Funktionen ergänzt und erweitert.

Diese Grundidee wird an einigen konkreten Unterrichtseinheiten nachgewiesen. Der gängige Unterricht braucht interessantes und herausforderndes Übungsmaterial! Insbesondere hier liegen Einsatzmöglichkeiten von Parameterdarstellungen.

In dem Heft werden mehrere Einstiegsmöglichkeiten in die Thematik angeboten, die in verschiedenen Klassenstufen von Klasse 7 bis Klasse 10 durchgeführt werden können. Wir beschränken uns auf die Sekundarstufe I, weil für die Oberstufe in den vergangenen Jahren zahlreiche Beiträge veröffentlicht sind (siehe u. a. Steinberg, Schupp).

Zu den Beiträgen: Nach einem Grundsatzartikel (Beitrag 2) zum Heftthema und einer Einordnung in innermathematische Zusammenhänge werden einige der im Grundsatzartikel angesprochenen Aspekte detailliert aufgegriffen. Abbildung 1.1 zeigt Konzeptionen zur unterrichtlichen Vorgehensweise in den einzelnen Klassenstufen.

Erläuterung der Abbildung
In Spalte 1 werden ausgewählte Einstiegsmöglichkeiten in Parameterdarstellungen für die jeweilige Klassenstufe (das ist abhängig vom Lehrplan) genannt und in konkreten Unterrichtssequenzen dargestellt. Entschließt man sich beispielsweise für die Einführung in Klasse 8 (Schiffskollision), werden die später vorgeschlagenen Themen Fortsetzungen (horizontal lesen) und können auf den Vorgängersequenzen aufbauen, also ggf. durchaus anspruchsvoller realisiert werden. Selbstverständlich können noch weitere Sequenzen eingeschoben werden.

[1] Personenbezeichnungen gelten für beide Geschlechter.

Unterrichtseinheiten

Die Einführung von PD [x(t), y(t)] Einstieg in Klasse / mit dem Thema	Fortführung	Fortführung	Fortführung	Fortführung	Fortführung	Fortführung
Beitrag 5 Klasse 6/7 Koordinaten, Gitterpunkte und Spiegelungen	**Beiträge 6,7 Klasse 8** UE - Geraden Schiffskollision Version 1 oder Version 2	**Beitrag 9 Klasse 9** UE - Umkehr-funktion (Haus des Nikolaus / Geraden, Strecken, Parabeln)	**Beitrag 8 Klasse 9** UE -Parabel (Versorgung s-flug)	**Beitrag 10 Klasse 10** UE Einheitskreis	**Beitrag 11 Klasse 10** UE Riesenrad	**Beitrag 12 Kl 7-10** Zufalls-punkte und Parameterd arstel-lung oder auch **Beitrag 13**
Beitrag 6,7 Klasse 8 UE - Geraden Schiffskollision Version 1 oder Version 2	**Beitrag 9 Klasse 9** UE Umkehr-funktion (Haus des Nikolaus / Geraden, Strecken, Parabeln)	**Beitrag 8 Klasse 9** UE Parabel (Versorgung sflug)	**Beitrag 10 Klasse 10** UE Einheitskreis	**Beitrag 11 Klasse 10** UE Riesenrad	**Beitrag 12 Kl 7-10** Zufallspun kte und Parameterd ar-stellung	**Beitrag 13 Kl 7-10** Parameterd ar-stellungen auf Bildern
Beitrag 9 Klasse 9 Umkehrfunktion (Haus des Nikolaus/ Geraden, Strecken Parabeln	**Beitrag 8 Klasse 9** UE-Parabel (Versorgungs flug)	**Beitrag 10 Klasse 10** UE Einheitskreis	**Beitrag 11 Klasse10** UE Riesenrad	**Beitrag 12 Kl 7-10** Zufallspunkt e und Parameterda r-stellung	**Beitrag 13 Kl 7-10** Parameterd ar-stellungen auf Bildern	
Beitrag 10 Klasse 10 Einheitskreis, Kreispunkte [sin(t), cos(t)]	**Beitrag 11 Klasse 10** UE Riesenrad	**Beitrag 12 Kl7-10** Zufallspunkt e und Parameterda r-stellung	**Beitrag 13 Kl 7-10** Parameterda r-stellungen auf Bildern			
Beispiele zur Sekundarstufe II werden in dem Heft nicht betrachtet.						

Abb. 1.1: Parameterdarstellungen in verschiedenen Klassenstufen, PD = Parameterdarstellung, UE = Unterrichtseinheit

In welchem Zusammenhang stehen Parameterdarstellungen zu dem üblichen Funktionsbegriff? Dieser Frage wird in Beitrag 3 nachgegangen. Ohne passende Software sind die folgenden Beiträge dieses Heftes nicht oder nur eingeschränkt umsetzbar. Am Beispiel eines Smiley wird aufgezeigt, dass die Lösungen bei unterschiedlicher Software häufig recht ähnlich sind (Beitrag 4).

© T3-Arbeitskreis Parametric

Die konkreten Unterrichtsbeispiele beginnen für die Klassenstufen 6/7 mit einer Hinführung zu Parameterdarstellungen anhand der Darstellung von Punktmustern und Spiegelungen (Beitrag 5). Die Beiträge 6 und 7 benutzen ein bekanntes Begegnungsproblem, um in Klasse 8 Parameterdarstellungen ein- oder fortzuführen. Hier werden 2 Versionen unterschiedlichen Komplexitätsgrades angeboten. Der „Versorgungsflug“ im Beitrag 8 führt zu Parameterdarstellungen von Parabeln (Klasse 9). Eine sehr überzeugende Nutzung von Parameterdarstellungen ist die einfache Umkehrung von Funktions- oder Relationsgraphen. Dies wird in Beitrag 9 gezeigt.
In Klasse 10 kann man die Sinusfunktion und Kosinusfunktion benutzen, um Kreise in Parameterdarstellung zu erzeugen (Beitrag 10). Umgekehrt lassen sich aus dem Einheitskreis die Graphen von (modifizierten) Sinus- bzw. Kosinusfunktionen erzeugen (Riesenrad, Beitrag 11). Kreise in beliebiger Lage zeichnet man mit Parameterdarstellungen viel einfacher als mit Wurzeltermen.

Zu überraschenden Ansätzen aus Mathematik und Kunst führt in Beitrag 12 die Deutung von „Zufallspunkten“ und von Transformationen dieser Punkte als Parameterdarstellung. Hier ist ein Einsatz in verschiedenen Klassenstufen möglich. Ein weiterer Exkurs (Beitrag 13) an der Schnittstelle zwischen den Sekundarstufen I und II zeigt, wie man mit Parameterdarstellungen auf Hintergrundbildern (Brücke, Mosaik, Blumen) zeichnen kann.

2 - Unterricht mit Parameterdarstellungen [x(t), y(t)] in der Sekundarstufe 1

In der Regel erfolgt die erste Begegnung mit Parameterdarstellungen (PD) recht spät in der vektoriellen Analytischen Geometrie (Geradengleichung). Viele Aspekte sprechen jedoch dafür, schon in der Sekundarstufe 1 in PD einzuführen. Leider werden die aus einer Einführung erwachsenen Möglichkeiten noch in kaum einem Lehrplan zur Kenntnis genommen. Der Arbeitskreis „Parametric“ (mit Referenten und Referentinnen des Projekts T3-Deutschland, Universität Münster) hat sich seit 2008 mit dem Thema befasst und legt in diesem MU-Heft einige seiner Arbeitsergebnisse vor. Der englischsprachige Begriff „parametric“ weist darauf hin, dass in Computeralgebrasystemen und mathematischer Software die parametrische Darstellung von Kurven in der Regel zur Verfügung steht.
In diesem Beitrag werden einige Stationen auf dem Weg der Einbeziehung von Parameterdarstellungen in den Mathematikunterricht der Sekundarstufe 1 in einem Schnelldurchgang mit einem Bezug zum Rahmenlehrplan vorgestellt. Detaillierte Darstellungen finden sich dann in den konkreten Unterrichtsbeispielen anderer Beiträge dieses Hefts.

Hier wird mit einem einfachen Beispiel zur Anwendung des Grafiktyps „Parametrisch“ begonnen – es könnte in Klasse 8 angesiedelt sein.

Beispiel 1 – Koordinatensystem, achsenparallele Gitterlinien
Problemstellung (etwa in Klasse 8 beim Thema „Geraden“ möglich oder schon vorher)
Wie kann man ein Koordinatensystem mit seinen Gitterlinien mit einem CAS erzeugen?
Eine Bearbeitung mit dem Taschencomputer Voyage200 könnte so aussehen:

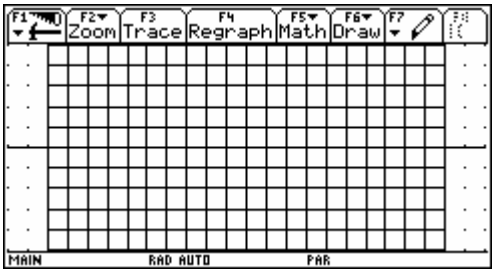


Abb. 2.1

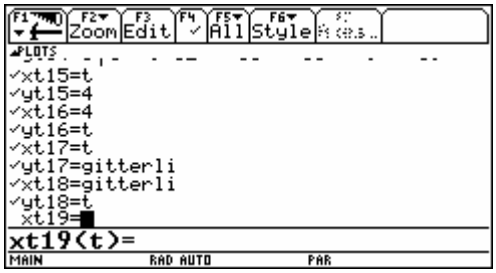


Abb. 2.2

Dabei ist gitterli = {-10,-9,-8,-7,-6,-5,-4,-3,-2,-1,0,1,2,3,4,5,6,7,8,9,10}.

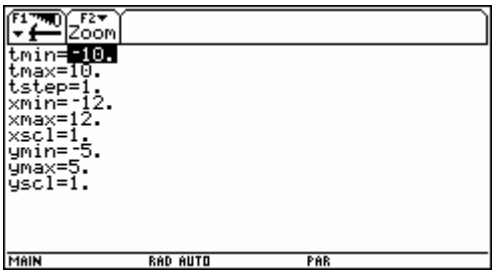


Abb. 2.3

Der hier gewählte Bearbeitungsweg geht aus den Bildschirmabdrucken hervor. Dabei werden die Parallelen zur x-Achse gezeichnet, erst eine, dann viele – siehe xt17, yt17. Dann werden x und y vertauscht, ggf. auf Tipp des Lehrers – siehe xt18, yt18. Auf diese Weise können die Schüler erstmals die Parameterdarstellung kennen lernen.

Die Parameterdarstellung bietet in dieser und anderen Aufgabenstellungen den Vorteil, Umkehrgraphen zeichnen zu können auch ohne deren Terme zu kennen. Dabei werden „x und y vertauscht“ – so wird es auch oft bei der Einführung von Umkehrfunktionen in Klasse 9 gelehrt.

© T3-Arbeitskreis Parametric

Beispiel 2 - Zum Vergleich, Wurzeldarstellung und Parameterdarstellung des Kreises

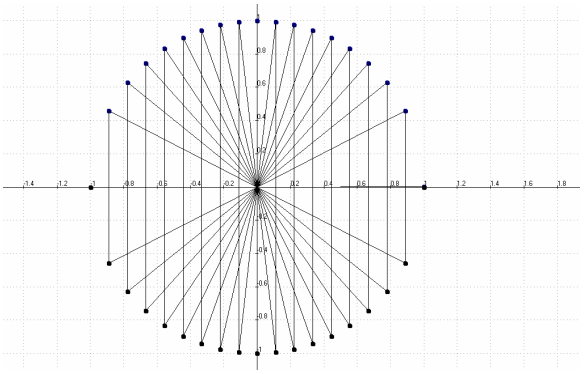


Abb. 2.4

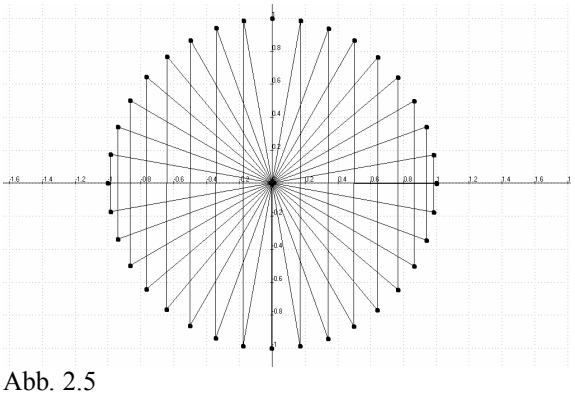


Abb. 2.5

f2: x,sqrt(1-x^2), x aus [-1,1], 18 Werte
f3: x,-sqrt(1-x^2) x aus [-1,1], 18 Werte
f4: x,sqrt(1-x^2),0,0 Radien zu f2
f5: x,-sqrt(1-x^2),0,0 Radien zu f3

Hier sieht man die Parameterdarstellung.
f1: cos(t),sin(t) t aus [0, 6.28], 36 Werte
f6: cos(t),sin(t),0,0 Radien zu f1

Die punktweise Entstehung des Kreises mit f2 und f3 in der Wurzeldarstellung führt zu 36 sehr ungleich verteilten Punkten (18+18 Werte). **Dagegen liefert die Parameterdarstellung 36 gleichmäßig verteilte Kreispunkte.**

Beispiel 3 – Zeitabhängige Bewegungen

Wir betrachten das Bild „Himmelsgeraden“. Vier Flugzeuge sind am Himmel über uns hinweg geflogen. – Woran erkennt man die Abhängigkeit der Bewegung von der Zeit? Wie kann man die Zusammenhänge durch Terme erfassen?
Offenbar ist das unter Verwendung der üblichen Geradendarstellung $y = m * x + n$ nicht möglich. Die vier Kondensstreifen-Geraden sollten sich im Interesse der Flugzeuginsassen wohl besser nicht schneiden! – Aber mit Parameterdarstellungen der Geraden findet man eine sinnvolle Modellierung (siehe Beitrag 6).

Abb. 2.6

Nach diesen einführenden Beispielen folgen nun einige grundsätzliche Überlegungen zu Parameterdarstellungen in der Sekundarstufe 1.

Welche Gründe sprechen dafür, Parameterdarstellungen bereits in der Sekundarstufe 1 zu berücksichtigen? - Dabei gehen die Überlegungen des Arbeitskreises davon aus, Parameterdarstellungen in der Regel nicht als gesonderte oder zusätzliche Themen in den Lehrplan der Sekundarstufe 1 (Gymnasium) aufzunehmen, sondern integriert in die ohnehin vorgesehenen Lehrplaninhalte zu behandeln.

- Der Rechnereinsatz macht es möglich! (Siehe Abb. 2.7).
- Mit der Einbeziehung von „Parametrisch“ wird die einseitige Ausrichtung des Mathematikunterrichts auf Funktionen der Form y = f(x) aufgebrochen.

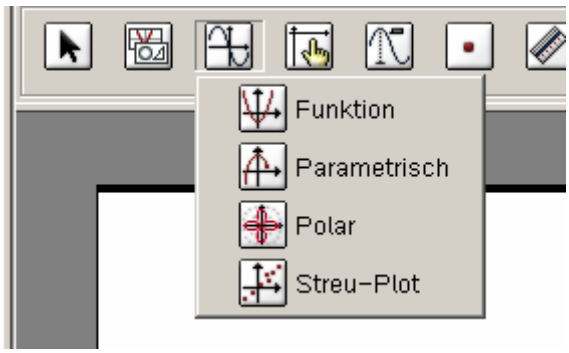


Abb. 2.7

Hier sieht man den Befehl „Parametrisch“ des Computeralgebrasystems TI–Nspire™CAS. Entsprechende Befehle sind aber auch in der Software zur Dynamischen Geometrie vorhanden, wie GeoGebra oder GeoneXt..

- Jede „klassische“ Funktion mit y = f(x) lässt sich auch parametrisch darstellen, umgekehrt aber nicht!

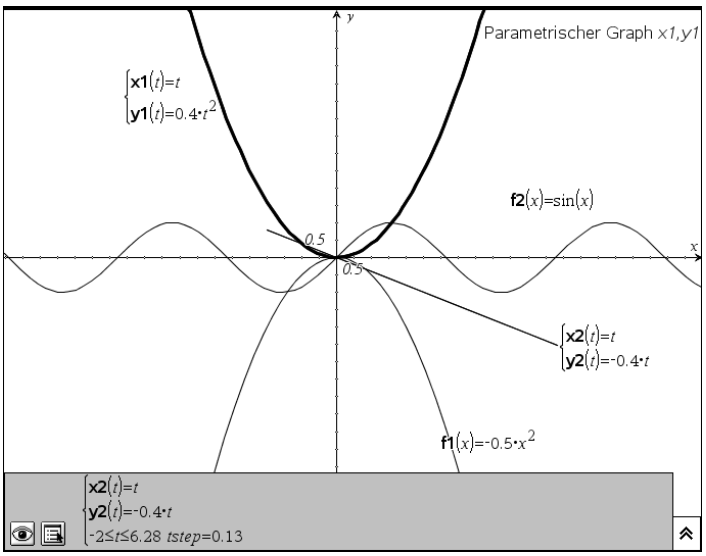


Abb. 2.8

Abbildung 2.8 zeigt, wie man gleichzeitig Graphen zur Gleichung y = f(x) und Graphen in Parameterdarstellung [x(t), y(t)] auf einem Bildschirm sammeln und z.B. vergleichen kann.
Das ergibt neue didaktisch-methodische Möglichkeiten. Mit Hilfe des Definitionsbereiches für den Parameter t kann man die Parametergraphen auch noch auf einfache Weise beeinflussen.
Beispielsweise wurde in Abbildung 2.8 für [x2(t), y2(t)] t von -2 bis 6.28 gewählt. Damit entsteht eine Strecke.

- Bei diesen Überlegungen kommt auch der **Definitionsbereich** mehr in den Fokus der Schüler, da sie beispielsweise mit den gleichen Termen leicht von Geraden zu Strecken, von Kreisen zu Viertelkreisen usw. übergehen können.
- Mit diesen Ansätzen ergibt sich **ein einfacher Übergang** von der üblichen x,y-Darstellung zur Parameterdarstellung [x(t), y(t)]. Anfangs wählt man x(t) = t und nachfolgend können dann für x(t) auch andere Terme als t gewählt und untersucht werden. Nähere theoretische Erläuterungen dazu finden Sie im Beitrag 3.
- Mit Parameterdarstellungen kann der Vorrat zur **Modellierung** von Sachverhalten wesentlich erweitert werden. (siehe Beispiel 6). Weitere Beispiele bringen die anderen Beiträge dieses Heftes.
- Bei Umkehrfunktionen lernen die Schüler bekanntlich „vertausche x und y“. Gerade das geht in Parameterdarstellung sehr gut – und zwar ohne rechnerische Umformungen. Aus dem Graphen [x(t), y(t)] wird einfach [y(t), x(t)]. Damit kann der **Umkehrgraph – ohne den umgeformten Term zu kennen** – sofort gezeichnet werden. Damit ist dann auch eine exakte Rechnung motiviert, die aber möglicherweise gar nicht oder nur schwer durchführbar ist.

Beispiel 4 – Umkehrgraphen

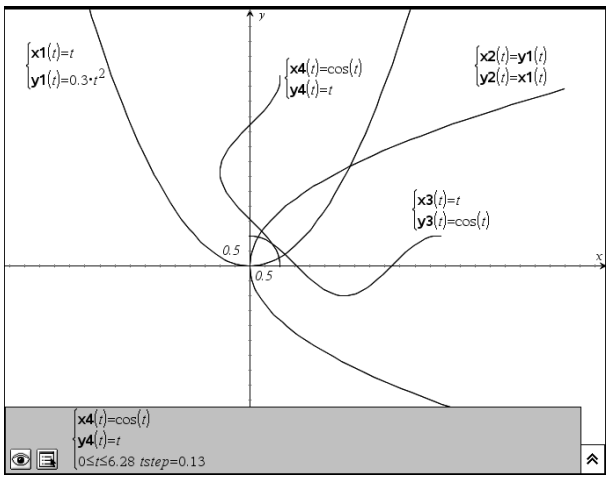


Abb. 2.9a

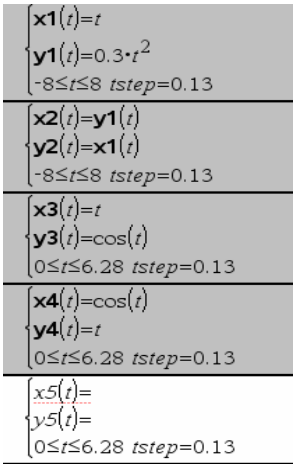


Abb. 2.9b

Mit dem Ansatz für die Zeichnung von Umkehrrelationen kann man nun verschiedene schwer erscheinende Aufgaben leicht bearbeiten.

Aufgabe (z.B. als Übung im Umgang mit Sinusfunktionen): Erstellen sie das gegebene Muster.

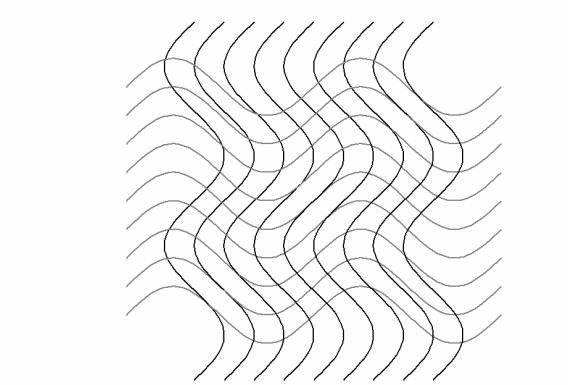


Abb. 2.10
Das gegebene Muster wird erzeugt mit
f1: t, sin(t)+u und f2: sin(t)+u,t .

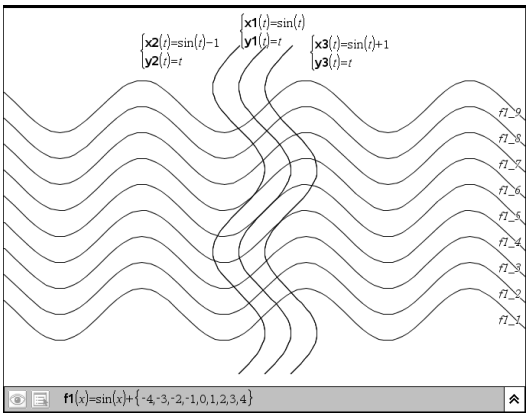


Abb. 2.11
Lösung:
a) mit Grafiktyp „Funktion“ und
b) mit Grafiktyp „Parametrisch“ (Senkrechte)

- Parameterdarstellungen sind sehr **vielseitig verwendbar** – unter Anwendungsaspekten, aber auch unter innermathematischen Fragestellungen.

Beispiel 5 - Kreis-Abkömmlinge

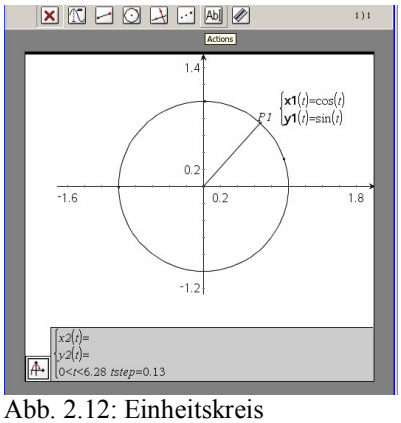


Abb. 2.12: Einheitskreis

In Klasse 10 bietet die Einführung der trigonometrischen Funktionen eine weitere Gelegenheit in Parameterdarstellungen einzuführen. Anknüpfungspunkt in Klasse 10 ist der Einheitskreis, der ja bei der Einführung der Winkelfunktionen eine wichtige Rolle spielt. Dabei wird im Unterricht häufig die Gelegenheit verpasst, zu erarbeiten, dass jeder Punkt auf dem Einheitskreis die Koordinaten x(t) = cos(t) und y(t) = sin(t) hat (siehe Abbildung 2.12).
Es ist nun naheliegend nach anderen Kreisen zu fragen, etwa nach einer „Schießscheibe“ und mit dem CAS diverse weitere Variationen vorzunehmen. Dazu benutzt man letztlich Terme der Form
x(t,a,b) = a*cos(t) + b und y(t,a,b) = a*sin(t) + b und erprobt zum Beispiel [x(t, 2,1), y(2t,2,2)].
Dabei erschließt sich eine neue Kurvenwelt von großer Vielfalt.

Beispiel 6 – Entwurf einer Bettdecke
Hier soll von einem Designer eine Smiley-Bettdecke für ein Kinderzimmer entworfen werden.

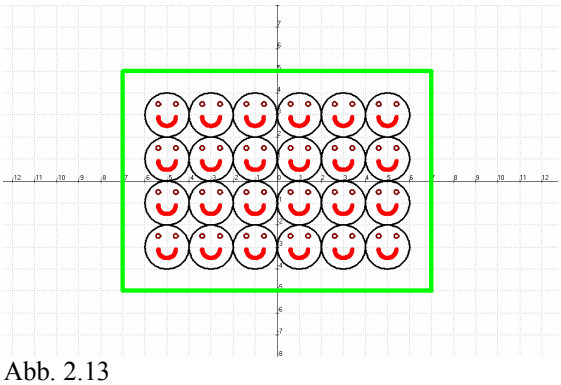


Abb. 2.13

Unter den vielen Möglichkeiten wurde hier gewählt:

f1: cos(t)+u, sin(t)+v	*Smiley-Kreise*
f2: 0.1*cos(t)+0.4+u,0.1sin(t)+0.5+v	*Augen*
f3: 0.1*cos(t)-0.4+u,0.1sin(t)+0.5+v	*Augen*

Definitionsbereiche für f1,f2,f3:
t aus 0 bis 2pi, Anzahl 72,
u aus -5 bis 5 Schrittweite 2,
v aus -3 bis 3 Schrittweite 2

f4: 0.4*cos(t)+u,0.4*sin(t)-0.1+v	*Smiley-Mund*
t von pi bis 2pi, u und v wie oben	
f8: -7,-5,7,-5,7,5,-7,5,-7,-5	*Umrandung der Decke*

Der Entwurf von Smileys und anderen Logos ist eine beliebte Aufgabenstellung, die die Schüler zu vielen mathematischen Überlegungen anregt.

- PD erschließen damit für die Schüler eine völlig neue Mathe-Welt mit vielen, insbesondere auch graphischen und ästhetischen Überraschungen.
- Diese neue Mathe-Welt hat auch einen realen Bezug zur Physik. Die unten abgebildeten Lissajous-Kurven entstehen z.B. bei der Überlagerung zweier senkrecht zueinander stehender sinusförmiger Wechselspannungen, dargestellt mit einem Oszilloskop. Weiterhin können diese Kurven auch mit einem Sandpendel erzeugt werden.
- Damit öffnet sich ein weites Feld von Variationsmöglichkeiten:

x(t) =	t	cos(3t)	cos(2t)	cos(3t)	usw
y(t) =	cos(t)	2sin(t)	2sin(t)	t	usw..

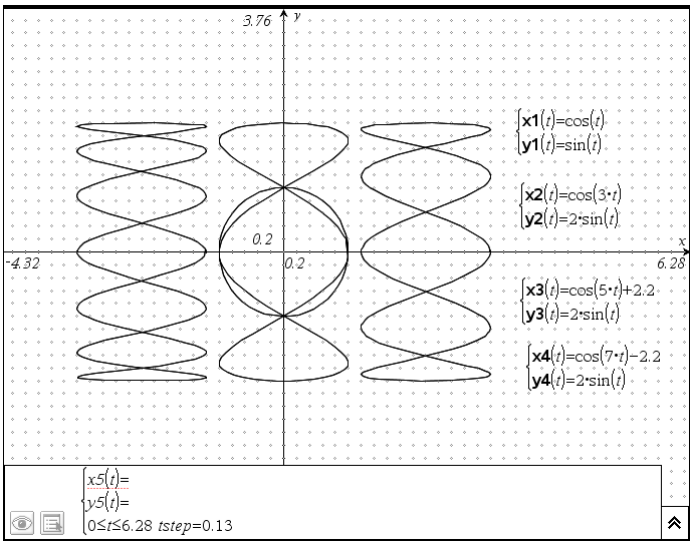


Abb. 2.14

Aufgabe:
Rechts neben den Graphen finden Sie die Parameterdarstellungen. - Welche Terme gehören zu welchen Graphen? Begründen Sie möglichst vielfältig.

Die Beispiele zeigen: Einer besonderen Unterrichtseinheit zu Parameterdarstellungen bedarf es nicht! Bezogen auf den gängigen Unterricht zu trigonometrischen Funktionen können derartige Aufgaben mit Parameterdarstellungen zum Beispiel als motivierende Übungen eingesetzt werden.

Für das Verständnis von Parameterdarstellungen ist die Idee nützlich, die schrittweise Entstehung des Graphen zu [x(t), y(t)] aus den beiden Graphen [t, x(t)] und [t, y(t)] zu verfolgen. Zu diesem Ansatz wird hier eine Animation für die Entstehung einer Ellipse aus den Graphen zu x(t) = 1.5*sin(t)+1 und y(t) = cos(t) gezeigt (hier nur 4 Schnappschüsse der Animation).

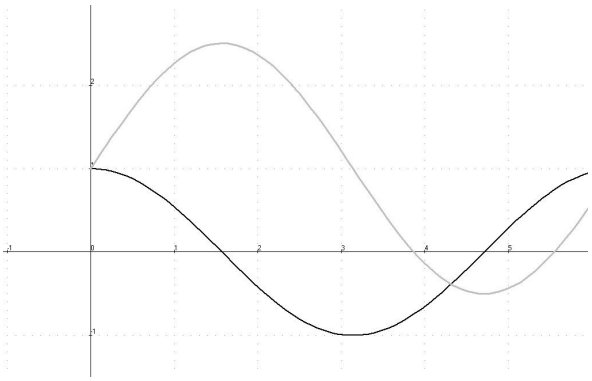


Abb. 2.15: Die beiden Ausgangsgraphen f2: t, cos(t) und f1: t, 1.5sin(t)+1 werden gezeichnet.

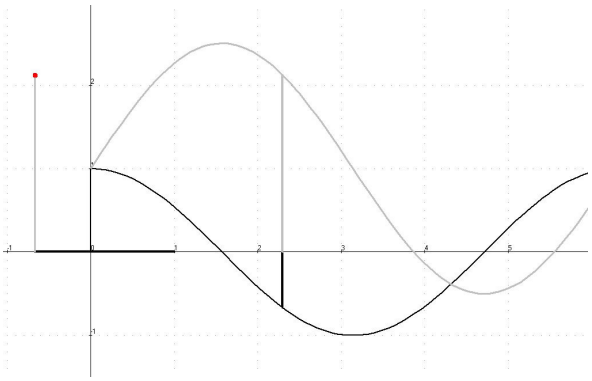


Abb. 2.16: Ein Punkt wird konstruiert. f2(2.3) liefert dessen x-Wert, f1(2.3) liefert dessen y-Wert.

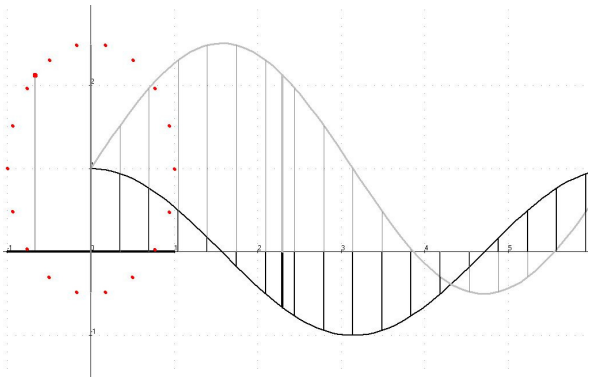


Abb. 2.17: Der Vorgang bei Bild 2 wird für viele t-Werte wiederholt. Weitere Punkte des Bildgraphen entstehen. Die Ellipse wird sichtbar.

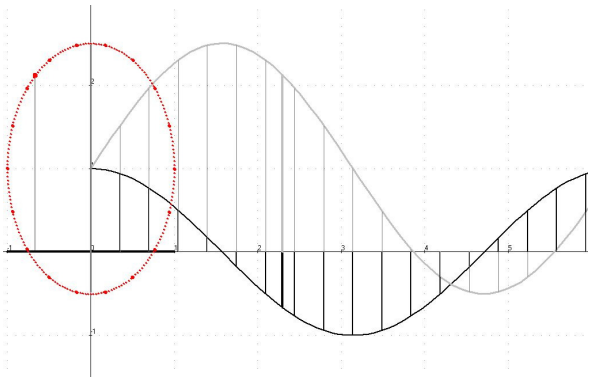


Abb. 2.18: Die Animation (sie läuft zeitlich in kleinen Schritten ab und kann auch angehalten werden) liefert das Endbild.

Hier wurde das Animationsprogramm ANIMATO benutzt. Die verwendeten Terme, die je nach Entwurf gleichzeitig oder nacheinander mit gleichen oder unterschiedlichen Definitionsbereichen aufgerufen werden können, sind in diesem Fall:

f1: 1.5sin(a)+1 // y(a)	**Die Ausgangsgraphen f1 und f2**
f2: cos(a) // x(a)	
f4: (u),0,(u),f1(u)	f4 diese Strecke wird neuer y-Wert
f5: (u),0,(u),f2(u)	f5 diese Strecke wird neuer x-Wert, siehe anschließend f6
f6: 0,0,f2(u),0	f6 neuer x-Werte Bereich
f7: 0,0,0,f1(u)	f7 neuer y-Werte Bereich
f8: f2(u),f1(u)	f8 Parameterdarstellung, Ellipse
f10: 2.3,0,2.3,f2(2.3)	f10 dieser y-Wert von f2 wird der neue x-Wert der neuen Kurve, siehe f11
f11: 0,0,f2(2.3),0	f11 Strecke für x-Wert der Ellipse zeichnen
f12: 2.3,0,2.3,f1(2.3)	f12 dieser Wert von f1 wird der neuer y-Wert
f13: f2(2.3),0,f2(2.3),f1(2.3)	f13 Strecke für y-Wert der Ellipse
f14: f2(2.3),f1(2.3)	f14 Ellipsenpunkt zeichnen

Von besonderer Bedeutung ist, dass die Ausgangsgraphen f1 und f2 ggf. für die Animation anderer Parameterdarstellungen hier leicht geändert werden können. Weitere Änderungen sind nicht nötig, da später nur Bezüge auf f1 und f2 erfolgen. Insofern ist das „Programm“ allgemein. Es lädt die Schüler förmlich zum Erforschen anderer Graphen und Funktionen ein.

So ergibt sich mit Funktionen f1: sin(a)^3, f2: cos(a)^3 eine Astroide.

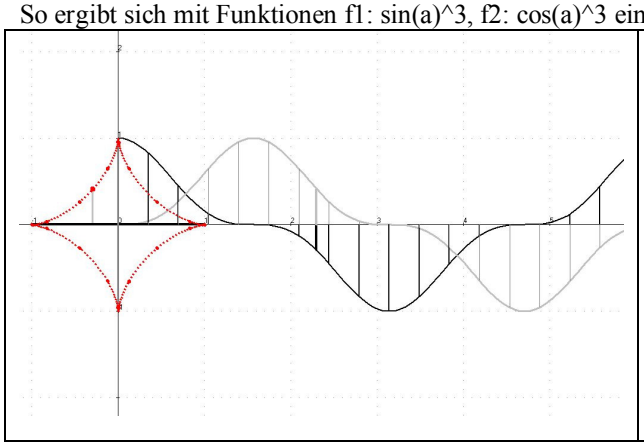


Abb. 2.19: Animation einer Astroide

Abb. 2.20: Aus der Umwelt - Astroidenkacheln

Viele der Möglichkeiten für Parameterdarstellungen sind in Fachzeitschriften oder in einigen Schulbüchern für die Sekundarstufe II dokumentiert. In Schulbüchern für die Sekundarstufe I findet man diese Ansätze jedoch noch kaum. Beispielsweise gibt es in der Schulbuchreihe „Neue Wege“ (Schroedel-Verlag) ab Klasse 8 gelegentlich auch Texte und Aufgabenstellungen zu Parameterdarstellungen, und damit werden die Schüler eingeführt in eine anderen Kurvenwelt.

Bereits in Klasse 7 können erste Betrachtungen und Vorbereitungen erfolgen. Beim Thema „Symmetrie“ können im Koordinatensystem zur Winkelhalbierenden y = x symmetrisch liegende Punkte erzeugt werden, wie z.B. A(3|4) und A‘(4|3), die zur Konstruktion von Punktmustern benutzt werden können. Hiermit und bei der Spiegelung ganzer Objekte können die später systematischer betrachteten Umkehrungen von Funktionen eingeleitet werden (siehe Beitrag „5 - Vorbereitung von Parameter-Darstellungen schon in Klasse 6/7, Koordinaten und Spiegelungen“).

Zusammenfassung: In dem Beitrag wurden einige wichtige Parameterdarstellungs-Stationen auf dem Weg durch die Schulmathematik der Sekundarstufe I aufgezeigt. Das erfolgte an Hand unterrichtsrelevanter Aufgabenstellungen aus unterschiedlichen Bereichen. Die unten folgenden Unterrichtseinheiten für verschiedene Klassenstufen beschreiben ausführlich mögliche Einstiegs- oder Fortsetzungswege.

3- Der Funktionsbegriff im Zusammenhang mit Parameterdarstellungen

Theoretischer Hintergrund

Hinweis: Es handelt sich hierbei um einen innermathematischen Beitrag, der die Einordnung der dargestellten Unterrichtseinheiten in die mathematische Theorie erleichtert und damit den mathematischen Kontext verdeutlicht.

Für die Durchführung der in diesem Heft beschriebenen Einheiten sind die hier folgenden Ausführungen nicht nötig.

Der klassische Funktionsbegriff, wie er in der 7. oder 8. Klasse eingeführt wird, beschreibt Funktionen als eindeutige Zuordnungen von $\mathbb{R}$ nach $\mathbb{R}$. Diesen Funktionsbegriff kann man mit Hilfe von Parameterdarstellungen erweitern. Bei der Vermittlung des klassischen Funktionsbegriffs wird einer Ausgangsgröße eine Zielgröße zugeordnet. Damit sind die Begriffe Definitionsbereich und Wertebereich verbunden. Der graphischen Darstellung von Funktionen im Koordinatensystem geht im Allgemeinen das Aufstellen einer zweireihigen Wertetabelle voraus.
Im Zuge der Einführung von Parameterdarstellungen nutzt man eine dreireihige Wertetabelle, die als Erweiterung der zweireihigen Wertetabelle der bisher behandelten Funktionen von $\mathbb{R}$ nach $\mathbb{R}$, etwa $f(x) = 2x - 1$, aufgefasst werden kann:

x	-2	-1	0	1	2
f(x)=2x-1	-5	-3	-1	1	3

t	-2	-1	0	1	2
$x(t) = t$	-2	-1	0	1	2
$y(t) = 2t - 1$	-5	-3	-1	1	3

Offenbar kommt bei dieser Erweiterung eine weitere Zielgröße hinzu. Ferner ist die Ausgangsgröße t ein Wert aus $\mathbb{R}$ und wird in diesem Zusammenhang stets als Parameter bezeichnet. Die Zielgrößen $x(t)$ sowie $y(t)$ sind dabei Funktionen im klassischen Sinn, also von $\mathbb{R}$ nach $\mathbb{R}$.
Die Parameterdarstellung entspricht einer Funktion von $\mathbb{R}$ in den $\mathbb{R}^2$ der Art

$$k(t) = (x(t), y(t)).$$

Bei der Visualisierung stellen sich drei Fragen:
Wird ein dreidimensionales Koordinatensystem benötigt? Oder reicht möglicherweise ein rechtwinkliges System mit zwei Achsen? Aber wo bleibt dann der Parameter t?
Denkbar sind zwei Ansätze a) und b).

a) Folgt man dem ersten Ansatz, so erhält man durch Einzeichnen der Punktmenge

$$(t \mid t \mid 2t - 1) \in \mathbb{R}^3$$

folgende räumliche Darstellung (Abb. 3.1):

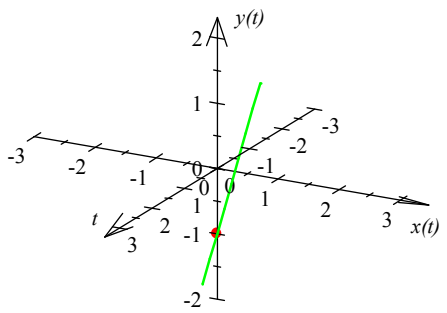


Abb. 3.1

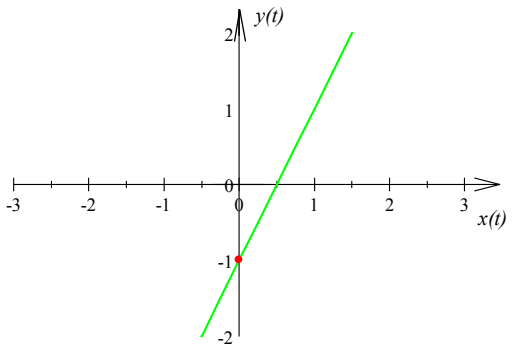


Abb. 3.2

Dreht man das Koordinatensystem in eine bestimmte Position, so ergibt sich die gewohnte zweidimensionale Darstellung der Geraden (Abb. 3.2).

b) Nach dem zweiten Ansatz wird die Koordinatenachse, auf der der Parameter t aufgetragen wird, gesondert dargestellt. Es handelt sich somit um eine Abbildung von einem Intervall (bzw. einer Teilmenge von $\mathbb{R}$) auf die Ebene, d.h. die Zielmenge $\mathbb{R}\times\mathbb{R}$.(Abb. 3.3)
Somit schreibt man dann für die Parameterdarstellung $k(t)=(t,2t-1)$.

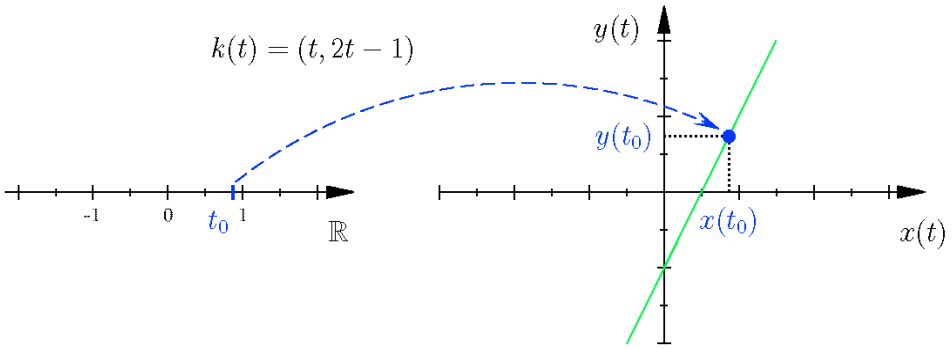


Abb. 3.3

Bei diesem Beispiel handelt es sich um einen Spezialfall, denn es ist $x(t)=t$ und $y(t)=2t-1$. Diese funktionale Abhängigkeit hätte auch durch eine Funktion $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ mit der Funktionsgleichung $f(x)=2x-1$ beschrieben werden können. **Nachfolgend sind für $x(t)$ beliebige Terme zugelassen**.
Die graphischen Darstellungen ergeben daher echte Kurven und lassen sich von vornherein nun nicht mehr mit klassischen Funktionsgraphen $(\mathbb{R}\to\mathbb{R})$ vergleichen.

Ein Mehrwert dieser Vorgehensweise wird in folgendem Beispiel erkennbar:

$$k(t)=(t+3,t^2-1)$$

In der ersten Komponente $x(t)$ wird die Verschiebung entlang der x-Achse und in der zweiten Komponente $y(t)$ die Verschiebung entlang der y-Achse beschrieben. Insbesondere haben Verschiebungen in positive x-Richtung in dieser Darstellung auch positive Vorzeichen. Die herkömmliche Scheitelpunktsform dieser Funktion $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ lautet dagegen $f(x)=(x-3)^2-1$.

Wie sich herausstellen wird, liegt der Vorteil von Parameterdarstellungen in der Vorgehensweise, jedem Parameterwert von t einen Punkt $P(x(t)\,|\,y(t))$ der Zielmenge zuzuordnen, wie in der folgenden Wertetabelle ersichtlich wird:

© T3-Arbeitskreis Parametric

t	$-\frac{\pi}{2}$	$-\frac{\pi}{4}$	0	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{2}$
$x(t)=\cos(t)$	0	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	1	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	0
$y(t)=\sin(t)$	-1	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	0	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	1

Interessant wird es, wenn wir für die Komponenten wie oben z.B. trigonometrische Funktionen verwenden. Im ersten Ansatz a) zeichnet man die Punkte $(t \mid \cos(t) \mid \sin(t))$ und erhält folgende räumliche Darstellungen:

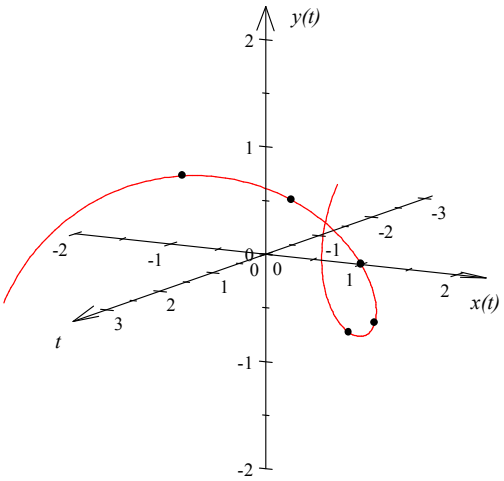


Abb. 3.4

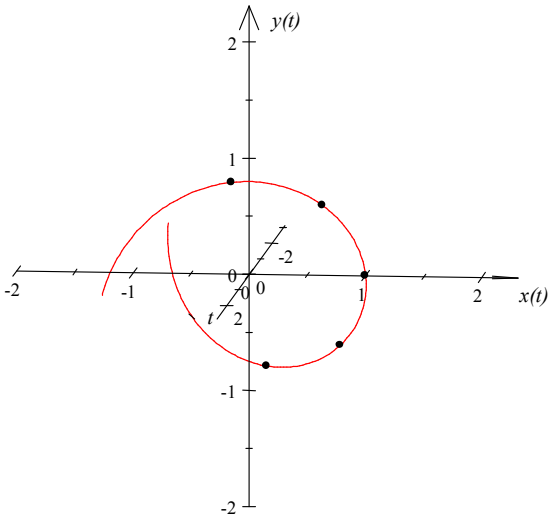


Abb. 3.5

Je nach Projektion wird hierbei entweder eine Schraubenlinie (Abb. 3.4 und 3.5) oder - bei senkrechter Projektion entlang der $x(t)$ - Achse - die Sinus- Kurve (Abb. 3.6) sichtbar. Projiziert man analog entlang der $y(t)$ - Achse, so ergibt sich die Kosinus-Kurve. Die Projektion entlang der t-Achse führt auf den wohlbekannten Einheitskreis (Abb. 3.7).

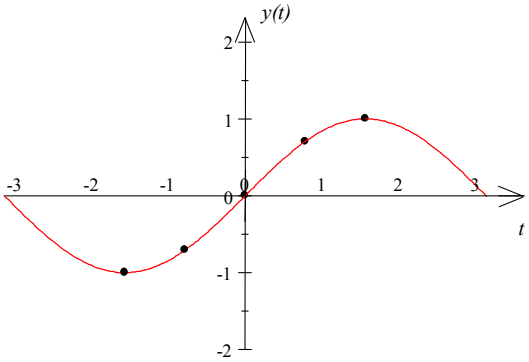


Abb. 3.6

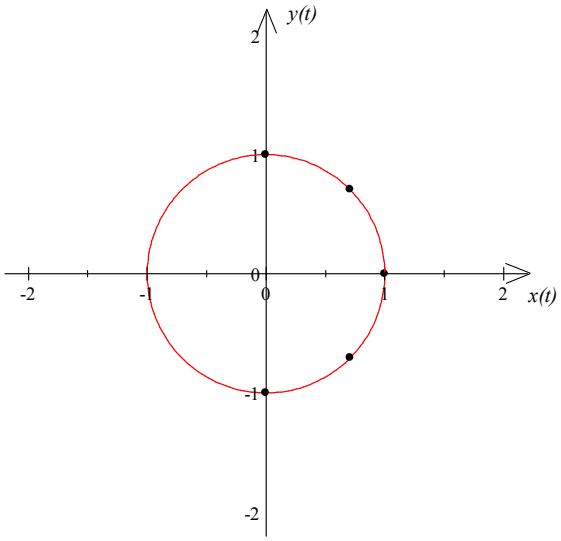


Abb. 3.7

Für den zweiten Ansatz muss man korrekterweise eine separate t-Achse oder wahlweise einen Schieberegler

einführen (siehe Beitrag „Riesenrad“ in diesem Heft), um den funktionalen Zusammenhang zwischen dem Parameter t und der erzeugten Punktmenge $\{(x(t) \mid y(t));\ t \in [-\pi;\pi]\}$ darzustellen.

Die folgende Abbildungen (Abb. 3.8 bis 3.10) fassen die Unterschiede und Gemeinsamkeiten von Parameterdarstellungen und Funktionen im herkömmlichen Sinne zusammen:

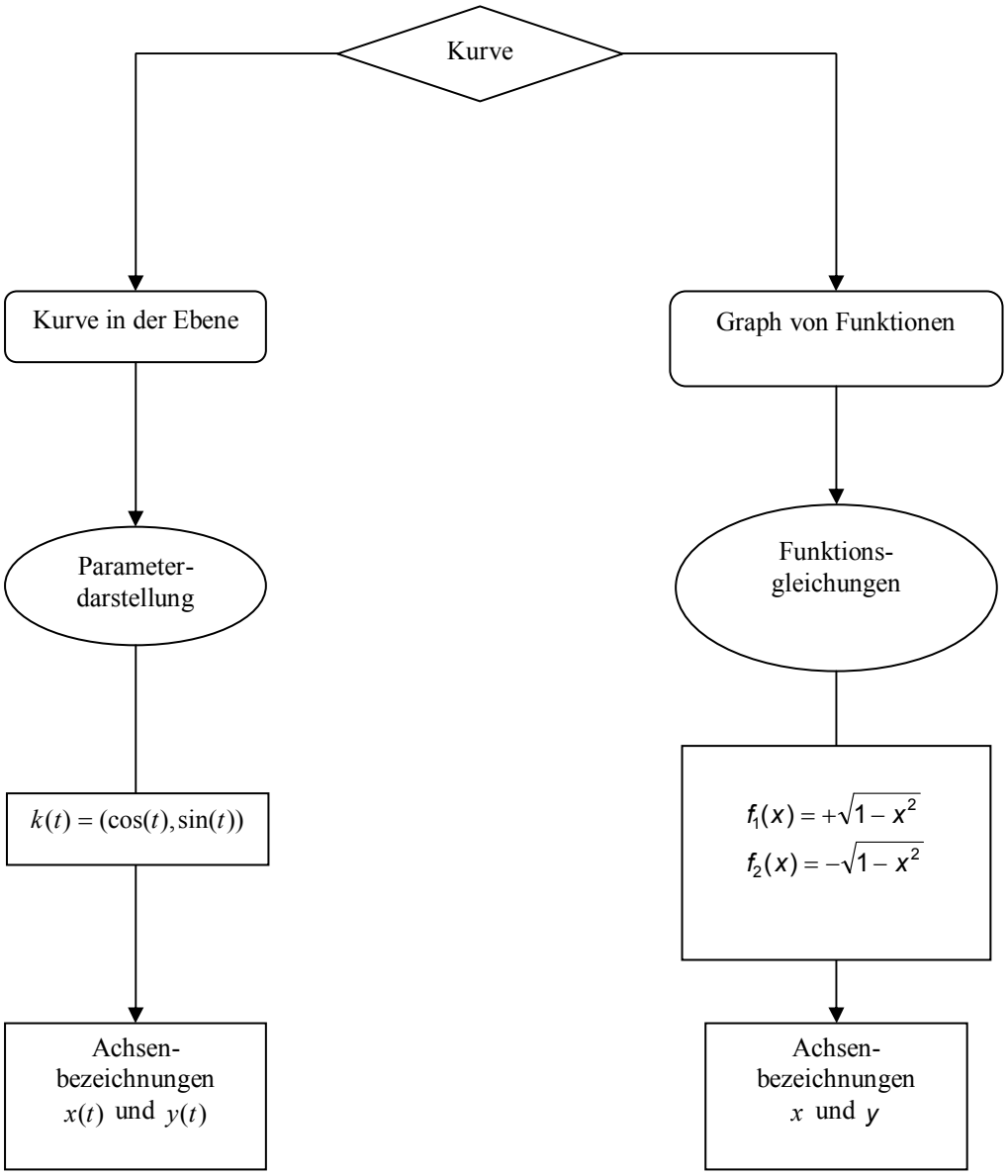


Abb. 3.8

© T3-Arbeitskreis Parametric

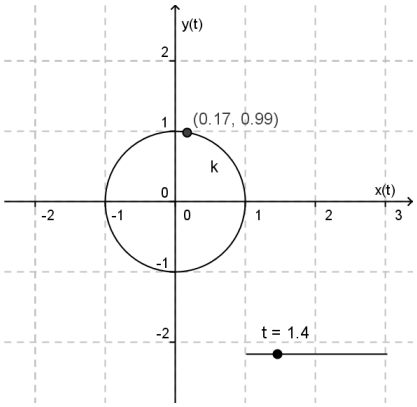


Abb. 3.9 : $k(t) = (\cos(t), \sin(t))$, mit Schieberegler für t

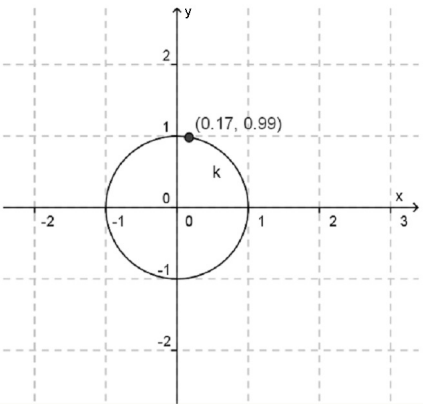


Abb. 3.10: $f_1(x) = +\sqrt{1-x^2}$
$f_2(x) = -\sqrt{1-x^2}$

Ausblick:

Aus den obigen Ausführungen ergibt sich, dass jede herkömmliche Funktionsdarstellung von $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ auch als Parameterdarstellung möglich ist. Umgekehrt ist dies oft nicht als geschlossener Ausdruck möglich. Dies zeigt sich schon bei der oben gezeigten Kreisdarstellung.
Die „graphische Umkehrung“ von Kurven ergibt sofort eine zusammenhängende Umkehrkurve, die man sonst nur als zusammengesetzter Graph von Umkehrfunktionen erhält (vgl. den Beitrag 9 „Das Haus vom Nikolaus“ in diesem Heft).
Ein Spezialfall von Parameterdarstellungen ist seit jeher in vielen Rahmenplänen der Sekundarstufe 2 versteckt enthalten. So berechnet man Ortskurven z.B. für Extrempunkte einer Funktionenschar und stellt Punkte auf der Erdkugel mit Hilfe von Polarkoordinaten dar.

4 - Parameterdarstellungen eines Smiley mit unterschiedlicher Software

Die Zusammenstellung zeigt, dass es in jeder mathematischen Software auf einfache Weise möglich ist, Parameterdarstellungen einzusetzen. In den Beispielen wurde bewusst eine einfache Form gewählt. Schüler werden sich damit nicht begnügen, sondern umgehend und mit Freude weitere Smiley-Ideen verwirklichen. Jede weitere Realisierung fördert ihre Kompetenz im Umgang mit Parameterdarstellungen. – Versuchen Sie mal, einen Smiley in der üblichen Funktionsdarstellung zu erstellen! Es wird Ihnen nur schwer gelingen.

A Wie erzeuge ich eine Parameterdarstellung mit dem Taschenrechner „Voyage200“?

Einstellung: *Mode: graph: Parametric*

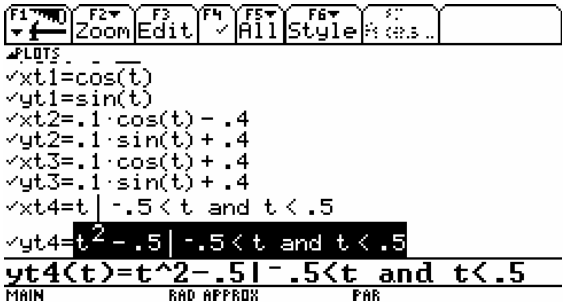


Abb. 4.1
Eingabe im Editor

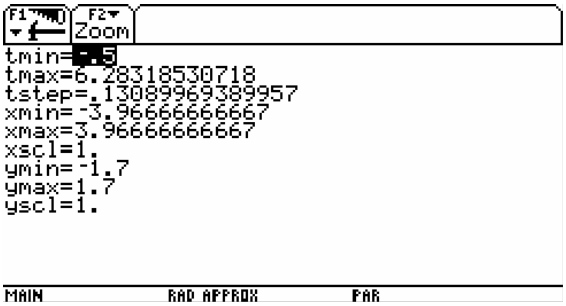


Abb. 4.2
window –Einstellungen

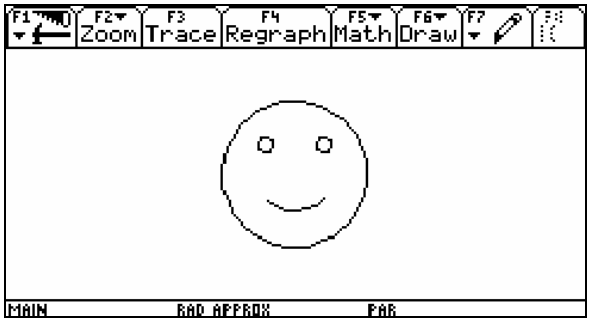


Abb. 4.3
Fertiger Smiley

© T3-Arbeitskreis Parametric

B Wie erzeuge ich eine Parameterdarstellung mit der Software „GeoGebra“?

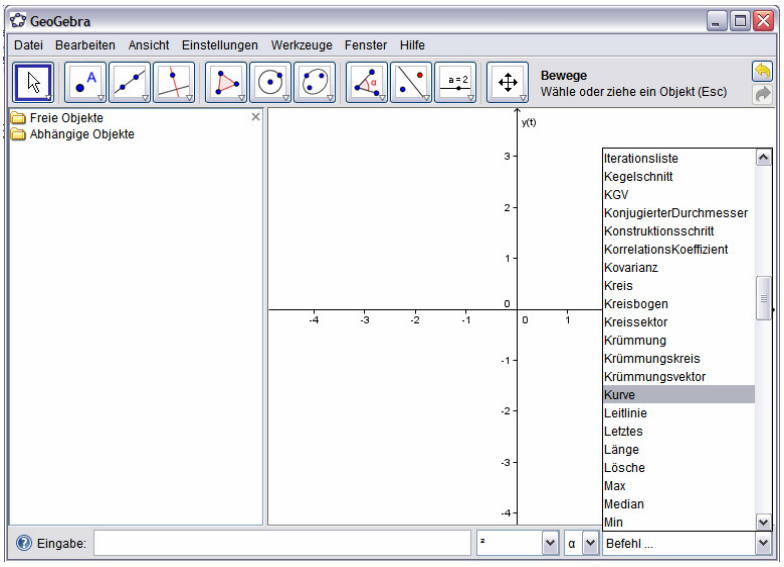


Abb. 4.4
Auswahl des Befehls „Kurve“

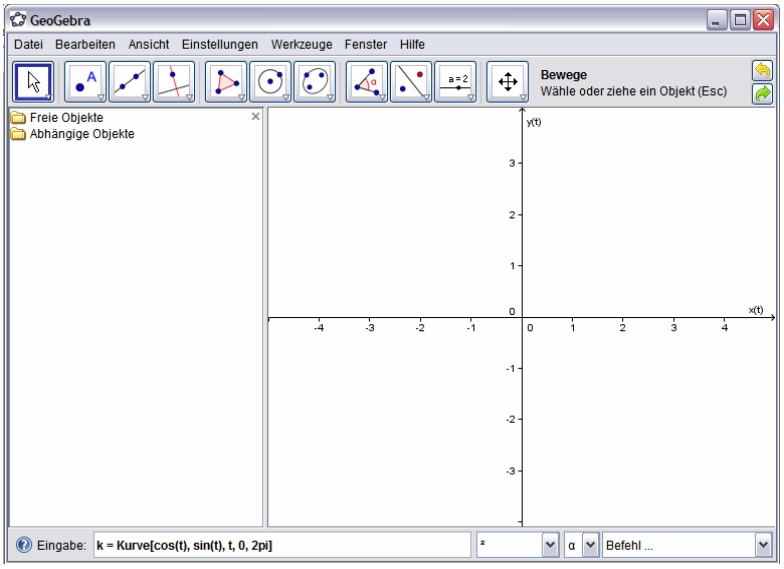


Abb. 4.5
Einfügen von $x(t)$, $y(t)$, des Parameters t und des Zeichenintervalls $[0;2\pi]$

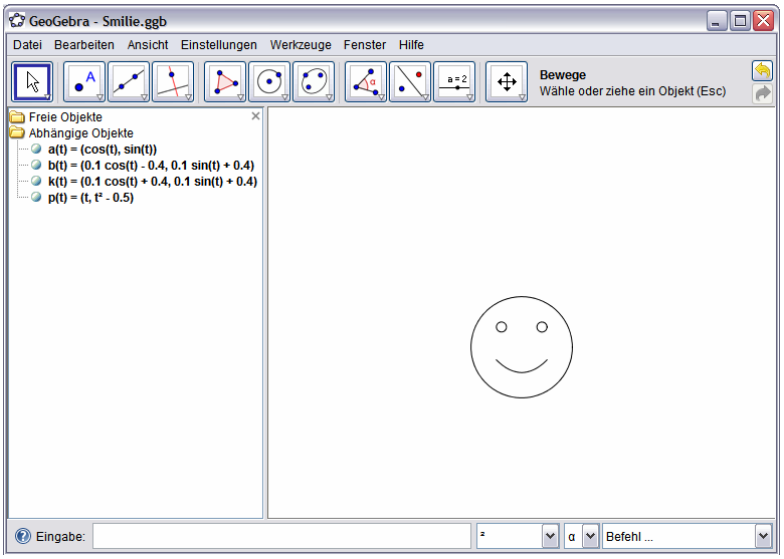


Abb. 4.6
Beispiel für vier freundlich angeordnete Kurven – eben ein Smiley (ohne Achsen)

C Wie erzeuge ich eine Parameterdarstellung in der Software „Derive“?

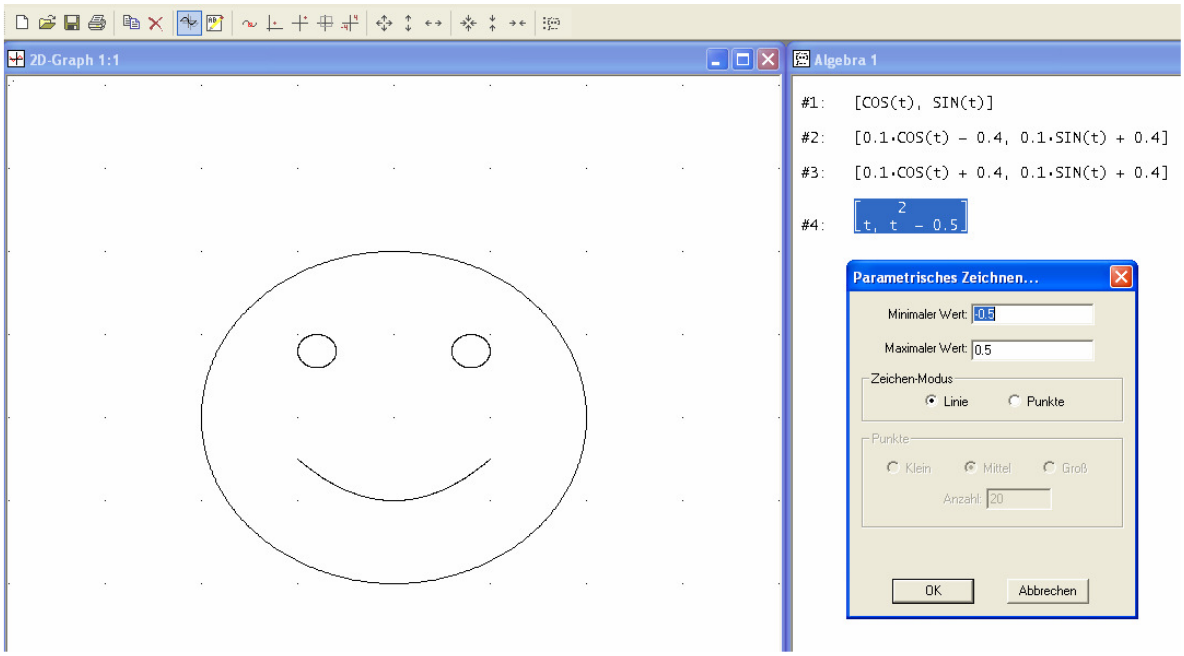


Abb. 4.7

Die Parameterform wird im Algebrafenster wie folgt eingegeben: [x(t), y(t)].
Wenn man im Grafikfenster das Symbol *Zeichnen* anklickt, öffnet sich automatisch ein Fenster, in dem man den minimalen bzw. maximalen Wert des Parameters *t* angeben kann. Im Fall des parabelförmigen Smiley-Mundes gilt: $t_{min} = -0.5$ und $t_{max} = 0.5$.

D Wie erzeuge ich eine Parameterdarstellung mit der Software ANIMATO?

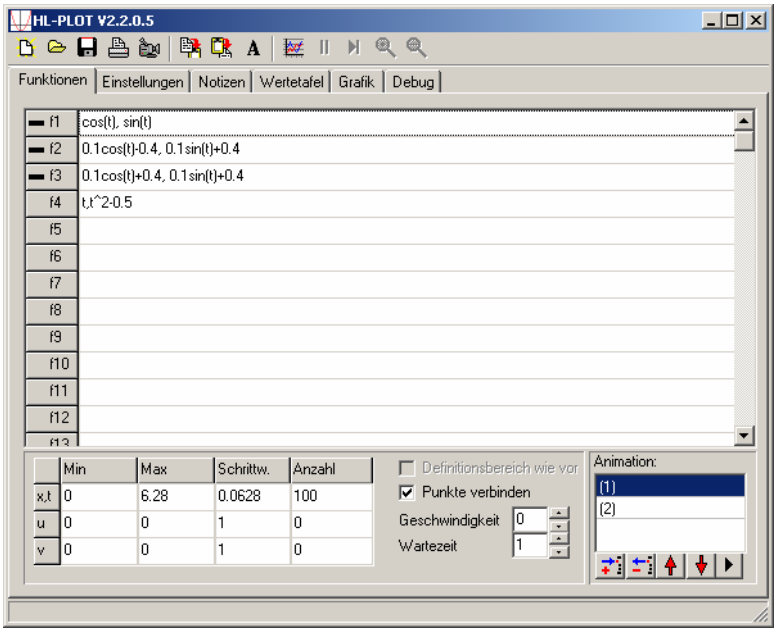


Abb. 4.8

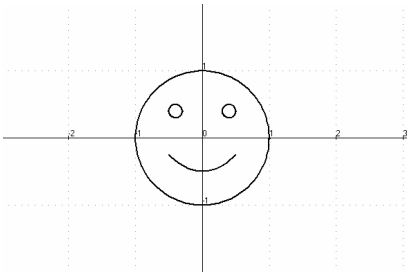


Abb. 4.9

Im ersten Animationsschritt werden f1, f2, f3 jeweils mit $t \in [0, 6.28]$ gezeichnet.
Im zweiten Schritt wird der Mund f4 mit $t \in [-0.5, 0.5]$ gezeichnet.
Die Darstellung steht auf *maßstabsgetreu* und *Koordinatensystem*.

E Wie erzeuge ich eine Parameterdarstellung mit der Software „TI-Nspire™ CAS“?

1) Auswahl unter *menu: 2. Graphs & Geometry*
2) Auswahl des Grafiktyps unter *menu: Grafiktyp: Parametrisch*
3) Eingabe der Gleichungen in Parameterform

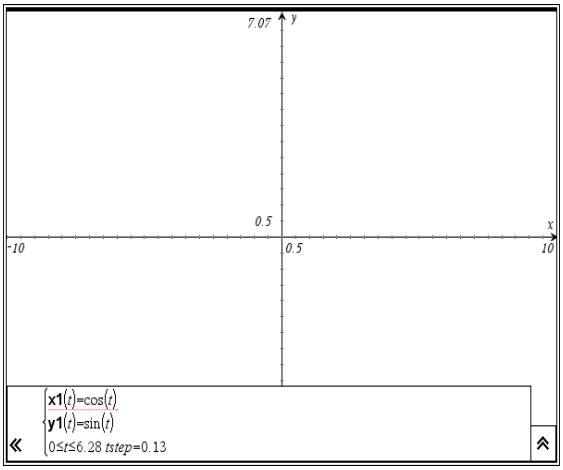


Abb. 4.10
Zu 1-3) Die Terme für den ersten Kreis

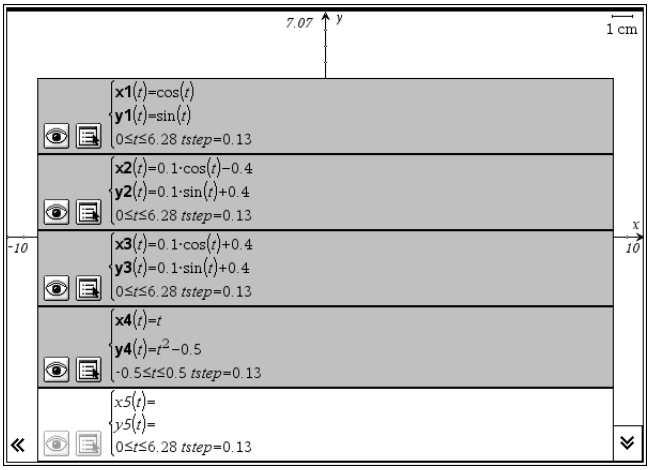


Abb. 4.11
Zu 3) Die weiteren Objekte

Nun nur noch die Achsen ausblenden (z.B.: *menu: Aktionen: Ausblenden, den Cursor auf die Achsen bewegen und klicken)* und das Fenster anpassen (menu. Fenster: Fenstereinstellungen)!

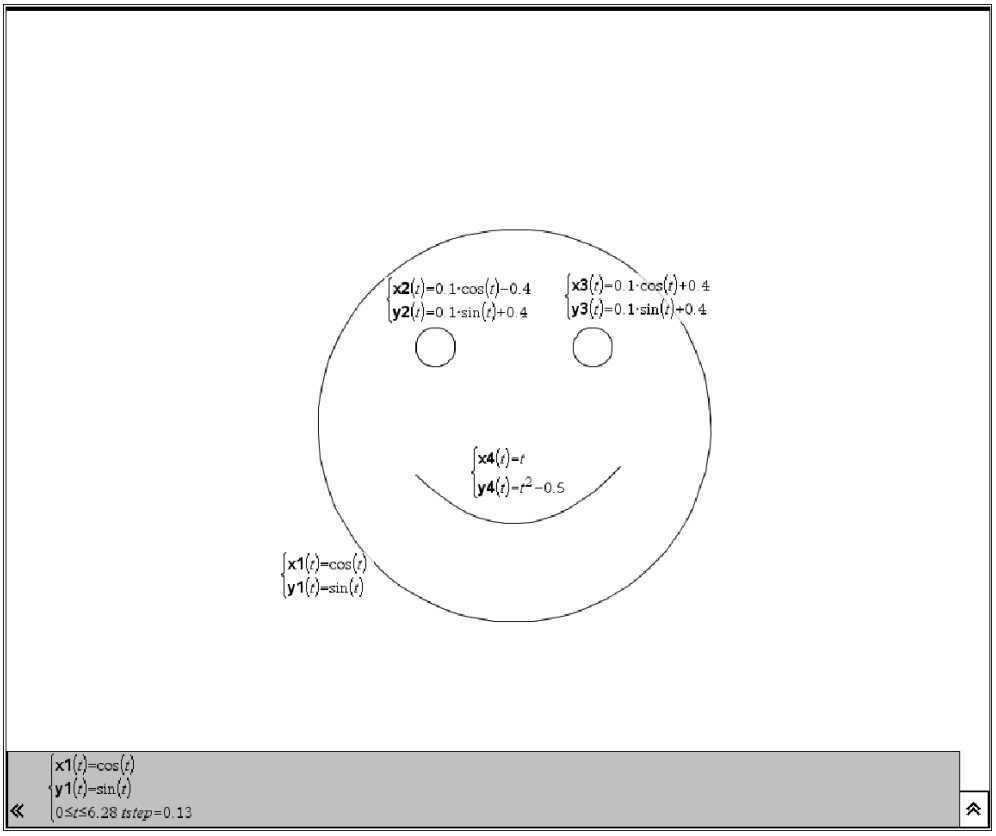


Abb. 4.12

F Wie erzeuge ich eine Parameterdarstellung mit der Software „GeoneXt“?

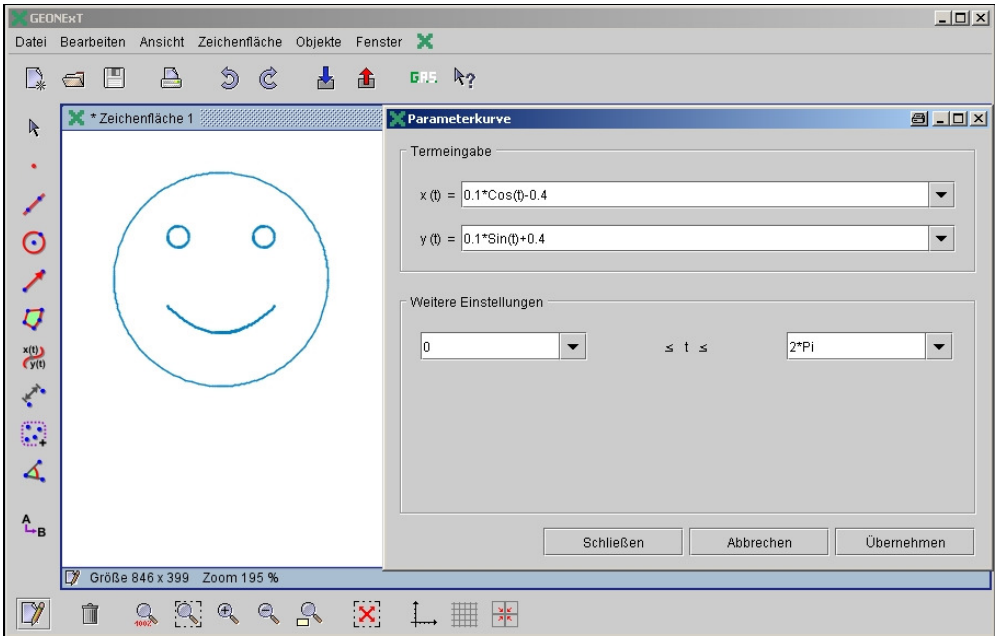


Abb. 4.13

Eine mögliche Fortsetzung

Hier wird eine Smiley-Familie in unterschiedlicher Stimmungslage gezeigt. Die Abbildungen sind Schnappschüsse einer Animation mit der Software ANIMATO.

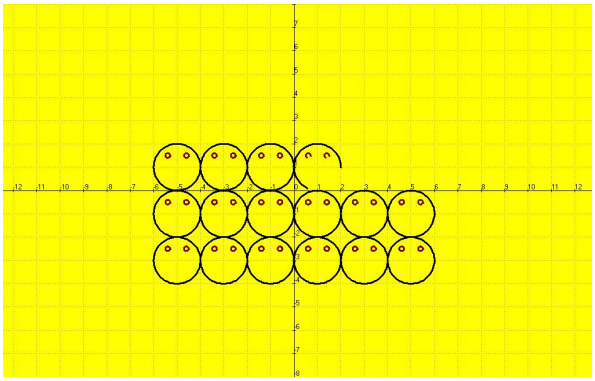


Abb. 4.14
2 Laufvariable u und v automatisieren den Konstruktionsprozess

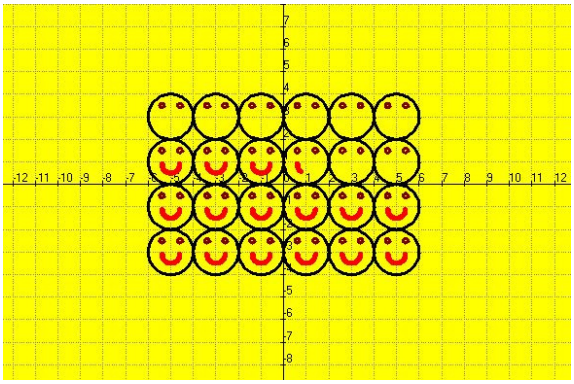


Abb. 4.15
Viel gute Laune

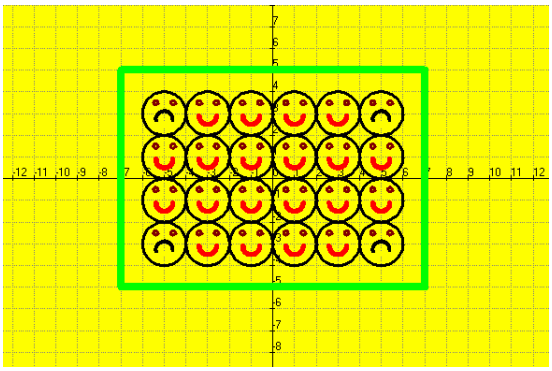


Abb. 4.16
Gute und schlechte Laune: Löschen und den Halbkreis andersherum zeichnen

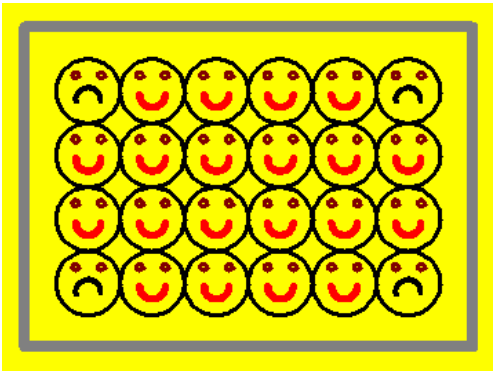


Abb. 4.17
Die Smiley-Tischdecke ist fertig

5 - Vorbereitung von Parameter-Darstellungen schon in Klasse 6/7
Koordinaten, Gitterpunkte und Spiegelungen

Dieser Beitrag zeigt, dass die Vorbereitung von Parameterdarstellungen schon frühzeitig erfolgen kann. Bekanntlich bringen die Schüler aus der 5. und 6. Klasse Kenntnisse über Figuren und den Symmetriebegriff mit. In der 7. Klassenstufe wird der Zahlbereich auf Q erweitert. Die rationalen Zahlen begründen eine Erweiterung des Koordinatensystems auf alle vier Quadranten. Durch die unten folgende und ähnliche Aufgaben üben die Schüler den Umgang mit Gitterpunkten im Koordinatensystem und Laufbereichen von x- und y-Werten. Wird hierbei der Computer eingesetzt, geht es zunächst um die Vermittlung von Eingabemöglichkeiten der Koordinaten von Punkten, also von Zahlenpaaren.

Inwiefern bereitet die Arbeit mit Zahlenpaaren Parameterdarstellungen vor?
In der Regel werden bei der Eingabe von Funktionstermen nur die Terme eingegeben, etwa ***2x+3***. Die unabhängige Variable ***x*** wird also meistens nicht extra notiert. Das könnte z. B. in der Syntax ***(x, 2x+3)*** erfolgen. Folgt man diesem Ansatz, so wird immer wieder deutlich, dass es sich um Zahlenpaare handelt und in diesen kann man dann z. B. auch die Werte vertauschen. Aus ***(7, 8)*** wird dann ***(8, 7)***, aus ***(x, 2x+3)*** wird ***(2x+3, x)*** usw.. Die erste Stelle in einem Zahlenpaar muss also nicht x sein! Vielmehr kann an erster Stelle auch ein längerer Funktionsterm stehen. Aber natürlich nicht in Klasse 7! Diese Einsicht fördert das Verständnis für die spätere Arbeit mit Parameterdarstellungen.

Aufgabe:
a) Zeichne ein Rechteck mit den Eckpunkten (3, 1), (-2, 1), (-2, 4), (3, 4).
b) Welche Koordinaten haben die Gitterpunkte der Strecke mit den Endpunkten (3, 1) und (-2, 1)? Was fällt auf?
c) Trage alle Gitterpunkte auf den Strecken mit den Endpunkten (3, 1),(-2, 1) und (-2, 4) und (3, 4) ein.

Die Eingabe von Punktkoordinaten ist in den verschiedenen Softwaresystemen (erstaunlicherweise) recht unterschiedlich. Am Beispiel der Eingabe des Punktes (7, 8) wird das verdeutlicht.

GEOGEBRA	ANIMATO	DERIVE	TI-Nspire™CAS
1) ***A= (7,8)*** in die Eingabezeile schreiben 2) *enter.*	1) ***7,8*** in eine der Eingabezeilen schreiben 2) auf *grafik* klicken	1) ***[7,8]*** in die Eingabezeile schreiben 2) auf 2-D-Grafikfenster klicken 3) Auf „Ausdruck zeichnen“ klicken	1) Beliebigen ***Punkt*** auf die Zeichenfläche setzen 2) Cursor auf den Punkt bringen, Rechtsklick, Option *„Koordinaten“* wählen, 3) Cursor auf die angezeigten Werte setzen und die *Koordinaten* ***in 7 bzw. 8 ändern*** Bei dieser Lösung wird von der dynamischen Geometrie ausgegangen. Eine zweite Möglichkeit besteht in der direkten Eingabe der Koordinaten in der Darstellung „parametric" für x1(t), y1(t) Eine weitere Möglichkeit ist die Benutzung von *Lists&Spreadsheet,* siehe unten.

Mit Punktmustern kann die Arbeit mit Gitterpunkten auf interessante Weise geübt werden. Und der Computer ist hier ein willkommenes Hilfsmittel.

Mit dem TI-Nspire™CAS kann man die Aufgabe z. B. wie folgt bearbeiten:
1) *List&Spreadsheet* wählen und die Spaltenüberschriften eingeben, z. B. x und y, Rechteckkoordinaten eingeben,
siehe Abb. 5.3, die Spalten x und y
2) Ansicht wechseln, auf *Streuplot* gehen, dort s1 definieren mit der Eingabe x und y, enter
3) Die Rechteckpunkte werden gezeichnet, siehe Abb.5.1.
4) Zwischen den Punkten Strecken zeichnen lassen, siehe Abb. 5.2.
5) Zurück zu *List&Spreadsheet*, 2 weitere Spalten x1, y1 einrichten, Gitterpunkte eingeben, siehe Abb.5.3
6) Zurück zu *Streuplot* gehen, s2 definieren mit der Eingabe x1 und y1, enter
7) Die Gitterpunkte werden zu 4) dazu gezeichnet, siehe Abb. 5.4.

 © T3-Arbeitskreis Parametric

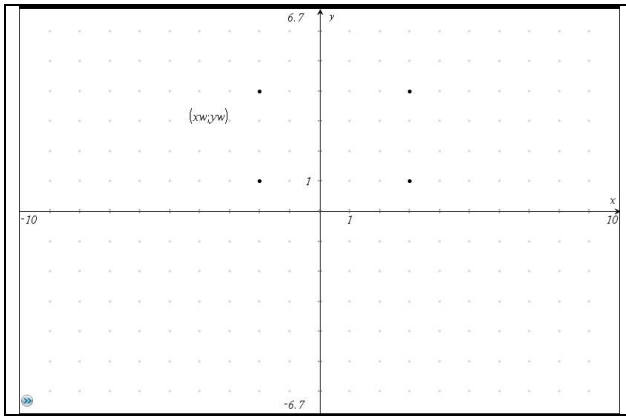


Abb. 5.1

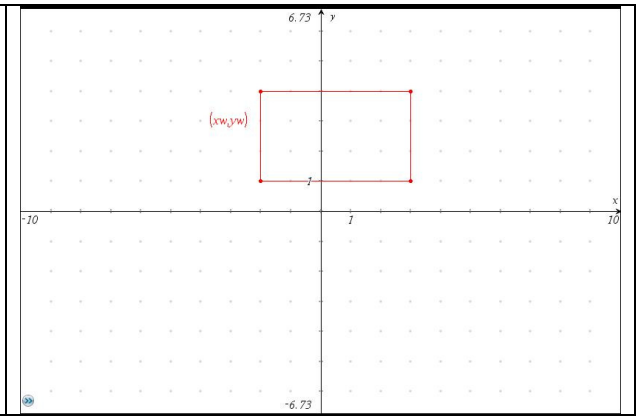
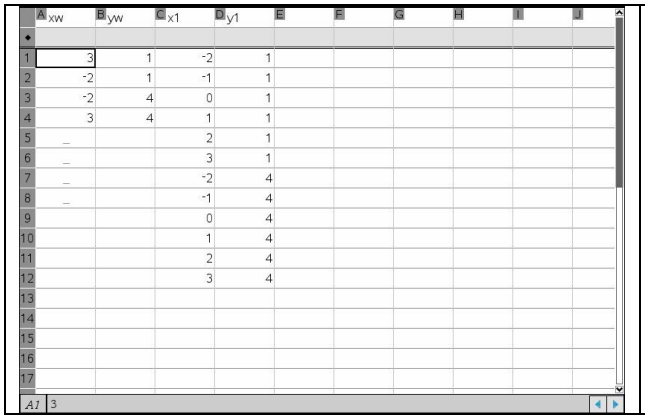


Abb. 5.2



	A xw	B yw	C x1	D y1	E	F	G	H	I	J
1	3	1	-2	1						
2	-2	1	-1	1						
3	-2	4	0	1						
4	3	4	1	1						
5	_		2	1						
6	_		3	1						
7	_		-2	4						
8	_		-1	4						
9			0	4						
10			1	4						
11			2	4						
12			3	4						
13										
14										
15										
16										
17										

A1 3

Abb. 5.3

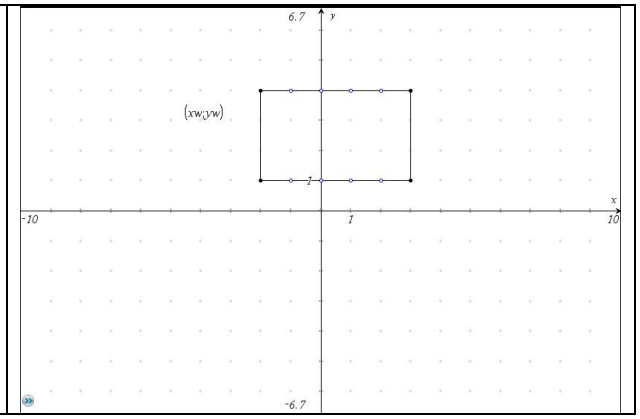


Abb. 5.4

Schieberegler und Parameterdarstellung

Aufgabe: Zeichne Gitterpunkte auf den Strecken des Rechtecks (-6, -4), (6, -4), (6, 4), (-6, 4). Benutze Schieberegler!

Mit dieser Aufgabe können die Schüler Schieberegler kennen lernen. Als Einführung in die Parameterdarstellung werden die x- und y-Koordinaten in Abhängigkeit einer Variablen t, dem Wert des Schiebereglers ermittelt und graphisch umgesetzt.

Auf dem Blatt einer dynamischen Geometrie-Software (z. B. TI-Nspire™CAS) wird ein Schieberegler für die Variable t für das Intervall [-4, 4] bei der Schrittweite 1 erzeugt. Der Punkt P(t, 6) wird durch den Schieberegler animiert und erzeugt nach Einstellung der Geometriespur Abbildung 5.5. Anschließend können durch Spiegelungen an verschiedenen Achsen die Spuren der Punkte Q(6, t), R(t, -6) und S(-6, t) sichtbar werden.

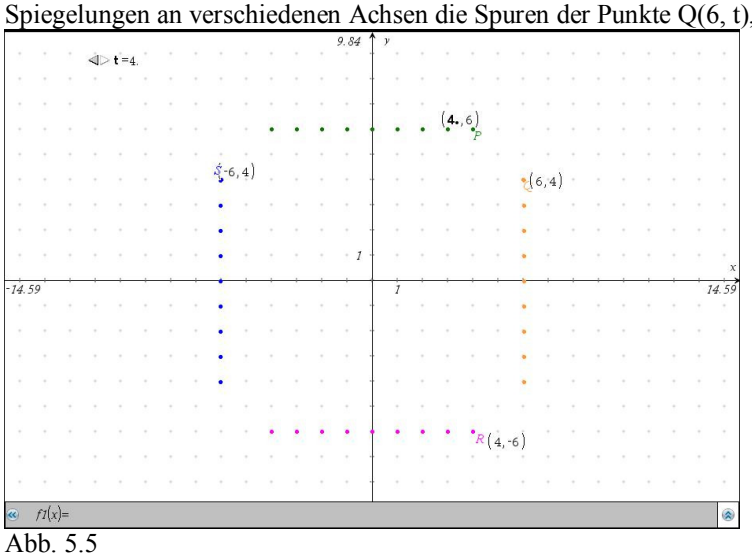


Abb. 5.5

Konstruktionsbeschreibung:

1. *Schieberegler* t erzeugen, t von -4 bis 4, Schrittweite 1
2. *Spiegelung* von P an der x-Achse, der Geraden y = x und anschließend an der y-Achse
3. *Spur/Geometriespur aktivieren*
4. Schieberegler ziehen und so die Punkte (6, 4), (6, 3) usw. erzeugen

In den folgenden Unterrichtsstunden können die Schüler dann durch Verändern der Koordinaten weitere Spiegelungen erzeugen. Sie können Spiegelungen an anderen Achsen und am Ursprung dynamisch durchführen und Zusammenhänge zwischen Gegenstand und Bild entdecken.
Experimente mit den Koordinaten können dann später durch Spiegelung des Punktes P(t; t²) zu Abbildung 5.6 führen – natürlich nicht mehr in Klasse 7.

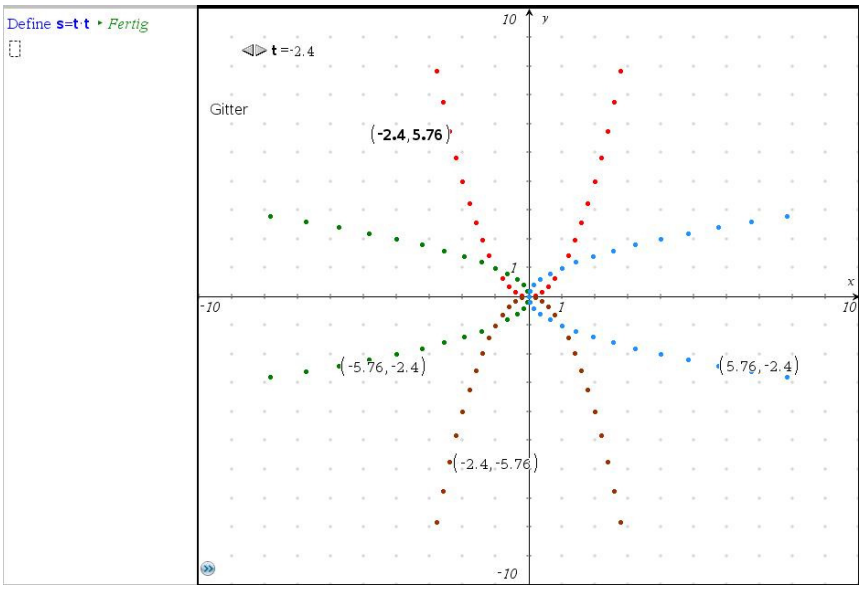
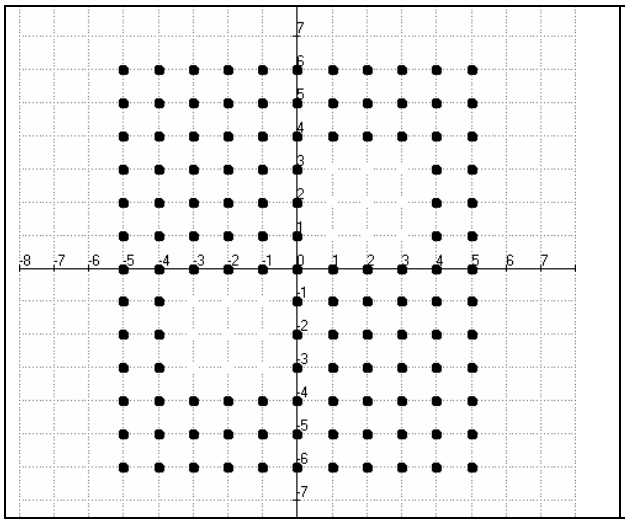


Abb. 5.6

Haben die Schüler durch die Experimente erst einmal erkannt, dass man mit den Punkt-Koordinaten „spielen“ kann, ist das Fenster zu Parameterdarstellungen verschiedener Art in den dann folgenden Klassenstufen weit geöffnet.

Zusammenfassung des Gedankengangs
1) Gegeben ist ein Rechteck
2) Es wird nach Gitterpunkten auf den Rechteckstrecken gefragt. Diese können von Hand eingezeichnet werden, aber bequemer Weise auch – insbesondere, wenn ihre Anzahl groß ist – mit dem Computer erzeugt werden.
3) Dazu werden die Optionen List & Spreadsheet und Streuplot benutzt, mit denen man dann auch alle gefragten Gitterpunkte erzeugen kann.
4) Man kann Gitterpunkte aber auch bequemer mit einem Schieberegler erzeugen. Dieses Verfahren zeigt den Zusammenhang mit Parameterdarstellungen noch deutlicher. Hierbei können die Gitterpunkte dynamisch gezeichnet werden

Abschließend zur Anregung noch ein Punkte-Muster, erzeugt mit der Software ANIMATO. Hier wird derselbe Punkteterm (u,v) verschiedenen Laufbereichen unterzogen.



Das Muster wurde in 3 Schritten erzeugt.

1) Die Punkte f1: u,v wurden mit
u aus [-5,5] Schrittweite 1 und v aus [-6,6]
Schrittweite 1 in schwarz gezeichnet.

2) Die Punkte f1: u,v wurden mit
u aus [-3,-1] Schrittweite 1 und v aus [-3,-1]
Schrittweite 1 in weiß übergezeichnet.
.
3) Die Punkte f1: u,v wurden mit
u aus [1,3] Schrittweite 1 und v aus [1,3]
Schrittweite 1 in weiß übergezeichnet.

Abb.5.7: Ein schwarzes Punkte-Rechteckmuster wird teilweise mit weißen Punkten überzeichnet

Wählt man nun für die gleichen u,v-Intervalle im 1) und 2) kleinere Schrittweiten so ändert sich Abb.5.7 zu Abb.5.8.

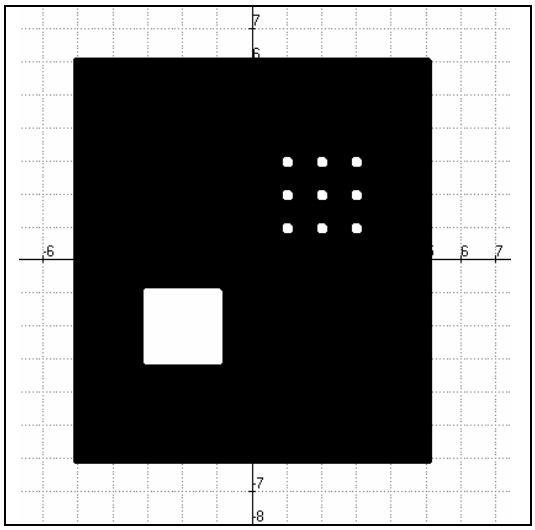


Abb.5.8 entsteht aus Abb.5.7

6 - Zwei Schiffe begegnen sich, Version 1
Einführungsaufgabe für „Geraden in Parameterform“

Für die Einführung von Geradengleichungen in Parameterform eignen sich u. a. „Begegnungsaufgaben“ (Schiffe, Flugzeuge, Fahrräder, usw.). Dieser Ansatz wird in dem Heft in zwei Versionen angeboten.

Die Schiffe „Anna“ und „Berta“
Das Schiff „Anna“ startet im Ursprung und fährt pro Stunde 10 km nach rechts (x) und 8 km nach **oben** (y). Der Lastkahn „Berta“ startet im Punkt (0, 54) und fährt pro Stunde 8 km nach rechts (x) und 8 km nach **unten** (y).

Aufgabe 1: Vervollständige die folgenden Tabellen für die beiden Schiffe für die ersten 5 Stunden!
(Lösung kursiv)

Anna			Berta		
Zeit t in Stunden	x	y	Zeit t in Stunden	x	y
0	0	0	0	0	54
1	10	8	1	8	46
2	*20*	*16*	*2*	*16*	*38*
3	*30*	*24*	*3*	*24*	*30*
4	*40*	*32*	*4*	*32*	*22*
t	***x(t) = 10t***	***y(t) = 8t***	***t***	***x(t) = 8t***	***y(t) = 54-8t***

Aufgabe 2: Stelle den Fahrtweg der beiden Schiffe graphisch dar! Befinden sich die beiden Schiffe auf Kollisionskurs? Kommt es zur Kollision? Begründe deine Antwort!

Lösung:

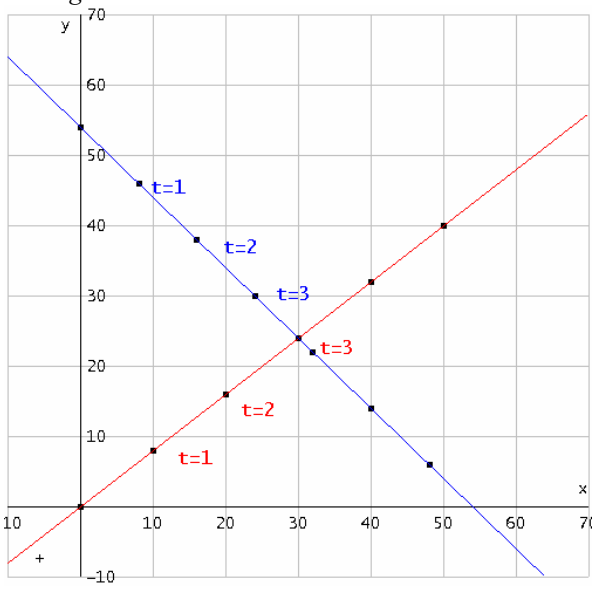


Abb. 6.1

Hinweis: Aufgaben 1 und 2: Einzel- bzw. Partnerarbeit (ggf. ganz oder teilweise als Hausaufgabe, um den Rest in einer Unterrichtsstunde bewältigen zu können). Aufgabe 3: Diskussion in der gesamten Lerngruppe.

Aufgabe 3: Nach der Problematisierung des Zeitfaktors wird die Lerngruppe aufgefordert, die Zeit in die Graphik zu integrieren. Wenn man die Punkte nach 1h, 2h und 3 h Fahrtzeiten auf den beiden Graphen markiert, erkennt man, dass die Schiffe nicht kollidieren. – Gegebenenfalls kann man die Lösung durch Verfeinerung der Tabelle noch besser verdeutlichen.

Aufgabe 4: Vervollständige die Graphik durch Eintragen der jeweiligen Fahrzeiten t auf den Geraden.

© T3-Arbeitskreis Parametric

Aufgabe 5. Formuliere die Gleichungen x(t)= … und y(t)= … für beide Schiffe.
(Lösung kursiv)

t	*x(t) = 10 t*	*y(t) = 8 t*	*t*	*x(t) = 8 t*	*y(t) = 54-8 t*

Die Struktur der Gleichungen kann man dem Einführungstext oder der Tabelle entnehmen.
Hier kann nun die Einführung der Bezeichnung Parameterform erfolgen.

Aufgabe 6: Simulation der Fahrt der Schiffe mit GeoGebra (z. B. als Lehrerdemonstration).
Hinweis: Eine rein algebraische Lösung des Problems soll hier nicht erfolgen. Dies wäre erst nach der Behandlung der linearen Gleichungssysteme möglich und sinnvoll. Die Simulation erfolgt hier mittels eines Schiebereglers, eine Technik, die an dieser Stelle eingeführt werden könnte.

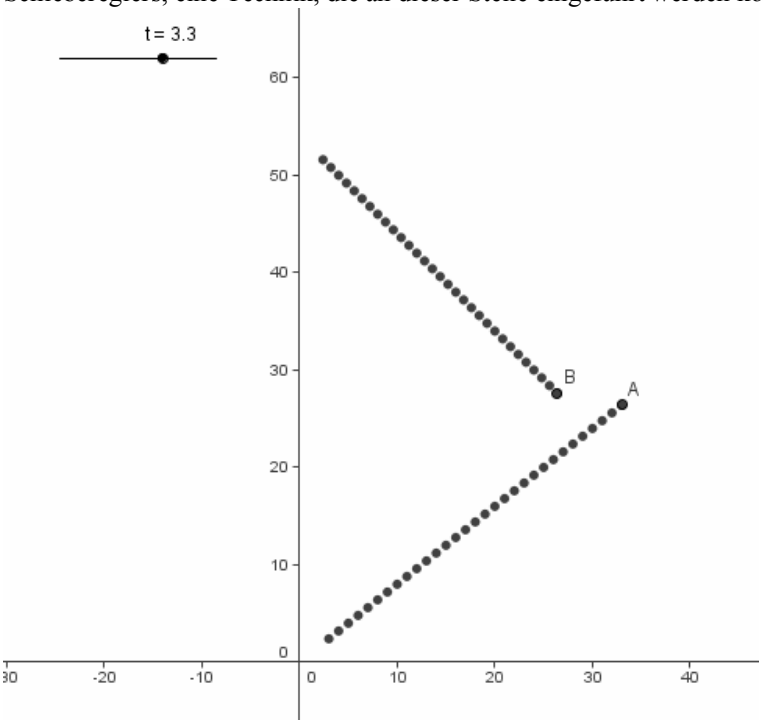


Abb. 6.2

Die GeoGebragraphik kann in Kopie an die Schüler verteilt werden.
Mögliche Hausaufgabe: Kommentiere die Graphik!

Aufgabe 7: Gegeben sind vier „Himmelsgeraden“, siehe Abb. 6.3 und Abb. 6.4.

Abb. 6.3

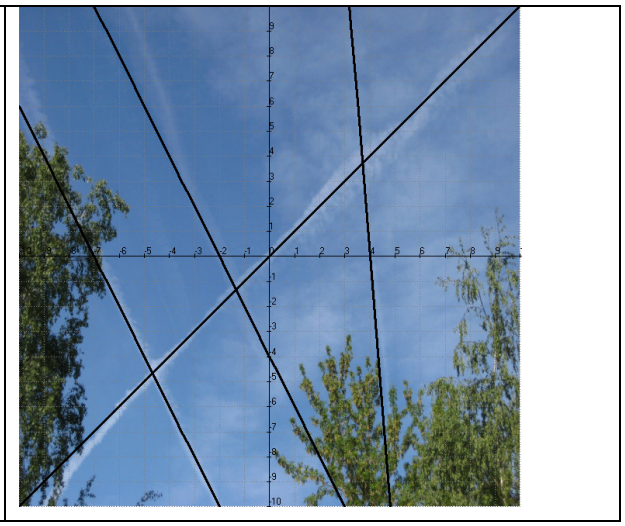
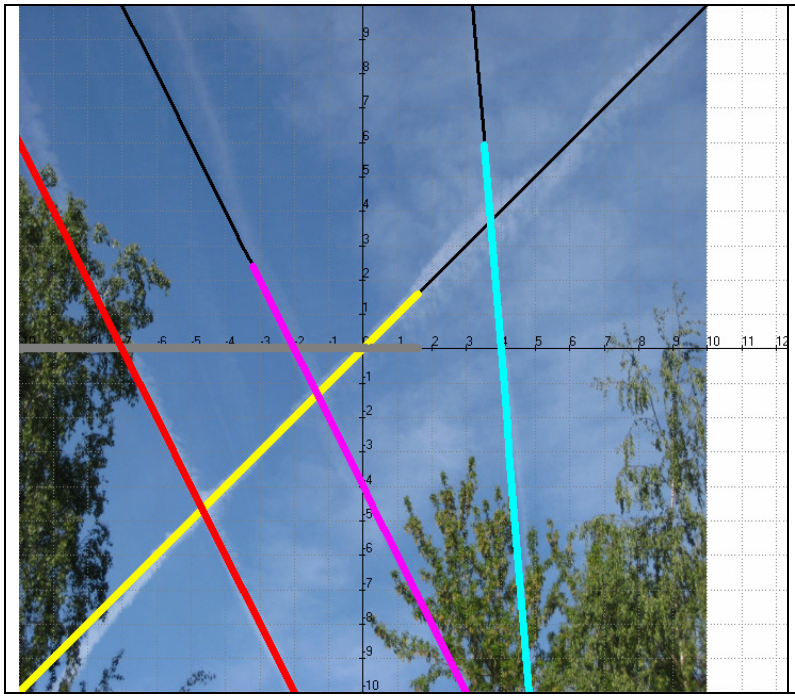


Abb. 6.4

a) Bestätige, dass die Geraden, die in Abb. 6.4 in der Graphik ergänzt worden sind, etwa die Gleichungen y = x, y = -2x – 14, y = -2x – 4 und y = -12x + 48 haben.
b) Zeige, dass x(t) = t, y(t) = t und x(t) = -7+5t, y(t) = -10t und x(t) = -2t, y(t) = -4+4t und x(t) = 4-0.3t, y(t) = 3.6t mögliche Parameterdarstellungen dieser Geraden sind.
Ein Bearbeitungsbeispiel:
x(t) = -7+5t 2x = -14+10t 2x + y = -14 y = -2x -14
y(t) = -10t y = -10t
d) Abb. 6.3 zeigt, dass sich die Flugzeuge (zum Glück) nicht treffen. Würde man die 4 Geraden zeichnen (Abb. 6.4) und die 3 Schnittpunkte der Geraden aus b) berechnen, würde man dennoch eine Kollision der Flugzeuge feststellen. – Bei den Parameterformen kann man jedoch die Zeit t berücksichtigen und damit visualisieren, dass sich die Flugzeuge nicht treffen (Abb.6.5).



In Abb. 6.5 stellt die horizontale x-Achse auch die Zeitachse t dar. Die Abbildung wurde bei etwa t = 2 gestoppt.
Man sieht z. B., dass das Flugzeug 4 (durch den Punkt (4,0)) schon an dem eventuellen Kollisionspunkt mit dem Flugzeug auf der Winkelhalbierenden vorbei geflogen ist.

Abb. 6.5

© T3-Arbeitskreis Parametric

7 - Zwei Schiffe begegnen sich, Version 2
Einführungsaufgabe für „Geraden in Parameterform“

In der Praxis gibt es verschiedene Vorgänge, bei denen die Zeit eine wichtige Rolle spielt. Im Mathematikunterricht werden häufig Bewegungsvorgänge von Schiffen und Flugzeugen betrachtet. Das Problem, ob sich zwei Schiffe oder Flugzeuge zu nahe kommen (kollidieren), kann nur gelöst werden, wenn die Zeit t mit ins Spiel kommt. Dafür bieten sich Geraden in Parameterform an. Mit der dargestellten Unterrichtseinheit können die Schüler mit der Parameterdarstellung bekannt gemacht werden. Die Behandlung des Themas führt zu einer Vertiefung und Weiterführung des Funktionsbegriffes.

Die zeitliche Abhängigkeit von Größen spielt auch im Physikunterricht eine Rolle. Bei Bewegungsvorgängen wird zum Beispiel die zeitliche Abhängigkeit des Weges betrachtet. Im Folgenden wird der Bewegungsvorgang zweier Körper betrachtet, die an unterschiedlichen Orten zur gleichen Zeit starten und sich aufeinander zu bewegen. Man kann für beide Körper ein eigenes Weg-Zeit-Diagramm zeichnen. Will man den Treffpunkt der beiden Körper graphisch ermitteln, so muss man beide Weg-Zeit-Diagramme übereinander legen. Die Interpretation der beiden Graphen bereitet den Schülern gewisse Schwierigkeiten. Noch etwas komplizierter wird der Sachverhalt, wenn man die Überlagerung zweier Bewegungen untersucht. Ein typisches Beispiel dafür sind der „waagerechte“ bzw. der „schräge“ Wurf. Beide Bewegungen, die gleichförmige und die gleichmäßig beschleunigte, sind von der Zeit abhängig. Die graphische Darstellung des Wurfes erfolgt meist als Parabel bzw. Parabelast in Parameterform, ohne dass näher darüber gesprochen wird. Damit bleibt dem Schüler die Bedeutung dieser Darstellungen meist verschlossen.
Mit der Darstellung von Geraden und dann anschließend von Kurven in Parameterform soll der Schüler das Verständnis für solche Diagramme erwerben. In einer weiteren Unterrichtssequenz wird dies am waagerechten Wurf demonstriert.

Voraussetzung für die dargestellte Unterrichtseinheit ist die Behandlung der linearen Funktionen. Die Parameterdarstellung kann gleich nach der Unterrichtseinheit „Lineare Funktionen“ oder auch zu einem späteren Zeitpunkt behandelt werden.

In unserer Einführungsaufgabe wurde der Bewegungsvorgang zweier Schiffe dargestellt. Die geradlinige Bewegung (der Kurs) der Schiffe wird mit Geraden beschrieben. Die Geraden schneiden sich. Die Frage, ob die Schiffe kollidieren, kann nicht ohne zusätzliche Informationen beantwortet werden. Mit diesem Problem sollen die Schüler für die Parameterdarstellung sensibilisiert werden.

Anmerkungen zur Unterrichtseinheit:

0. Stunde:	Das Arbeitsblatt mit Aufgabe 1 wird als vorbereitende Aufgabe den Schülern als Hausaufgabe gegeben.
1. Stunde:	Auswertung der Hausaufgabe (Aufgabe 1): - Wiederholung des Aufstellens von linearen Funktionsgleichungen - Schnittpunktsberechnung - Interpretation des Schnittpunktes In Aufgabe 2 soll das Problem gelöst werden, ob der Schnittpunkt der Geraden auch der Kollisionspunkt ist. Der Lehrer simuliert die Fahrt eines Schiffes beispielsweise mit dem TI-Nspire™CAS für die Zeitpunkte t = 0, 0.5, 1, 1.5 und 2. Anschließend für das andere Schiff. Die Schüler übernehmen die Koordinaten des jeweiligen Schiffs in die Tabellen des Arbeitsbogens. Nach dem Lösen von Aufgabe 2d) sollte eine Definition für eine Kurve (Gerade) in Parameterform ermittelt werden. Danach wird die Aufgabe weiter bearbeitet. Als Software können die Schüler z. B. GeoGebra oder TI-Nspire™CAS benutzen. Schlussfolgerung aus dieser Aufgabe: Obwohl die Geraden sich schneiden, kommt es nicht zu einem Zusammenstoß.
2. + 3. Stunde:	Anschließend sollten noch weitere formale Übungen (Aufgaben 3 – 6) zur Festigung der Geraden in Parameterform durchgeführt werden. Der Umfang der Übungsaufgaben und die Art der Wertetabellen sollte der Klassensituation angepasst werden.
4. Stunde:	Als Abschluss der Unterrichtseinheit soll eine weitere Anwendungsaufgabe (Aufgabe 7) gelöst werden.

Im Anschluss sind die Schülerarbeitsblätter und die Übungsaufgaben dargestellt. In Aufgabe 2 soll dem Schüler eine Simulation vorgeführt werden. Wie diese Simulation mit Hilfe von GeoGebra bzw. TI-Nspire™CAS aussehen kann, wird am Schluss gezeigt.

Aufgabe 1 (Einführungsaufgabe)
Die beiden Schiffe BERTA und MARIA laufen von ihren Häfen zum selben Zeitpunkt zu einer Fahrt aus. Sie bewegen sich mit gleichmäßiger Geschwindigkeit auf dem durch die Pfeile angegebenen Kurs.

a) Stelle die Gleichungen der Geraden auf, die den Kurs der Schiffe beschreiben!

b) Berechne (Bestimme durch Ablesung) den Schnittpunkt der Geraden, die den Kurs der Schiffe beschreiben!

c) Interpretiere diesen Schnittpunkt!

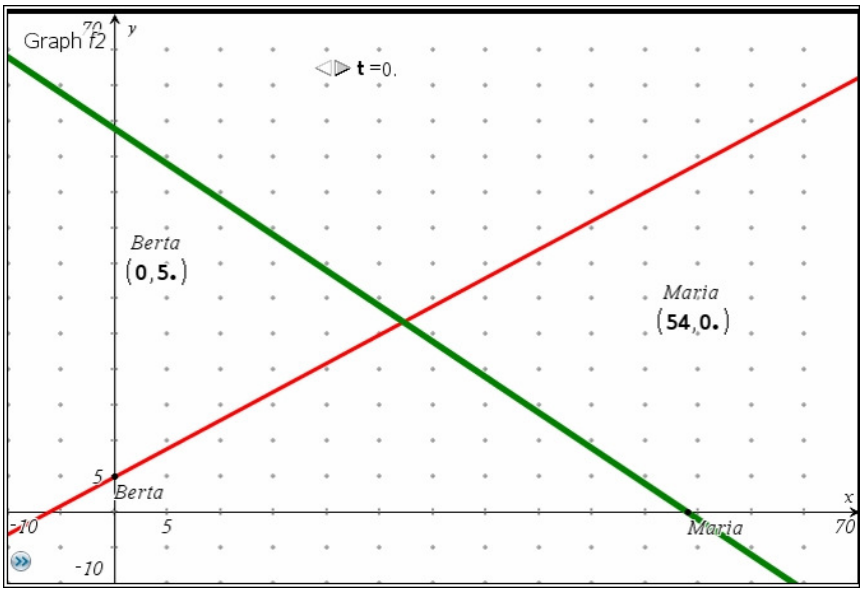


Abb. 7.1

Aufgabe 2
a) Die Bewegung der beiden Schiffe wird simuliert. Übertrage die Koordinaten der einzelnen Standpunkte in die vorgegebenen Tabellen!
b) Die Schiffe bewegen sich weiter auf ihrem Kurs. Vervollständige die Tabellen.
c) Entscheide anhand der Tabellenwerte, ob es zu einer Kollision der beiden Schiffe kommt.
d) Bestimme für jedes Schiff die beiden linearen Terme, welche die x- und die y-Koordinate in Abhängigkeit von t beschreiben.
e) Die Frage - Kommt es zu einer Kollision der beiden Schiffe? - soll rechnerisch genauer betrachtet werden. Bestimme die Zeit t für das Erreichen des Schnittpunktes für jedes Schiff.
f) Markiere auf den Geraden die Positionen der Schiffe, bei denen die Zeiten ganzzahlig sind. Erläutere noch einmal das Kollisionsproblem.
g) Verwende den TI-Nspire™CAS, um in einem geeigneten Graphikfenster die Kurse der beiden Schiffe in Parameterform darzustellen.

Schiff BERTA

t	0	0,5	1,0	1,5	2,0	2,5	3,0	3,5	4,0	4,5	5,0
$x_B(t)$											

$x_B(t)$ =_____

t	0	0,5	1,0	1,5	2,0	2,5	3,0	3,5	4,0	4,5	5,0

$y_B(t)$											

$y_B(t)$ =_____

Schiff MARIA

t	0	0,5	1,0	1,5	2,0	2,5	3,0	3,5	4,0	4,5	5,0
$x_M(t)$											

$x_M(t)$ =_____

t	0	0,5	1,0	1,5	2,0	2,5	3,0	3,5	4,0	4,5	5,0
$y_M(t)$											

$y_M(t)$ =_____

Definition einer Kurve (Geraden) in Parameterform:

_____

_____

_____

Die Simulation mit Hilfe des TI-Nspire™CAS sieht wie unten dargestellt aus

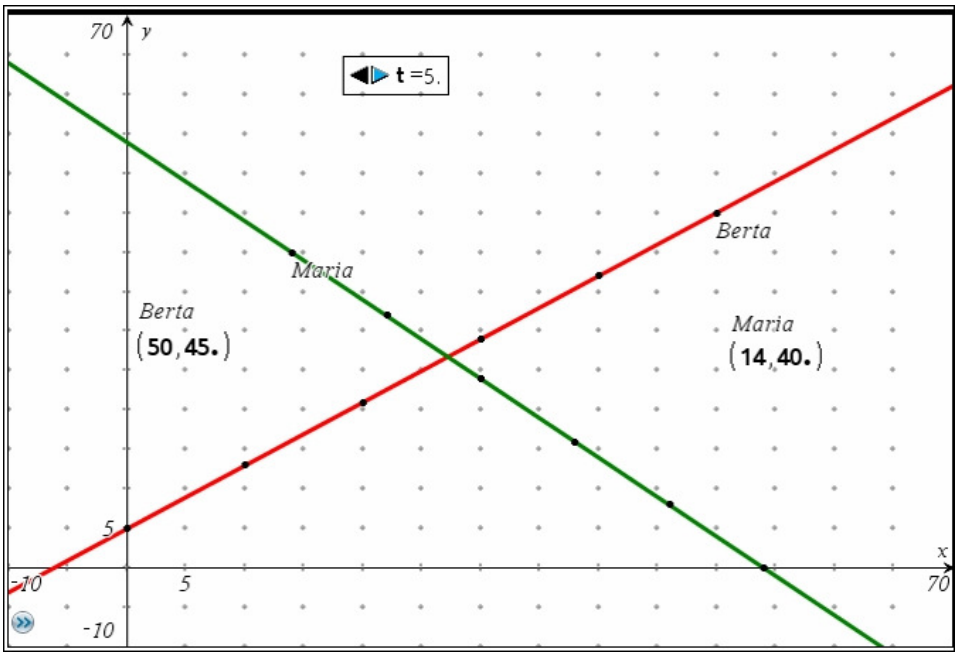


Abb.7.2

Übungen

3. $x(t) = 2t$

   $y(t) = \frac{t}{2}$ mit $-10 \leq t \leq 10$.

   Erstelle eine Wertetabelle ohne Hilfsmittel.

t	-10	-9	-8	-5	-2	0	1	3	5	8	10
x(t)											
y(t)											
P(x(t)|y(t))	(-20|-5)										

   Stelle die Parameterdarstellung in einem y(t)-x(t)-Koordinatensystem dar.

4. $x(t) = 3t$

   $y(t) = t$ mit $-10 \leq t \leq 10$.

   Erstelle eine Wertetabelle ohne Hilfsmittel.

t	-10	-9	-8	-5	-2	0	1	3	5	8	10
P(x(t)|y(t))											

   Stelle die Parameterdarstellung in einem y(t)-x(t)-Koordinatensystem dar.

5. Gegeben sind die folgenden Parameterdarstellungen:

5.1 $x(t) = 2t$ und $y(t) = -t$ $\quad -3 \leq t \leq 3$

5.2 $x(t) = t - 1$ und $y(t) = 2t$ $\quad -3 \leq t \leq 3$

5.3 $x(t) = 4 - 0{,}5t$ und $y(t) = 0{,}5t - 1$ $\quad 0 \leq t \leq 6$

   Stelle die jeweiligen Kurven für das vorgegebene Intervall dar.
   Erstelle zunächst jeweils eine Tabelle mit der Schrittweite 1.

6. Die folgenden Parametergleichungen stellen besondere Kurven dar.

6.1 $x(t) = t$ und $y(t) = 4$

6.2 $x(t) = 3$ und $y(t) = t$

6.3 $x(t) = t$ und $y(t) = 2t$

6.4 $x(t) = 2t$ und $y(t) = 4t$

6.5 $x(t) = t$ und $y(t) = t$

6.6 $x(t) = t$ und $y(t) = -t$

   a) Versuche ohne Tabelle und ohne Zeichnung den Verlauf der Kurve vorauszusagen!
   b) Überprüfe deine Voraussagen, indem du jeweils eine Tabelle und ein Diagramm anfertigst!
      Oder: Überprüfe deine Voraussagen, indem du die Kurven mit einer geeigneten Software darstellst.

Anwendung

7. Ein Dampfer startet im Hafen mit Koordinaten (0|0) in Richtung Liebesinsel mit den Koordinaten (3|6), Angaben in km. Zur gleichen Zeit befindet sich das Sportboot am Leuchtturm mit den Koordinaten (4|5) und fährt in Richtung Mole (0|1).
   a) Stelle den Sachverhalt graphisch dar.
   b) Berechne den Schnittpunkt.
   c) Nach 10 Minuten passiert der Dampfer die gelbe Boje mit den Koordinaten (0,7|1,4) und das Sportboot ist zu diesem Zeitpunkt am Punkt (1,5|2,5).
      Kollidieren die beiden Schiffe? Begründe deine Entscheidung!

© T3-Arbeitskreis Parametric

Es gibt noch andere Kurven

8. Gegeben sind die folgenden Parameterdarstellungen:

8.1	$x(t) = t^2$ und $y(t) = t$	($t \in Q$ und $-8 \leq t \leq 8$ und $\Delta t = 0{,}1$)
8.2	$x(t) = t$ und $y(t) = t^2$	($t \in Q$ und $-8 \leq t \leq 8$ und $\Delta t = 0{,}1$)
8.3	$x(t) = t^2$ und $y(t) = t + 1$	($t \in Q$ und $-8 \leq t \leq 8$ und $\Delta t = 0{,}1$)
8.4	$x(t) = t^2 - 3$ und $y(t) = t - 2$	($t \in Q$ und $-8 \leq t \leq 8$ und $\Delta t = 0{,}1$)

Weiterhin sind die folgenden graphischen Darstellungen 7.3 bis 7.6 gegeben:

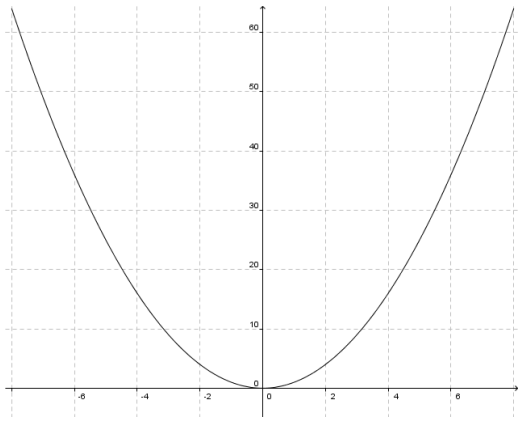


Abb.7.3

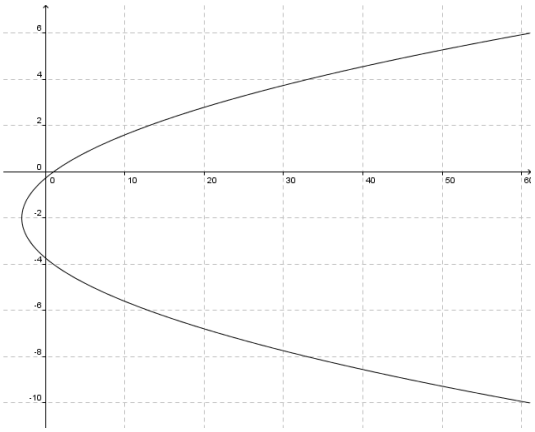


Abb.7.4

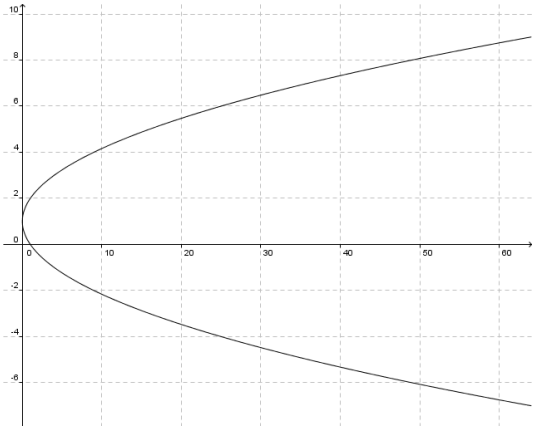


Abb.7.5

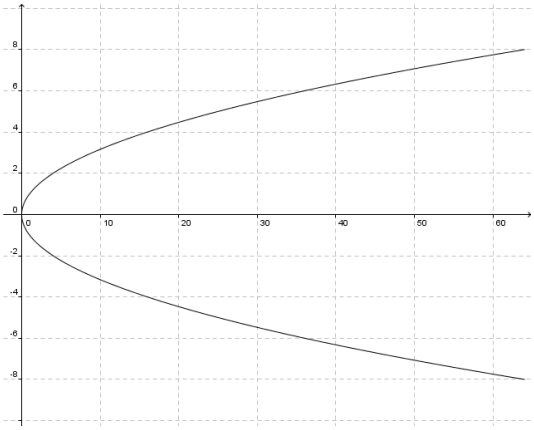


Abb.7.6

Versuche die Parameterdarstellungen den entsprechenden Graphen zuzuordnen. Überprüfe Deine Zuordnung mit einer geeigneten Software.

8 - Parabeln in Parameterdarstellung – waagerechter und schräger Wurf

Anwendungsaufgaben zum waagerechten und schrägen Wurf lassen sich besonders einfach mit Hilfe der Parameterdarstellung behandeln. Die übliche Funktionsdarstellung ist dem gegenüber deutlich komplizierter und wäre in der Sekundarstufe I kaum durchführbar.

Didaktisch-methodische Voraussetzungen und Einordnung

Leitidee	Klassenstufe	Unterrichtsform	Medien	Unterrichtliche Voraussetzungen
Funktionaler Zusammenhang	ab Klasse 9	Gruppenarbeit (auch Experten-runde), offen oder geführt	DGS und/oder CAS	Geraden in Parameterform, LGS, quadratische Funktionen

Überblick über den Unterrichtsverlauf

Stunde	Inhalt	Medien	Unterrichtsform
1./2.	Wiederholung: Geraden in Parameterform	DGS und/oder CAS	UG und Gruppenarbeit
3./4.	„Versorgungsflug“ Komplexe Einstiegsaufgabe zur Parameterdarstellung von Parabeln	ggf. CAS	UG
5.	Übungsaufgaben zur Ergebnissicherung		UG, Gruppenarbeit, Hausaufgabe
6./7.	Erweiterung „schiefer Wurf“	DGS und/oder CAS	UG, Gruppenarbeit
8./9.	Ergebnissicherung an Hand komplexer Aufgaben	DGS und/oder CAS, Poster	Expertenrunde

Detaillierte Darstellung einzelner Stunden

A „Versorgungsflug“ - Komplexe Einstiegsaufgabe zur Parameterdarstellung von Parabeln

Aufgabe: Du bist bei der UNO als Chefmathematiker für den optimalen Einsatz von Hilfsflügen zuständig. Bei einer Überschwemmungskatastrophe haben sich die Opfer auf eine höher gelegene Insel retten können. Diese ist 50 km vom Start des Flugzeuges entfernt. Der Pilot fliegt in 80m Höhe mit einer Geschwindigkeit von 35m/s (126 km/h) direkt auf die Insel zu. Wann und in welcher horizontalen Entfernung von der Insel muss er die Kiste mit den Hilfsgütern abwerfen (ausklinken), damit sie bei den Hilfsbedürftigen landet?

Modellierungsannahmen:
- Der Luftwiderstand wird vernachlässigt.
- Weitere äußere Einflüsse werden nicht berücksichtigt (z.B. Wind, ...).

Im Unterrichtsgespräch wird geklärt, welche Faktoren die Flugbahn der Kiste beeinflussen:
a) Höhe des Flugzeuges
b) Geschwindigkeit des Flugzeuges in horizontaler Richtung (gleichförmige Bewegung)
c) Erdanziehungskraft (gleichmäßig beschleunigte Bewegung)

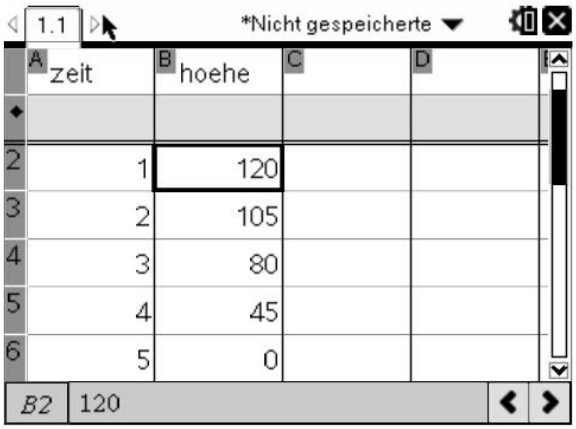
Folgende Antworten könnten im Ergebnis des Unterrichtsgespräches stehen:
a) vorgegeben
b) $Geschwindigkeit = \frac{Weg}{Zeit}; v = \frac{s}{t} \Leftrightarrow s = v \cdot t$
c) Der Einfluss der Erdanziehung wird anhand einer Wertetabelle zum senkrechten Fall untersucht:
Ein Körper wird von einem 125 m hohen Turm senkrecht fallen gelassen. Dabei ergeben sich folgende Messwerte:

 © T3-Arbeitskreis Parametric

Zeit t in s	0	1	2	3	4	5
Höhe y in m	125	120	105	80	45	0

Die Schüler sollen daraus den funktionalen Zusammenhang ermitteln. Je nach Medienkenntnissen und unterrichtlichen Voraussetzungen sind mehrere Lösungsmöglichkeiten denkbar:

Beispiel 1) Regression mithilfe eines CAS:



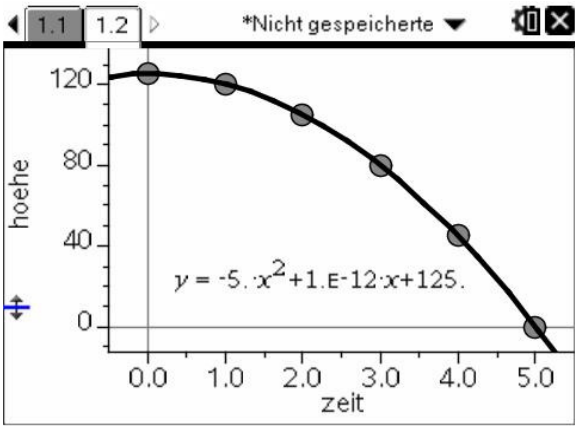


Abb. 8.1
Quadratische Regression mittels TI-Nspire™ CAS

Abb. 8.2

Beispiel 2) Manuelles Erstellen des Graphen und Ermittlung des Funktionsterms

Bei Verwendung des TI-Nspire™ CAS besteht die Möglichkeit den Graphen einer quadratischen Funktion durch Ziehen und Verschieben des Graphen einer anderen Funktion (z.B. $y= x^2$) manuell anzunähern, wenn die Punkte zuvor mit Hilfe des Streuplots gezeichnet wurden.

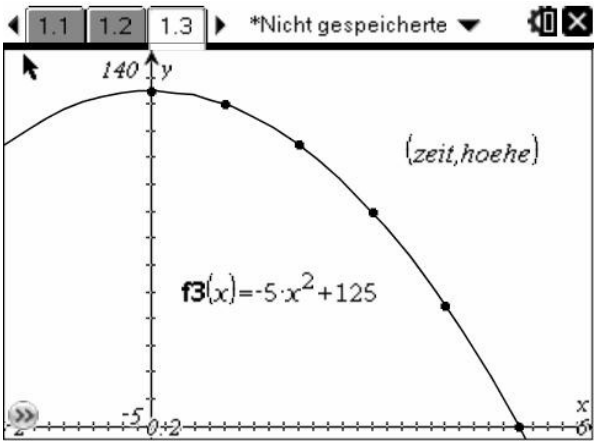


Abb. 8.3

Beispiel 3) Mit dem allgemeinen Ansatz $f(t) = a \cdot t^2 + b \cdot t + c$ erhält man die Werte a = -5, b = 0 und c = 125.

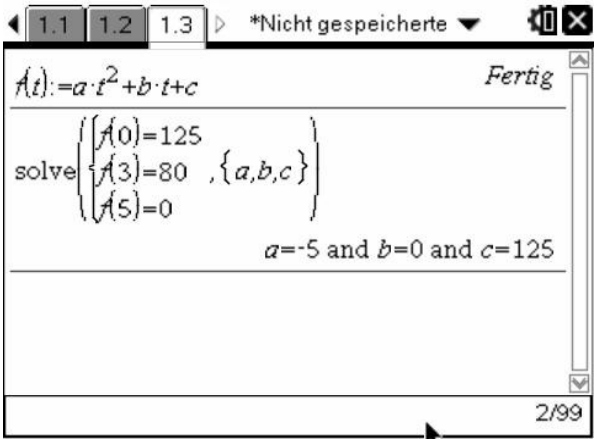
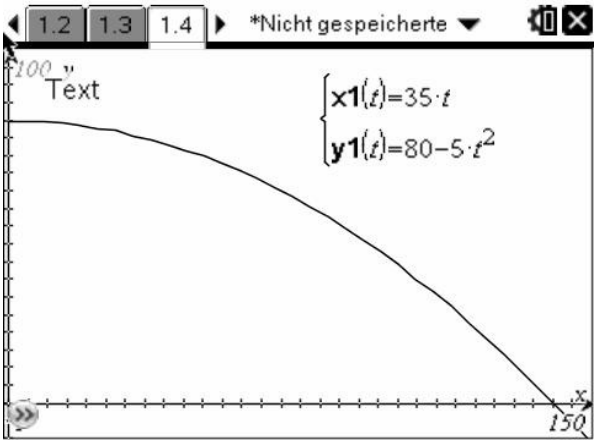


Abb. 8.4

Dieser Sachverhalt sollte im Folgenden verallgemeinert werden.
Allgemeines Fallgesetz: $y(t) = h - 5 \cdot t^2$ (h: Ausgangshöhe in m; t: Fallzeit in s; y(t): Höhe in m zur Zeit t).[2]

Jetzt kann wieder auf das Ausgangsproblem eingegangen werden. Die Schüler sollten zunächst skizzenhaft den Zusammenhang zwischen Höhe y(x) und horizontaler Entfernung von der Ausklinkstelle x darstellen. Der parabelförmige Verlauf sollte im Unterrichtsgespräch plausibel gemacht werden. Eine konkrete algebraische Bestätigung ist an dieser Stelle noch nicht möglich:



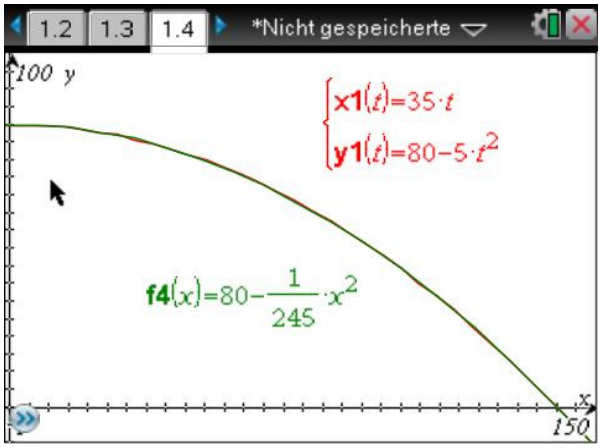


Abb. 8.5 Abb. 8.6
Skizze zur Abhängigkeit der Höhe y von der Entfernung x.

Die Parameterdarstellung kann jetzt unmittelbar aufgrund des Aufgabentextes bzw. der konkreten Anwendung des Fallgesetzes angegeben werden: $x(t) = 35 \cdot t;\ y(t) = 80 - 5 \cdot t^2$ Aus der Bedingung $y(t) = 0$ folgt, dass die Kiste nach 4 s auf dem Boden auftrifft. Die Entfernung von der Ausklinkstelle beträgt $x(4) = 140$ (in m). Abschließend sollte man durch Substitution des Parameters t den funktionalen Zusammenhang zwischen Höhe

[2] Der Faktor a = -5 ist ein gerundeter Wert für $-\frac{g}{2}$, wobei g das Symbol für die Fallbeschleunigung ist ($g = 9{,}81\frac{m}{s^2}$). Dieser Zusammenhang kann je nach Vorkenntnissen thematisiert werden.

y(x) und Entfernung x ermitteln: $y(x) = 80 - \frac{1}{245} \cdot x^2$. Damit ist auch der parabelförmige Verlauf des Graphen (s. Abb. 8.4) begründet.

B Übungsaufgaben zur Ergebnissicherung

Aufgaben findet man z. B. in Neue Wege 9, Ausgabe Berlin, Schroedel-Verlag 2008, S. 152 Nr. 8, S. 153 Nr. 10.

C Erweiterung „Schräger Wurf“

Aufgabe: Die Flugbahn einer Rakete soll durch Parametergleichungen (x(t); y(t)) modelliert werden. Die folgende Abbildung demonstriert den Verlauf des Fluges. Charakteristische Werte sind in der nebenstehenden Tabelle angegeben.

t	x	y
0	0	0
1	20	35
2	40	60
3	60	75
4	80	80
5	100	75
6	120	60
7	140	35
8	160	0

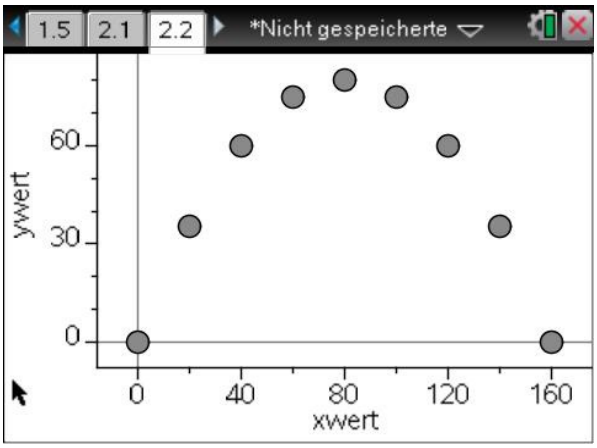


Abb. 8.7
Raketenflugbahn

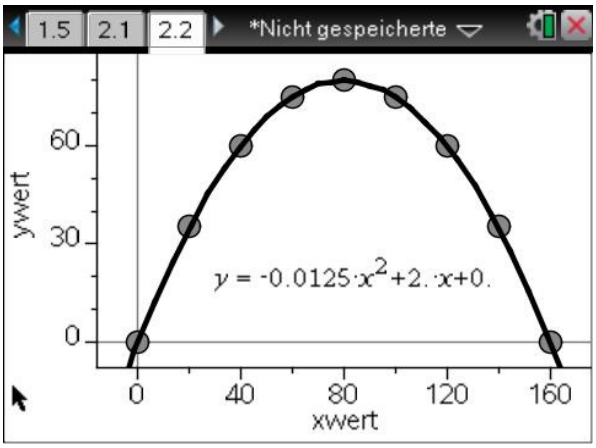


Abb. 8.8

Während der lineare Zusammenhang $x(t) = 20 \cdot t$ unmittelbar aus der Tabelle entnommen werden kann, ist der Zusammenhang zwischen y und t nicht offensichtlich. Eine graphische Darstellung von y in Abhängigkeit von t, lässt eine quadratische Abhängigkeit vermuten. In Analogie zur obigen Vorgehensweise erhält man $y(t) = 40 \cdot t - 5 \cdot t^2$. Dabei beschreibt der erste Summand die gleichförmige Bewegung in y-Richtung, während sich der zweite Summand aus dem Fallgesetz ergibt. Weitere mögliche Fragestellungen sind z. B.:

1. In welcher Entfernung vom Startpunkt erreicht die Rakete eine Höhe von 50 m?
2. Wie lautet der funktionale Zusammenhang in der Form y = f(x)?

Als Hausaufgabe eignet sich z.B. die Aufgabe 6 aus Neue Wege 9, Ausgabe Berlin, Schroedel-Verlag 2008, S. 151.

D Ergebnissicherung anhand komplexer Aufgaben (Expertenrunde)

Die folgenden drei Aufgaben (I, II, III) können in Form einer Expertenrunde behandelt werden. Die erste Aufgabe ist etwas ausführlicher dargestellt.

Nachfolgend die Aufgaben in der Formulierung für Schüler:

Bearbeite die Aufgabe in der Gruppe. Jeder Teilnehmer muss die Lösung so gut verstanden haben, dass er sie anderen Schülern erklären kann. Fertigt dazu ein Plakat (mindestens A3) an. Jeweils zwei Schüler sind am Ende der Gruppenarbeitsphase „Experten-Tandem“ für diese Aufgabe. Sie treffen sich danach mit den Experten-Tandems der anderen Aufgaben und jedes Tandem stellt den anderen „ihre Aufgabe“ und deren Lösung vor. Die anderen Schüler notieren sich dabei den Lösungsweg ausführlich.

I. Schiffskollision?

Die beide Schiffe BERTA und MARIA laufen von ihren Häfen zum selben Zeitpunkt zu einer Fahrt aus. Sie bewegen sich mit gleichmäßiger Geschwindigkeit. Das Schiff BERTA startet in (0|5) und das Schiff MARIA in (50|0). Das Schiff BERTA passiert nach einer halben Stunde die Tonne in der Position (5|9). Das Schiff MARIA erreicht nach $6\frac{1}{4}$ h sein Ziel in (0|50). Alle Angaben in km.

1. Stelle die Gleichungen der Geraden auf, die den Kurs der Schiffe beschreiben und stelle die Situation zeichnerisch in einem Koordinatensystem dar.
2. Berechne den Schnittpunkt der beiden Geraden.
3. Stelle die Geradengleichungen der beiden Schiffe in Parameterform dar (x(t); y(t)) und überprüfe anschließend, ob die beiden Schiffe zusammenstoßen.
4. Simuliere die Fahrt der Schiffe mithilfe der DGS „GeoGebra“ (Spurmodus verwenden.)
5. Wo befindet sich das Schiff MARIA $1\frac{1}{2}$ h vor dem Ziel?

II. Fallender Ball

Bei einem Experiment rollt eine Kugel eine Anlaufbahn hinab. Mit einer Anfangsgeschwindigkeit von $4\,\frac{m}{s}$ fliegt sie aus einer Höhe von 3 m waagerecht ab. Die Bewegung der Kugel soll im Folgenden unter der Annahme modelliert werden, dass der Luftwiderstand zu vernachlässigen ist.

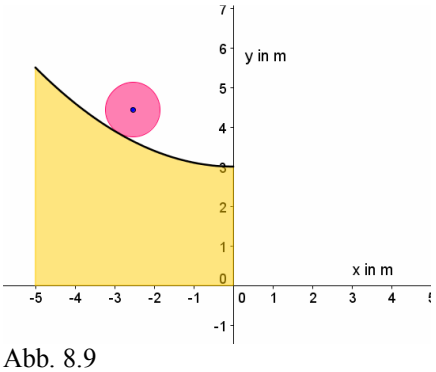


Abb. 8.9

Zur Erinnerung: Das Fallgesetz lautet: $y(t) = h - 5 \cdot t^2$

(y(t): Aktuelle Höhe zur Zeit t in m; h: Ausgangshöhe in m; t: Zeit in s)

a) Gib die Parametergleichungen (x(t); y(t)) an, die den Fall der Kugel simulieren.

b) Vervollständige die nebenstehende Wertetabelle zum Versuch.

t in s	x(t)	y(t)
0	0	3
0,1	0,4	2,95
usw.		

c) Wie lautet die Gleichung der Parabel in der üblichen Funktionsschreibweise y(x)?

d) Stelle den Flug des Balles in einem geeigneten Koordinatensystem graphisch dar.

© T3-Arbeitskreis Parametric

e) Wie weit in x-Richtung vom Abflugpunkt entfernt landet die Kugel auf dem Boden?

f) Simuliere den Flug des Balles mit einer DGS.

g) Beantworte die Frage d), wenn man den Abflugpunkt auf eine Höhe von 10 m (100 m) verlegt.
Woran liegt es, dass sich die Weite nicht verzehnfacht, obwohl man die Ausgangshöhe verzehnfacht?

III. Feuerwerksrakete

Der Flug einer Feuerwerksrakete soll durch Parametergleichungen (x(t); y(t)) modelliert werden. Dabei wird der Luftwiderstand vernachlässigt. Die folgende Wertetabelle veranschaulicht den Verlauf des Fluges.

t	x	y
0	0	0
0.5	2.5	8.75
1	5	15
1.5	7.5	18.75
2	10	20
2.5	12.5	18.75
3	15	15

a) Ermittle mit Hilfe der Wertetabelle die Parametergleichungen.

b) Stelle die Gleichung der Flugkurve in der üblichen Funktionsschreibweise y(x) dar. Veranschauliche den Flug der Rakete in einem geeigneten Koordinatensystem.

c) Wann landet die Rakete wieder auf dem Boden?

d) Simuliere den Flug der Rakete mithilfe einer DGS.

e) Wann erreicht die Rakete eine Höhe von 12 m? (zwei Lösungen)

9 - Vom Haus des Nikolaus und dessen Achsenspiegelung zur Parameterdarstellung von Kurven und deren Umkehrungen

1. Überblick über die Unterrichtsreihe mit Teilthemen, Zeiten und Kompetenzen

Als Inhalt der vorliegenden Unterrichtseinheit soll der Zusammenhang zwischen geometrischer und Termdarstellung von Geraden/Kurven am Beispiel der Spiegelung betrachtet werden.

Didaktisch-methodische Voraussetzungen und Einordnung

Leitidee	Klassenstufe	Unterrichtsform	Medien	Unterrichtliche Voraussetzungen
Verknüpfung funktionaler Zusammenhang mit Raum und Form	ab Klasse 8/9	diverse	CAS (TI-Nspire™CAS)	Koordinatensystem, Spiegelung von Punkten, Geraden in Parameterform (PD)

Überblick über den Unterrichtsverlauf

Stunde	Inhalt
1.	Wiederholung: Geraden in PD
2.	Spiegelung von Punkten an y=x
3.	Von Punkten zu Strecken und Geraden
4.	Umkehrfunktionen mit Hilfe der PD
5./6.	Übungen / Anwendungen

Verwendete Medien: TI-Nspire™CAS, überwiegende Unterrichtsform: Gruppenarbeit

2. Detaillierte Darstellung einzelner Stunden

Stunde 1: Wiederholung Geraden in PD

Hier kann das Beispiel „Schiffskollision“ (Beitrag 6 bzw. 7) Anwendung finden. Als bekannt wird dabei u.a. vorausgesetzt, dass sich herkömmliche Funktionen y = f (x) in der Parameterdarstellung (t, f(t)) schreiben lassen.

Beispiel: $y = x^2$ kann geschrieben werden als (t, t^2)

Stunde 2: Spiegelung von Punkten an der Geraden y = x

Aufgabe: a) Erstelle Abbildung 9.1 im Geometrie-Modus deines CAS-Rechners.

b) Spiegele das Haus vom Nikolaus an der Geraden g.

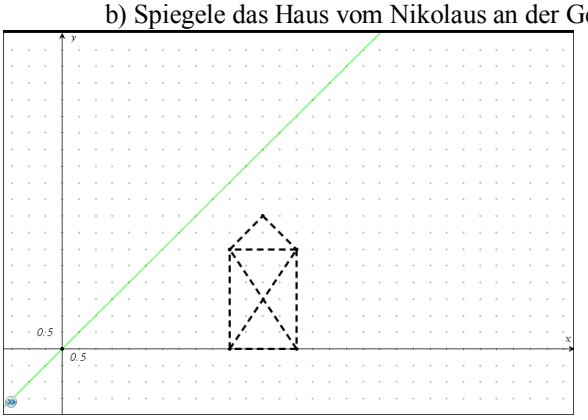


Abb. 9.1: Zu Aufgabe a)

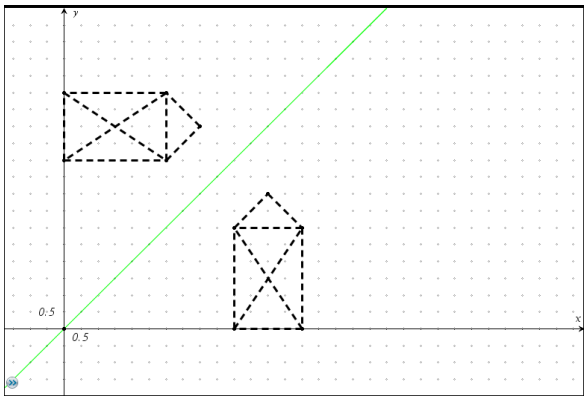


Abb. 9.2: Lösung zu Aufgabe b)

c) Ergänze die Tabelle:

Punkt	(5 | 0)				
Bildpunkt					

© T3-Arbeitskreis Parametric

d) Erläutere die Tabelle!

Stunde 3: Von Punkten zu Strecken und Geraden
Die Spiegelung einzelner Punkte ist im Allgemeinen recht mühsam. Daher bietet es sich an, zu Punktmengen in Form von Strecken bzw. Geraden, Parabeln usw. überzugehen.
Aufgabe: a) Zeichne die Gerade g1, auf der die Diagonale durch die Punkte $(5,0)$ und $(7,3)$ liegt und spiegele sie anschließend an der Achse g. Ergebnis sei g2.

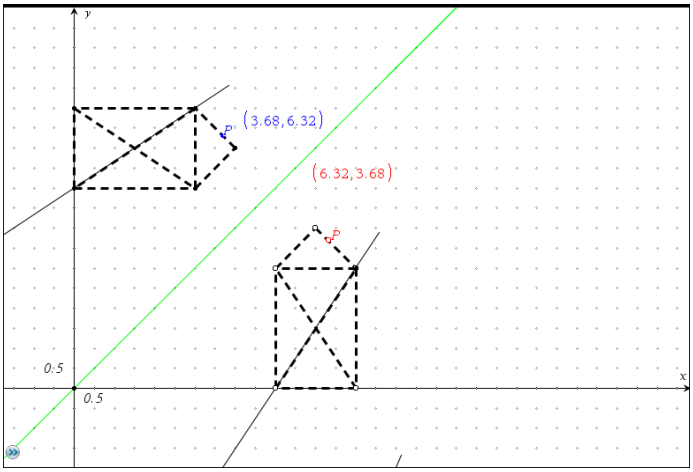


Abb. 9.3: Lösung zu a)

b) Stelle die Gleichung der Originalgeraden g1 in der Form y = mx + n auf!
c) Übertrage die Funktionsgleichung in die Parameterdarstellung!

Lösung: $\left(t, \frac{3}{2}t - \frac{15}{2}\right)$

d) Zeichne die Gerade unter Benutzung der Parameterform!
Um nicht nur eine Strecke zu produzieren, kommt es dabei auf die Wahl des Parameterbereichs an. Der TI-Nspire™CAS nutzt zunächst standardmäßig das Intervall [0; 2π].

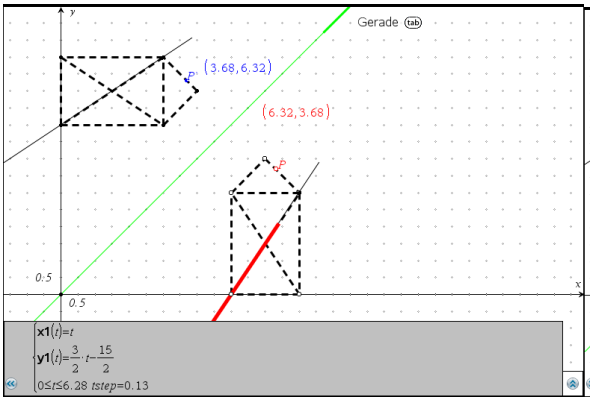


Abb. 9.4: Lösung zu d) hier noch als Strecke

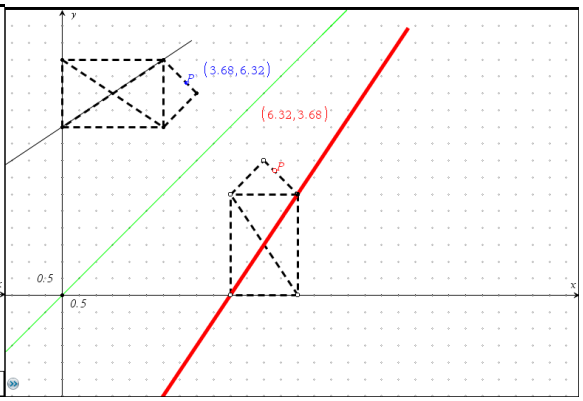


Abb. 9.5: Lösung zu d) als Gerade

Für den Schüler stellt sich die Frage nach dem Definitionsbereich, über dem der Geradenabschnitt gezeichnet werden soll, so dass er sich über den gesamten sichtbaren Teil des Koordinatensystems erstreckt (hier z.B. [0; 11]).

Hausaufgabe
Stelle die Gleichungen der anderen Strecken in Parameterdarstellung mit entsprechendem Definitionsbereich auf und zeichne das Haus vom Nikolaus erneut.

Lösungen:

x1(t)=t	y1(t)= $\frac{3}{2}t-\frac{15}{2}$	$5 \le t \le 7$
x2(t)=t	y2(t)= $-\frac{3}{2}t+\frac{21}{2}$	$5 \le t \le 7$
x3(t)=t	y3(t)= $t-2$	$5 \le t \le 6$
x4(t)=t	y4(t)= $-t+10$	$6 \le t \le 7$
x5(t)=t	y5(t)=3	$5 \le t \le 7$
x6(t)=t	y6(t)=0	$5 \le t \le 7$
x7(t)=5	y7(t)=t	$0 \le t \le 3$
x8(t)=7	y8(t)=t	$0 \le t \le 3$

Stunde 4: Umkehrfunktionen mit Hilfe der PD

Aufgabe a) Zeichne die Spiegelbilder der Strecken unter Benutzung der Umkehrung.
(Lösung: Vertauschung der Komponenten der PD: $\left(\frac{3}{2}t-\frac{15}{2}, t\right)$)

Hierbei stellt sich heraus, dass der für die Original-Strecke gefundene Parameterbereich auch für die Spiegel-Strecke verwendet werden kann.

Didaktische Gesichtspunkte
Vorteil der PD bei der Bildung von Umkehrfunktionen: Die Vertauschung der beiden Komponenten der parametrischen Darstellung $[x(t), y(t)]$ liefert sofort die Kurve der Umkehrung, jedoch zunächst einmal unabhängig davon, ob es sich hierbei noch um eine Funktion handelt.
Nachteil der PD bei der Bildung von Umkehrfunktionen:
Die Frage nach der Einschränkung des Definitionsbereiches, auf dem umgekehrt werden kann, stellt sich nicht.

Erweiterungen:
- Betrachtungen zu Definitions- und Wertebereich im Hinblick auf Funktionen und ihren Umkehrungen
- algebraische Bestimmung von Umkehrfunktionen mit und ohne Rechner
- Einsatz eines Schiebereglers zur Visualisierung des Parameterablaufs:

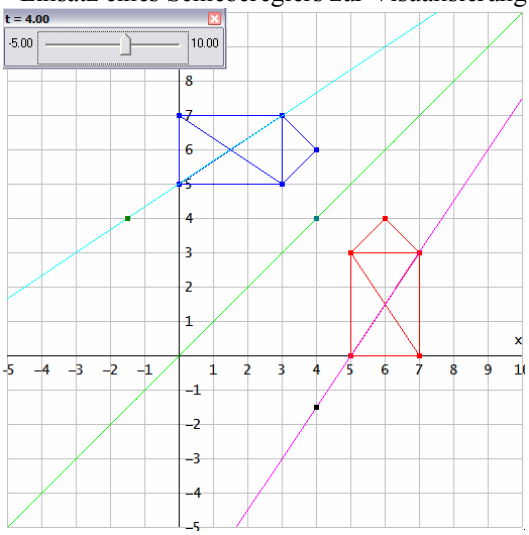


Abb. 9.6: Bearbeitung mit einem Schieberegler

Aufgabe: Das dreieckige Dach soll durch einen Parabelbogen ersetzt werden.

Lösung: Die Parabel geht also durch die Punkte (5,3), (6,4) und (7,3). Für die Ermittlung der Parabelgleichung gibt es mehrere Lösungsmöglichkeiten
1) Anwendung der quadratischen Regression
2) Lösung eines linearen Gleichungssystems mit 3 Unbekannten a, b, c
3) Modifizieren des Graphen von $y=-x^2$ durch die vorgegebenen Punkte durch Verschieben, Strecken bzw. Stauchen des Graphen durch manuelles „Anfassen“ mithilfe der Maus. Der Funktionsterm wird dann angegeben.
4) Wenn die oberen Wege in der Lerngruppe noch nicht möglich sind, kann der Parabelterm im Unterricht auch vorgegeben werden.

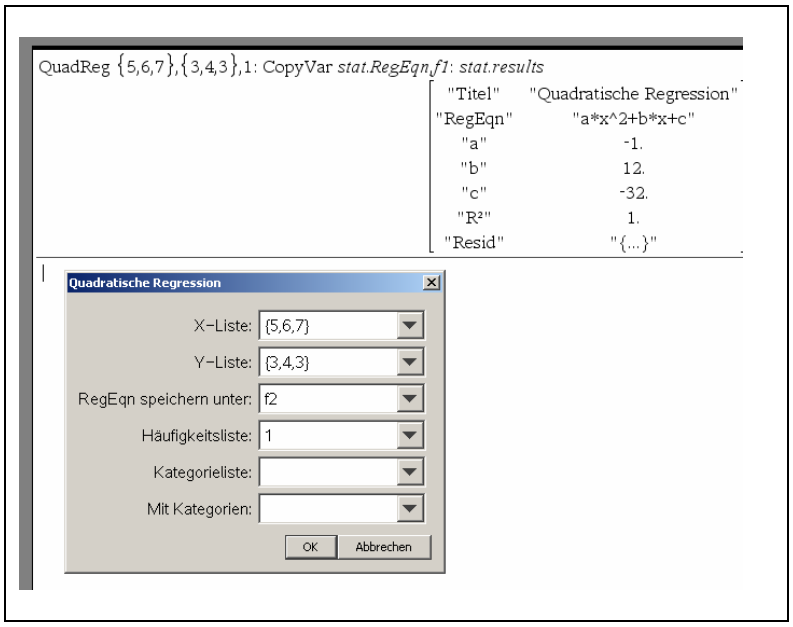
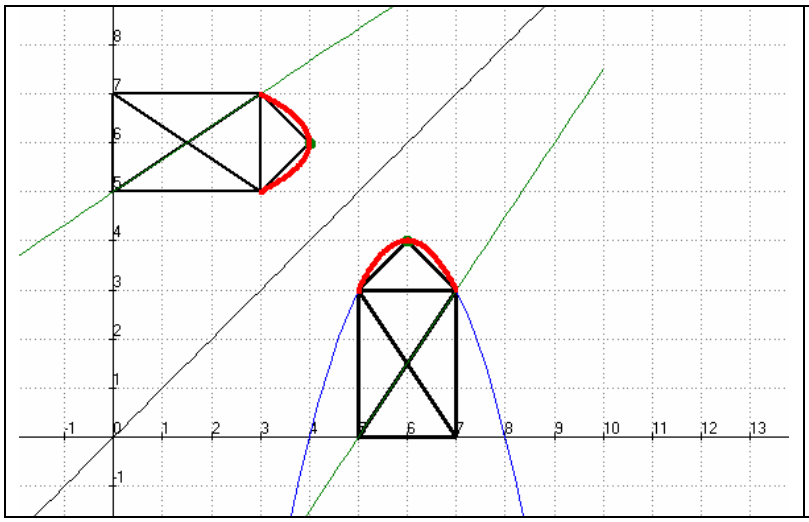


Abb. 9.7: Regression



Es ergibt sich also die Parabel $f(x) = -x^2 + 12x - 32$, die uns aber nur im x-Intervall [5,7] interessiert.
In Parameterdarstellung ist
$x(t) = t$,
$y(t) = -t^2+12t-32$
und als Umkehrung:
$x(t) = -t^2+12t-32$,
$y(t) = t$.

Abb. 9.8: Haus mit Parabeldach

Damit hat uns das Haus des Nikolaus über Punkte, Strecken, Geraden, Parabeln und ihren Umkehrungen zu Parameterdarstellungen geführt.

Stunde 5/6: Anwendungsaufgaben - Übungen

I) Geraden-Gleichungsformen

$f(x)=\frac{5}{3}x-7$ bzw. $\begin{cases} x(t)=3t \\ y(t)=5t-7 \end{cases}$

a) Stellen beide Darstellungen dieselbe Gerade dar?
b) Bestimme jeweils die Gleichung der Umkehrfunktion!

II) Üben: Umwandeln in Parameterdarstellung (PD)

Gegeben ist eine lineare Funktion durch die Gleichung $f(x)=-\frac{3}{4}x+3$!

a) Wie lautet dazu eine Gleichung in PD?
b) Bestimme jeweils die Gleichungen der Umkehrfunktionen!

III) Üben: Arbeiten mit Parameterdarstellungen

Gegeben sind folgende Gleichungen von Funktionen in den angegebenen Intervallen:

a) $x(t)=t$
$y(t)=3t-7$ $\quad -1\leq t\leq 10$

b) $x(t)=t$
$y(t)=t^2-4$ $\quad -1\leq t\leq 4$

c) $x(t)=t$
$y(t)=(t-2)^2+1$ $\quad 3\leq t\leq 8$

d) $f(x)=-2x^2+3x+4$ $\quad -3\leq x\leq 0$

Handelt es sich auf Grund des jeweils vorgegebenen Intervalls bei den Umkehrungen um eine Funktion oder nicht!

IV) Schienen modellieren

Bestimme in der folgenden Abbildung die Gleichungen der Geraden a und b (Schienen) als Funktionsgleichungen der Form f(x)=mx+n und in Parameterform! Welcher Zusammenhang besteht zwischen beiden?

© T3-Arbeitskreis Parametric

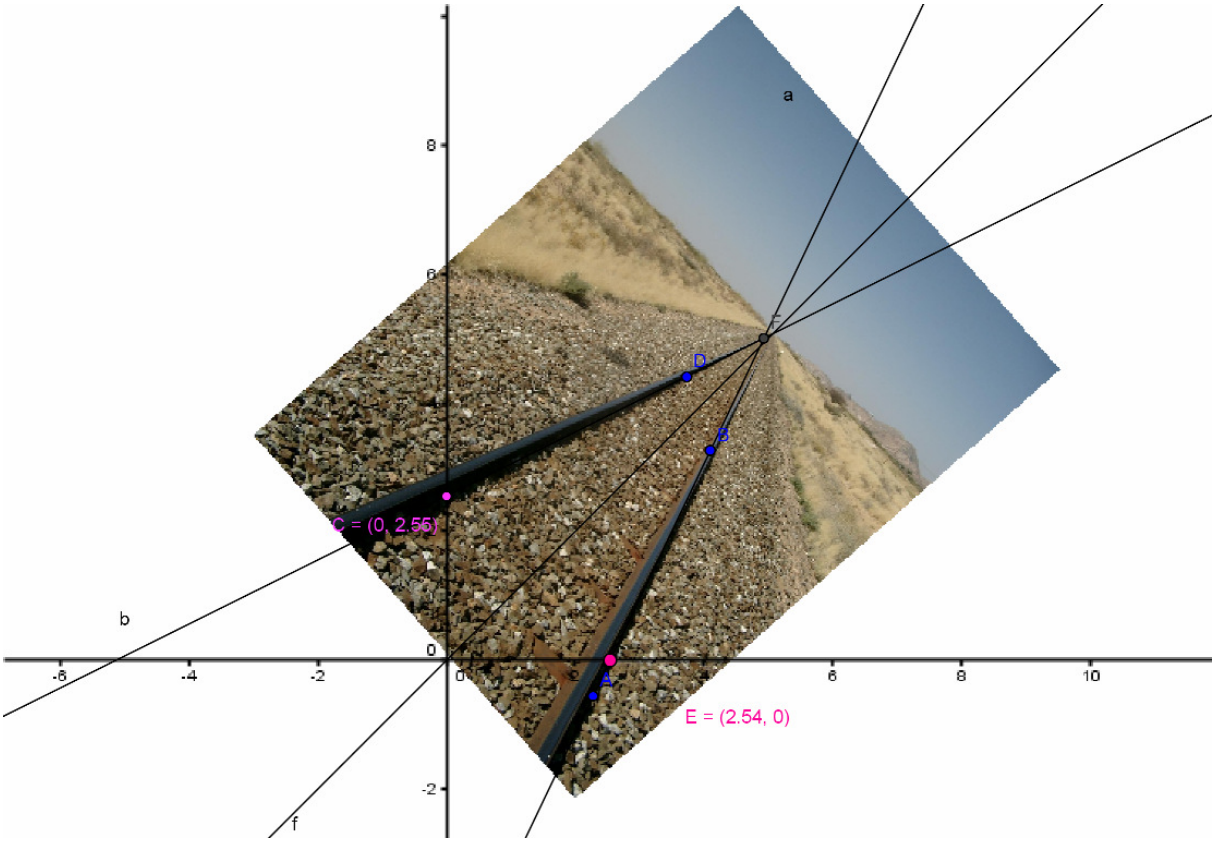


Abb. 9.9: Umweltsituation, Bahnstrecke in Namibia

Lösung: Gerade a: y=2.1x-5.3 Gerade b: y=0.5x+2.55

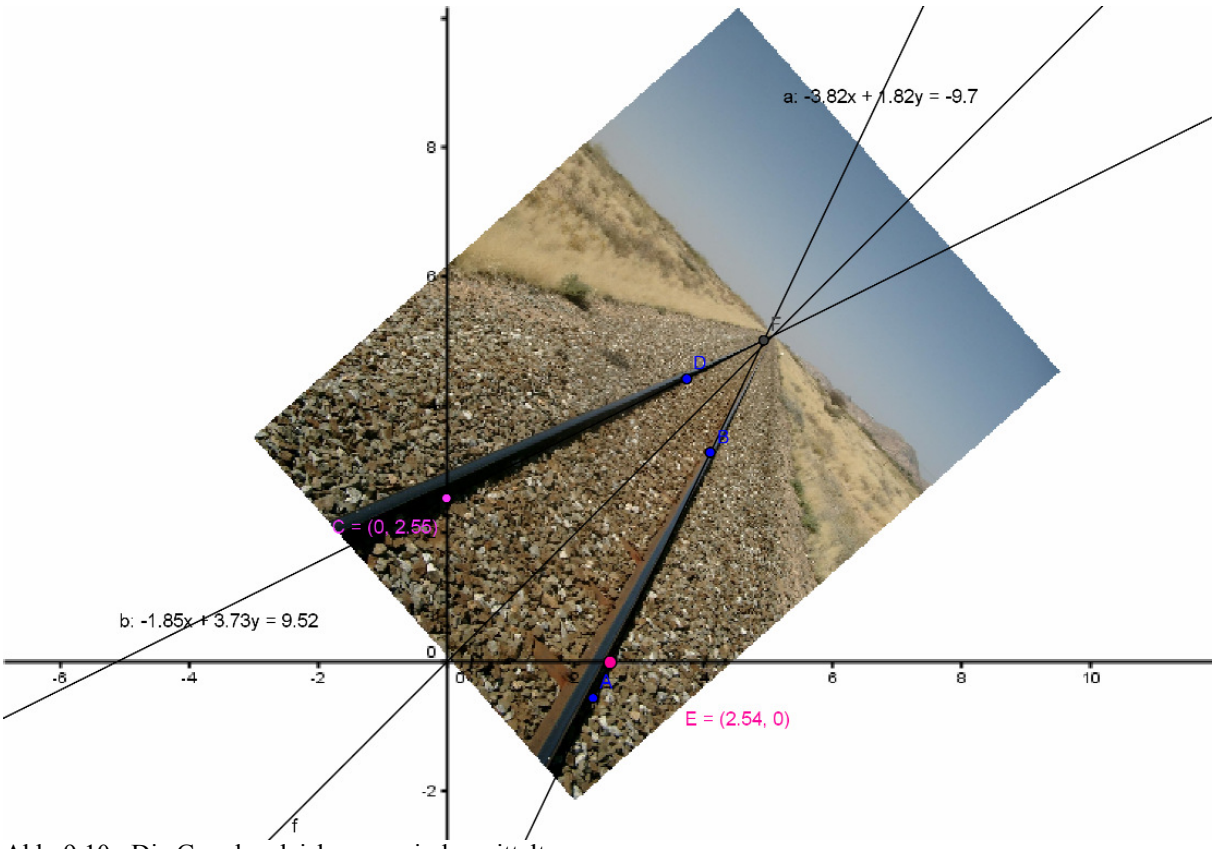


Abb. 9.10: Die Geradengleichungen sind ermittelt

V) Wasserfontänen modellieren

Auch bei dieser Aufgabe lassen sich die Unterschiede zwischen der üblichen Funktions- und der Parameterdarstellung überzeugend zeigen.

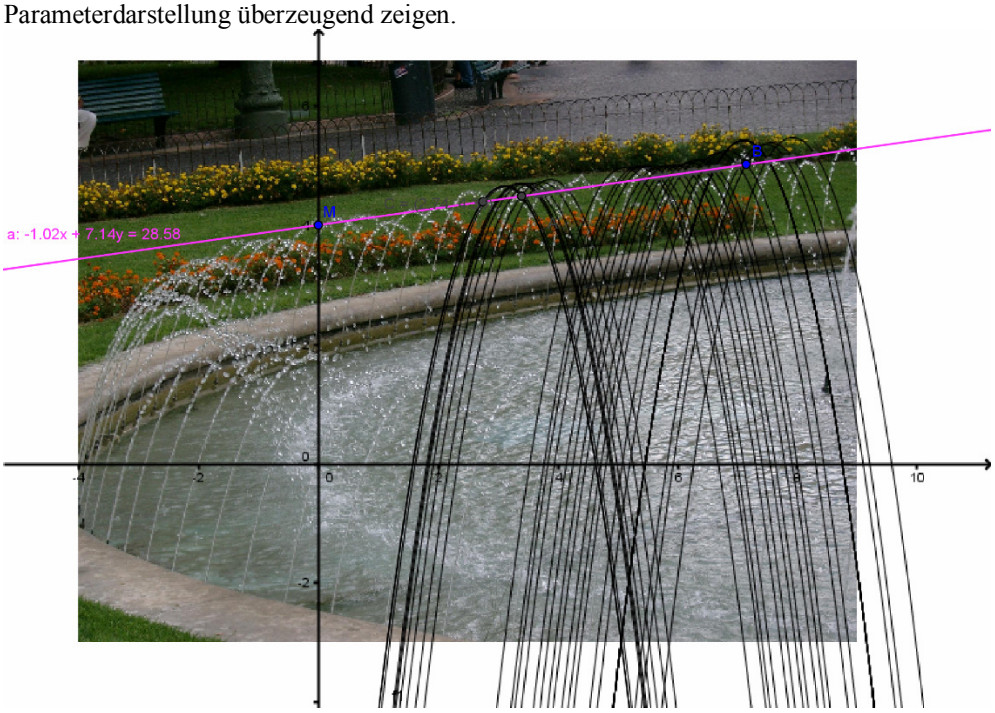


Abb. 9.11: Parabelscharen in der Umwelt

Die Wasserfontänen lassen sich als Schar von Parabeln darstellen, deren Scheitelpunkte auf einer Geraden (-1,02x+7.14y= 28.58) liegen. Abstrahiert ergibt sich mit dem Rechner Abbildung 9.12!
Zeichne die Parabeln mit Hilfe des Parametermodus deines Rechners und ergänze die Umkehrungen!
Wie muss der Definitionsbereich der Parabeln eingeschränkt werden, damit auch die Umkehrungen Funktionen sind!

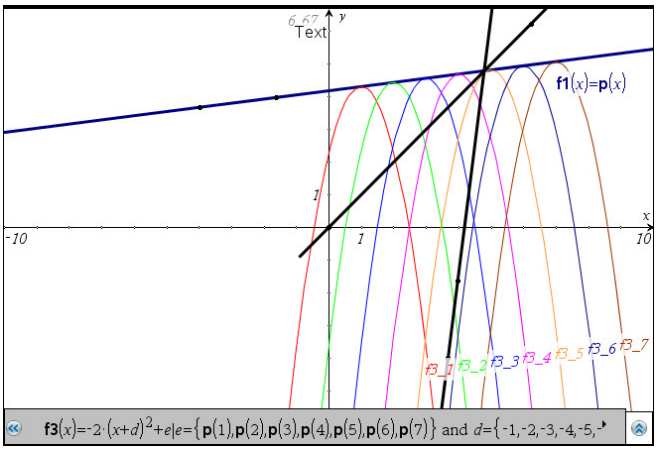


Abb. 9.12: Modellierung

© T3-Arbeitskreis Parametric

Lösung:

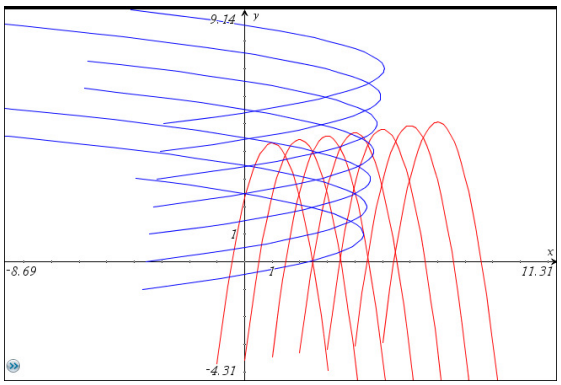


Abb. 9.13: Umkehrung von Parabeln

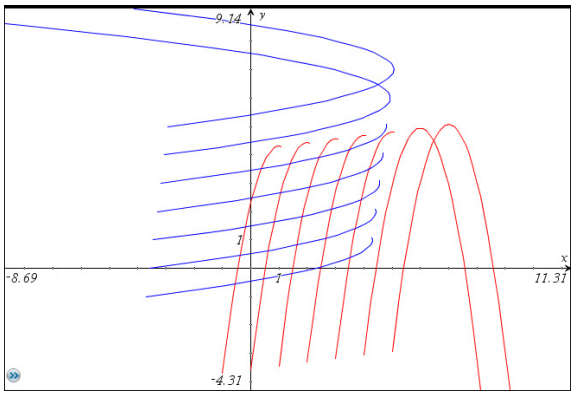


Abb. 9.14: Einschränkung von Definitionsbereichen

10 - Einführung der Parameterdarstellung des Kreises – Klasse 10

In wohl jeder Unterrichtssequenz zur Trigonometrie werden sin(t) und cos(t) als die beiden Katheten in einem rechtwinkligen Dreieck in Abhängigkeit des Winkels t im Einheitskreis definiert. (vgl. Abb.10.1). Dabei wird häufig die einfach nachzuvollziehende Tatsache verschwiegen, dass sich jeder Kreispunkt durch das Paar (x(t), y(t)) also (cos(t), sin(t)) , $t \in [0, 2\pi]$, beschreiben lässt. Der Kreis als solcher wird hier nicht weiter thematisiert. Hier gibt es jedoch einen elementaren Zugang zur Parameterdarstellung von Kreisen.

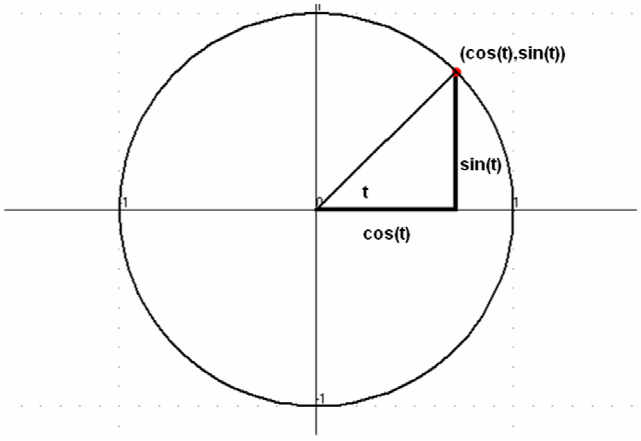
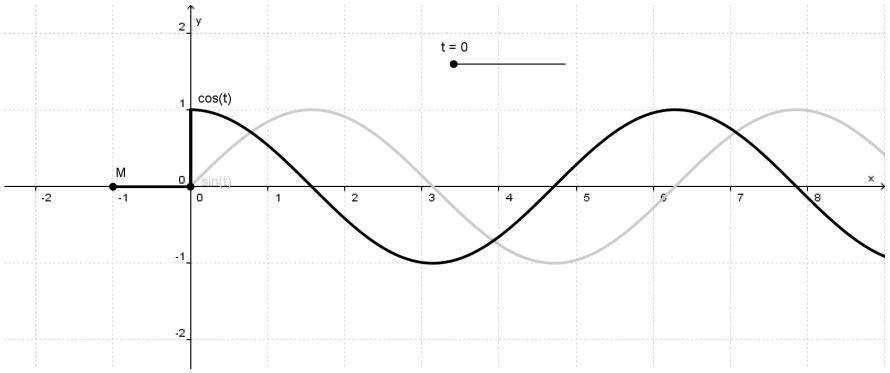


Abb. 10.1. [cos(t), sin(t)] mit $t \in [0, 2\pi]$ ergibt einen Kreis

Umgekehrt kann man aus der sin-Kurve x(t) = sin(t) und y(t) = cos(t) den Einheitskreis [cos(t),sin(t)] erzeugen (siehe Abb. 10.2 bis 10.4).



: Abb. 10.2: Dargestellt sind die Graphen der cos- und der sin-Funktion

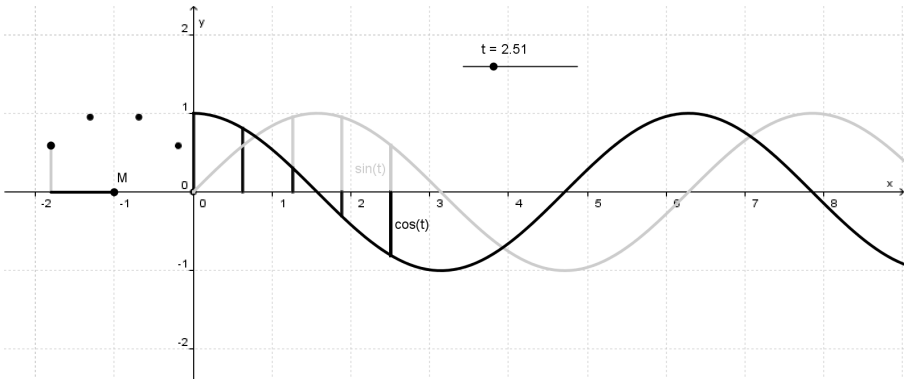


Abb. 10.3: Hier entsteht ein Kreis, erzeugt aus den Graphen der cos- und der sin-Funktion.

Die y-Werte beider Graphen werden durch Strecken hervorgehoben. Sie bilden die zukünftigen x- bzw. y-Werte der Punkte des Kreises:

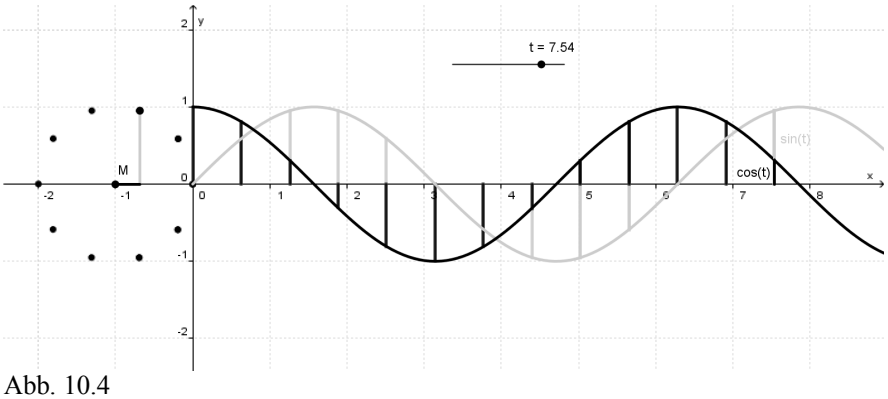


Abb. 10.4

Nach Durchlaufen des Parameters t des Intervalls [0;2π] ist der Kreis vollständig. Darüber hinaus wiederholen sich die Punkte. - Mit Kenntnis der Parameterdarstellung des Kreises eröffnet sich ein weites Feld von Experimenten und Aufgaben.

Aufgabe 1: Gegeben sind folgende Parameterdarstellungen:

(1)	$x(t) = \cos(t)$	$y(t) = \sin(t)$	mit $0 \le t \le 2\pi$
(2)	$x(t) = \cos(t) - 4$	$y(t) = \sin(t) + 2$	mit $0 \le t \le 2\pi$
(3)	$x(t) = 2\cdot\cos(t)$	$y(t) = 3\cdot\sin(t)$	mit $0 \le t \le 2\pi$
(4)	$x(t) = 0.1\cdot t\cdot\sin(t)$	$y(t) = 0.1\cdot t\cdot\cos(t)$	mit $0 \le t \le 100$

Weiterhin sind die folgenden graphischen Darstellungen 10.5 bis 10.8 gegeben:

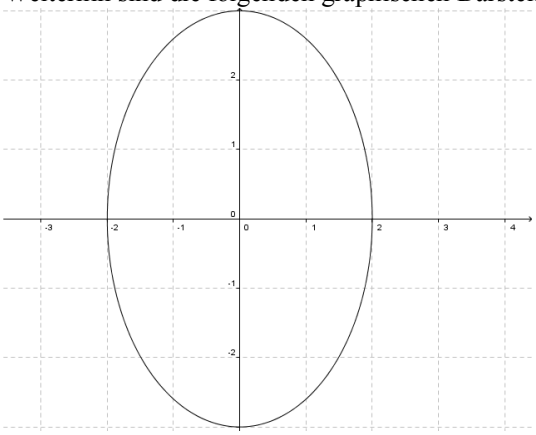


Abb. 10.5

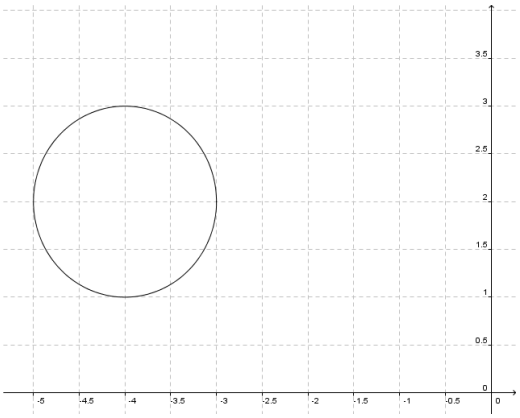


Abb. 10.6

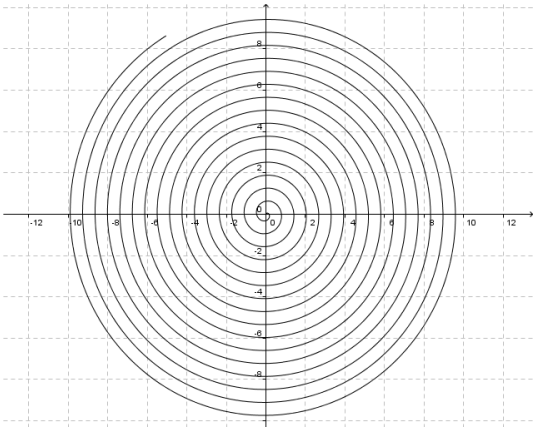


Abb. 10.7

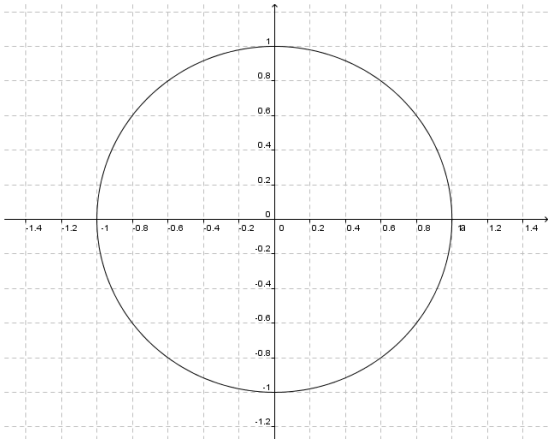


Abb. 10.8

Ordne die Parameterdarstellungen den entsprechenden Graphen zu. Überprüfe Deine Zuordnung mit einer geeigneten Software.

Aufgabe 2: Gegeben ist ein Bild (Abb. 10.9) mit vielen Kreisen und anderen Objekten in einem Torgitter. Benutze das Bild als Hintergrundbild und zeichne die vorhandenen Kreise mit deinem Programm nach. Nutze dazu Parameterdarstellungen.

Abb. 10.9

Hinweis: Um tatsächlich Kreise zu erhalten, müssen die beiden Koordinatenachsen im Verhältnis 1:1 skaliert sein.

Beim Einzeichnen der Kreise $[r \cdot \cos(t) + dx, r \cdot \sin(t) + dy]$ fällt auf, dass die Wahl des Radius r und der Verschiebung um dx bzw. dy zuweilen mühsam sein kann. Abhilfe schafft der Einsatz dreier Schieberegler, wie unten dargestellt wird. Probiere es selbst.

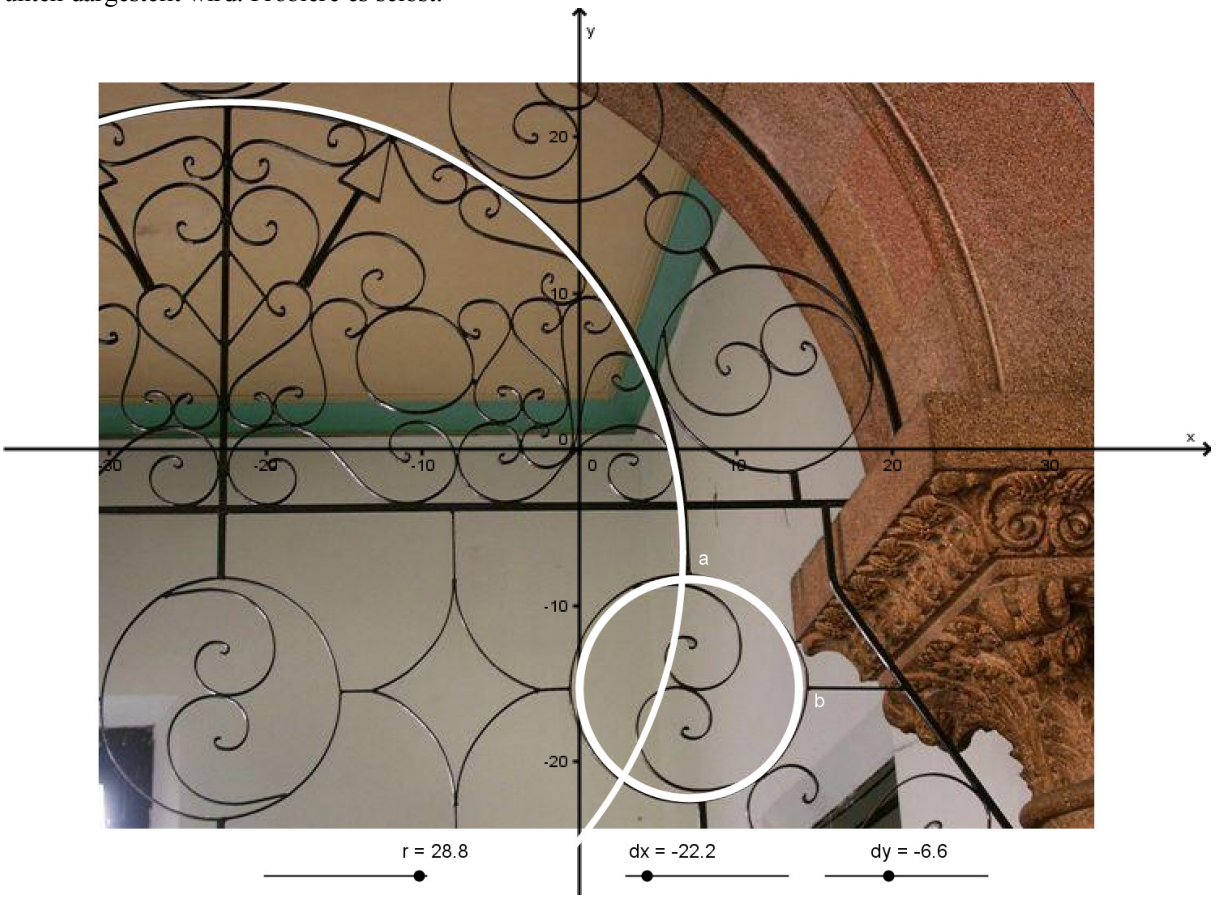


Abb. 10.10

© T3-Arbeitskreis Parametric

Aufgabe 3 (Wiederholung/Vertiefung): Man kann aus den trigonometrischen Funktionen x(t) = sin(t) und y(t) = cos(t) den Einheitskreis erzeugen.
a) Erläutere die Abbildungen 10.11 und 10.12. Beschrifte sie.
b) Vervollständige die Abbildungen durch weitere Konstruktionsschritte.

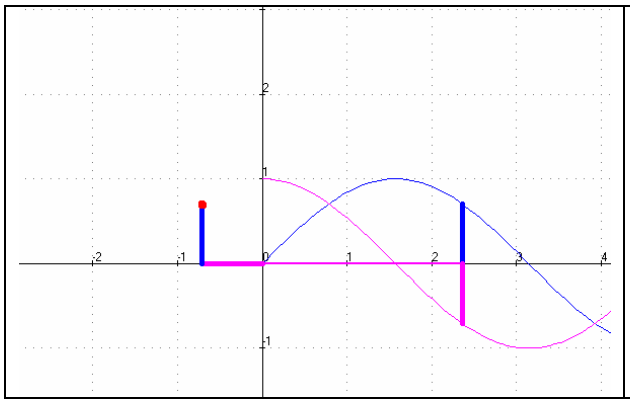


Abb. 10.11

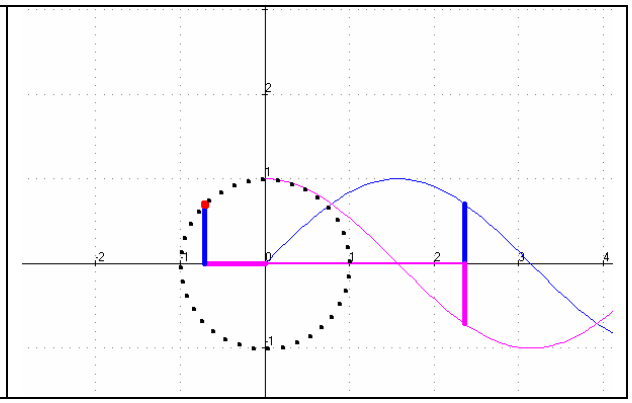


Abb. 10.12

Konstruktion der Graphen trigonometrischer Funktionen aus dem Einheitskreis Riesenrad - Klasse 10

Aufgabe 1: Erzeugung der Graphen der Sinus- bzw. Kosinusfunktion mit Hilfe von GeoGebra

Konstruktionsbeschreibung

1. Man zeichnet die Punkte A(0,0) und M(-1,0) und um M einen Kreis mit dem Radius 1.

2. Man fügt einen Schieberegler für den Winkel im Bogenmaß ein (t mit $0 \leq t \leq 3 \cdot \pi$).

3. Man dreht den Punkt A um den Punkt M mit dem Winkel t gegen den Uhrzeigersinn und erhält so den Bildpunkt A': `Drehe[A, t, M]`. Der entstehende Kreisbogen über A und A' entspricht dem Winkel t in Bogenmaß. Die x- und y-Koordinate von A' sind unterschiedlich gekennzeichnet.

4. Man gibt folgende Punkte in die Befehlszeile ein:

Variabler Punkt auf der x-Achse:	`D(t, 0),`
Variabler Punkt auf der Sinuskurve:	`S(t, y(A')),`
Variabler Punkt auf der Kosinuskurve:	`K(t, 1+x(A')).`

Die Ordinaten von S und K werden ebenfalls unterschiedlich gezeichnet.

5. Für die Punkte S und K wird der Spurmodus aktiviert. Die Graphen der Sinus- und Kosinusfunktion können jetzt durch Betätigen des Schiebereglers erzeugt werden.

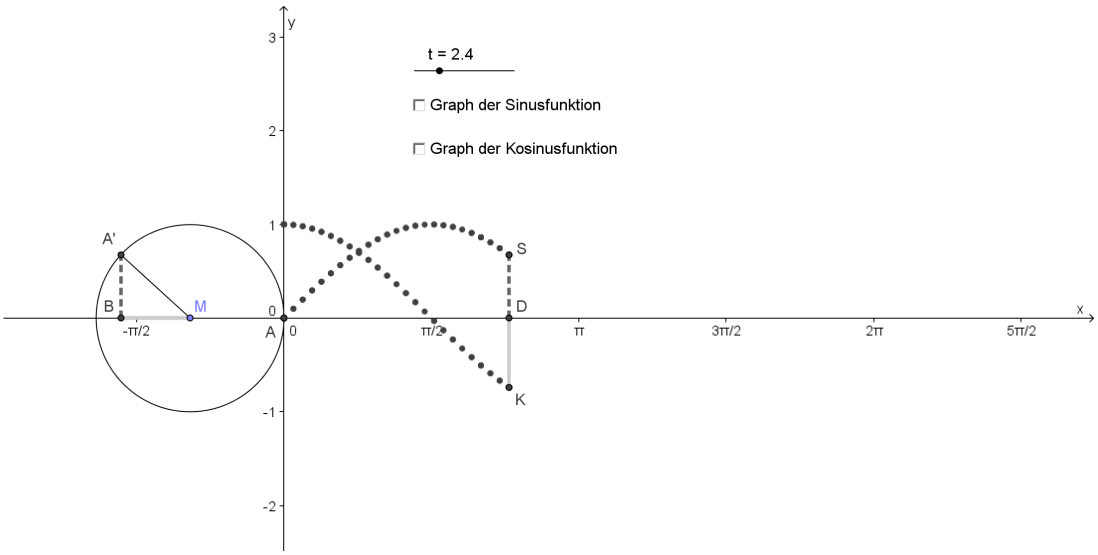


Abb. 11.1

© T3-Arbeitskreis Parametric

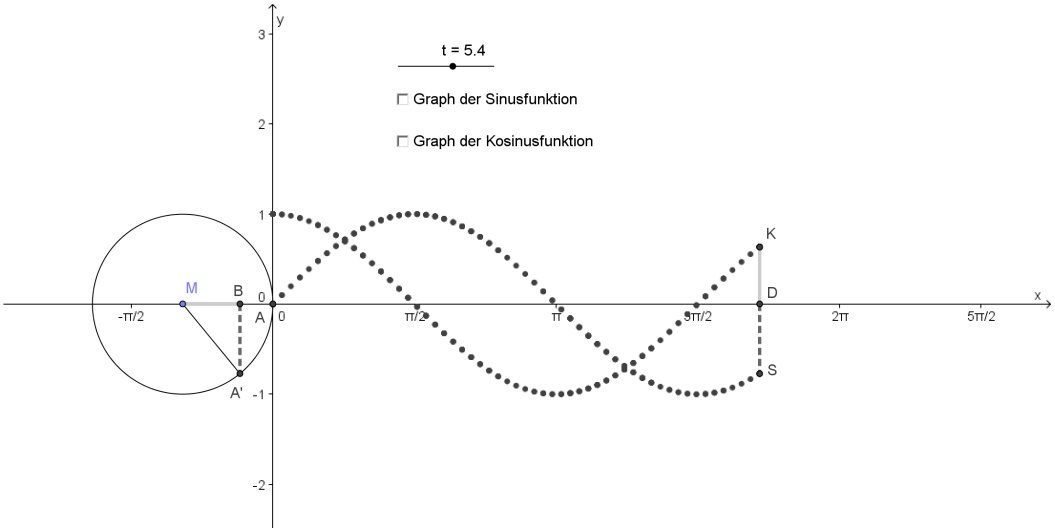


Abb. 11.2

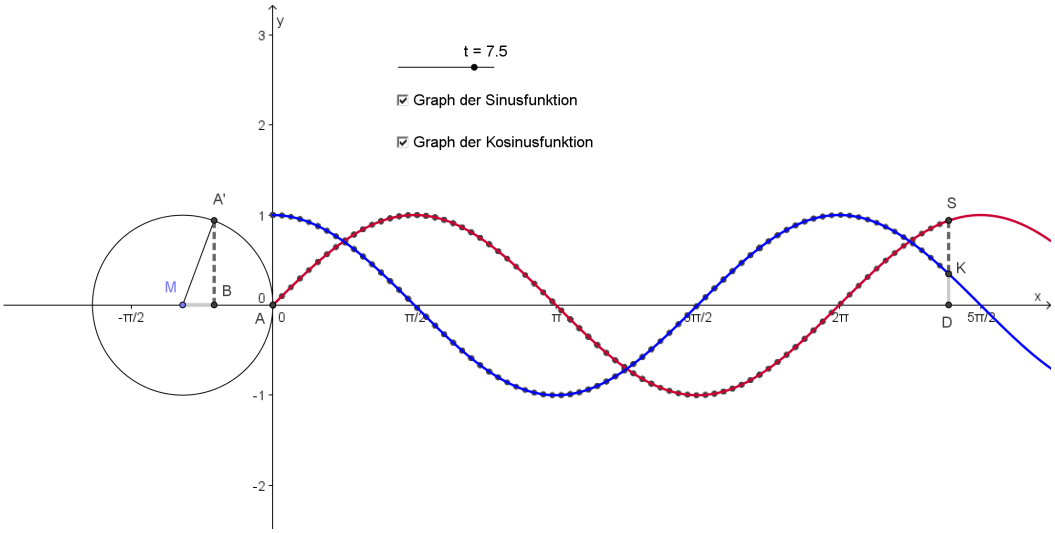


Abb. 11.3

Aufgabe 2: Riesenrad (Parameterform und Schieberegler)
Indirekt und eher unbewusst verwendet man die Parameterform bei der Anwendung von Schiebereglern in DGS-Programmen. Dies sei im Folgenden an dem bekannten „Riesenradbeispiel“ erläutert.
Ein Riesenrad drehe sich gleichmäßig derart, dass in 40 Minuten eine volle Umdrehung durchlaufen wird.
Wie kann man unter Verwendung eines DGS-Programmes mit Hilfe einer Animation den Graphen, der die Höhe der Gondel in Abhängigkeit von der Zeit beschreibt, konstruieren?

Die folgende Grafik zeigt dies unter Verwendung von GeoGebra:

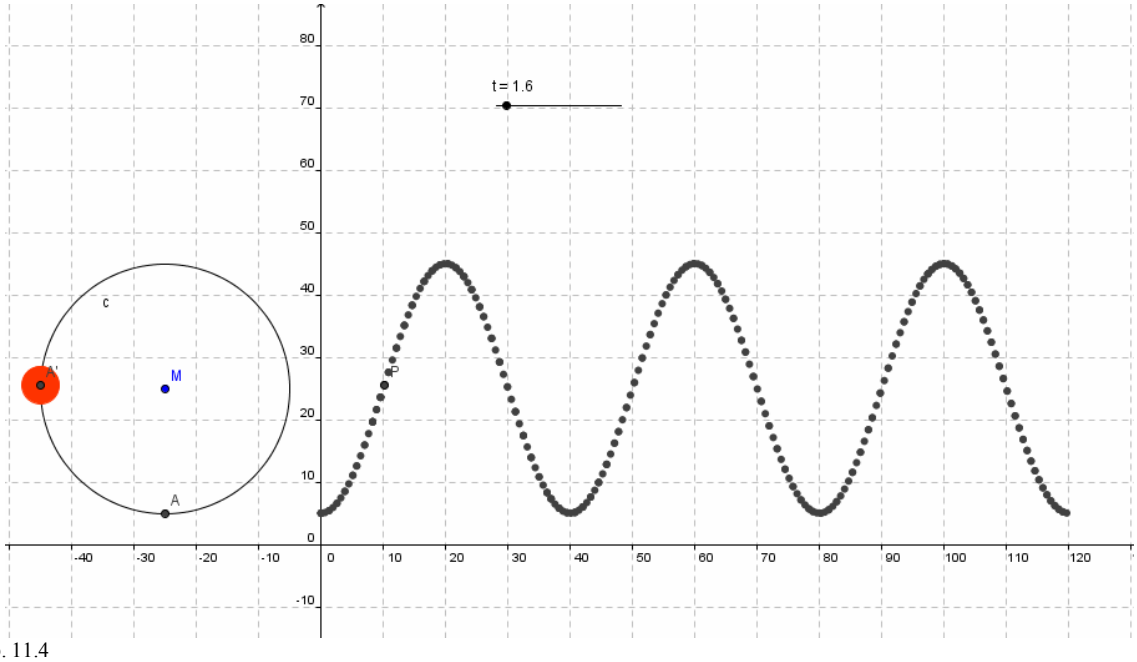


Abb. 11.4

Im Folgenden wird die Erstellung der GeoGebra-Grafik kurz erläutert.

1. Man zeichnet den Punkt M(-25; 25).
2. Man zeichnet um M einen Kreis mit dem Radius 20 LE und den Punkt A(-25; 5).
3. Es wird ein Schieberegler eingefügt für die Parameterwerte t: $0 \le t \le 6\pi$, um drei vollständige Umdrehungen darstellen zu können.
4. Mit Hilfe des Werkzeuges „Drehe Objekt …“ wird der Punkt A um M im Uhrzeigersinn mit dem Parameterwert t gedreht (Bildpunkt A‘ wird erzeugt).
5. Der Punkt auf dem gesuchten Graphen hat die Koordinaten $P\left(\frac{20 \cdot t}{\pi}; y(A')\right)$.

   Da eine vollständige Umdrehung 40 Minuten dauern soll, ist der Parameterwert durch 2π zu teilen und mit 40 zu multiplizieren.
6. Durch Aktivierung des Spurmodus wird die oben abgebildete Grafik erzeugt.

Hinweis: Die Grafik kann in leicht modifizierter Art und Weise auch mit dem TI-Nspire™CAS erstellt werden.

Wie sieht nun die theoretische Lösung für diese Fragestellung aus?
Im Folgenden skizzieren wir zwei Vorgehensweisen:

I. Klassische funktionale Darstellung der Form $f(x) = a \cdot \sin[b \cdot (x - c)] + d$.

II. Parameterdarstellung $(x(t); y(t))$.

Zu I. Experimentell kann der klassisch dargestellte Funktionsterm der Form

$f(x) = a \cdot \sin[b \cdot (x - c)] + d$ mit Hilfe von 4 Schiebereglern (teilweise näherungsweise) ermittelt werden.

© T3-Arbeitskreis Parametric

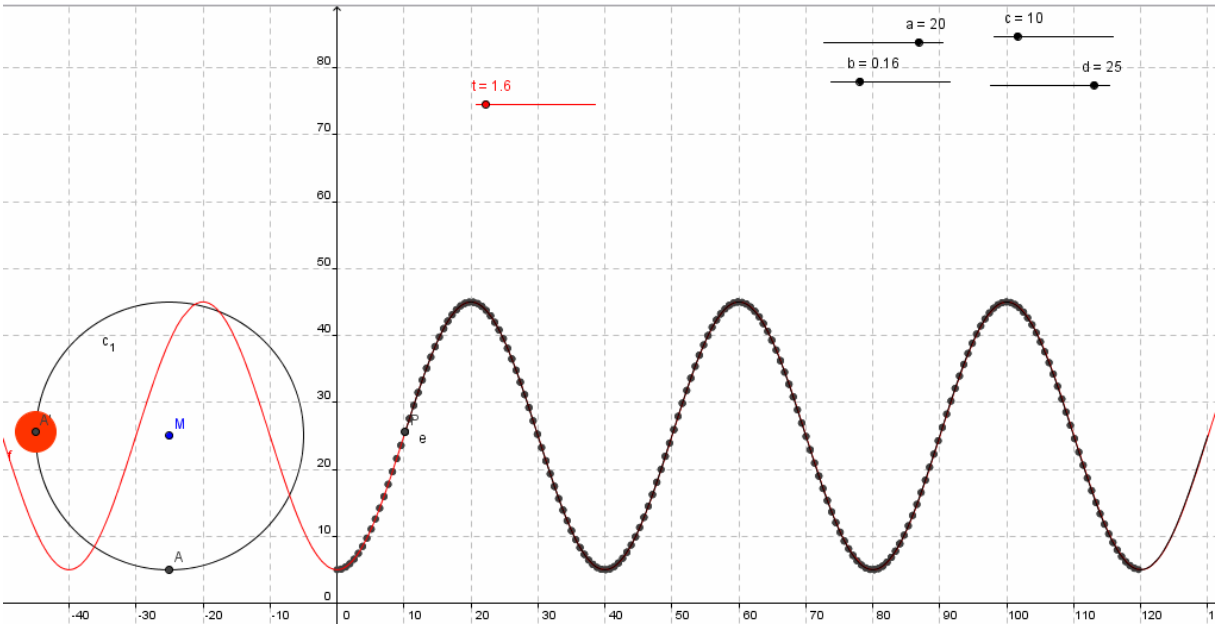


Abb. 11.5

Die Parameterwerte kann man sich anhand folgender Überlegungen verschaffen:

Der Amplitudenwert ist a = 20. Die Periode beträgt $b = \frac{\pi}{20}$. Die Verschiebung in Richtung der x-Achse beträgt c = 10; die Verschiebung in Richtung der y-Achse d = 25.

Zu II. Die Parameterdarstellung liegt nahezu auf der Hand $x(t) = \frac{20}{\pi} \cdot t + 10$; $y(t) = 20 \cdot \sin(t) + 25$.

Hier ist sicherlich die Streckung der x-Achse um den Faktor $\frac{20}{\pi}$ die Hauptschwierigkeit; dafür tritt die „Vorzeichenproblematik“ bei der Verschiebung nach rechts, die den Schülern erfahrungsgemäß bei der klassisch funktionalen Darstellung Schwierigkeiten bereitet, nicht auf.

In GeoGebra erzeugt man den Graphen mit Hilfe des Befehls Kurve[x(t),y(t),t,Startwert, Endwert].

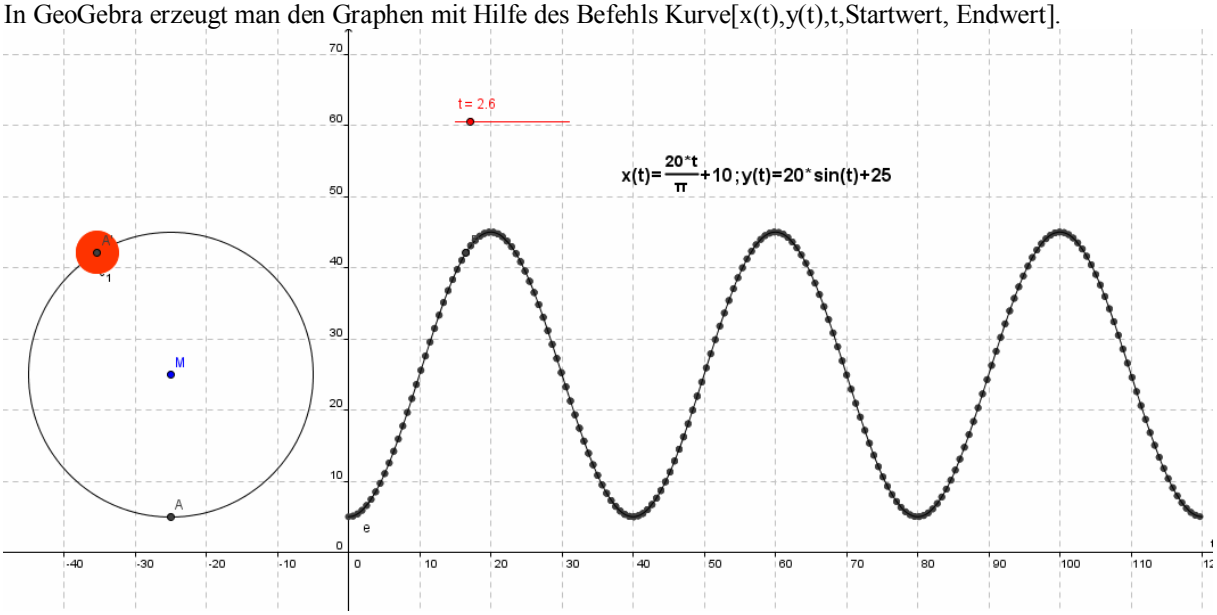


Abb. 11.6

Eine andere Animation wurde mit dem Programm ANIMATO erstellt. Hier wurde die Abbildung schrittweise aufgebaut.

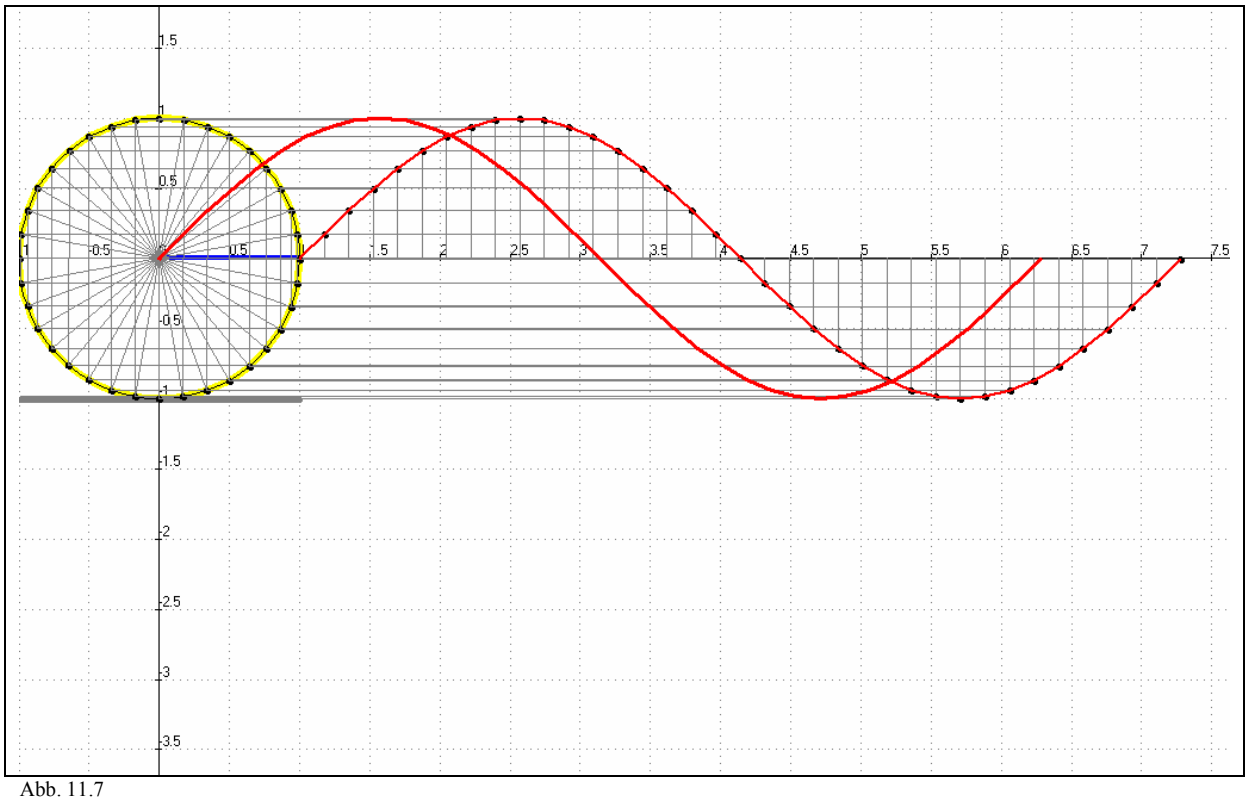


Abb. 11.7

ANIMATO-Datei zum Bild

f1 cos(t),sin(t) Einheitskreis, t in Bogenmaß
f2 0,0,cos(t),sin(t) Strecken von (0,0) zum Einheitskreis, Winkelschritte 0.5pi/5
f3 cos(t),0,cos(t),sin(t),t+1,sin(t) Strecken zwischen den Punkten (cos(t),0), (cos(t),sin(t)) und (t+1,sin(t))
f4 t+1,0,t+1,sin(t) Strecken von (t+1,0) zum Punkt (t+1,sin(t)). Die Sinuskurve entsteht.
f5 t+1,sin(t) Punkt auf der Sinuskurve (diese beginnt hier im Punkt (1,0))
f6 sin(t) Sinuskurve verschieben in normale Lage, beginnend in (0,0).
f7 0,0,1,0 Strecke nachzeichnen, da vorher teilweise überdeckt durch andere Konstruktionsschritte

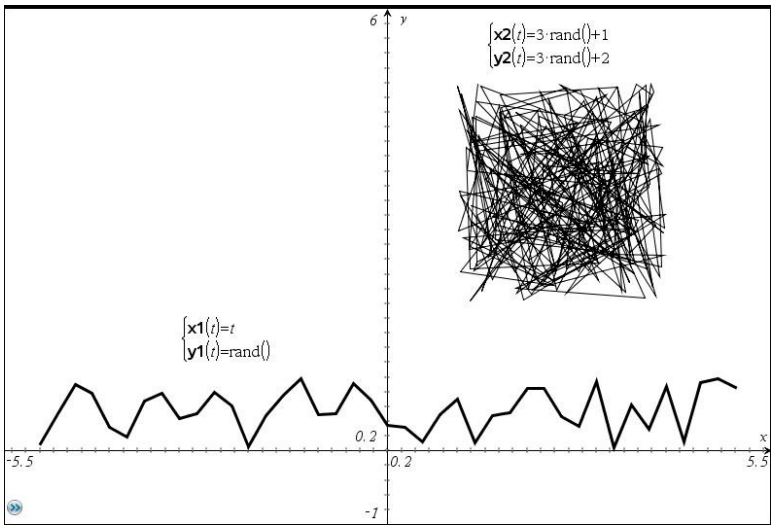
Abschließend wird das konstruierte Riesenrad noch auf ein Riesenrad-Foto gelegt.

Abb. 11.8

12 - Zufallspunkte und Parameterdarstellungen
Exkurs

Parameterdarstellungen sind auch an zunächst unerwarteten Stellen nützlich!
Bei der Simulation von Zufallsprozessen benutzt man häufig Zufallszahlen und Zufallspunkte. Man denke z.B. an die angenäherte Berechnung von Flächen mit Hilfe der Monte-Carlo-Methode. Für die Erzeugung von Zufallspunkten benötigt man **Paare von Zufallszahlen**, die dann je nach Aufgabenstellung in passende Bereiche transformiert werden.

Beispiel 1: Zufallspunkte



Darstellung mit dem TI-Nspire™CAS:
Unten
Parametrisches Zeichnen:
x(t)=t
y(t)=rand(); tstep = 1
Zufallspunkte mit Parameterdarstellung.
Oben
Zufallspunkte mit Parameterdarstellung:
x(t)=3*rand()+1
y(t)=3*rand()+2; tstep=0.13
Reihenfolge der Erzeugung der Punkte per Zufall (kreuz und quer). Die Abbildung erinnert an die Brownsche Molekularbewegung.

Abb.12.1: Zufallspunkte, Punkte verbunden

Beispiel 2: Zufallspunkte zur Simulation von Würfen mit zwei Würfeln.

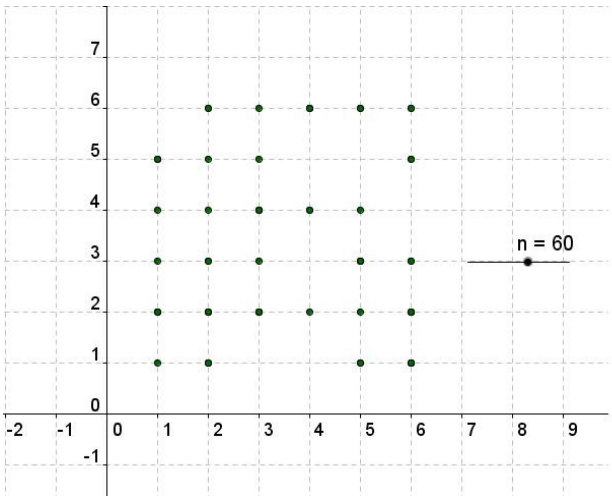


Abb.12.2

Hier erkennt man, dass nach 60 „Doppelwürfen“ von den 36 möglichen Würfelpaaren bisher 29 geworfen wurden, z.B. fehlt das Paar (3,1). Die nebenstehende Graphik wurde mit „GeoGebra“ erzeugt.Befehl:
Folge[(Zufallszahl[1,6],Zufallszahl[1,6]),k,1,n].
Die Zahl der „Doppelwürfe“ n wird mithilfe eines Schiebereglers variabel gestaltet. Dies ermöglicht einen experimentellen Zugang zum Problem der vollständigen Serie: Wie oft muss man 2 Würfel werfen, um alle möglichen Augenzahlkombinationen zu würfeln?

Durch Variation dieser Gleichungen lassen sich diverse Aufgaben lösen. Interessant ist beispielsweise, dass man auf diese Weise Flächenstücke auf dem Bildschirm ausfüllen kann. Man erzeugt viele Punkte in dem gewünschten Bereich, siehe Abbildung 12.3.

Beispiel 3: Rechteckflächen ausmalen

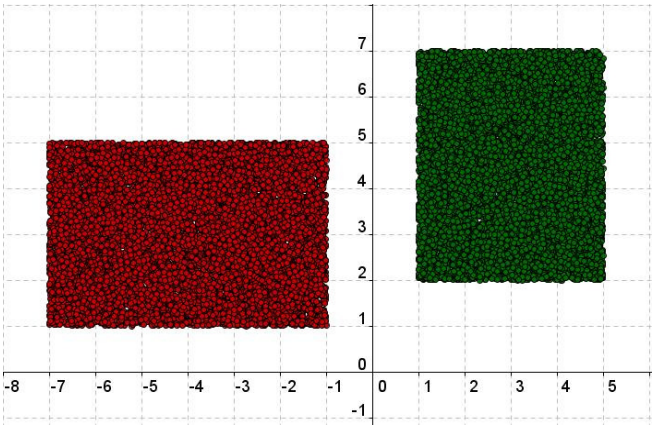


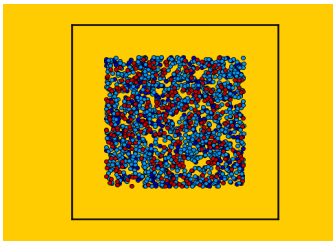
Abb. 12.3

Die nebenstehende Graphik wurde mit „GeoGebra“ erzeugt: Befehle:
Folge[(Zufallszahl[0,4000]/1000+1, Zufallszahl[0,5000]/1000+2),k,1,10000].
Folge[(Zufallszahl[0,6000]/1000-7, Zufallszahl[0,4000]/1000+1),k,1,10000].

Da „GeoGebra“ ganzzahlige Zufallszahlen erzeugt, wird in dem Bild rechts durch den Befehl Zufallszahl[0,4000]/1000 eine Zufallszahl aus dem Intervall [0;4] erzeugt.

Mit diesen Ansätzen kann man u. a. auch Kunstbilder, die aus solchen Punktemengen bestehen, modellieren. Das folgende Beispiel hat Bilder des französischen Konstruktivisten MORELLET zum Vorbild.

Beispiel 4: Ein Kunstbild - Zufallspunkte im Einheitsquadrat



Zunächst werden je 1000 Zufallspunkte in zwei Blautönen gezeichnet. Dann folgen 300 Zufallspunkte in rot. Das Bild wurde mit ANIMATO erzeugt.

Abb.12.4

Der Mathematiker denkt in diesem Zusammenhang an die Monte-Carlo-Methode zur angenäherten Bestimmung von Flächeninhalten.

Beispiel 5 - Mit Random in den Raum
Kleine Verschiebungen z.B. eines Rechtecks und passende Farbgebungen führen zu Bildern, die einen räumlichen Eindruck vermitteln.

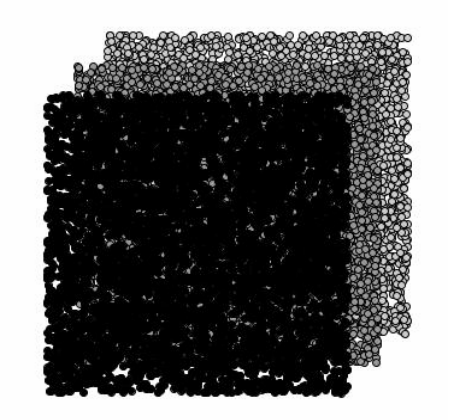


Abb.12.5: Rechtecke aus Zufallspunkten

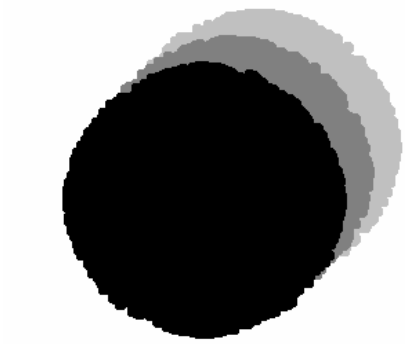


Abb.12.6: Verfremdung und räumliche Darstellung von Kreisscheiben

Der räumliche Eindruck entsteht durch die geringfügige Verschiebung der schwarzen Fläche und die unterschiedlichen Grautöne..

Beispiel 6: Zur eigenen Gestaltung
Kreispunkte, Parabelpunkte und andere Objektpunkte zufällig setzen!

Zusammenfassung
Die Erzeugung von Zufallspunkten kann mit Hilfe von Parameterdarstellungen [x(t), y(t)] erfolgen. Für t wählt man dazu die Anzahl der gewünschten Zufallspunkte. Damit kann die Simulation von Zufallsprozessen, die in etlichen Lehrplänen der Bundesländer und einigen Schulbüchern vorkommen, graphisch unterstützt werden.

13 - Mathematik im Stadtbild
Exkurs

Geht man mit offenen Augen durch die Stadt, so gibt es viele Möglichkeiten Mathematik zu entdecken. Sinus-Kurven lassen sich an Fledermausgauben auf Dachflächen finden, Kettenlinien und „ganzrationale“ Rutschen gibt es auf dem Spielplatz. Kuppeln als Paraboloid zieren öffentliche Gebäude, und dem Prinzip des Goldenen Schnitts gilt es an klassizistischen Bauten auf die Schliche zu kommen. Mit einem wachen Blick und einer Digitalkamera kann man die Architektur der Stadt in den Unterricht holen.

Abb.13.1

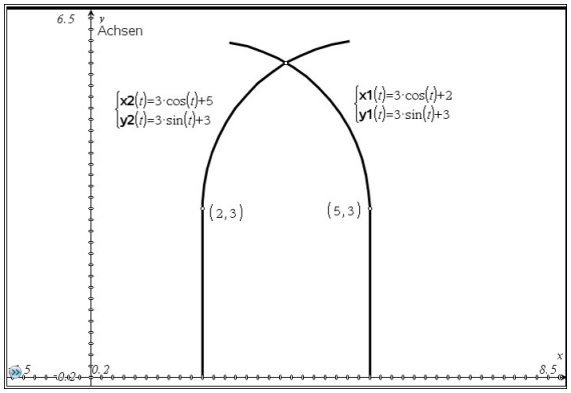


Abb.13.2

Hier ein Bild der Oberbaumbrücke in Berlin. Diese neugotische Brücke wurde Anfang des 20. Jahrhunderts eingeweiht. Der Architekt nimmt gotische Elemente in den Bau mit auf. Gotische Kreisbögen prägen die Brücke, sowohl im Brückengewölbe als auch im Geländer. In der klassischen Form liegen die Mittelpunkte eines Bogens auf dem Beginn des symmetrischen Bogens.

Hat der Baumeister sich an diese klassische Form gehalten?

Mit einer dynamischer Geometrie-Software können die Schüler das überprüfen. Man erkennt sehr gut, dass der Bogen im Gewölbe weniger spitz ist als bei der klassischen Vorgabe. Die beiden Mittelpunkte liegen im Inneren der beiden Bögen. Den Grund für die Abweichung wissen wir nicht, vielleicht liegt es an der Aufgabe dieser Brücke: Über den Bögen rumpelt noch heute die U-Bahn über die Spree.

Der Schmied des Geländers dagegen ist der klassischen Vorgabe gefolgt.

Abb.13.3

© T3-Arbeitskreis Parametric

Aufgabe 1 – Anwendung von Parameterdarstellungen beim Ausmalen eines Mosaiks:
Gegeben ist das historische Mosaik eines Fußbodens (in Paphos, Zypern), in dem diverse Flächen vorkommen. - Überzeichne einige Flächen mit Streckenscharen.

Abb. 13.4

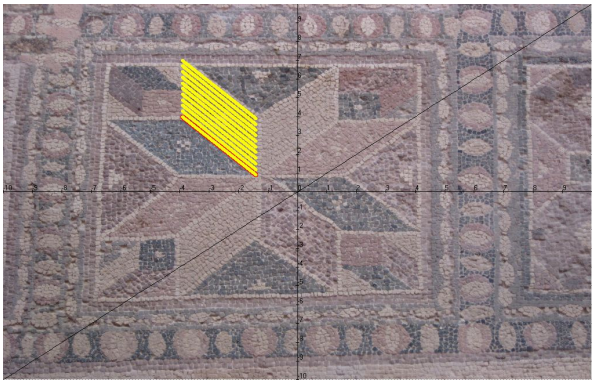


Abb. 13.5

Eine Lösung (Abb.13.4 – 13.6) wird hier mit dem Programm ANIMATO angegeben. Man kann entsprechend auch andere Programme benutzen, wenn man in diese auch Hintergrundbilder einbinden kann.

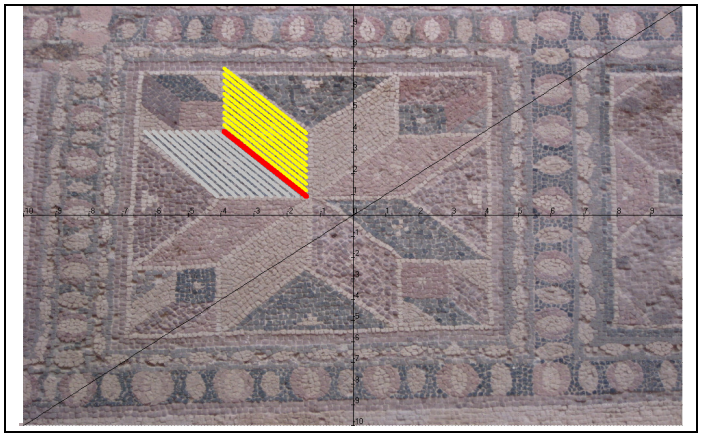


Abb. 13. 6

f1: x	Hilfslinie zur Orientierung auf dem Bild
f3: -1.4,0.9,-3.9,4	Strecke von (-1.4, 0.9) nach (-3.9, 4), der Cursor hilft beim Ablesen der Koordinaten
f4: -1.4,0.9+u,-3.9,4+u	die Strecken von (-1.4, 0.9+u) nach (-3.9, 4+u), **Parameterdarstellung**
f5: -1.4-0.9u,0.9,-3.9-0.8u,4	die Strecken von (-1.4 - 0.9u, 0.9) nach (-3.9 -0.8u, 4), Parameterdarstellung
f3 ist die Ausgangsstrecke, f4 überstreicht die obere Fläche, f5 die untere u läuft von 0 bis 3, 10 Strecken	

Aufgabe 2 – Blumenbaustein
Abb.13.7 gibt Anregungen zur Gestaltung von Blumenmustern. Diese Aufgabe ist für die Sekundarstufe I schon sehr anspruchsvoll. Auch für diese Problemstellung sind Parameterdarstellungen bestens geeignet (siehe Abb.13.8-13.10).

Abb. 13.7

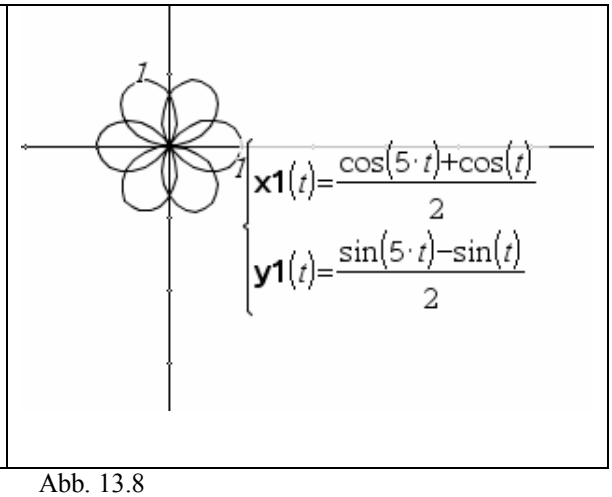


Abb. 13.8

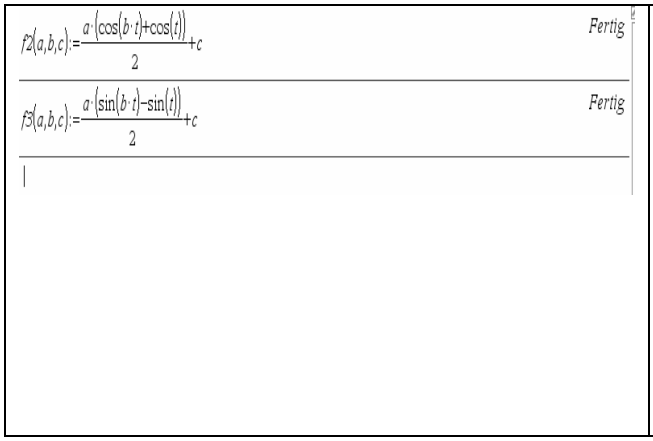


Abb. 13.9

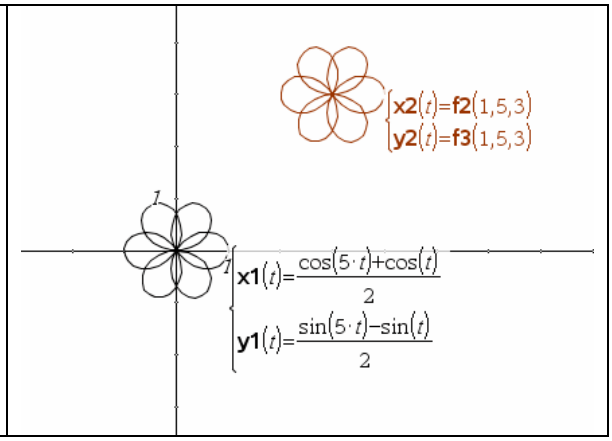


Abb. 13.10

Definition von „Blumenbausteinen“
Die Abbildungen 13.9 und 13.10 beinhalten einen besonderen Aspekt von CAS-Arbeit: **Die Definition eigener Bausteine (Module)** mit Parametern für eine umfassende Verwendung bei verschiedenen Problemstellungen. So werden in Abb.13.9 zwei Bausteine f2(a,b,c) und f3(a,b,c) mittels zweier Terme mit den Parametern t, a, b, c definiert. Mit diesen Bausteinen kann man nun diverse Bilder erzeugen, u.a. auch Blumen. So entsteht die Blume oben rechts in Abb.13.10, indem man für die Parameter a, b, c die Werte 1, 5, 3 einsetzt. Dabei läuft t von 0 bis 6.28. Das bedeutet für das Erzeugen der Blume mit dem Mittelpunkt (0,0):
x1(t) = (cos(5*t)+cos(t))/2 und y1(t) = (sin(5*t)-sin(t))/2.

Weiteres zur Bausteintechnik in der Sekundarstufe I siehe Homepage http://home.snafu.de/mirza,
mit diversen Mathematik-Beiträgen zu einem zeitgemäßen Mathematikunterricht bei veränderter Unterrichtskultur und Computereinsatz.

Literatur

Lehmann, E.: Nachhaltige Konzepte zum CAS-Einsatz im Mathematikunterricht, LehSoft, Berlin 2009

Lehmann, E.: Das Analytische Geometrie-Curriculum attraktiver machen, in DER MATHEMATIK-UNTERRICHT, Heft 3, Juni 2009, S.32-52

Schroedel, Neue Wege Bände 8-10

Steinberg, G., Ebenhöh,M.: Ausgewählte Aufgaben zur Analysis, Schroedel –Verlag, Hannover 1998

Lehmann, E.: Homepage **http://home.snafu.de/mirza**, diverse Beiträge zu Parameterdarstellungen in der Sekundarstufe 1

Naumann, Martin: Parametrisieren von Kurven im Geometrieunterricht der Schule - Eine stoffdidaktische Untersuchung. August 2008.

Literaturverzeichnis erstellt von
Dr. Gerhard König
Lauenburger Straße 45
76139 Karlsruhe